Università degli Studi di Genova

Dipartimento di Matematica

Corso di studi in

Matematica

Anno accademico 2023/2024

Tesi di Laurea Magistrale

Operatori massimali

Candidato
Lorenzo Luciano Morelato

Relatore

Prof. Andrea Bruno Carbonaro

Correlatore

Prof. Tommaso Bruno

Indice

Introduzione

Sia $\varphi \in (L^1 \cap L^\infty)(\mathbb{R}^d)$ una funzione non negativa, con supporto compatto e integrale pari a 1. Per ogni $t > 0$ poniamo

$$\varphi_t(x) = t^{-d}\varphi(x/t), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Definiamo l'operatore massimale associato all'identità approssimata $\{\varphi_t\}_{t>0}$ mediate la regola

$$M_\varphi u(x) = \sup_{t>0}(|u| * \varphi_t)(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \forall u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d),$$

dove '$*$' denota l'usuale prodotto di convoluzione in $\mathbb{R}^d$.

Un problema interessante, ampiamente studiato ma solo parzialmente compreso, consiste nell'analizzare le proprietà di limitatezza dell'operatore sublineare M_φ in diversi spazi funzionali, come gli spazi di Lebesgue, di Lorentz e di Sobolev.

Scegliendo φ come la funzione indicatrice della palla $B(0,1)$, di raggio unitario e centro 0 in $\mathbb{R}^d$ normalizzata in $L^1(\mathbb{R}^d)$, l'operatore massimale corrispondente coincide con l'operatore massimale centrato di Hardy-Littlewood:

$$M^C u(x) = \sup_{t>0} \fint_{B(x,t)} |u(y)|dy,$$

che, a meno di una costante dimensionale, è puntualmente confrontabile con l'operatore massimale non centrato di Hardy-Littlewood, definito dalla relazione:

$$Mu(x) = \sup_{x \in B} \fint_B |u(y)|dy.$$

Per un risultato classico, l'operatore M (e quindi anche M^C) è di tipo debole $(1,1)$, ovvero esiste una costante $C_1(d) > 0$ tale che

$$\sup_{\alpha>0} \alpha \mathscr{L}^d(\{Mu > \alpha\}) \leq C_1(d)\|u\|_1, \quad \forall u \in L^1(\mathbb{R}^d).$$

Interpolando questa stima mediante il metodo di interpolazione reale di Marcinkiewicz con l'ovvia stima contrattiva su $L^\infty(\mathbb{R}^d)$, si ottiene che sia M sia M^C sono limitati su $L^p(\mathbb{R}^d)$ per ogni $p \in (1,\infty]$, con una stima della norma che dipende dalla dimensione dello spazio euclideo.

Più recentemente, Kinnunen [8] ha studiato la limitatezza dell'operatore massimale centrato M^C sugli spazi di Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, dimostrando che

$$\|\nabla M^C u\|_p \leq C(p,d)\|\nabla u\|_p, \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d), \quad \forall 1 < p \leq \infty, \quad \forall d \geq 1. \tag{1}$$

Il risultato di Kinnunen si estende facilmente a tutti gli operatori sublineari limitati su $L^p(\mathbb{R}^d)$ che commutano con le traslazioni di $\mathbb{R}^d$ [9]. In particolare, la stima (1) si estende sia all'operatore massimale non centrato M sia agli operatori massimali in forma convolutiva:

$$\|\nabla Mu\|_p \leq C(p,d)\|\nabla u\|_p, \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d), \quad \forall 1 < p \leq \infty, \quad \forall d \geq 1. \tag{2}$$

$$\|\nabla M_\varphi u\|_p \leq C(p,d,\varphi)\|\nabla u\|_p, \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d), \quad \forall 1 < p \leq \infty, \quad \forall d \geq 1. \tag{3}$$

Sorgono spontanee le seguenti domande:

1. Le stime (1), (2) e (3) si estendono al caso $p = 1$?

2. È possibile dimostrare, almeno per alcuni convolutori φ, una stima contrattiva in (3)?

In questa tesi cerchiamo di rispondere parzialmente a queste domande, analizzando alcune situazioni particolari e studiando uno specifico esempio di operatore massimale in forma convolutiva. In primo luogo vengono introdotti gli operatori massimali di Hardy-Littlewood centrato e non centrato e vengono discusse le loro proprietà basilari. In seguito, si procede mostrando la limitatezza debole $(1,1)$ di tali operatori e la limitatezza forte dallo spazio $L^p(\mathbb{R}^d)$ in sé per ogni $p \in (1,\infty]$, come già accennato in precedenza. Una volta studiato il comportamento di M^C e M su spazi di Lebesgue, viene analizzato nel dettaglio l'articolo di J.Kinnunen [8], che dimostra la limitatezza di M^C su spazi di Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ per ogni $p \in (1,\infty]$. Procediamo quindi rispondendo parzialmente alla prima domanda e mostrando un'estensione di (1) per l'operatore massimale non centrato M nel caso unidimensionale. In particolare, si dimostra che

$$\|(Mu)'\|_1 \leq 2\,\|u'\|_1\,, \quad \forall u \in W^{1,1}(\mathbb{R}).$$

È naturale chidersi se tale stima possa essere migliorata ottendendo una costante migliore. A tal proposito, J.M. Aldaz e J. Pérez-Lázaro [1] hanno dimostrato che vale in realtà una disuguaglianza contrattiva. È inoltre naturale chiedersi se un risultato di questo tipo si possa estendere anche all'operatore massimale centrato M^C. Ciò risulta essere vero, come dimostrato da O. Kurka in [9].

La seconda parte della tesi è incentrata sullo studio di un particolare tipo di operatore massimale in forma convolutiva. Si considera il nucleo del calore $\{K_t\}_{t>0}$, dove per ogni $t > 0$ poniamo

$$K_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Definiamo poi l'operatore massimale del calore mediante la regola

$$M_h u(x) = \sup_{t>0}(|u| * K_t)(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \forall u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d). \tag{4}$$

Innanzitutto, mostriamo che M_h è puntualmente maggiorato da un multiplo dell'operatore massimale di Hardy-Littlewood centrato. Tale proprietà risulta essere valida per tutti gli operatori massimali in forma convolutiva M_φ costruiti a partire da un certo tipo di funzione φ. Tale risultato permette di dimostrare che M_h è un operatore di tipo debole $(1,1)$ ed è limitato da $L^p(\mathbb{R}^d)$ in sé per ogni $p \in (1,\infty]$. In seguito, mostriamo che è possibile adattare l'argomento di J. Kinnunen [8] per dimostrare la limitatezza di M_h tra spazi di Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ per ogni $p \in (1,\infty]$. Concludiamo la tesi rispondendo parzialmente alla seconda domanda. Viene analizzato l'articolo di E. Carneiro e B. F. Svaiter [4], in cui si dimostra che

$$\left\|(M_h u)'\right\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|u'\|_{L^p(\mathbb{R})}, \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}), \quad \forall p \in (1,\infty].$$

Si mostra inoltre che, nel caso multidimensionale,

$$\|\nabla M_h u\|_2 \leq \|\nabla u\|_2, \quad \forall u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^d),$$

$$\|\nabla M_h u\|_\infty \leq \|\nabla u\|_\infty, \quad \forall u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d).$$

Pertanto, otteniamo stime contrattive nel caso multidimensionale, soltanto per $p = 2$ e $p = \infty$.

Viene riportata di seguito una descrizione sintetica degli argomenti trattati nei singoli capitoli.

Il primo capitolo della tesi raccoglie i risultati preliminari necessari allo studio della materia trattata. Vengono dapprima introdotti gli spazi L^p deboli su uno spazio di misura positiva e σ-finita (X,μ). Dato $p \in [1,+\infty)$, ponendo

$$\|f\|_{p,\infty} = \left(\sup_{\lambda>0} \lambda^p \mu\left(\{x \in X \mid |f(x)| > \lambda\}\right)\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall f \in L^0(X,\mu),$$

definiamo lo spazio L^p debole

$$L^{p,\infty}(X,\mu) = \left\{f \in L^0(X,\mu) \mid \|f\|_{p,\infty} < +\infty\right\},$$

che risulta essere uno spazio quasi-normato se munito della quasi-norma $\| \ \|_{p,\infty}$. Si procede andando a studiare le prime proprietà di tali spazi e indagando sulla relazione che intercorre con gli spazi L^p. Per ragioni di completezza si procede poi studiando gli spazi di Lorentz $L^{p,q}$, con $p,q \in [1,+\infty)$. In seguito, vengono introdotti i concetti di operatore di tipo debole (p,q) e operatore di tipo forte (p,q) e si procede enunciando e dimostrando il Teorema di interpolazione di Marcinkiewicz. Tale risultato si rivelerà essere di fondamentale importanza nello sviluppo della tesi. Per quanto riguarda questi primi risultati preliminari si veda nel dettaglio [5]. Concludiamo questo capitolo introduttivo con alcuni cenni sull'integrazione di Lebesgue-Stiltjes, per cui si fa riferimento a [2].

Il secondo capitolo è incentrato sullo studio degli operatori massimali di Hardy-Littlewood centrato M^C e non centrato M. Dopo aver dato le prime definizioni e proprietà, si procede mostrando che, a meno di una costante dimensionale, M^C è puntualmente confrontabile con M. Notando che tali operatori sono banalmente limitati su $L^\infty(\mathbb{R}^d)$, si dimostra che essi sono inoltre di tipo debole $(1,1)$, deducendone poi la limitatezza dallo spazio $L^p(\mathbb{R}^d)$ in sé per ogni $p \in (1,\infty]$ grazie al

Teorema di Marcinkiewicz. Prima di enunciare questo risultato, viene data una versione finita del Lemma di ricoprimento di Vitali che verrà utilizzata nella dimostrazione del risultato principale. Per questa sezione si veda [6]. Si conclude il capitolo andando a studiare nel dettaglio l'articolo di J. Kinnunen [8] che, come già annunciato, fornisce un interessante risultato di limitatezza dell'operatore massimale di Hardy-Littlewood centrato su spazi di Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ per $p \in (1, \infty]$. Come già accennato in precedenza, il caso $p = 1$ risulta essere invece ben più problematico. Analizziamo nella tesi l'articolo [12] di H. Tanaka del 2002, in cui si dimostra che

$$\|(Mu)'\|_1 \leq 2\,\|u'\|_1\,, \quad \forall u \in W^{1,1}(\mathbb{R}).$$

Il terzo capitolo è dedicato allo studio dell'operatore massimale del calore. Vengono introdotti innanzitutto gli operatori massimali di tipo convolutivo associati ad un'identità approssimata $\{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$, dove φ ammette un maggiorante integrabile, radiale, non crescente, non negativo e continuo su $[0, +\infty)$ ad eccezione di un numero finito di punti. In particolare, si mostra che tali operatori massimali sono maggiorati puntualmente da un multiplo di M^C. Tale proprietà si rivela essere fondamentale nello studio delle proprietà dell'operatore massimale del calore su spazi di Lebesgue. Viene di seguito introdotto l'operatore massimale M_h definito in (4). Dopo aver studiato le proprietà principali di tale operatore, si procede dimostrandone la limitatezza debole $(1, 1)$ e la limitatezza come operatore dallo spazio $L^p(\mathbb{R}^d)$ in sé per ogni $p \in (1, \infty]$. Come già anticipato, per ottenere tale risultato ci si affiderà fortemente alla possibilità di maggiorare puntualmente l'operatore massimale del calore con un multiplo di M^C. Tale strategia permetterà di ottenere il risultato sperato, giungendo tuttavia ad una stima dipendente dalla dimensione d. In analogia con la struttura del capitolo precedente, si procede analizzando il comportamento di M_h su spazi di Sobolev. Innanzitutto, viene esteso il risultato di limitatezza tra spazi di Sobolev di J. Kinnunen [8], che si rivela essere valido anche per M_h. In seguito, viene studiato nel dettagli l'articolo di E. Carneiro e B. F. Svaiter [4] citato in precedenza. I risultati qui raccolti sembrano tuttavia essere noti nel caso unidimensionale per ogni $p \in (1, \infty]$ e nel caso multidimensionale soltanto per $p = 2$ e $p = \infty$. Si noti che tali proprietà rappresentano una novità rispetto al caso dell'operatore massimale di Hardy-Littlewood e la dimostrazione presentata non è adattabile al caso di tale operatore, in quanto sfrutta fortemente la struttura del nucleo del calore.

La tesi si conclude con due appendici riguardanti un'introduzione agli spazi di Sobolev e una rassegna di proprietà delle funzioni armoniche e di risultati riguardanti l'equazione del calore. Per quanto riguarda le appendici si vedano nel dettaglio [3], [7], [11].

Capitolo 1

Risultati preliminari

In questo primo capitolo raccogliamo una serie di nozioni e risultati preliminari, che saranno fondamentali nello sviluppo dell'argomento trattato nella tesi. Andremo innanzitutto ad introdurre il concetto di spazio L^p debole e di spazio di Lorentz e a studiarne alcune proprietà basilari. Nei risultati successivi incontreremo maggiormente spazi L^p deboli, in particolare lo spazio L^1 debole. Gli spazi di Lorentz vengono invece brevemente trattati per ragioni di completezza.

In seguito, andremo a studiare il concetto di operatore di tipo debole (p, q), con $p, q \in [1, \infty]$ ed il metodo di interpolazione. Il risultato centrale in questa sezione sarà il Teorema di interpolazione di Marcinkiewicz.

Per questo capitolo introduttivo, si è scelto di prendere come riferimento il testo [5].

1.1 Spazi L^p deboli e spazi di Lorentz

Sia (X, μ) uno spazio di misura positiva e σ-finita e sia $p \in [1, +\infty)$. Denotando con $L^0(X, \mu)$ lo spazio delle funzioni misurabili su X rispetto alla σ-algebra su cui è definita la misura μ, data $f \in L^0(X, \mu)$, poniamo

$$\|f\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)} = \left(\sup_{\lambda>0} \lambda^p \mu\left(\{x \in X \mid |f(x)| > \lambda\}\right)\right)^{\frac{1}{p}}$$

Consideriamo poi lo spazio

$$L^{p,\infty}(X, \mu) = \left\{f \in L^0(X, \mu) \mid \|f\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)} < +\infty\right\},$$

detto *spazio L^p debole.*

Si noti che la mappa

$$\|\ \|_{L^{p,\infty}(X,\mu)} \colon L^{p,\infty}(X, \mu) \to [0, +\infty)$$

definita dall'assegnazione precedente, è una quasi-norma su $L^{p,\infty}(X, \mu)$. Infatti, per ogni $f \in L^{p,\infty}(X, \mu)$, si ha che $\|f\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)} \geq 0$ in quanto estremo superiore di quantità non negative. Inoltre, se $f(x) = 0$ per q.o. $x \in X$, allora $\|f\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)} = 0$

per definizione di $\| \ \|_{L^{p,\infty}(X,\mu)}$. Viceversa, supponiamo che $\|f\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)} = 0$ per una certa $f \in L^{p,\infty}(X,\mu)$. Allora si ha che

$$\mu\left(\{x \in X \mid |f(x)| > \lambda\}\right) = 0,$$

per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, da cui segue che $f(x) = 0$ per q.o. $x \in X$. Siano ora $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f \in L^{p,\infty}(X,\mu)$. Possiamo supporre che $\alpha \neq 0$, altrimenti la tesi è banale. In tal caso si ha che

$$\begin{aligned}
\|\alpha f\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)} &= \left(\sup_{\lambda>0} \lambda^p \mu\left(\{x \in X \mid |\alpha f(x)| > \lambda\}\right)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sup_{\lambda>0} \lambda^p \mu\left(\{x \in X \mid |\alpha||f(x)| > \lambda\}\right)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sup_{\lambda>0} \lambda^p \mu\left(\left\{x \in X \mid |f(x)| > \frac{\lambda}{|\alpha|}\right\}\right)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sup_{\lambda>0} |\alpha|^p \left(\frac{\lambda}{|\alpha|}\right)^p \mu\left(\left\{x \in X \mid |f(x)| > \frac{\lambda}{|\alpha|}\right\}\right)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= |\alpha| \|f\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)}.
\end{aligned}$$

Infine, date $f, g \in L^{p,\infty}(X,\mu)$, si ha che

$$\begin{aligned}
&\|f+g\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)} = \left(\sup_{\lambda>0} \lambda^p \mu\left(\{x \in X \mid |(f+g)(x)| > \lambda\}\right)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sup_{\lambda>0} \lambda^p \mu\left(\left\{x \in X \mid |f(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right) + \mu\left(\left\{x \in X \mid |g(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sup_{\lambda>0} \lambda^p \mu\left(\left\{x \in X \mid |f(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right)\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sup_{\lambda>0} \lambda^p \mu\left(\left\{x \in X \mid |g(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= 2\left(\|f\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)} + \|g\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)}\right).
\end{aligned}$$

Pertanto, la mappa $\| \ \|_{L^{p,\infty}(X,\mu)}$ è una quasi-norma su $L^{p,\infty}(X,\mu)$.

Studiamo inizialmente la relazione che intercorre tra lo spazio L^p e lo spazio L^p debole. Dato (X,μ) uno spazio di misura positiva e σ-finita e data $f \in L^p(X,\mu)$ con $p \in [1,+\infty)$, si ha che

$$\begin{aligned}
\|f\|^p_{L^{p,\infty}(X,\mu)} &= \sup_{\lambda>0} \lambda^p \mu\left(\{x \in X \mid |f(x)| > \lambda\}\right) \\
&= \sup_{\lambda>0} \lambda^p \int_{\{x\in X \mid |f(x)|>\lambda\}} dy \\
&\leq \sup_{\lambda>0} \lambda^p \int_{\{x\in X \mid |f(x)|>\lambda\}} \left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^p dy \\
&\leq \|f\|^p_{L^p(X,\mu)} < +\infty,
\end{aligned}$$

pertanto $f \in L^{p,\infty}(X,\mu)$. Per l'arbitrarietà di $f \in L^{p,\infty}(X,\mu)$ si deduce che $L^p(X,\mu) \subseteq L^{p,\infty}(X,\mu)$. Inoltre, si ha che l'inclusione è stretta, come mostrato nel seguente esempio.

Esempio 1.1.1. Si consideri lo spazio di misura $((0,+\infty),\mathscr{L}^1)$, dove $\mathscr{L}^1$ denota la misura di Lebesgue 1-dimensionale e la funzione $f\colon (0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definita da $f(x)=x^{-\frac{1}{p}}$ per ogni $x\in(0,+\infty)$, con $p\in[1,+\infty)$. Si osservi che

$$\begin{aligned}
\|f\|^p_{L^{p,\infty}((0,+\infty),\mathscr{L}^1)} &= \sup_{\lambda>0}\lambda^p\mathscr{L}^1\left(\left\{x\in(0,+\infty)\mid \left|\frac{1}{x}\right|^{\frac{1}{p}}>\lambda\right\}\right)\\
&= \sup_{\lambda>0}\lambda^p\mathscr{L}^1\left(\left\{x\in(0,+\infty)\mid |x|^{\frac{1}{p}}<\frac{1}{\lambda}\right\}\right)\\
&= \sup_{\lambda>0}\lambda^p\mathscr{L}^1\left(\left\{x\in(0,+\infty)\mid |x|<\frac{1}{\lambda^p}\right\}\right)\\
&= 1<+\infty,
\end{aligned}$$

pertanto $f\in L^{p,\infty}((0,+\infty),\mathscr{L}^1)$. Tuttavia, è noto che $f\notin L^p((0,+\infty),\mathscr{L}^1)$.

Per completezza concludiamo con la definizione di spazio di Lorentz. Siano (X,μ) uno spazio di misura positiva e σ-finita, $p\in[1,+\infty)$ e $q\in[1,+\infty)$. Data una funzione $f\in L^0(X,\mu)$, poniamo

$$\|f\|_{L^{p,q}(X,\mu)} = p^{\frac{1}{q}}\left\|\left(\mathbb{R}\ni\lambda\to\lambda\mu\left(\{x\in X\mid |f(x)|>\lambda\}\right)^{\frac{1}{p}}\in\mathbb{R}\right)\right\|_{L^q\left((0,+\infty),\mathscr{N}_{\mathscr{L}^1}\right)},$$

dove $\mathscr{N}_{\mathscr{L}^1}$ denota la misura di Lebesgue normalizzata, in questo caso su $(0,+\infty)$. Consideriamo poi lo spazio

$$L^{p,q}(X,\mu)=\left\{f\in L^0(X,\mu)\mid \|f\|_{L^{p,q}(X,\mu)}<+\infty\right\},$$

detto *spazio di Lorentz*. Si osservi che la mappa

$$\|\ \|_{L^{p,q}(X,\mu)}\colon L^{p,q}(X,\mu)\to[0,+\infty)$$

definita dall'assegnazione precedente, è una quasi-norma su $L^{p,q}(X,\mu)$. Infatti, data $f\in L^{p,q}(X,\mu)$, si ha che $\|f\|_{L^{p,q}(X,\mu)}$ è prodotto di quantità non negative e, pertanto, è non negativo. Inoltre, se $f(x)=0$ per q.o $x\in X$, si ha che

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^{p,q}(X,\mu)} &= p^{\frac{1}{q}}\left\|\left(\mathbb{R}\ni\lambda\to\lambda\mu\left(\{x\in X\mid \lambda<0\}\right)^{\frac{1}{p}}\in\mathbb{R}\right)\right\|_{L^q\left((0,+\infty),\mathscr{N}_{\mathscr{L}^1}\right)}\\
& p^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^{+\infty}\left|\lambda\mu\left(\{x\in X\mid \lambda<0\}\right)^{\frac{1}{p}}\right|^q\frac{d\lambda}{\lambda}\right)^{\frac{1}{q}}=0.
\end{aligned}$$

D'altra parte, data $f\in L^{p,q}(X,\mu)$, se $\|f\|_{L^{p,q}(X,\mu)}=0$, si ha che

$$\left\|\left(\mathbb{R}\ni\lambda\to\lambda\mu\left(\{x\in X\mid |f(x)|>\lambda\}\right)^{\frac{1}{p}}\in\mathbb{R}\right)\right\|_{L^q\left((0,+\infty),\mathscr{N}_{\mathscr{L}^1}\right)}=0,$$

da cui segue che, siccome $\|\ \|_{L^q\left((0,+\infty),\mathscr{N}_{\mathscr{L}^1}\right)}$ è una norma,

$$\lambda\mu\left(\{x\in X\mid |f(x)|>\lambda\}\right)^{\frac{1}{p}}=0$$

per q.o. $\lambda \in (0,+\infty)$. Segue che $f(x)=0$ per q.o. $x \in X$. Inoltre, dati $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f \in L^{p,q}(X,\mu)$, supponendo che $\alpha \neq 0$ altrimenti la tesi è banale, si ha che

$$\begin{aligned}
\|\alpha f\|_{L^{p,q}(X,\mu)} &= p^{\frac{1}{q}} \left\| \left(\mathbb{R} \ni \lambda \to \lambda \mu \left(\{ x \in X \mid |\alpha f(x)| > \lambda \} \right)^{\frac{1}{p}} \in \mathbb{R} \right) \right\|_{L^q\left((0,+\infty),\mathscr{N}_{\mathscr{L}^1}\right)} \\
&= p^{\frac{1}{q}} \left\| \left(\mathbb{R} \ni \lambda \to \lambda \mu \left(\{ x \in X \mid |\alpha||f(x)| > \lambda \} \right)^{\frac{1}{p}} \in \mathbb{R} \right) \right\|_{L^q\left((0,+\infty),\mathscr{N}_{\mathscr{L}^1}\right)} \\
&= p^{\frac{1}{q}} \left\| \left(\mathbb{R} \ni \lambda \to \lambda \mu \left(\left\{ x \in X \mid |f(x)| > \frac{\lambda}{|\alpha|} \right\} \right)^{\frac{1}{p}} \in \mathbb{R} \right) \right\|_{L^q\left((0,+\infty),\mathscr{N}_{\mathscr{L}^1}\right)} \\
&= p^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^{+\infty} \lambda^q \left(\mu \left(\left\{ x \in X \mid |f(x)| > \frac{\lambda}{|\alpha|} \right\} \right) \right)^{\frac{q}{p}} \frac{d\lambda}{\lambda} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(p \int_0^{+\infty} \lambda^{q-1} \left(\int_{\left\{x \in X | |f(x)| > \frac{\lambda}{|\alpha|}\right\}} d\mu(x) \right)^{\frac{q}{p}} d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(p \int_0^{+\infty} |\alpha|^{q-1} t^{q-1} \left(\int_{\{x \in X | |f(x)| > t\}} d\mu(x) \right)^{\frac{q}{p}} |\alpha| dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(p \int_0^{+\infty} |\alpha|^q t^q \left(\mu \left(\{ x \in X \mid |f(x)| > t \} \right) \right)^{\frac{q}{p}} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= |\alpha| \|f\|_{L^{p,q}(X,\mu)}.
\end{aligned}$$

Infine, date $f,g \in L^{p,q}(X,\mu)$, si ha che, procedendo come nel caso degli spazi L^p deboli,

$$\|f+g\|_{L^{p,q}(X,\mu)} \leq 2 \left(\|f\|_{L^{p,q}(X,\mu)} + \|g\|_{L^{p,q}(X,\mu)} \right),$$

il che permette di concludere che $\| \ \|_{L^{p,q}(X,\mu)}$ è effettivamente una quasi-norma.

1.2 Operatori di tipo debole (p,q)

Diamo innanzitutto la definizione di operatore sublineare.

Definizione 1.2.1. Sia (X,μ) uno spazio di misura positiva e σ-finita e consideramo $V \subseteq L^0(X,\mu)$ un sottospazio vettoriale dello spazio delle funzioni misurabili su X. Un operatore $T\colon V \to L^0(X,\mu)$ si dice *sublineare* se per ogni $f,g \in V$ si ha che

$$|T(f+g)(x)| \leq |Tf(x)| + |Tg(x)|$$

per ogni $x \in X$ e, per ogni $f \in V$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, si ha che

$$|T(\lambda f)(x)| = |\lambda||Tf(x)|$$

per ogni $x \in X$.

Definizione 1.2.2. Siano (X, μ), (Y, ν) due spazi di misura positiva e $\sigma-$finita e sia $p \in [1, +\infty)$. Un operatore sublineare

$$T\colon L^p(X, \mu) \to L^0((Y, \nu), \mathbb{C})$$

si dice *debole* (p, q), con $q \in [1, +\infty)$ se, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, si ha che

$$\nu\left(\{y \in Y \mid |Tf(y)| > \lambda\}\right) \leq \left(\frac{c\|f\|_{L^p(X,\mu)}}{\lambda}\right)^q,$$

per una certa costante $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$.

In particolare, si osservi che, se T è di tipo debole (p, q) con $p, q \in [1, +\infty)$, si ha che, data $f \in L^p(X, \mu)$, allora

$$\begin{aligned}
\|Tf\|^q_{L^{q,\infty}(Y,\nu)} &= \sup_{\lambda>0} \lambda^q \nu\left(\{y \in Y \mid |Tf(y)| > \lambda\}\right) \\
&\leq \sup_{\lambda>0} \lambda^q \frac{c^q\|f\|_{L^p(X,\mu)}}{\lambda^q} \\
&= c^q\|f\|^q_{L^p(X,\mu)}.
\end{aligned}$$

Ma allora, $\|Tf\|_{L^{q,\infty}(Y,\nu)} \leq c\|f\|_{L^p(X,\mu)}$, da cui segue che $Tf \in L^{q,\infty}(Y, \nu)$. Pertanto si ha che l'operatore T è dato da

$$T\colon L^p(X, \mu) \to L^{q,\infty}(Y, \nu).$$

Viceversa, dato un operatore sublineare $S\colon L^p(X, \mu) \to L^{q,\infty}(Y, \nu)$ tale che per ogni $f \in L^p(X, \mu)$ valga $\|Sf\|_{L^{q,\infty}(Y,\nu)} \leq \alpha\|f\|_{L^p(X,\mu)}$ per una certa costante $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, si ha che, per ogni $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned}
\lambda^p \nu\left(\{y \in Y \mid |Sf(y)| > \lambda\}\right) &\leq \sup_{\beta>0} \beta^p \nu\left(\{y \in Y \mid |Sf(y)| > \beta\}\right) \\
&= \|Sf\|^q_{L^{q,\infty}(Y,\nu)} \\
&\leq \alpha^q\|f\|_{L^p(X,\mu)}.
\end{aligned}$$

Pertanto, S è di tipo debole (p, q).

Definizione 1.2.3. Un operatore sublineare

$$T\colon L^p(X, \mu) \to L^0((Y, \nu), \mathbb{C})$$

è di tipo *debole* (p, ∞), se è un operatore limitato da $L^p(X, \mu)$ in $L^\infty(Y, \nu)$. Diremo invece che T è di tipo *forte* (p, q) con $q \in [1, +\infty)$, se T è un operatore limitato da $L^p(X, \mu)$ in $L^q(Y, \nu)$.

Si noti che, dati $p \in [1, +\infty)$, $q \in [1, +\infty)$, se un operatore sublineare T è forte (p, q), allora è di tipo debole (p, q). Infatti, se $\|Tf\|_{L^q(Y,\nu)} \leq c\|f\|_{L^p(X,\mu)}$ per una certa costante $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$ e per ogni $\lambda > 0$, posto

$$E_\lambda = \{y \in Y \mid |Tf(y)| > \lambda\},$$

si ha che

$$\nu(E_\lambda) = \int_{E_\lambda} d\nu \leq \int_{E_\lambda} \left| \frac{Tf(x)}{\lambda} \right|^q d\nu(x) \leq \frac{\|Tf\|^q_{L^q(Y,\nu)}}{\lambda^q} \leq \left(\frac{c\|f\|^p_L(X,\mu)}{\lambda} \right)^q.$$

Segue che T è di tipo debole (p,q).

Definizione 1.2.4. Siano $p \in [1,+\infty)$ e $\{T_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ una famiglia di operatori sublineari su $L^p(X,\mu)$. L'operatore

$$MT \colon L^p(X,\mu) \to L^0(X,\mu)$$

definito in modo tale che, per ogni $f \in L^p(X,\mu)$, si abbia

$$MTf(x) = \sup_{t\in\mathbb{R}} |T_t f(x)|$$

per ogni $x \in X$, si dice *operatore massimale* associato alla famiglia $\{T_t\}_{t\in\mathbb{R}}$.

Teorema 1.2.5 (Principio di Banach)**.** *Siano $p \in [1,+\infty)$ e $\{T_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ una famiglia di operatori sublineari su $L^p(X,\mu)$ tale che per ogni $t \in \mathbb{R}$ si abbia che, per ogni $f, g \in L^p(X,\mu)$,*

$$|T_t f - T_t g| \leq |T_t(f-g)|.$$

Se l'operatore massimale associato MT è di tipo debole (p,q), allora l'insieme

$$\left\{ f \in L^p(X,\mu) \mid \lim_{t\to t_0} T_t f(x) = f(x) \text{ per q.o. } x \in X \right\},$$

con $t_0 \in \mathbb{R}$, è chiuso in $L^p(X,\mu)$.

Dimostrazione. Sia $t_0 \in \mathbb{R}$ e sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni in $L^p(X,\mu)$ tale che $\lim_{t\to t_0} T_t f_n(x) = f_n(x)$ per q.o. $x \in X$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converga in $L^p(X,\mu)$ ad una funzione $f \in L^p(X,\mu)$ e proviamo che $\lim_{t\to t_0} T_t f(x) = f(x)$ per q.o. $x \in X$. Per farlo, proviamo che

$$\mu\left(\left\{ x \in X \mid \limsup_{t\to t_0} |T_t f(x) - f(x)| > 0 \right\} \right) = 0.$$

Ricordiamo innanzitutto che, per ipotesi, l'operatore massimale MT associato alla famiglia $\{T_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ è di tipo debole (p,q), pertanto esiste una costante $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$, tale che, per ogni $g \in L^p(X,\mu)$, si abbia che

$$\mu\left(\{x \in X \mid |MTg(x)| > \lambda\}\right) \leq \left(\frac{c\|g\|_{L^p(X,\mu)}}{\lambda} \right)^q$$

per ogni $\lambda > 0$. Ma allora, ricordando le ipotesi sulle funzioni della successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, per ogni $\varepsilon > 0$ si ha che

$$\begin{aligned}
&\mu\left(\left\{x \in X \mid \limsup_{t\to t_0} |T_t f(x) - f(x)| > \varepsilon\right\}\right)\\
&= \mu\left(\left\{x \in X \mid \limsup_{t\to t_0} |T_t f(x) - T_t f_n(x) + T_t f_n(x) - f_n(x) + f_n(x) - f(x))| > \varepsilon\right\}\right)\\
&\leq \mu\left(\left\{x \in X \mid \limsup_{t\to t_0} |T_t f(x) - T_t f_n(x)| > \varepsilon\right\}\right)\\
&\quad + \mu\left(\left\{x \in X \mid \limsup_{t\to t_0} |T_t f_n(x) - f_n(x)| > \varepsilon\right\}\right)\\
&\quad + \mu\left(\left\{x \in X \mid \limsup_{t\to t_0} |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\right\}\right)\\
&\leq \mu\left(\left\{x \in X \,|\, \limsup_{t\to t_0} |T_t(f - f_n)|(x) > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) + \mu\left(\left\{x \in X \,|\, \limsup_{t\to t_0} |(f - f_n)(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right)\\
&\leq \mu\left(\left\{x \in X \mid \ |MT(f - f_n)|(x) > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) + \mu\left(\left\{x \in X \mid \limsup_{t\to t_0} |(f - f_n)(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right)\\
&\leq \left(\frac{2c\|f - f_n\|_{L^p(X,\mu)}}{\varepsilon}\right)^q + \int_{\left\{x\in X \,|\, |(f-f_n)(x)|>\frac{\varepsilon}{2}\right\}} d\mu\\
&< \left(\frac{2c\|f - f_n\|_{L^p(X,\mu)}}{\varepsilon}\right)^q + \int_X \frac{|(f - f_n)(x)|^p}{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p} d\mu(x)\\
&= \left(\frac{2c\|f - f_n\|_{L^p(X,\mu)}}{\varepsilon}\right)^q + \left(\frac{2\|f - f_n\|_{L^p(X,\mu)}}{\varepsilon}\right)^p \xrightarrow[n]{} 0.
\end{aligned}$$

Si deduce quindi che $\lim_{t\to t_0} T_t f(x) = f(x)$ per q.o. $x \in X$, da cui segue direttamente la tesi. □

1.3 Teorema di interpolazione di Marcinkiewicz

Sia (X, μ) uno spazio di misura positiva e σ-finita e sia $f\colon X \to \mathbb{C}$ una funzione misurabile rispetto alla σ-algebra su cui è definita la misura μ. Consideriamo la *funzione distribuzione* di f data dalla mappa

$$a_f\colon (0, +\infty) \to [0, +\infty]$$

definita da

$$a_f(\lambda) = \mu\left(\{x \in X \mid |f(x)| > \lambda\}\right)$$

per ogni $\lambda \in (0, +\infty)$.

Proposizione 1.3.1. *Sia $\varphi\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ una funzione differenziabile, crescente e tale che $\varphi(0) = 0$. Allora*

$$\int_X \varphi(|f(x)|)d\mu(x) = \int_0^{+\infty} \varphi'(\lambda)a_f(\lambda)d\lambda.$$

Dimostrazione. Sia φ come nell'enunciato. Per il Teorema di Fubini-Tonelli si ha che

$$\int_X \varphi(|f(x)|)d\mu(x) = \int_X \int_0^{|f(x)|} \varphi'(\lambda)d\lambda d\mu(x) = \int_0^{+\infty} \varphi(\lambda)a_f(\lambda)d\lambda.$$

□

Si noti ora che, dato $p \in [1, +\infty)$, il risultato precedente permette di caratterizzare la norma $\| \ \|_{L^p(X,\mu)}$ nel seguente modo. Consideriamo la funzione

$$\varphi\colon (0, +\infty) \ni \lambda \mapsto \lambda^p \in (0, +\infty).$$

Per la Proposizione 1.3.1, dati (X, μ) spazio di misura positiva ed una funzione σ-finita e $f \in L^p(X, \mu)$, si ha che

$$\|f\|^p_{L^p(X,\mu)} = \int_X |f(x)|^p d\mu(x) = p \int_0^{+\infty} \lambda^{p-1} a_f(\lambda)d\lambda.$$

Utilizziamo questa caratterizzazione della norma L^p per dimostrare il Teorema di interpolazione di Marcinkiewicz.

Teorema 1.3.2 (Teorema di interpolazione di Marcinkiewicz)**.** *Siano (X, μ), (Y, ν) spazi di misura positiva e σ-finita, $p_0, p_1 \in [1, \infty]$ tali che $p_0 < p_1$ e*

$$T\colon L^{p_0}(X, \mu) + L^{p_1}(X, \mu) \to L^0(Y, \nu)$$

un operatore sublineare che sia di tipo debole (p_0, p_0) e di tipo debole (p_1, p_1). Allora T è di tipo forte (p, p) per ogni $p \in (p_0, p_1)$.

Dimostrazione. Sia $p \in (p_0, p_1)$ e sia $f \in L^p(X, \mu)$. Per ogni $\lambda \in (0, +\infty)$ decomponiamo f come $f = f_0 + f_1$, dove $f_0 = f\mathbb{1}_{\{x\in X \,|\, |f(x)|>c\lambda\}}$ e $f_1 = f\mathbb{1}_{\{x\in X \,|\, |f(x)|\le c\lambda\}}$ per una certa costante $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$. Si osservi che, per la disuguaglianza di Hölder,

$$\begin{aligned}
\|f_0\|^{p_0}_{L^{p_0}(X,\mu)} &= \int_X |f_0(y)|^{p_0} d\mu(y) \\
&= \int_X |f(y)|^{p_0} \mathbb{1}_{\{x\in X \,|\, |f(x)|>c\lambda\}}(y)d\mu(y) \\
&\le \left(\int_X \mathbb{1}_{\{x\in X \,|\, |f(x)|>c\lambda\}}(y)d\mu(y)\right)^{\frac{p-p_0}{p}} \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{p_0}{p}} \\
&= \left(\int_{\{x\in X \,|\, |f(x)|>c\lambda\}} d\mu(y)\right)^{\frac{p-p_0}{p}} \|f\|^{p_0}_{L^p(X,\mu)} \\
&< \left(\int_X \frac{|f(y)|^p}{c^p\lambda^p} d\mu(y)\right)^{\frac{p-p_0}{p}} \|f\|^{p_0}_{L^p(X,\mu)} \\
&= \left(\frac{1}{c\lambda}\right)^{p-p_0} \|f\|^{p-p_0}_{L^p(X,\mu)} \|f\|^{p_0}_{L^p(X,\mu)} \\
&= \left(\frac{1}{c\lambda}\right)^{p-p_0} \|f\|^p_{L^p(X,\mu)} < +\infty,
\end{aligned}$$

pertanto $f_0 \in L^{p_0}(X,\mu)$. Similmente, $f_1 \in L^{p_1}(X,\mu)$. Inoltre, per la sublinearità di T si ha che $|Tf(y)| \leq |Tf_0(y)| + |Tf_1(y)|$ per ogni $y \in Y$, da cui segue che

$$\begin{aligned}
a_{Tf}(\lambda) &= \nu\left(\{y \in Y \mid |Tf(y)| > \lambda\}\right) \\
&\leq \nu\left(\left\{y \in Y \mid |Tf_0(y)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right) + \nu\left(\left\{y \in Y \mid |Tf_1(y)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right) \\
&= a_{Tf_0}\left(\frac{\lambda}{2}\right) + a_{Tf_1}\left(\frac{\lambda}{2}\right).
\end{aligned}$$

Supponiamo dapprima che $p_1 = \infty$. Siano $A_0 \in \mathbb{R}$, $A_0 > 0$ e $A_1 \in \mathbb{R}$, $A_1 > 0$, le costanti tali che $\|Tf_0\|_{L^{p_0,\infty}(X,\mu)} \leq A_0 \|f_0\|_{L^{p_0}(X,\mu)}$ e $\|Tf_1\|_{L^\infty(X,\mu)} \leq A_1 \|f_1\|_{L^\infty(X,\mu)}$, esistenti dal momento che T è di tipo debole (p_0,p_0) e di tipo debole (p_1,p_1). Poniamo $c = \frac{1}{2A_1}$. Si ha che

$$\begin{aligned}
a_{Tf_1}\left(\frac{\lambda}{2}\right) &= \nu\left(\left\{y \in Y \mid |Tf_1(y)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right) \\
&\leq \nu\left(\left\{y \in Y \mid |Tf_1(y)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right) \\
&\leq \nu\left(\left\{y \in Y \mid \|Tf_1\|_{L^\infty(Y,\nu)} > \frac{\lambda}{2}\right\}\right) \\
&\leq \nu\left(\left\{y \in Y \mid \|f_1\|_{L^\infty(X,\mu)} > \frac{\lambda}{2A_1} = c\lambda\right\}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Inoltre, per la disuguaglianza debole (p_0,p_0), si ha che

$$a_{Tf_0}\left(\frac{\lambda}{2}\right) \leq \left(\frac{2A_0\|f_0\|_{L^{p_0}(X,\mu)}}{\lambda}\right)^{p_0}.$$

Pertanto, utilizzando una conseguenza della Proposizione 1.3.1 ed il Teorema di Fubini-Tonelli, si deduce che

$$\begin{aligned}
\|Tf\|^p_{L^p(Y,\nu)} &= p\int_0^{+\infty} \lambda^{p-1} a_{Tf}(\lambda)\, d\lambda \\
&\leq p\int_0^{+\infty} \lambda^{p-1} a_{Tf_0}\left(\frac{\lambda}{2}\right) d\lambda + p\int_0^{+\infty} \lambda^{p-1} a_{Tf_1}\left(\frac{\lambda}{2}\right) d\lambda \\
&\leq p\int_0^{+\infty} \lambda^{p-1}\left(\frac{2A_0\|f_0\|_{L^{p_0}(X,\mu)}}{\lambda}\right)^{p_0} d\lambda \\
&= p\int_0^{+\infty} \lambda^{p-1-p_0}(2A_0)^{p_0}\int_X |f_0(x)|^{p_0} d\mu(x) d\lambda \\
&= p\int_0^{+\infty} \lambda^{p-1-p_0}(2A_0)^{p_0}\int_X |f(x)|^{p_0} \mathbb{1}_{\{y\in X \mid |f(y)|>c\lambda\}}(x) d\mu(x) d\lambda \\
&= p(2A_0)^{p_0}\int_X |f(x)|^{p_0}\int_0^{\frac{|f(x)|}{c}} \lambda^{p-1-p_0} d\lambda d\mu(x) \\
&= \frac{p}{p-p_0}(2A_0)^{p_0}\frac{1}{c^{p-p_0}}\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \\
&= \frac{p}{p-p_0}(2A_0)^{p_0}(2A_1)^{p-p_0}\|f\|^p_{L^p(X,\mu)} < +\infty,
\end{aligned}$$

da cui segue direttamente la tesi. Supponiamo ora che $p_1 < +\infty$. Per ipotesi si ha che
$$a_{Tf_0}\left(\frac{\lambda}{2}\right) \leq \left(\frac{2A_0\|f_0\|_{L^{p_0}(X,\mu)}}{\lambda}\right)^{p_0}.$$
e
$$a_{Tf_1}\left(\frac{\lambda}{2}\right) \leq \left(\frac{2A_1\|f_1\|_{L^{p_1}(X,\mu)}}{\lambda}\right)^{p_1}.$$
Procedendo in modo analogo al caso precedente si mostra che
$$\begin{aligned}\|Tf\|^p_{L^p(Y,\nu)} &= p\int_0^{+\infty} \lambda^{p-1}a_{Tf}\left(\lambda\right)d\lambda \\ &\leq p\int_0^{+\infty}\lambda^{p-1}a_{Tf_0}\left(\frac{\lambda}{2}\right)d\lambda + p\int_0^{+\infty}\lambda^{p-1}a_{Tf_1}\left(\frac{\lambda}{2}\right)d\lambda \\ &= \left(\frac{p}{p-p_0}(2A_0)^{p_0}\frac{1}{c^{p-p_0}} + \frac{p}{p_1-p}(2A_1)^{p_1}\frac{1}{c^{p-p_1}}\right)\|f\|^p_{L^p(X,\mu)} < +\infty\end{aligned}$$
e ciò permette di concludere. □

Si osservi che, supponendo che valgano le ipotesi del Teorema 1.3.2, si ottiene che
$$\|Tf\|_{L^p(X,\mu)} \leq 2p^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{p-p_0} - \frac{1}{p_1-p}\right)^{\frac{1}{p}} A_0^{1-\theta}A_1^{\theta}\|f\|_{L^p(X,\mu)},$$
dove $\theta \in (0,1)$ è tale che $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_0}$. Nel corso della tesi, dato uno spazio di misura positiva e σ-finita (X,μ), studieremo in particolare operatori di tipo forte (∞,∞), ossia limitati da $L^\infty(X,\mu)$ in $L^\infty(X,\mu)$ e deboli $(1,1)$. In tal caso, detto T un operatore di questo tipo, il Teorema 1.3.2 assicura che T è di tipo forte (p,p) per ogni $p \in (1,+\infty)$ ed inoltre, per ogni $f \in L^p(X,\mu)$ si ha che
$$\|Tf\|^p_{L^p(X,\mu)} \leq \frac{p}{p-1}(2A_0)(2A_1)^{p-1}\|f\|^p_{L^p(X,\mu)},$$
con A_0, A_1 costanti reali strettamente positive derivanti dalle disuguaglianze per la limitatezza in norma $\|\ \|_{L^\infty(X,\mu)}$ e $\|\ \|_{L^{1,\infty}(X,\mu)}$.

1.4 Cenni sull'integrazione di Lebesgue-Stiltjes

Concludiamo il capitolo con una breve introduzione alla teoria dell'integrazione di Lebesgue-Stiltjes, che ci permetterà di dimostrare un importante risultato per gli operatori massimali di tipo convolutivo. Per quanto riguarda questa sezione, si veda il testo [2].

1.4.1 Il Teorema di Carathéodory

Richiamiamo innanzitutto alcuni concetti preliminari di teoria della misura.

Definizione 1.4.1. Sia X un insieme non vuoto. Un sottoinsieme $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ non vuoto si dice *anello* se si ha che

1. $\emptyset \in \mathscr{A}$;
2. se $A, B \in \mathscr{A}$, allora $A \cup B \in \mathscr{A}$ e $A \cap B \in \mathscr{A}$;
3. se $A, B \in \mathscr{A}$, allora $A \setminus B \in \mathscr{A}$.

Il nostro primo scopo è andare ad enunciare e dimostrare il Teorema di Carathéodory. Per farlo, occorre introdurre innanzitutto il concetto di *sistema di Dynkin*.

Definizione 1.4.2. Un sottoinsieme non vuoto $\mathscr{K} \subset \mathscr{P}(X)$ si dice π-*sistema* se, dati $A, B \in \mathscr{K}$, si ha che $A \cap B \in \mathscr{K}$. Un sottoinsieme non vuoto $\mathscr{D} \subset \mathscr{P}(X)$ si dice *sistema di Dynkin* se si ha che

1. $\emptyset, X \in \mathscr{D}$.
2. se $A \in \mathscr{D}$, allora $X \setminus A \in \mathscr{D}$;
3. se $(A_i)_{i \in I}$ è una successione di elementi di $\mathscr{D}$, con I insieme di indici, si ha che
$$\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathscr{D}.$$

Si noti che una σ-algebra è un sistema di Dynkin. Viceversa, se $\mathscr{D}$ è un sistema di Dynkin e un π-sistema, allora $\mathscr{D}$ è una σ-algebra. Infatti, data $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una successione di elementi di $\mathscr{D}$ non necessariamente disgiunti, si ha che

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = A_0 \cup \left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} (A_i \setminus A_{i-1}) \right) \in \mathscr{D}$$

per 2. e 3. della definizione 1.4.2.

Riportiamo di seguito il Teorema di Dynkin. Dato $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$, denotiamo con $\sigma(\mathscr{A})$ la σ-algebra generata da $\mathscr{A}$.

Teorema 1.4.3 (Teorema di Dynkin)**.** *Sia $\mathscr{K}$ un π-sistema e sia $\mathscr{D}$ un sistema di Dynkin tale che $\mathscr{K} \subset \mathscr{D}$. Allora si ha che $\sigma(\mathscr{K}) \subset \mathscr{D}$.*

Dimostrazione. Sia $\mathscr{D}_0$ il più piccolo sistema di Dynkin tale che $\mathscr{K} \subset \mathscr{D}_0$. Mostriamo che $\mathscr{D}_0$ è una σ-algebra. Come osservato in precedenza, è sufficiente dimostrare che $\mathscr{D}_0$ è un π-sistema, ossia che, dati $A, B \in \mathscr{D}_0$, si ha che $A \cap B \in \mathscr{D}_0$.

Per ogni $B \in \mathscr{D}_0$, sia

$$\mathscr{H}(B) = \{F \in \mathscr{D}_0 \mid B \cap F \in \mathscr{D}_0\}.$$

Mostriamo che $\mathscr{H}(B)$ è un sistema di Dynkin. Per quanto riguarda la 1. si ha che

$$B \cap \emptyset = \emptyset \in \mathscr{D}_0,$$

dal momento che $\mathscr{D}_0$ è un sistema di Dynkin, pertanto $\emptyset \in \mathscr{H}(B)$. Proviamo ora 3.. Sia I un insieme di indici e sia $(A_i)_{i\in I}$ una successione di elementi di $\mathscr{H}(B)$. Allora si ha che $A_i \cap B \in \mathscr{H}(B)$ per ogni $i \in I$. Inoltre, dal momento che $\mathscr{D}_0$ è un sistema di Dynkin, si ha che

$$\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathscr{D}_0.$$

Inoltre, si ha che

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i\in I}(A_i \cap B) \in \mathscr{D}_0,$$

da cui segue che

$$\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathscr{H}(B).$$

Proviamo infine la proprietà 2. della definizione di sistema di Dynkin. A tal proposito, sia $A \in \mathscr{H}(B)$. Allora si ha che $A \cap B \in \mathscr{D}_0$. Mostriamo che $X \setminus A \in \mathscr{H}(B)$, ossia che $(X \setminus A) \cap B \in \mathscr{D}_0$. Si noti che, dal momento che $\mathscr{D}_0$ è un sistema di Dynkin, ciò è equivalente a provare che $A \cap (X \setminus B) \in \mathscr{D}_0$. Ma si ha che

$$A \cap (X \setminus B) = (A \setminus (X \setminus B)) \cup (X \setminus B) = (A \cap B) \cup (X \setminus B)$$

e $A \cap B$ e $X \setminus B$ sono disgiunti, pertanto $A \cap (X \setminus B) \in \mathscr{D}_0$.

Si noti ora che, dal momento che $\mathscr{K}$ è un π-sistema, si ha che, se $K \in \mathscr{K}$, allora $\mathscr{K} \subset \mathscr{H}(K)$. Inoltre, per la minimalità di $\mathscr{D}_0$ si ha che $\mathscr{H}(K) = \mathscr{D}_0$. Pertanto si ha che, se $K \in \mathscr{K}$ e $B \in \mathscr{D}_0$, si ottiene che $K \cap B \in \mathscr{D}_0$, da cui sgeue che $\mathscr{K} \subset \mathscr{H}(B)$ per ogni $B \in \mathscr{D}_0$. Ripetendo il ragionamento appena visto, dal momento che $\mathscr{B}$ è un sistema di Dynkin e per la minimalità di $\mathscr{D}_0$, si ottiene che $\mathscr{H}(B) = \mathscr{D}_0$ per ogni $B \in \mathscr{D}_0$, da cui segue direttamente la tesi per definizione di $\mathscr{H}(B)$, per $B \in \mathscr{D}_0$. □

Dopo aver enunciato e dimostrato il Teorema di Dynkin, è ora il momento di introdurre il seguente criterio, che costituisce un altro elemento fondamentale per la dimostrazione del Teorema di Carathéodory. È bene innanzitutto chiarire un aspetto notazionale. Sia $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di elementi di $\mathscr{P}(X)$ non decrescente rispetto all'inclusione. Definiamo

$$\limsup_n A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m=n}^{+\infty} A_m$$

e

$$\liminf_n A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m=n}^{+\infty} A_m.$$

Sia ora $A \in \mathscr{P}(X)$. Scriveremo $A_n \uparrow A$ se

$$\limsup_n A_n = \liminf_n A_n = A.$$

Proposizione 1.4.4 (Criterio di coincidenza)**.** *Sia $(X, \mathscr{M})$ uno spazio misurabile e siano μ_1 e μ_2 due misure su $(X, \mathscr{M})$. Supponiamo che l'insieme*

$$\mathscr{D} = \{A \in \mathscr{M} \mid \mu_1(A) = \mu_2(A)\}$$

contenga una π-sistema $\mathscr{K}$ tale che $\mathscr{M} = \sigma(\mathscr{K})$. Inoltre, supponiamo che esista una successione non decrescente $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi di $\mathscr{K}$ tale che

$$\mu_1(X_n) = \mu_2(X_n) < +\infty$$

e $X_n \uparrow X$. Allora si ha che $\mu_1 = \mu_2$.

Dimostrazione. Supponiamo innanzitutto che $\mu_1(X) = \mu_2(X)$ sia finito. In tal caso, si ha che $\mathscr{D}$ è un sistema di Dynkin e ciò garantisce la validità della proprietà 2. della definzione di sistema di Dynkin. Inoltre, si ha che $\mathscr{D}$ contiene $\mathscr{K}$. Pertanto, per il Teorema 1.4.3, si ottiene che $\mathscr{D} = \mathscr{M}$, da cui segue direttamente la tesi.

Studiamo ora il caso generale. Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathscr{M}$ come nell'enunciato. Dato $n \in \mathbb{N}$, definiamo la σ-algebra

$$\mathscr{M}_n = \{A \subset X_n \mid A \in \mathscr{M}\}.$$

Possiamo considerare senza perdita di generalità μ_1 e μ_2 come misure finite sullo spazio misurabile $(X_n, \mathscr{M}_n)$. Per ipotesi si ha che le due misure coincidono sul π-sistema

$$\mathscr{K}_n = \{A \subset X_n \mid A \in \mathscr{K}\}.$$

Per quanto visto nel passaggio precedente, si ottiene che μ_1 e μ_2 coincidono su $\sigma(\mathscr{K}_n)$. Proviamo ora che

$$\{B \in \mathscr{M} \mid B \subset X_n\} \subset \sigma(\mathscr{K}_n).$$

Si noti che la famiglia

$$\mathscr{E}_n = \{B \subseteq X \mid B \cap X_n \in \sigma(\mathscr{K}_n)\}$$

è una σ-algebra su X. Infatti, si ha che

$$X \cap X_n = X_n \in \mathscr{K}_n \subseteq \sigma(\mathscr{K}_n),$$

pertanto $X \in \mathscr{E}_n$. Sia ora $B \in \mathscr{E}_n$. Allora si ha che $B \cap X_n \in \sigma(\mathscr{K}_n)$. Inoltre, $X_n \in \sigma(\mathscr{K}_n)$, pertanto, dal momento che $\sigma(\mathscr{K}_n)$ è una σ-algebra, si ha che $X \setminus X_n \in \sigma(\mathscr{K}_n)$. Ma allora, si ha che $(B \cap X_n) \cup X \setminus X_n \in \sigma(\mathscr{K}_n)$, dal momento che $\sigma(\mathscr{K}_n)$ è una σ-algebra. Segue che

$$(X \setminus B) \cap X_n = X \setminus (B \cup (X \setminus X_n)) = X \setminus ((B \cap X_n) \cup (X \setminus X_n)) \in \sigma(\mathscr{K}_n).$$

Pertanto, $X \setminus B \in \mathscr{E}_n$. Infine, sia $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una famiglia di elementi di $\mathscr{E}_n$. Allora si ha che $B_k \cap X_n \in \sigma(\mathscr{K}_n)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Segue che, dal momento che $\sigma(\mathscr{K}_n)$ è una σ-algebra,

$$\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k\right) \cap X_n = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (B_k \cap X_n) \in \sigma(\mathscr{K}_n).$$

Inoltre, si ha che $\mathscr{E}_n$ contiene $\mathscr{K}$, quindi $\mathscr{E}_n$ contiene $\mathscr{E}$.

Si ottiene pertanto che

$$\mu_1(B \cap X_n) = \mu_2(B \cap X_n)$$

per ogni $B \in \mathscr{M}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$. Passando al limite per $n \to +\infty$, per l'arbitrarietà di B si deduce che $\mu_1 = \mu_2$. □

Sia ora $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ e sia

$$\mu \colon \mathscr{A} \to [0, +\infty]$$

una mappa tale che $\mu(\emptyset) = 0$. Per ogni $E \in \mathscr{P}(X)$ poniamo

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \mid A_n \in \mathscr{A} \text{ per ogni } n \in \mathbb{N},\ E \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \right\}.$$

Si può dimostrare facilmente che la mappa

$$\mu^* \colon \mathscr{P}(X) \to [0, +\infty]$$

è tale che $\mu^*(\emptyset) = 0$ ed è non decrescente rispetto all'inclusione. La funzione μ^* si dice *misura esterna* indotta da μ.

Vediamo di seguito gli ultimi due risultati che permettono poi di ottenere immediatamente la tesi del Teorema di Carathéodory. Mostriamo inizialmente che μ^* estende μ se μ è σ-subadditiva.

Proposizione 1.4.5. *La mappa μ^* è σ-subadditiva su $\mathscr{P}(X)$ ed estende μ se μ è σ-subadditiva su $\mathscr{A}$ e $\mu(\emptyset) = 0$.*

Dimostrazione. Sia $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di elementi di $\mathscr{P}(X)$ e sia

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n.$$

Supponiamo senza perdita di generalità che

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(E_n) < +\infty,$$

altrimenti l'asserto è banalmente verificato. Segue che $\mu^*(E_n) < +\infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Ma allora, per ogni $\varepsilon > 0$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste una successione $(A_{n,m})_{m\in\mathbb{N}}$ in $\mathscr{A}$ tale che

$$E_n \subset \bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_{n,m}$$

ed inoltre

$$\sum_{m\in\mathbb{N}} \mu(A_{n,m}) \le \mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^{m+1}}.$$

Segue che

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m\in\mathbb{N}} \mu(A_{n,m}) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(E_n) + \varepsilon.$$

Dal momento che

$$E \subset \bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} A_{n,m},$$

si ha che

$$\mu^*(E) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m\in\mathbb{N}} \mu(A_{n,m}) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(E_n) + \varepsilon,$$

da cui segue la σ-subadditività di μ^*.

Sia ora $E \in \mathscr{A}$. Sia poi $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di elementi di $\mathscr{A}$ tale che

$$E \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Dal momento che μ è σ-subadditiva, si ottiene che

$$\mu(E) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Passando all'estremo inferiore su tutti i ricoprimenti numerabili di E costituiti da elementi di $\mathscr{A}$, si ottiene che $\mu(E) \le \mu^*(E)$. D'altra parte, scegliendo $A_0 = E$ e $A_n = \emptyset$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 1$, si ottiene che $\mu^*(E) = \mu(E)$, il che conclude la dimostrazione. $\square$

Introduciamo ora il concetto di insieme additivo secondo Carathéodory.

Definizione 1.4.6. Siano $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ e

$$\mu \colon \mathscr{A} \to [0, +\infty]$$

una mappa tale che $\mu(\emptyset) = 0$. Un insieme $A \in \mathscr{P}(X)$ si dice *additivo secondo Carathéodory* se

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*\left(E \cap (X \setminus A)\right) \tag{1.1}$$

per ogni $E \in \mathscr{P}(X)$.

Denotiamo con $\mathscr{G}$ la famiglia degli insiemi additivi secondo Carathéodory in $\mathscr{P}(X)$. È immediato notare che, dato $A \in \mathscr{G}$, si ha che $X \setminus A \in \mathscr{G}$.

Teorema 1.4.7. *Siano $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ e*

$$\mu \colon \mathscr{A} \to [0, +\infty]$$

una mappa tale che $\mu(\emptyset) = 0$. Supponiamo $\mathscr{A}$ sia un anello e che μ sia additiva. Allora $\mathscr{G}$ è una σ-algebra contenente $\mathscr{A}$ e μ^* è σ-additiva su $\mathscr{G}$.

Dimostrazione. Proviamo innanzitutto che $\mathscr{A} \subset \mathscr{G}$. Siano $A \in \mathscr{A}$ e $E \in \mathscr{P}(X)$. Dimostriamo che vale l'uguaglianza (1.1). È sufficiente dimostrare che

$$\mu^*(E) \ge \mu^*(E \cap A) + \mu^*\left(E \cap (X \setminus A)\right)$$

dal momento che μ^* è subadditiva. Supponiamo senza perdita di generalità che $\mu^*(E) < +\infty$, altrimenti la tesi è banalmente verificata. Sia ora $\varepsilon > 0$ e sia $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione si elementi di $\mathscr{A}$ tale che

$$E \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$$

ed inoltre

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) < \mu^*(E) + \varepsilon.$$

Per definizione di μ^* si ha che

$$\begin{aligned}\mu^*(E) + \varepsilon &> \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n)\\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\mu(B_n \cap A) + \mu\left(B_n \cap (X \setminus A)\right)\right)\\ &\geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*\left(E \cap (X \setminus A)\right)\end{aligned}$$

e la tesi segue passando al limite per $\varepsilon \to 0^+$. Pertanto, A è additivo secondo Carathéodory. Per l'arbitrarietà di A si ottiene che $\mathscr{A} \subset \mathscr{G}$.

Mostriamo ora che $\mathscr{G}$ è un'algebra e che μ^* è additiva su $\mathscr{G}$. Sappiamo già che, se $A \in \mathscr{G}$, allora $X \setminus A \in \mathscr{G}$. Proviamo che, dati $A, B \in \mathscr{G}$, si ha che $A \cup B \in \mathscr{G}$. Per ogni $E \in \mathscr{P}(X)$ si ha che, applicando due volte l'uguaglianza (1.1),

$$\begin{aligned}\mu^*(E) &= \mu^*(E \cap A) + \mu^*\left(E \cap (X \setminus A)\right)\\ &= \mu^*(E \cap A) + \mu^*\left(E \cap (X \setminus A) \cap B\right) + \mu^*\left(E \cap (X \setminus A) \cap (X \setminus B)\right)\\ &= \mu^*(E \cap A) + \mu^*\left(E \cap (X \setminus A) \cap B\right) + \mu^*\left(E \cap (X \setminus (A \cup B))\right)\end{aligned} \tag{1.2}$$

Si noti che, dal momento che

$$(E \cap A) \cup (E \cap (X \setminus A) \cap B) = E \cap (A \cup B),$$

si ha che, per (1.2),

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap (A \cup B)) + \mu^*\left(E \cap (X \setminus (A \cup B))\right).$$

Pertanto, $A \cup B \in \mathscr{G}$ e ciò permette di concludere. Siano ora $A, B \in \mathscr{G}$ tali che $A \cap B = \emptyset$. Si ha che

$$\begin{aligned}\mu^*(A \cup B) &= \mu^*((A \cup B) \cap A) + \mu^*((A \cup B) \cap (X \setminus A))\\ &= \mu^*(A) + \mu^*(B),\end{aligned}$$

da cui segue che μ^* è additiva.

Mostriamo infine che $\mathscr{G}$ è una σ-algebra. Sia $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una successione di elementi di $\mathscr{G}$. Mostriamo che

$$S = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathscr{G}.$$

Dal momento che $\mathscr{G}$ è un'algebra, non è restrittivo supporre che gli insiemi A_j siano a due a due disgiunti. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, poniamo

$$S_n = \bigcup_{j=0}^{n} A_j.$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, utilizzando più volte la σ-subadditività di μ^* e l'uguaglianza (1.1), si ottiene che

$$\begin{aligned}
\mu^*(E \cap (X \setminus S)) + \mu^*(E \cap S) &\leq \mu^*(E \cap (X \setminus S)) + \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu^*(E \cap A_j) \\
&= \lim_n \left(\mu^*(E \cap (X \setminus S)) + \sum_{j=0}^{n} \mu^*(E \cap A_j) \right) \\
&= \lim_n \left(\mu^*(E \cap (X \setminus S)) + \mu^*(E \cap S_n) \right).
\end{aligned}$$

Dal momento che $X \setminus S \subset X \setminus S_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha che

$$\begin{aligned}
\mu^*(E \cap (X \setminus S)) + \mu^*(E \cap S) &\leq \limsup_n \left(\mu^*(E \cap S_n) + \mu^*(E \cap (X \setminus S_n)) \right) \\
&= \mu^*(E).
\end{aligned}$$

Pertanto, si ottiene che $S \in \mathscr{G}$ e $\mathscr{G}$ è una σ-algebra. $\square$

Una volta raccolti i risultati preliminari necessari, è ora possibile enunciare e dimostrare il Teorema di Carathéodory.

Teorema 1.4.8 (Teorema di Carathéodory)**.** *Sia $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ un anello e sia $\mathscr{M}$ la σ-algebra generata da $\mathscr{A}$. Sia*

$$\mu \colon \mathscr{A} \to [0, +\infty]$$

una mappa σ-additiva e tale che $\mu(\emptyset) = 0$. Allora è possibile estendere μ ad una misura su $\mathscr{M}$. Se μ è σ-finita, allora tale estensione è unica.

Dimostrazione. Dal momento che μ è σ-additiva, si ha che μ è σ-subadditiva. Per la Proposizione 1.4.5 si ha che μ^* è σ-subadditiva su $\mathscr{P}(X)$ ed estende μ. Proviamo ora che μ^* è una misura. Dal momento che μ^* estende μ, si ha che

$$\mu^*(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0.$$

Inoltre, per il Teorema 1.4.7, dal momento che $\mathscr{A}$ è un anello e μ è σ-additiva, quindi additiva, si ha che $\mathscr{G}$ è una σ-algebra contenente $\mathscr{M}$ e μ^* è σ-additiva su $\mathscr{G}$, quindi su $\mathscr{M}$. Nel caso in cui μ sia σ-finita, l'unicità segue direttamente dalla Proposizione 1.4.4. $\square$

1.4.2 Integrale di Lebesgue-Stiltjes

Il nostro scopo consiste nell'andare ad indagare su una possibile corrispondenza tra misure di Borel finite e una mappe appartenenti ad una certa classe di funzioni non decrescenti. Diamo innanzitutto la definizione di *funzione di ripartizione.*

Definizione 1.4.9. Data una misura μ definita sulla σ-algebra di Borel $\mathscr{B}(\mathbb{R})$, si dice *funzione di ripartizione* di μ la funzione

$$F\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$$

definita da

$$F(x) = \mu\left((-\infty, x]\right)$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Si noti che dalla monotonia di μ segue direttamente che F è non decrescente. Siano infatti $x, y \in \mathbb{R}$ tali che $x \leq y$. Allora si ha che

$$(-\infty, x] \subseteq (-\infty, y].$$

Per la monotonia di μ si ha che

$$F(x) = \mu\left((-\infty, x]\right) \leq \mu\left((-\infty, y]\right) = F(y),$$

da cui segue la tesi. Inoltre, si ha che F è continua a destra. Sia $x \in \mathbb{R}$ e sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$ tale che $x_n > x_{n+1} > x$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $x_n \underset{n}{\to} x$. Si noti che

$$(-\infty, x] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (-\infty, x_n],$$

pertanto, si ottiene che

$$F(x) = \mu\left((-\infty, x_n]\right) = \lim_n \mu\left((-\infty, x_n]\right) = \lim_n F(x_n),$$

da cui segue la tesi. Infine, si noti che

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) \in [0, +\infty).$$

Di seguito viene enunciato e dimostrato il risultato principale di questa sezione.

Teorema 1.4.10. *Sia $F\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ una funzione non decrescente e continua a destra tale che*

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) \in [0, +\infty).$$

Allora esiste un'unica misura finita μ su $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ tale che F sia la funzione di ripartizione di μ.

Dimostrazione. Poniamo innanzitutto

$$\mathscr{S} = \{(a, b] \mid a \in [-\infty, +\infty),\ b \in \mathbb{R}, a < b\}.$$

Sia $\mathscr{A}$ l'anello generato da $\mathscr{S}$, che consiste di unioni disgiunte finite di intervalli in $\mathscr{S}$. Poniamo per convenzione $F(-\infty) = 0$ e

$$\mu\left((a, b]\right) = F(b) - F(a) \tag{1.3}$$

per ogni $a \in [-\infty, +\infty)$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, tali che $(a, b] \in \mathscr{S}$.

Per prima cosa andiamo ad estendere μ all'anello $\mathscr{A}$ e mostriamo che μ è ben definita. Dati $n, m \in \mathbb{N}$, $n > 0$, $m > 0$ e due partizioni disgiunte $\{I_j\}_{j=1}^n$ e $\{J_j\}_{j=1}^m$ di $\mathscr{A}$, diremo che $\{J_j\}_{j=1}^m$ è più fine di $\{I_j\}_{j=1}^n$ se ogni intervallo I_i per ogni $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq n$ è unione disgiunta di alcuni intervalli J_j per qualche $j \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq m$. Per mostrare che μ è ben definita, occorre dimostrare che

$$\sum_{j=1}^{n} \mu(I_j) = \sum_{j=1}^{m} \mu(J_j)$$

se $\{J_j\}_{j=1}^m$ è più fine di $\{I_j\}_{j=1}^m$. Si noti che è sufficiente dimostrare che, dato $I \in \mathscr{S}$ e data $\{E_j\}_{j=1}^k$ famiglia di elementi di $\mathscr{S}$ a due a due disgiunti, con $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$, tale che

$$I = \bigcup_{j=1}^{k} E_j,$$

si ha che

$$\mu(I) = \sum_{j=1}^{k} \mu(E_j).$$

Tale proprietà segue direttamente per induzione osservando che, ponendo $I = (a, b]$, con $a \in [-\infty, +\infty)$, $b \in \mathbb{R}$ tali che $a < b$, si ha che

$$(a, b] = (a, c] \cup (c, b]$$

e, pertanto,

$$\mu((a, b]) = F(b) - F(a) = F(b) - F(c) + F(c) - F(a) = \mu((a, c]) + \mu((c, b]).$$

Proviamo ora che μ è additiva. Siano $A, B \in \mathscr{A}$ tali che $A \cap B = \emptyset$. Si noti che, dati $n, m \in \mathbb{N}$, $n > 0$, $m > 0$ e date $\{I_j\}_{j=1}^n$ e $\{J_j\}_{j=1}^m$ due decomposizioni di A e B rispettivamente in intervalli di $\mathscr{S}$ a due a due disgiunti, la famiglia $\{I_j\}_{j=1}^n \cup \{J_j\}_{j=1}^m$ è una decomposizione di $A \cup B$ in intervalli di $\mathscr{S}$ a due a due disgiunti. Pertanto, si ottiene che

$$\mu(A \cup B) = \sum_{i=1}^{n} \mu(I_i) + \sum_{j=1}^{m} (J_j) = \mu(A) + \mu(B)$$

e ciò permette di concludere.

Proviamo che μ è σ-additiva. Siano $E \in \mathscr{A}$ e $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di elementi di $\mathscr{A}$ tali che

$$E \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n.$$

Supponiamo innanzitutto che $E \in \mathcal{S}$, ossia $E = (a, b]$ per certi $a \in [-\infty, +\infty)$ e $b \in \mathbb{R}$ tali che $a < b$. Si noti che, dal momento che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che E_n è un'unione finita di intervalli di $\mathcal{S}$, per ogni $\varepsilon > 0$, è possibile trovare G_n unione finita di intervalli di $\mathcal{S}$ tale che $E_n \subset G_n$,

$$\mu(G_n) \leq \mu(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

e $E_n \subset G_n^\circ$. Dal momento che per ogni $a' \in \mathbb{R}$, $a' > a$ si ha che

$$[a', b] \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n^\circ.$$

e siccome $[a', b]$ è compatto per ogni $a' \in \mathbb{R}$, $a' > a$, esiste $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$ tale che

$$[a', b] \subseteq \bigcup_{n=0}^{k} G_n.$$

Per l'additività di μ su $\mathscr{A}$ si ottiene che

$$\begin{aligned}
\mu\left((a', b]\right) &\leq \mu\left(\sum_{n=1}^{k} G_n\right) \\
&\leq \sum_{n=1}^{k} \mu(G_n) \\
&\leq \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{\varepsilon}{2^n} + \mu(E_n)\right) \\
&\leq \varepsilon + \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n).
\end{aligned}$$

Passando al limite per $\varepsilon \to 0^+$ e per $a' \to a^+$, si ottiene la tesi. La disuguaglianza opposta segue dalla monotonia. Per il Teorema di Carathéodory è possibile estendere μ ad una misura su $\mathscr{B}(\mathbb{R}) = \sigma\left(\mathscr{A}\right)$ che, con abuso di notazione, chiameremo ancora μ. Ponendo $a = -\infty$ e passando al limite per $b \to +\infty$ in (1.3), si ottiene che

$$\mu(\mathbb{R}) = \lim_{x\to+\infty} F(x) \in \mathbb{R}$$

e ponendo $a = -\infty$ in (1.3) si ottiene che, per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$\mu\left((-\infty, x]\right) = F(x),$$

da cui segue che F è funzione di ripartizione di μ. $\square$

Una volta enunciato e dimostrato il risultato precedente, andiamo a definire l'integrale di Lebesgue Stiltjes.

Definizione 1.4.11. Sia $F\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ una funzione non decrescente e continua a destra tale che

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$

e

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) \in [0, +\infty).$$

Definiamo l'*integrale di Lebesgue-Stiltjes* di $f \in L^0(\mathbb{R}, \mu_F)$, dove μ_F è la misura finita costruita nel Teorema 1.4.10, denotato con

$$\int_{\mathbb{R}} f dF = \int_{\mathbb{R}} f d\mu_F.$$

Capitolo 2

Operatore massimale di Hardy-Littlewood

Dopo aver trattato alcuni argomenti preliminari, andiamo ora ad introdurre il primo strumento fondamentale della tesi, ovvero gli operatori massimali di Hardy-Littlewood. In particolare, studieremo due tipi di tali operatori, più precisamente l'operatore massimale di Hardy-Littlewood centrato e l'operatore massimale di Hardy-Littlewood non centrato e andremo ad analizzarne alcune proprietà fondamentali. Questi operatori si ottengono studiando, data una funzione localmente integrabile, le medie integrali di tale funzione su palle aperte di raggio sempre maggiore e considerandone poi l'estremo superiore al variare del raggio.

La prima parte del capitolo sarà dedicata alle definizioni principali e alle prime proprietà fondamentali di questi operatori. In seguito andremo a studiare il loro comportamento su spazi L^p per $p \in [1, \infty]$. Si vedrà innanzitutto che gli operatori massimali di Hardy-Littlewood centrato e non centrato sono operatori limitati da $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ in sé ed inoltre sono limitati come operatori da $L^1(\mathbb{R}^d)$ nello spazio L^1 debole $L^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$. Una volta ottenuti questi risultati sarà possibile applicare il Teorema di interpolazione di Marcinkiewicz per ottenere che tali operatori sono limitati da $L^p(\mathbb{R}^d)$ in sé. Per quanto riguarda gli argomenti trattati in questa prima parte del capitolo si vedano [5] e [6].

Concludiamo infine studiando il comportamento dell'operatore massimale di Hardy-Littlewood centrato e non centrato su spazi di Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ per ogni $p \in (1, \infty]$. Lo scopo di questa sezione consiste nell'andare ad analizzare nel dettaglio l'articolo [8] di J.Kinnunen pubblicato nel 1997, in cui si dimostra che tali operatori sono limitati dallo spazio di Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ in sé, per $p \in (1, \infty]$. Vedremo infine una parziale estensione di questo risultato per l'operatore massimale di Hardy-Littlewood non centrato nel caso $p = 1$ e $d = 1$ analizzando l'articolo [12].

2.1 Operatori di Hardy-Littlewood

Introduciamo ora gli operatori a cui abbiamo accennato all'inizio del capitolo. In questa sezione andremo a studiare le definizioni principali e le prime proprietà fondamentali, concludendo con un semplice esempio che permetterà di ottenere una visione più diretta degli oggetti studiati.

Consideriamo lo spazio di misura $(\mathbb{R}^d, \mathscr{L}^d)$, con $d \in \mathbb{N}$, $d > 0$, dove $\mathscr{L}^d$ denota la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^d$.

Definizione 2.1.1. Definiamo l'operatore

$$M^C \colon L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^d\right) \to L^0\left(\mathbb{R}^d\right),$$

tale che, per ogni $f \in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^d\right)$,

$$M^C f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\mathscr{L}^d\left(B_{\mathbb{R}^d}(x,r)\right)} \int_{B_{\mathbb{R}^d}(x,r)} |f(y)|dy,$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^d$, detto *operatore massimale di Hardy-Littlewood centrato.* Definiamo poi l'operatore

$$M \colon L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^d\right) \to L^0\left(\mathbb{R}^d\right),$$

tale che, per ogni $f \in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^d\right)$,

$$Mf(x) = \sup_{\{B \subseteq \mathbb{R}^d | B \text{ palla, } x \in B\}} \frac{1}{\mathscr{L}^d(B)} \int_B |f(y)|dy,$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^d$, detto *operatore massimale di Hardy-Littlewood non centrato.*

Si noti che la definizione di M^C è ben posta. Infatti, per ogni $f \in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^d\right)$, si ha che $M^C f$ è misurabile secondo Lebesgue, dal momento che $M^C f$ è inferioremente semicontinua. Per provare questo fatto, occorre dimostrare che l'insieme

$$U_t = \{x \in \mathbb{R}^d \mid M^C f(x) > t\}$$

è aperto in $\mathbb{R}^d$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Siano $t \in \mathbb{R}$ e $x \in U_t$. Allora si ha che $M^C f(x) > t$ e, pertanto, esiste $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, tale che

$$M^C f(x) \geq \frac{1}{\mathscr{L}^d\left(B_{\mathbb{R}^d}(x,r)\right)} \int_{B_{\mathbb{R}^d}(x,r)} |f(y)|dy > t.$$

Scegliamo ora $s > r$ sufficientemente piccolo tale che

$$M^C f(x) \geq \frac{1}{\mathscr{L}^d\left(B_{\mathbb{R}^d}(x,r)\right)} \int_{B(x,r)} |f(y)|dy > \frac{1}{\mathscr{L}^d\left(B_{\mathbb{R}^d}(x,s)\right)} \int_{B_{\mathbb{R}^d}(x,r)} |f(y)|dy > t.$$

Ciò segue dal Teorema dei valori intermedi, dal momento che la funzione

$$\left((0,+\infty) \ni x \mapsto \frac{1}{x^d} \in (0,+\infty)\right)$$

è continua e strettamente decrescente ed inoltre $\mathscr{L}^d\left(B_{\mathbb{R}^d}(x,r)\right) = c_d r^d$ per ogni $x \in \mathbb{R}^d$ e $r > 0$, dove $c_d = \mathscr{L}^d\left(B_{\mathbb{R}^d}(0,1)\right)$ è una costante indipendente da x e da r.

Sia ora $z \in B_{\mathbb{R}^d}(x, s-r)$. Si noti che, dato $w \in B_{\mathbb{R}^d}(x,r)$, allora $|w-x| < r$, da cui segue che

$$|w-z| \leq |w-x| + |x-z| < r + (s-r) = s.$$

Pertanto si ha che $w \in B_{\mathbb{R}^d}(z,s)$, da cui segue che $B_{\mathbb{R}^d}(x,r) \subseteq B_{\mathbb{R}^d}(z,s)$. Ma allora si ha che

$$M^C f(z) \geq \frac{1}{\mathscr{L}^d\left(B_{\mathbb{R}^d}(z,s)\right)} \int_{B_{\mathbb{R}^d}(z,s)} |f(y)|dy > \frac{1}{\mathscr{L}^d\left(B_{\mathbb{R}^d}(x,s)\right)} \int_{B_{\mathbb{R}^d}(x,r)} |f(y)|dy > t,$$

da cui segue che $z \in U_t$, quindi, per l'arbitrarietà di $z \in B_{\mathbb{R}^d}(x, s-r)$, si ha che $B_{\mathbb{R}^d}(x, s-r) \in U_t$. Ma allora si ha che $U_t \subseteq \mathbb{R}^d$ è un aperto e, pertanto, $M^C f$ è inferiormente semicontinua. Con un ragionamento simile, si deduce che, nel caso in cui $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, allora Mf è inferiormente semicontinua su $\mathbb{R}^d$, pertanto anche l'operatore M è ben definito.

Studiamo ora la relazione che intercorre tra gli operatori massimali di Hardy-Littlewood centrato e non centrato.

Proposizione 2.1.2. *Per ogni* $f \in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^d\right)$ *si ha che*

$$M^C f(x) \leq Mf(x) \leq 2^d M^C f(x),$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^d$.

Dimostrazione. Sia $f \in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^d\right)$. Per ogni $x \in \mathbb{R}^d$ si ha che

$$\begin{aligned} M^C f(x) &= \sup_{r>0} \frac{1}{\mathscr{L}^d\left(B_{\mathbb{R}^d}(x,r)\right)} \int_{B_{\mathbb{R}^d}(x,r)} |f(y)|dy \\ &\leq \sup_{\{B \subseteq \mathbb{R}^d | B \text{ palla}, \, x \in B\}} \frac{1}{\mathscr{L}^d(B)} \int_B |f(y)|dy \\ &= Mf(x). \end{aligned}$$

D'altra parte, dati $r > 0$, $B_r \subset \mathbb{R}^d$ palla di raggio r e $x \in B_r$, si ha che

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathscr{L}^d(B_r)} \int_{B_r} |f(y)|dy &\leq \frac{1}{\mathscr{L}^d(B_r)} \int_{B(x,2r)} |f(y)|dy \\ &= \frac{\mathscr{L}^d\left(B_{\mathbb{R}^d}(x,2r)\right)}{\mathscr{L}^d(B_r)} \frac{1}{\mathscr{L}^d\left(B_{\mathbb{R}^d}(x,2r)\right)} \int_{B_{\mathbb{R}^d}(x,2r)} |f(y)|dy \\ &\leq \frac{\mathscr{L}^d\left(B_{\mathbb{R}^d}(x,2r)\right)}{\mathscr{L}^d(B_r)} M^C f(x) \\ &= 2^d M^C f(x). \end{aligned}$$

Passando all'estremo superiore sulle palle $B \in \mathbb{R}^d$ tale che $x \in B$, si ottiene che

$$Mf(x) \leq 2^d M^C f(x),$$

da cui segue la tesi. $\square$

Si osservi ora che gli operatori M^C e M appena introdotti sono operatori sublineari. Infatti, per ogni $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$,

$$\begin{aligned}
M^C(\alpha f + \beta g)(x) &= \sup_{r>0} \frac{1}{\mathscr{L}^d\left(B_{\mathbb{R}^d}(x,r)\right)} \int_{B_{\mathbb{R}^d}(x,r)} |\alpha f(y) + \beta g(y)| dy \\
&\leq \sup_{r>0} \frac{1}{\mathscr{L}^d\left(B_{\mathbb{R}^d}(x,r)\right)} \int_{B_{\mathbb{R}^d}(x,r)} |\alpha||f(y)| dy \\
&\quad + \sup_{r>0} \frac{1}{\mathscr{L}^d\left(B_{\mathbb{R}^d}(x,r)\right)} \int_{B_{\mathbb{R}^d}(x,r)} |\beta||g(y)| dy \\
&= \alpha M^C f(x) + \beta M^C g(x)
\end{aligned}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^d$ e il conto per M è analogo.

Si riporta ora un breve esempio di calcolo degli operatori massimali di Hardy-Littlewood centrato e non centrato su $\mathbb{R}$ per la funzione caratteristica di un intervallo chiuso e limitato. Lo scopo consiste studiare un semplice caso in cui è possibile descrivere esplicitamente la funzione massimale.

Esempio 2.1.3. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e sia $f = \mathbb{1}_{[a,b]}$. Dato $x \in \mathbb{R}$, si ha che

$$\begin{aligned}
M^C f(x) &= \sup_{r>0} \frac{1}{\mathscr{L}\left(B_{\mathbb{R}}(x,r)\right)} \int_{B_{\mathbb{R}}(x,r)} |\mathbb{1}_{[a,b]}(y)| dy \\
&= \sup_{r>0} \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} \mathbb{1}_{[a,b]}(y) dy \\
&= \begin{cases} \frac{b-a}{2|x-b|} & \text{se } x \leq a \\ 1 & \text{se } x \in (a,b) \\ \frac{b-a}{2|x-b|} & \text{se } x \geq b \end{cases} .
\end{aligned}$$

Si noti che

$$\lim_{x \to a^+} M^C f(x) = 1 \neq \frac{1}{2} = \lim_{x \to a^-} M^C f(x),$$

pertanto $M^C f$ è una funzione discontinua su $\mathbb{R}$. Inoltre, dato $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
M f(x) &= \sup_{\{(c,d) \subset \mathbb{R} | x \in (c,d)\}} \frac{1}{\mathscr{L}(c,d)} \int_c^r |\mathbb{1}_{[a,b]}(y)| dy \\
&= \sup_{\{(c,d) \subset \mathbb{R} | x \in (c,d)\}} \frac{1}{d-c} \int_c^d \mathbb{1}_{[a,b]}(y) dy \\
&= \begin{cases} \frac{b-a}{|x-b|} & \text{se } x \leq a \\ 1 & \text{se } x \in (a,b) \\ \frac{b-a}{|x-b|} & \text{se } x \geq b \end{cases} .
\end{aligned}$$

Si noti che, a differenza di quanto accade nel caso precedente, la funzione Mf è continua su $\mathbb{R}$.

2.2 Operatori di Hardy-Littlewood su spazi di Lebesgue

Il nostro scopo è ora quello di andare ad enunciare e dimostrare un risultato che permette di stabilire che gli operatori massimali di Hardy-Littlewood centrato e non centrato sono di tipo debole $(1,1)$. Usando il Teorema di interpolazione Marcinkiewicz, sarà poi possibile arrivare a considerazioni ulteriori. Il risultato principale di questa sezione è illustrato nel Teorema 2.2.3. Proviamo innanzitutto la seguente proprietà.

Proposizione 2.2.1. *Gli operatori massimali di Hardy-Littlewood centrato e non centrato sono limitati come operatori da $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ in $L^\infty(\mathbb{R}^d)$.*

Dimostrazione. Proviamo innanzitutto la tesi per l'operatore massimale di Hardy-Littlewood non centrato M. Sia $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Per ogni $x \in \mathbb{R}^d$ si ha che

$$|Mf(x)| \leq \sup_{\{B \subseteq \mathbb{R}^d | B \text{ palla, } x \in B\}} \frac{1}{\mathscr{L}^d(B)} \int_B |f(y)|dy \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}.$$

Segue che $\|Mf\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$. Studiamo ora il caso dell'operatore massimale di Hardy-Littlewood centrato. Data $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, si ha che, per ogni $x \in \mathbb{R}^d$, per la Proposizione 2.1.2,

$$|M^C f(x)| \leq |Mf(x)| \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)},$$

per quanto appena visto. Segue che $\|M^C f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$. □

Prima di poter passare al risultato principale di questa sezione, è necessario enunciare e dimostrare una versione del Lemma di ricoprimento di Vitali per una collezione finita di palle in $\mathbb{R}^d$.

Lemma 2.2.2. *Siano $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$ e $\mathscr{B} = \{B_i\}_{i=1}^k$ una collezione finita di palle aperte contenute in $\mathbb{R}^d$. Allora esistono $l \in \mathbb{N}$, $0 < l < k$, ed una sottofamiglia di $\mathscr{B}$ di palle a due a due disgiunte $\{B_{j_r}\}_{r=1}^l$ tale che*

$$\bigcup_{i=1}^k B_i \subseteq \bigcup_{r=1}^l 3B_{j_r}.$$

In particolare, si ha che

$$\sum_{r=1}^l \mathscr{L}^d(B_{j_r}) \geq \frac{1}{3^d} \mathscr{L}^d\left(\bigcup_{i=1}^k B_i\right).$$

Dimostrazione. A meno di rinominare gli indici, possiamo supporre senza perdita di generalità che $\mathscr{L}^d(B_{i+1}) \geq \mathscr{L}^d(B_i)$ per ogni $i \in \{1, ..., k-1\}$. Sia $j_1 = 1$. Per ogni $i \in \{1, ..., k-1\}$ sia j_{i+1} il minimo tra gli indici $s > j_i$ tali che

$$\left(\bigcup_{m=1}^i B_{j_m}\right) \cap B_s = \emptyset.$$

Siccome la collezione iniziale $\mathscr{B}$ è finita, è possibile ripetere questa procedura un numero finito di volte e tale processo terminerà dopo un numero finito di passi. Sia l tale numero di passi. Si ottiene così una collezione di palle aperte a due a due disgiunte $\{B_{j_r}\}_{r=1}^{l}$. Sia ora $B_m \in \mathscr{B}$ una palla non ancora selezionata nel processo appena descritto. In tal caso, si ha che $m \neq j_r$ per ogni $r \in \{1, ..., l\}$ e B_m dovrà intersecare una palla B_{j_r} per un certo $r \in \{1, ..., l\}$ tale che $j_r < m$. Ma allora si ha che $\mathscr{L}^d(B_m) \leq \mathscr{L}^d(B_{j_r})$ ed inoltre $B_m \subseteq 3B_{j_r}$. Per l'arbitrarietà di m si ha che l'unione delle palle non selezionate nel processo di cui sopra, è contenuta nell'unione delle palle ottenute dalle palle selezionate, triplicandone il raggio. Pertanto si ha che

$$\mathscr{L}^d\left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right) \leq \mathscr{L}^d\left(\bigcup_{r=1}^{l} 3B_{j_r}\right) \leq \sum_{r=1}^{l} \mathscr{L}^d(3B_{j_r}) = 3^d \sum_{r=1}^{l} \mathscr{L}^d(B_{j_r}).$$

$\square$

Teorema 2.2.3. *Gli operatori massimali di Hardy-Littlewood centrato e non centrato sono di tipo debole* $(1,1)$ *con costante al più pari a* 3^d *e di tipo forte* (p,p) *per ogni* $p \in (1, +\infty)$, *con costante al più pari a* $3^{\frac{d}{p}} \frac{p}{p-1}$.

Dimostrazione. Proviamo innanzitutto la tesi per l'operatore massimale di Hardy-Littlewood non centrato. Mostriamo per prima cosa che M è di tipo debole $(1,1)$. Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ e, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, sia $E_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^d \mid Mf(x) > \alpha\}$. Lo scopo è dimostrare che

$$\sup_{\alpha > 0} \alpha \mathscr{L}^d(E_\alpha) \leq c\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$$

per una certa costante $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$. Fissiamo $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Per l'interna regolarità della misura di Lebesgue si ha che

$$\mathscr{L}^d(E_\alpha) = \sup_{K \text{ compatto},\ K \subset E_\alpha} \mathscr{L}^d(K).$$

Sia quindi $K \subset E_\alpha$ compatto. Dato $x \in K$, per ipotesi si ha che $Mf(x) > \alpha$. Allora esiste una palla $B_x \subseteq \mathbb{R}^d$ tale che $x \in B_x$ e

$$\frac{1}{\mathscr{L}^d(B_x)} \int_{B_x} |f(t)| dt > \alpha.$$

Sia ora $y \in B_x$. Allora si ha che

$$Mf(y) = \sup_{\{B \subseteq \mathbb{R}^d \mid B \text{ palla},\ y \in B\}} \frac{1}{\mathscr{L}^d(B)} \int_B |f(t)| dt \geq \frac{1}{\mathscr{L}^d(B_x)} \int_{B_x} |f(t)| dt > \alpha,$$

pertanto $y \in E_\alpha$. Si deduce quindi che, per l'arbitrarietà di $y \in B_x$, si ha che $B_x \subset E_\alpha$ e, pertanto, E_α è un aperto di $\mathbb{R}^d$. Ma allora, per ogni $x \in K$ esiste una palla $B_x \subseteq \mathbb{R}^d$ tale che $x \in B_x$ e $B_x \subset E_\alpha$. Dal momento che K è compatto, esistono

$n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, $x_1, ..., x_n \in K$ ed una collezione di palle aperte $\mathscr{B} = \left\{B_{x_j}\right\}_{j=1}^{n}$ tali che $x_j \in B_{x_j}$ per ogni $j = 1, ..., n$,

$$\frac{1}{\mathscr{L}^d\left(B_{x_j}\right)} \int_{B_{x_j}} |f(t)| dt > \alpha$$

per ogni $j = 1, ..., n$ e

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{n} B_{x_j} \subset E_\alpha$$

per ogni $j = 1, ..., n$. Per il Lemma 2.2.2 esistono $m \in \mathbb{N}$, $m > 0$ e $\left\{B'_j\right\}_{j=1}^{m}$ sottofamiglia di $\mathscr{B}$ di palle aperte a due a due disgiunte tale che

$$\frac{1}{\alpha} \int_{B'_j} |f(t)| dt > \mathscr{L}^d(B'_j)$$

per ogni $j \in \{1, ..., m\}$ e

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} 3B'_j.$$

Segue che

$$\begin{aligned} \mathscr{L}^d(K) &\le \mathscr{L}^d\left(\bigcup_{j=1}^{m} 3B'_j\right) \le \sum_{j=1}^{m} \mathscr{L}^d(3B'_j) = 3^d \sum_{j=1}^{m} \mathscr{L}^d(B'_j) < \frac{3^d}{\alpha} \sum_{j=1}^{m} \int_{B'_j} |f(t)| dt \\ &= \frac{3^d}{\alpha} \int_{\bigsqcup_{j=1}^{m} B'_j} |f(t)| dt \le \frac{3^d}{\alpha} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}, \end{aligned}$$

dove l'ultima disuguaglianza è giustificata dal fatto che la misura $|f|dx$ è σ-additiva e le palle in $\left\{B'_j\right\}_{j=1}^{m}$ sono a due a due disgiunte. Ma allora, si ha che

$$\mathscr{L}^d(E_\alpha) = \sup_{K \text{compatto},\ K \subset E_\alpha} \mathscr{L}^d(K) \le \frac{3^d}{\alpha} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

Segue che l'operatore M è di tipo debole $(1, 1)$. Inoltre, per la Proposizione 2.2.1, M è limitato da $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ in $L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Per il Teorema 1.3.2 si ha che M è di tipo forte (p, p) per ogni $p \in (1, +\infty)$ e, data $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$,

$$\|Mf\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \le 3^{\frac{d}{p}} \frac{p}{p-1} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

per ogni $p \in (1, +\infty)$. Proviamo ora il risultato per l'operatore massimale di Hardy-Littlewood centrato. Si noti che, data $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, per la Proposizione 2.1.2, si ha che

$$\left\{x \in \mathbb{R}^d \mid M^C f(x) > \alpha\right\} \subseteq \left\{x \in \mathbb{R}^d \mid Mf(x) > \alpha\right\},$$

pertanto

$$\mathscr{L}^d\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d \mid M^C f(x) > \alpha\right\}\right) \leq \mathscr{L}^d\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d \mid Mf(x) > \alpha\right\}\right).$$

Segue che

$$\begin{aligned}\sup_{\alpha>0} \alpha \mathscr{L}^d\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d \mid M^C f(x) > \alpha\right\}\right) &\leq \sup_{\alpha>0} \alpha \mathscr{L}^d\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d \mid Mf(x) > \alpha\right\}\right) \\ &\leq 3^d \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d},\end{aligned}$$

pertanto M^C è di tipo debole $(1,1)$. Inoltre, sappiamo che, per la Proposizione 2.2.1, M^C è limitato da $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ in $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ e la tesi segue dal Teorema 1.3.2 come sopra. □

Si noti che gli operatori massimali di Hardy-Littlewood centrato e non centrato definiti su $L^1(\mathbb{R}^d)$, in generale non assumono valori in $L^1(\mathbb{R}^d)$, come mostra il seguente esempio.

Esempio 2.2.4. Sia $R \in \mathbb{R}$, $R > 0$. Consideriamo la funzione caratteristica $\mathbb{1}_{B_{\mathbb{R}^d}(0,R)} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Si osservi che, per ogni $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned}M\mathbb{1}_{B_{\mathbb{R}^d}(0,R)}(x) &= \sup_{\{B \subseteq \mathbb{R}^d \mid B \text{ palla, } x \in B\}} \frac{1}{\mathscr{L}^d(B)} \int_B \mathbb{1}_{B_{\mathbb{R}^d}(0,R)}(y)dy \\ &\geq \frac{1}{\mathscr{L}^d(B_{\mathbb{R}^d}(0, R+|x|))} \int_{B_{\mathbb{R}^d}(0,R+|x|)} \mathbb{1}_{B_{\mathbb{R}^d}(0,R)}(y)dy \\ &= c_d \frac{R^d}{(|x|+R)^d}.\end{aligned}$$

In particolare, $M\mathbb{1}_{B_{\mathbb{R}^d}(0,R)} \notin L^1(\mathbb{R}^d)$.

Prima di procedere con lo studio dei successivi risultati preliminari che saranno fondamentali per lo sviluppo della tesi, è interessante notare come il Teorema 1.2.5 permetta di ottenere il Teorema di differenziazione di Lebesgue.

Corollario 2.2.4.1 (Teorema di differenziazione di Lebesgue)**.** *Sia $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Si ha che*

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{1}{\mathscr{L}^d(B_{\mathbb{R}^d}(x,r))} \int_{B_{\mathbb{R}^d}(x,r)} f(y)dy = f(x)$$

per q.o. $x \in \mathbb{R}^d$.

Dimostrazione. Per ogni $r > 0$, poniamo

$$T_r f(x) = \frac{1}{\mathscr{L}^d(B_{\mathbb{R}^d}(x,r))} \int_{B_{\mathbb{R}^d}(x,r)} f(y)dy$$

per q.o. $x \in \mathbb{R}^d$ e per ogni $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Si osservi che $\{T_r\}_{r>0}$ è una famiglia di operatori lineari su $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ e l'operatore massimale ad essa associato è esattamente l'operatore massimale di Hardy-Littlewood centrato M^C. Proviamo innanzitutto che la tesi è verificata per funzioni in $C_c(\mathbb{R}^d)$. Sia quindi $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$. Per ogni $x \in \mathbb{R}^d$, si ha che

$$\left| \frac{1}{\mathscr{L}^d(B_{\mathbb{R}^d}(x,r))} \int_{B_{\mathbb{R}^d}(x,r)} f(y)dy - f(x) \right| \leq \frac{1}{\mathscr{L}^d(B_{\mathbb{R}^d}(x,r))} \left| \int_{B_{\mathbb{R}^d}(x,r)} (f(y) - f(x))dy \right|$$
$$\leq \frac{1}{\mathscr{L}^d(B_{\mathbb{R}^d}(x,r))} \int_{B_{\mathbb{R}^d}(0,r)} |f(x-y) - f(x)|dy.$$

Siccome f è continua in x, si ha che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che, se $y \in \mathbb{R}^d$ è tale che $|y| < \delta_\varepsilon$, allora $|f(x-y) - f(x)| < \varepsilon$. Segue che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $r_\varepsilon > 0$ tale che, se $r < r_\varepsilon$, allora

$$\left| \frac{1}{\mathscr{L}^d(B_{\mathbb{R}^d}(x,r))} \int_{B_{\mathbb{R}^d}(x,r)} f(y)dy - f(x) \right| < \varepsilon,$$

da cui segue la tesi per funzioni continue a supporto compatto su $\mathbb{R}^d$. Proviamo infine che la tesi vale per ogni $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Ricordiamo che, per il Teorema 2.2.3, si ha che M^C è un operatore di tipo debole $(1,1)$. Pertanto, per il Teorema 1.2.5, l'insieme

$$E = \left\{ f \in L^1(\mathbb{R}^d) \mid \lim_{r \to 0^+} T_r f(x) = f(x) \text{ per q.o. } x \in \mathbb{R}^d \right\}$$

è chiuso in $L^1(\mathbb{R}^d)$. Ma allora, per quanto appena provato, si ha che

$$L^1(\mathbb{R}^d) = \overline{C_c(\mathbb{R}^d)} \subseteq \overline{E} = E \subseteq L^1(\mathbb{R}^d),$$

da cui segue che $E = L^1(\mathbb{R}^d)$. □

2.3 Operatori di Hardy-Littlewood su spazi di Sobolev

Sia $d \in \mathbb{N}$, $d > 0$. Siamo interessati a studiare il caso in cui l'operatore massimale di Hardy-Littlewood è calcolato su una funzione che appartiene ad uno spazio di Sobolev. Nel corso di questa sezione studieremo innanzitutto il caso in cui la funzione di partenza u appartiene allo spazio $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ per $p \in (1, +\infty)$. In seguito, tratteremo una possibile parziale estensione dei risultati visti al caso $p = 1$ per l'operatore massimale di Hardy-Littlewood non centrato, lavorando però solamente in dimensione $d = 1$. Per quanto riguarda questo capitolo, si fa principalmente riferimento agli articoli [8] e [12].

2.3.1 Il caso $p \in (1, \infty]$ e d-dimensionale

Come anticipato nell'introduzione di questa sezione, studiamo innanzitutto il caso in cui $p \in (1, \infty]$. Le proprietà viste in questa sezione risultano essere valide in ogni dimensione $d \in \mathbb{N}$, $d > 0$. Prima di enunciare e dimostrare il risultato principale di questa sezione, raccolto qui nel Corollario 2.3.2.1, è opportuno studiare il seguente lemma, che prende il nome di Lemma di Mazur, per il quale si fa riferimento al testo [3]. Ci serviremo poi di alcuni risultati base della teoria degli spazi di Sobolev che riportiamo nell'Appendice A.

Lemma 2.3.1 (Lemma di Mazur)**.** *Sia X uno spazio di Banach e sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di elementi di X debolmente convergente ad un certo elemento $x_0 \in X$. Allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste una combinazione convessa $y_n \in X$ degli elementi della successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che la successione $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converga a x_0 in norma $\| \|_X$.*

Dimostrazione. Sia C il guscio convesso degli elementi x_n, con $n \in \mathbb{N}$. Per ipotesi si ha che x_0 appartiene alla chiusura debole di

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x_n\} \subseteq C$$

e, pertanto, appartiene anche alla chiusura debole di C. Ma, essendo C convesso, si ha che la chiusura debole di C coincide con la chiusura di C nella topologia indotta dalla $\| \|_X$, denotata con $\overline{C}$. Pertanto, $x_0 \in \overline{C}$. Ma allora, esiste una successione $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi di C, che per definizione di C è una combinazione convessa degli elementi della successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tale che $y_n \underset{n}{\to} x_0$ in norma $\| \|_X$. □

Andiamo ora ad enunciare e dimostrare il Teorema centrale di questa sezione, che mostra una proprietà di limitatezza per l'operatore massimale di Hardy-Littlewood da uno spazio di Sobolev in sè.

Teorema 2.3.2. *Sia $p \in (1, +\infty)$. Se $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, allora $M^C u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ e*

$$\left|\partial_i M^C u\right| \leq M^C \partial_i u$$

quasi ovunque su $\mathbb{R}^d$, per ogni $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq d$.

Dimostrazione. Sia $r > 0$. Consideriamo la funzione

$$\chi_r = \frac{\mathbb{1}_{B_{\mathbb{R}^d}(0,r)}}{\mathscr{L}^d(B_{\mathbb{R}^d}(0,r))}.$$

Per ogni $x \in \mathbb{R}^d$ si ha che

$$\frac{1}{\mathscr{L}^d(B_{\mathbb{R}^d}(0,r))} \int_{B_{\mathbb{R}^d}(x,r)} |u(y)|dy = |u| * \chi_r(x).$$

Si osservi che, dal momento che $|u| \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ e $\chi_r \in L^1(\mathbb{R}^d)$, per la Proposizione A.3.1 si ha che $|u| * \chi_r \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. Sia ora $(r_j)_{j\in\mathbb{N},\, j>0}$ un'enumerazione dei numeri razionali positivi. Dal momento che u è localmente integrabile, è possibile restringere l'insieme di numeri reali su cui si effettua l'estremo superiore nella definizione della funzione massimale, ad un estremo superiore su raggi che siano numeri razionali positivi. E' pertanto possibile scrivere

$$M^C u(x) = \sup_{j\in\mathbb{N},\, j>0} (|u| * \chi_{r_j})(x)$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^d$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$, definiamo le funzioni $v_k\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ tali che, per ogni $x \in \mathbb{R}^d$, si abbia

$$v_k(x) = \max_{j\in\mathbb{N},\, 1\le j\le k} (|u| * \chi_{r_j})(x)$$

Si noti che la successione $(v_k)_{k\in\mathbb{N},\, k>0}$ è crescente in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ e converge puntualmente a $M^C u$. Inoltre, utilizzando il Corollario A.3.3 ed il Corollario A.3.3.1, si ottiene che

$$\begin{aligned}
|\partial_i v_k| &= \left|\partial_i \left(\max_{j\in\mathbb{N},\, 1\le j\le k} (|u| * \chi_{r_j})\right)\right| \\
&\le \max_{1\le j\le k} \left|\partial_i (|u| * \chi_{r_j})\right| \\
&= \max_{1\le j\le k} \left|\chi_{r_j} * \partial_i |u|\right| \\
&= \max_{1\le j\le k} \left| \frac{1}{\mathscr{L}^d(B_{\mathbb{R}^d}(0,r))} \int_{B_{\mathbb{R}^d}(0,r)} |\partial_i |u|(y)|\, dy \right| \\
&\le \max_{1\le j\le k} \frac{1}{\mathscr{L}^d(B_{\mathbb{R}^d}(0,r))} \int_{B_{\mathbb{R}^d}(0,r)} |\partial_i |u|(y)|\, dy \\
&\le \max_{1\le j\le k} \frac{1}{\mathscr{L}^d(B_{\mathbb{R}^d}(0,r))} \int_{B_{\mathbb{R}^d}(0,r)} |\partial_i u(y)|\, dy \\
&= M^C \partial_i u
\end{aligned}$$

quasi ovunque su $\mathbb{R}^d$ e per ogni $i \in \mathbb{N}$, $1 \le i \le d$. Ma allora si ha che

$$\|\nabla v_k\|^p_{L^p(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla v_k(x)|^p\, dx \le \sum_{i=1}^d \|\partial_i v_k\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \le \sum_{i=1}^d \left\|M^C \partial_i u\right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

Inoltre, per il Teorema 2.2.3, si ha che

$$\begin{aligned}
\|v_k\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} &= \|v_k\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \|\nabla v_k\|_{L^p(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)} \\
&\le \left\|M^C u\right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \sum_{i=1}^d \left\|M^C \partial_i u\right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \\
&\le 3^{\frac{d}{p}} \frac{p}{p-1} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + 3^{\frac{d}{p}} \frac{p}{p-1} \sum_{i=1}^d \left\|M^C \partial_i u\right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} < +\infty
\end{aligned}$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$. Si deduce che la successione $(v_k)_{k\in\mathbb{N},\, k>0}$ è limitata nello spazio $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ rispetto alla sua norma. Dal momento che lo spazio $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ è uno spazio riflessivo, la topologia debole su tale spazio coincide con la topologia debole $*$. Ma allora, per il Teorema di Banach-Alaoglu-Bourbaki, si ha che la palla chiusa

$$\overline{B_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)}\left(0_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)}, 1\right)}$$

è debolmente compatta in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. Pertanto, esistono un'estratta $(k_m)_{m\in\mathbb{N},\, m>0}$ tale che $k_m \to +\infty$ per $m \to +\infty$ e $v_0 \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ tali che $v_{k_m} \rightharpoonup v_0$ per $m \to +\infty$.

Proviamo infine che, se la successione $(v_k)_{k\in\mathbb{N},\, k>0}$ converge puntualmente a $M^C u$, allora $v_0 = M^C u$. Dal momento che $v_{k_m} \rightharpoonup v_0$, per il Lemma 2.3.1 esiste una successione $(y_h)_{h\in\mathbb{N},\, h>0}$ tale che, per ogni $h \in \mathbb{N}$, $h > 0$,

$$y_h = \sum_{j=r_h}^{s_h} \alpha_j v_{k_j}$$

sia una combinazione convessa degli elementi di $(v_{k_m})_{m\in\mathbb{N},\, m>0}$ per certi $r_h, s_h \in \mathbb{N}$, $r_h, s_h > 0$ e $\alpha_j \in \mathbb{R}$ per $j \in \mathbb{N}$, $r_h \leq j \leq s_h$, con $h \in \mathbb{N}$, $h > 0$, e $y_h \to v_0$ in norma $\|\ \|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)}$, per $h \to +\infty$. Dal momento che la successione $(v_{k_m})_{m\in\mathbb{N},\, m>0}$ converge puntualmente a $M^C u$, necessariamente si ha che $v_0 = M^C u$.

D'altra parte, dal momento che $y_h \to v_0 = M^C u$ in norma $\|\ \|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)}$, si ha che $\nabla y_h \to \nabla M^C u$ in norma $\|\ \|_{L^p(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)}$. Ma allora, esiste un'estratta $(h_l)_{l\in\mathbb{N},\, l>0}$ tale che $h_l \to +\infty$ per $l \to +\infty$ e la sottosuccessione $(\nabla y_{h_l})_{l\in\mathbb{N},\, l>0}$ converga a $\nabla M^C u$ quasi ovunque. Segue che, osservando che

$$|\partial_i y_{h_l}|\,(x) = \left|\sum_{j=r_{h_l}}^{s_{h_l}} \alpha_j \partial_i v_{k_j}\right| \leq M^C \partial_i u(x).$$

per ogni $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq d$ e passando al limite nella disuguaglianza, si ottiene la tesi. $\square$

Corollario 2.3.2.1. *Sia $p \in (1, \infty]$. Allora si ha che l'operatore massimale di Hardy-Littlewood centrato M^C è un operatore limitato da $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$.*

Dimostrazione. Supponiamo innanzitutto che $p \in (1, +\infty)$. Mostriamo inizialmente che

$$\left|\nabla M^C u(x)\right| \leq M^C |\nabla u|(x)$$

per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^d$. Sia $x \in \mathbb{R}^d$. Se $\left|\nabla M^C u(x)\right| = 0$ allora la tesi è verificata banalmente. Supponiamo pertanto che $\left|\nabla M^C u(x)\right| > 0$. Dato $n \in \mathbb{R}^d$ tale che $|n| = 1$, sia $\partial_n u = \langle \nabla u, n\rangle$ la derivata direzionale debole di u lungo la direzione n. Poniamo $n = \frac{\nabla M^C u(x)}{|\nabla M^C u(x)|}$. A meno di ruotare gli assi coordinati in modo tale che n coincida con una delle direzioni coordinate, si ottiene che, per il Teorema 2.3.2,

$$|\nabla M^C u(x)| = |\partial_n M^C u(x)| \leq M^C \partial_n u(x) \leq M^C |\nabla u|(x).$$

Ma allora, si conclude che, per il Teorema 2.2.3,

$$\begin{aligned}
\left\|M^C u\right\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} &= \left\|M^C u\right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \left\|\nabla M^C u\right\|_{L^p(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)} \\
&\le 3^{\frac{d}{p}} \frac{p}{p-1} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left|\nabla M^C u(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le 3^{\frac{d}{p}} \frac{p}{p-1} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left|M^C |\nabla u|(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= 3^{\frac{d}{p}} \frac{p}{p-1} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \left\|M^C |\nabla u|\right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \\
&\le 3^{\frac{d}{p}} \frac{p}{p-1} \left(\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)}\right) = 3^{\frac{d}{p}} \frac{p}{p-1} \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

Abbiamo quindi mostrato che M^C è un operatore limitato dallo spazio di Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ in sé.

Supponiamo ora che $p = \infty$. Sia $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$. Per il Teorema A.2.2, è possibile modificare u su un insieme di misura nulla per ottenere una funzione Lipschitziana. Si noti che l'operatore massimale di Hardy-Littlewood centrato M^C commuta con le traslazioni. Siano infatti $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ e $h \in \mathbb{R}^d$. Per ogni $x \in \mathbb{R}^d$ si ha che

$$\begin{aligned}
\tau_h M^C f(x) &= \sup_{r>0} \frac{1}{\mathscr{L}^d\left(B_{\mathbb{R}^d}(x-h,r)\right)} \int_{B_{\mathbb{R}^d}(x-h,r)} |f(y)| dy \\
&= \sup_{r>0} \frac{1}{\mathscr{L}^d\left(B_{\mathbb{R}^d}(x,r)\right)} \int_{B_{\mathbb{R}^d}(x,r)} |\tau_h f(z)| dz \\
&= M^C(\tau_h f)(x).
\end{aligned}$$

Inoltre, date $f, g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, si ha che, per ogni $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned}
\left|M^C f(x) - M^C g(x)\right| &= \sup_{r>0} \frac{1}{\mathscr{L}^d\left(B_{\mathbb{R}^d}(x,r)\right)} \left|\int_{B_{\mathbb{R}^d}(x,r)} |f(y)| dy - \int_{B_{\mathbb{R}^d}(x,r)} |g(y)| dy\right| \\
&\le \sup_{r>0} \frac{1}{\mathscr{L}^d\left(B_{\mathbb{R}^d}(x,r)\right)} \int_{B_{\mathbb{R}^d}(x,r)} \left||f(y)| - |g(y)|\right| dy \\
&\le M^C|f-g|(x).
\end{aligned}$$

Segue che, dati $x \in \mathbb{R}^d$ e $h \in \mathbb{R}^d$, si ha che

$$\left|\tau_h M^C u(x) - M^C u(x)\right| = \left|M^C(\tau_h u)(x) - M^C u(x)\right| \le M^C|\tau_h u - u|(x) \le \operatorname{Lip}(u)|h|.$$

Pertanto, $M^C u$ è una funzione Lipschitziana con costante di Lipschitz maggiorata dalla costante di Lipschitz di u. Inoltre, dal momento che $M^C u \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ per la proposizione 2.2.1, si ottiene che, per il Teorema A.2.2, $M^C u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$, il che conclude la dimostrazione. $\square$

2.3.2 Il caso $p = 1$ in ambito unidimensionale

Vediamo ora una possibile parziale estensione delle proprietà studiate nella sezione precedente al caso $p = 1$. Il risultato principale è qui dato dal Teorema 2.3.7 (Teorema 1 in [12]). È necessario puntualizzare che tale estensione è possibile soltanto nel caso unidimensionale per l'operatore massimale di Hardy-Littlewood non centrato, mentre sembra che non sia noto un possibile sviluppo di questi risultati nel caso $p = 1$ e $d-$dimensionale per $d > 1$. Tale situazione risulta infatti essere ben più problematica. Per quanto riguarda questa sezione, andiamo a studiare nel dettaglio l'articolo [12] di H. Tanaka.

Definiamo innanzitutto altri due tipi di operatori massimali che saranno fondamentali per poter raggiungere il nostro obbiettivo.

Definizione 2.3.3. Si dice *operatore massimale di Hardy-Littlewood non centrato unilaterale destro* l'operatore

$$M_r\colon L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}) \to L^0(\mathbb{R})$$

definito in modo tale che per ogni $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ si abbia che

$$M_r u(x) = \sup_{s\in\mathbb{R},\, s>0} \frac{1}{s} \int_x^{x+s} |u(y)|dy$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. Si dice invece *operatore massimale di Hardy-Littlewood non centrato unilaterale sinistro* l'operatore

$$M_l\colon L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}) \to L^0(\mathbb{R})$$

definito in modo tale che per ogni $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ si abbia che

$$M_l u(x) = \sup_{s\in\mathbb{R},\, s>0} \frac{1}{s} \int_{x-s}^{x} |u(y)|dy$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Si noti che, data $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, si deduce che

$$Mu(x) = \max\{M_l u(x), M_r u(x)\}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. Infatti, dati $x \in \mathbb{R}$ e dati $s, t \in \mathbb{R}$, si ha che

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t+s} \int_{x-s}^{x+t} |u(y)|dy &= \frac{1}{t+s} \int_x^{x+t} |u(y)|dy + \frac{1}{t+s} \int_{x-s}^{x} |u(y)|dy \\
&= \frac{t}{t+s} \frac{1}{t} \int_x^{x+t} |u(y)|dy + \frac{s}{t+s} \frac{1}{s} \int_{x-s}^{x} |u(y)|dy \\
&\leq \frac{t}{t+s} M_r u(x) + \frac{s}{t+s} M_l u(x) \\
&\leq \max\{M_l u(x), M_r u(x)\},
\end{aligned}$$

dove l'ultima disuguaglianza segue dal fatto che nei passaggi precedenti abbiamo costruito una combinazione convessa di $M_l u(x)$ e $M_r u(x)$. Passando all'estremo superiore su tutti gli intervalli aperti di $\mathbb{R}$ che contengono x, si ottiene che

$$Mu(x) \leq \max\{M_l u(x), M_r u(x)\}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. D'altra parte, dato $x \in \mathbb{R}$, si ha che $Mu(x) \geq M_l u(x)$ ed inoltre $Mu(x) \geq M_r u(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^d$. Segue che

$$Mu(x) \geq \max\{M_l u(x), M_r u(x)\}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$, da cui segue la tesi.

Questa uguaglianza ci permette di estendere direttamente le proprietà già note per l'operatore massimale di Hardy-Littlewood non centrato, che saranno soddisfatte anche per gli operatori M_r e M_l. Studiamo di seguito alcune proprietà degli operatori massimali di Hardy-Littlewood unilaterali destro e sinistro. In particolare, analizzeremo l'operatore M_l, le cui proprietà si estendono direttamente a M_r.

Si noti ora che, data $u \in W^{1,1}(\mathbb{R})$, per il Teorema A.1.4, esiste un rappresentante continuo che, con abuso di notazione, sarà ancora indicato con u. Inoltre, si ha che $u \in L^1(\mathbb{R})$, da cui segue che u è infinitesima all'infinito.

Vediamo di seguito una proprietà fondamentale dell'operatore massimale di Hardy-Littlewood centrato che vale in qualsiasi dimensione $d \in \mathbb{N}$, $d > 0$

Proposizione 2.3.4. *Sia $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$. $M^C u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$ e $Mu \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$.*

Dimostrazione. Sia $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$. Proviamo che $M^C u$ e Mu sono continue. Sia $h \in \mathbb{R}^d$. Si noti che

$$\frac{1}{\mathscr{L}^d\left(B_{\mathbb{R}^d}(x,r)\right)} \int_{B_{\mathbb{R}^d}(x,r)} |\tau_h u(y) - u(y)|\, dy \leq \sup_{y \in \overline{B_{\mathbb{R}^d}(x,r)}} |\tau_h u(y) - u(y)|$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^d$ per $r \leq 1$ e ricordiamo che la funzione $|\tau_h u - u|$ è continua sul compatto $\overline{B_{\mathbb{R}^d}(x,r)}$ e pertanto, per il Teorema di Heine-Cantor, è uniformemente continua su $\overline{B_{\mathbb{R}^d}(x,r)}$. D'altra parte, se $r > 1$, si ha che, per la disuguaglianza di Young,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathscr{L}^d\left(B_{\mathbb{R}^d}(x,r)\right)} \int_{B_{\mathbb{R}^d}(x,r)} |\tau_h u(y) - u(y)|\, dy &\leq \left\| \mathbb{1}_{\overline{B_{\mathbb{R}^d}(x,r)}} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \|\tau_h u - u\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq \|\tau_h u - u\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} .\end{aligned}$$

Si deduce che

$$\begin{aligned}\left|\tau_h M^C u(x = - M^C u(x)\right| &= \left| M^C \tau_h u(x) - M^C u(x) \right| \\ &\leq M^C \left|\tau_h u - u\right|(x) \\ &\|\tau_h u - u\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + \sup_{y \in \overline{B_{\mathbb{R}^d}(x,r)}} |\tau_h u(y) - u(y)| ,\end{aligned}$$

da cui segue direttamente la tesi. Utilizzando la Proposizione 2.1.2, si ottiene il risultato cercato anche per l'operatore massimale di Hardy-Littlewood non centrato. □

Con un ragionamento del tutto analogo al precedente, si ottiene che, scelta u come sopra, si ha che $|u|, M_l u \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$. Si ottiene pertanto che l'insieme

$$E = \{x \in \mathbb{R} \mid M_l u(x) > |u(x)|\}$$

è aperto in $\mathbb{R}$. Pertanto, è possibile scrivere E come unione numerabile disgiunta di intervalli aperti I_j per $j \in \mathbb{N}$, con $I_j = (a_j, b_j)$, dove $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, $a_j \leq b_j$ per ogni $j \in \mathbb{N}$. In particolare, si ha che

$$E = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} (a_j, b_j).$$

Lemma 2.3.5. *Sia $u \in W^{1,1}(\mathbb{R})$. Si ha che*

1. *$M_l u$ è una funzione non crescente su ogni intervallo I_j per ogni $j \in \mathbb{N}$;*
2. *$M_l u$ è una funzione localmente Lipschitziana su ogni I_j per ogni $j \in \mathbb{N}$.*

Dimostrazione. Proviamo innanzitutto 1.. Sia $j \in \mathbb{N}$ e sia $K = [a, b] \subset I_j$, con $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. È sufficiente provare che $M_l u$ è non crescente su K. Per la continuità di $|u|$ e $M_l u$, si ha che

$$\varepsilon = \inf_{x \in K} (M_l u(x) - |u(x)|) > 0$$

Dal momento che $|u|$ è continua su K compatto, per il Teorema di Heine-Cantor si ha che $|u|$ è uniformemente continua su K. Pertanto, esiste $\delta > 0$, tale che

$$|u(y)| - |u(x)| \leq |u(y) - u(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

per ogni $x, y \in K$ tali che $|x - y| < \delta$. Equivalentemente, si ottiene che

$$|u(y)| < |u(x)| + \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.1}$$

per ogni $x, y \in K$ tali che $|x - y| < \delta$. Per (2.1) e per definizione di ε si ottiene che

$$M_l u(x) = \sup_{s > \delta} \frac{1}{s} \int_{x-s}^{x} |u(y)| dy \tag{2.2}$$

per ogni $x \in K$. Infatti, se $s \leq \delta$, si ha che, per ogni $x \in K$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{s} \int_{x-s}^{x} |u(y)| dy &< \frac{1}{s} \int_{x-s}^{x} \left(|u(x) + \frac{\varepsilon}{2} \right) dy \\ &= |u(x)| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< M_l u(x) - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< M_l u(x) - \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Pertanto, si ottiene che

$$\sup_{s\leq\delta}\frac{1}{s}\int_{x-s}^{x}|u(y)|dy\leq M_l u(x)-\frac{\varepsilon}{2},$$

da cui segue che l'estremo superiore si realizza necessariamente per $s>\delta$, da cui segue l'uguaglianza (2.2). Mostriamo ora che

$$M_l u(x-h)\geq M_l u(x)$$

per ogni $x\in K$ e $h\in(0,\delta]$, tale che $x-h\in K$. Sia $s>\delta$. Si ha che, per (2.1),

$$\begin{aligned}\frac{1}{s}\int_{x-s}^{x}|u(y)|dy&=\frac{s-h}{s}\frac{1}{s-h}\int_{x-s}^{x-h}|u(y)|dy+\frac{h}{s}\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x}|u(y)|dy\\&\leq\frac{s-h}{s}M_l u(x-h)+\frac{h}{s}\left(|u(x)|+\frac{\varepsilon}{2}\right)\\&\leq\max\left\{M_l u(x-h),|u(x)|+\frac{\varepsilon}{2}\right\},\end{aligned}$$

dove l'ultima disuguaglianza segue dal fatto che nel passaggio precedente abbiamo costruito una combinazione convessa di $M_l u(x-h)$ e $|u(x)|+\frac{\varepsilon}{2}$. Inoltre, per definizione di ε, si ottiene che

$$M_l u(x)>|u(x)|+\varepsilon.$$

Combinando le due considerazioni precedenti, otteniamo la tesi.

Proviamo ora 2.. Siano K e δ come nel caso precedente. Sia $h>0$ tale che $x,x+h\in K$. Sia poi $s>\delta$. Per 1. si ha che

$$\begin{aligned}\frac{1}{s}\int_{x-s}^{x}|u(y)|dy-M_l u(x+h)&\leq\frac{1}{s}\int_{x-s}^{x}|u(y)|dy-\frac{1}{s+h}\int_{x-s}^{x+h}|u(y)|dy\\&\leq\frac{1}{s}\int_{x-s}^{x}|u(y)|dy-\frac{1}{s+h}\int_{x-s}^{x}|u(y)|dy\\&=\frac{h}{s(s+h)}\int_{x-s}^{x}|u(y)|dy\\&\leq\frac{M_l u(x)}{\delta}h\\&\leq\frac{M_l u(a)}{\delta}h=Ch.\end{aligned}$$

Passando all'estremo superiore per $s>\delta$, si ottiene che

$$0\leq M_l u(x)-M_l u(x+h)\leq Ch,$$

da cui segue direttamente la tesi. □

Vediamo ora una proprietà che risulterà essere fondamentale nella dimostrazione del risultato principale di questa sezione.

Proposizione 2.3.6. *Sia $u \in W^{1,1}(\mathbb{R})$. Allora le derivate distribuzionali di $M_r u$ e $M_l u$ sono funzioni integrabili ed inoltre si ha che*

$$\|(M_l u)'\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|u'\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

e

$$\|(M_r u)'\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|u'\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Dimostrazione. Proviamo la tesi per l'operatore massimale di Hardy-Littlewood unilaterale sinistro M_l. La dimostrazione per M_r è analoga. Per la Proposizione A.3.3, se $u \in W^{1,1}(\mathbb{R})$, allora $|u| \in W^{1,1}(\mathbb{R})$ e

$$\||u|\|_{L^1(\mathbb{R})} = \|u\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

se u è a valori reali,

$$\||u|\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|u\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

se u è a valori complessi. Ricordiamo l'insieme aperto E e la scomposizione

$$E = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} (a_j, b_j).$$

Sia ora $F = \mathbb{R} \setminus E$. Per il Lemma 2.3.5 si ha che $M_l u$ è differenziabile q.o. su I_j per ogni $j \in \mathbb{N}$ e la sua derivata debole v è tale che $v \leq 0$ q.o. Proviamo che la derivata debole di $M_l u$ è data da

$$(M_l u)' = \mathbb{1}_E v + \mathbb{1}_F |f|'. \tag{2.3}$$

Per ogni $j \in \mathbb{N}$ si ha che, per ogni $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$,

$$\int_{I_j} M_l u(y) \varphi'(y) dy = (|u(b_j)|\varphi(b_j) - |u(a_j)|\varphi(a_j)) - \int_{I_j} v(y)\varphi(y) dy$$

per la continuità di $M_l u$. Imponiamo che nel caso in cui $a_j = -\infty$ oppure $b_j = +\infty$, si abbia che $u(a_j) = 0$ oppure $u(b_j) = 0$ rispettivamente e similmente per $M_l u(a_j)$ e $M_l u(b_j)$. Si noti che

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} M_l u(y)\varphi'(y) dy &= \int_{E \cup F} M_l u(y) \varphi'(y) dy \\
&= \sum_{j \in \mathbb{N}} (|u(b_j)|\varphi(b_j) - |f(a_j)|\varphi(a_j)) - \int_E v(y)\varphi(y) dy \\
&\quad + \int_F |u(y)|\varphi'(y) dy \\
&= \int_E |u(y)|\varphi'(y) dy + \int_E (|u|)'(y)\varphi(y) dy - \int_E v(y)\varphi(y) dy \\
&\quad + \int_F |u(y)|\varphi'(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} |u(y)|\varphi'(y) dy + \int_E (|u|)'(y)\varphi(y) dy - \int_E v(y)\varphi(y) dy \\
&= - \int_{\mathbb{R}} \left(\mathbb{1}_E(y) v(y) + \mathbb{1}_F(y)(|u|)'(y)\right) \varphi(y) dy,
\end{aligned}$$

da cui segue immediatamente (2.3). Inoltre, dal momento che $v \leq 0$ q.o. su I_j per ogni $j \in \mathbb{N}$, si ha che per ogni $j \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\int_{I_j} |v(y)|dy &= M_l u(a_j) - M_j u(b_j) \\ &= |u(a_j)| - |u(b_j)| \\ &= -\int_{I_j} (|u|)'(y)dy \\ &\leq \int_{I_j} |(|u|)'(y)|\, dy,\end{aligned}$$

da cui segue che

$$\begin{aligned}\|(M_l u)'\|_{L^1(\mathbb{R})} &= \int_E |v(x)|dx + \int_F |(|u|)'(x)|\, dx \\ &\leq \|(|u|)'\|_{L^1(\mathbb{R})} \\ &\leq \|u'\|_{L^1(\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

□

Dopo aver introdotto gli strumenti necessari, enunciamo e dimostriamo di seguito il risultato principale di questa sezione.

Teorema 2.3.7. *Sia $u \in W^{1,1}(\mathbb{R})$. Allora si ha che $(Mu)' \in L^1(\mathbb{R})$ ed inoltre*

$$\|(Mu)'\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq 2\, \|u'\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Dimostrazione. Sappiamo che, per la Proposizione 2.3.6, si ha che $(M_l u)' \in L^1(\mathbb{R})$, $(M_r u)' \in L^1(\mathbb{R})$. Inoltre si ha che

$$\|(M_l u)'\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|u'\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

e

$$\|(M_r u)'\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|u'\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Dal momento che

$$Mu(x) = \max\{M_l u(x), M_r u(x)\}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha che $(Mu)' \in L^1(\mathbb{R})$ ed inoltre, per il Corollario A.3.3.1,

$$\|(Mu)'\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq 2\, \|u'\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

□

Ricordiamo che il Teorema 2.3.7 fornisce la stima

$$\|(Mu)'\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq 2\, \|u'\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

per la derivata debole della funzione massimale di Hardy-Littlewood non centrata costruita a partire da $u \in W^{1,1}(\mathbb{R})$. È pertanto naturale chiedersi se la costante 2 possa essere migliorata per ottenere una stima migliore. A tali proposito, citiamo l'articolo [1] di J.M.Aldaz e J.Pérez-Lázaro, pubblicato nel 2007, nel quale si dimostra che, nel caso preso in esame, vale in realtà una disuguaglianza contrattiva.

Si noti infine che il risultato presentato in questa sezione riguarda esclusivamente l'operatore massimale di Hardy-Littlewood non centrato e la dimostrazione qui presa in esame non è adattabile al caso dell'operatore massimale di Hardy-Littlewood centrato.

Capitolo 3

Operatore massimale del calore

Dopo aver studiato le proprietà dell'operatore massimale di Hardy-Littlewood centrato, notiamo che è possibile esprimere tale operatore come applicazione che associa ad una funzione, almeno misurabile su $\mathbb{R}^d$, l'estremo superiore dei prodotti di convoluzione con le funzioni appartenenti ad una specifica identità approssimata. A questo punto è naturale chiedersi se sia lecito generalizzare il concetto di operatore massimale, associandolo ad altri tipi di identità approssimate e se sia possibile ottenere delle buone proprietà scegliendo nuclei di convoluzione specifici.

Cercando una risposta a queste domande, andiamo ad introdurre in questo capitolo l'operatore massimale del calore, ossia l'operatore massimale associato al nucleo del calore. In accordo con la struttura adottata nel capitolo precedente, andremo innanzitutto a trattare le definizioni fondamentali e le prime proprietà, mettendo particolarmente in risalto il rapporto tra tale operatore e l'operatore massimale di Hardy-Littlewood centrato. In seguito, andremo ad indagare sulle proprietà dell'operatore massimale del calore su spazi L^p, per le quali si ritroverà un risultato del tutto analogo a quello visto per Hardy-Littlewood nel capitolo precedente. A tale scopo ci serviremo fortemente della relazione tra operatore massimale del calore e operatore massimale di Hardy-Littlewood centrato. Infine, si andranno a studiare le proprietà dell'operatore massimale del calore su spazi di Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ per $p \in (1, \infty]$, prendendo come riferimento l'articolo [4], pubblicato nel 2013. In tal caso, ritroveremo un risultato di limitatezza di tale operatore dallo spazio di Sobolev in sé, che sarà corredato però da un'ulteriore proprietà che rappresenta un elemento di novità rispetto a quanto visto nel caso dell'operatore massimale di Hardy-Littlewood.

3.1 Operatori massimali di tipo convolutivo

Come anticipato nell'introduzione di questo capitolo, lo scopo è ora quello di generalizzare la costruzione dell'operatore massimale di Hardy-Littlewood per poter studiare operatori massimali associati ad una qualsiasi identità approssimata. Sia

$d \in \mathbb{N}$, $d > 0$ e sia $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ una funzione non negativa tale che

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)dx = 1.$$

Consideriamo l'identità approssimata associata alla funzione φ, data da $\{\varphi_t\}_{t>0}$, dove, per ogni $t > 0$, definiamo

$$\varphi_t(x) = \frac{1}{t^d}\varphi\left(\frac{x}{t}\right)$$

per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^d$. Consideriamo poi l'operatore massimale

$$M_\varphi \colon L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d) \to L^0(\mathbb{R}^d)$$

associato a tale identità approssimata, tale che, per ogni $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, si abbia

$$M_\varphi u = \sup_{t>0}(|u| * \varphi_t).$$

È immediato osservare che l'operatore massimale di Hardy-Littlewood centrato si può ottenere come estremo superiore di prodotti di convoluzione a partire dalla famiglia di funzioni $\{\varphi_t\}_{t>0}$, dove $\varphi_t(x) = \frac{1}{t^d}\varphi\left(\frac{x}{t}\right)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^d$, con

$$\varphi = \frac{\mathbb{1}_{B_{\mathbb{R}^d}(0,1)}}{\mathscr{L}^d\left(B_{\mathbb{R}^d}(0,1)\right)}.$$

Come specificato nella prossima sezione, un altro esempio di operatore massimale di tipo convolutivo si costruisce considerando il nucleo del calore, ottenendo così l'operatore massimale del calore.

È interessante osservare che è possibile maggiorare gli operatori massimali di tipo convolutivo associati a certi tipi di identità approssimate, con un multiplo dell'operatore massimale di Hardy-Littlewood centrato. L'importanza di questo fatto consiste nel poter esercitare un controllo su tali operatori mediante un oggetto che conosciamo relativamente bene e di cui abbiamo già studiato interessanti proprietà. Ciò permetterà di dedurre interessanti risultati di limitatezza e limitatezza debole, in particolare, per l'operatore massimale del calore. Richiamiamo innanzitutto la definizione di *funzione radiale*.

Definizione 3.1.1. Una funzione $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ si dice *radiale* se $f(x) = \tilde{f}(|x|)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^d$, con $\tilde{f} \colon [0, +\infty) \to \mathbb{C}$.

Vengono riportati di seguito enunciato e dimostrazione del risultato principale di questa sezione.

Teorema 3.1.2. *Sia $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ una funzione radiale e sia $\tilde{\varphi} \colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua su $[0, +\infty)$ ad eccezione di un numero finito di punti e tale che $\varphi(x) = \tilde{\varphi}(|x|)$ per q.o. $x \in \mathbb{R}^d$. Supponiamo che $\varphi(x) \geq \varphi(y)$ per q.o. $x, y \in \mathbb{R}^d$ tali che $|x| \leq |y|$, in particolare possiamo supporre che $\tilde{\varphi}$ sia non crescente. Allora si ha che*

$$M_\varphi u(x) \leq \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} M^C u(x) \tag{3.1}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^d$, per ogni $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$.

Dimostrazione. Supponiamo innanzitutto che φ sia una funzione continua a supporto compatto radiale e tale che $\varphi(x) \geq \varphi(y)$ per q.o. $x, y \in \mathbb{R}^d$ tali che $|x| \leq |y|$. Si noti che è sufficiente provare la disuguaglianza (3.1) per $x = 0$. Infatti, una volta noto il risultato in questo caso, è sufficiente considerare traslazioni di u per dimostrare la disuguaglianza nel caso generale. Sia ora $R > 0$ e supponiamo che $\operatorname{supp}(\varphi) \subset B_{\mathbb{R}^d}(0, R)$. Sia poi $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Passando in coordinate polari, si ha che, per ogni $t > 0$,

$$(|u| * \varphi_t)(0) = \int_{\mathbb{R}^d} |u(y)|\varphi_t(-y)dy = \int_0^{+\infty} \int_{S^{d-1}} |u(rw)|\varphi_t(re_1)r^{d-1}d\sigma(w)dr,$$

dove $d\sigma$ denota la misura superficiale su S^{d-1}. Definiamo poi le funzioni

$$F(r) = \int_{S^{d-1}} |u(rw)|d\sigma(w)$$

per ogni $r \in [0, +\infty)$ e

$$G(r) = \int_0^r F(s)s^{d-1}ds,$$

per ogni $r \in [0, +\infty)$. Per ogni $t > 0$, integrando per parti e ricordando che $\operatorname{supp}(\varphi_t) \subset B_{\mathbb{R}^d}(0, tR)$, si ottiene

$$\begin{aligned}
(|u| * \varphi_t)(0) &= \int_{\mathbb{R}^d} |u(y)|\varphi_t(-y)dy \\
&= \int_0^{tR} F(r)r^{d-1}\varphi_t(re_1)dr \\
&= G(tR)\varphi_t(tRe_1) - G(0)\varphi_t(0) - \int_0^{tR} G(r)d\varphi_t(re_1) \\
&= \int_0^{+\infty} G(r)d\left(-\varphi_t(re_1)\right),
\end{aligned}$$

osservando che $G(0) = 0$ e $\varphi_t(tRe_1) = 0$, dove due degli integrali sono integrali di Lebesgue-Stiltjes. Osservando che

$$\begin{aligned}
G(r) &= \int_0^r F(s)s^{d-1}ds = \int_{B_{\mathbb{R}^d}(0,r)} |u(y)|dy \\
&= \frac{\mathscr{L}^d\left(B_{\mathbb{R}^d}(0,r)\right)}{\mathscr{L}^d\left(B_{\mathbb{R}^d}(0,r)\right)} \int_{B_{\mathbb{R}^d}(0,r)} |u(y)|dy \\
&\leq \mathscr{L}^d\left(B_{\mathbb{R}^d}(0,r)\right) M^C u(0).
\end{aligned}$$

Segue che

$$\begin{aligned}
(|u| * \varphi_t)(0) &= \int_0^{+\infty} G(r)d\left(-\varphi_t(re_1)\right) \\
&\leq M^C u(0) \int_0^{+\infty} \mathscr{L}^d\left(B_{\mathbb{R}^d}(0,1)\right) r^d d\left(-\varphi_t(re_1)\right) \\
&= M^C u(0) \int_0^{+\infty} d\mathscr{L}^d\left(B_{\mathbb{R}^d}(0,1)\right) r^{d-1}\varphi_t(re_1)dr \\
&= M^C u(0)\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

Passando all'estremo superiore su $t > 0$, si deduce la tesi per φ. Proviamo ora il risultato nel caso generale. Sia φ come nell'enunciato del Teorema e sia $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni radiali, a supporto compatto, continue e tali che $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge crescendo a φ. Ciò è possibile dal momento che $\tilde{\varphi}$ è continua su $[0,+\infty)$ ad eccezione di un numero finito di punti. Dal momento che la tesi vale per φ_n per ogni $n \in \mathbb{N}$, passando al limite si ottiene il risultato anche per φ. □

Si noti che il Teorema 3.1.2 può essere generalizzato nel seguente modo.

Corollario 3.1.2.1. *Supponiamo che $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ sia tale che*

$$|\varphi(x)| \leq \psi(x) = \tilde{\psi}(|x|)$$

dove $\tilde{\psi}\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ è una funzione integrabile su $[0,+\infty)$, non crescente, non negativa e continua su $[0,+\infty)$ ad eccezione di un numero finito di punti. Allora si ha che

$$M_\varphi u(x) \leq \|\psi\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} M^C u(x)$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^d$, per ogni $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$.

Dimostrazione. Si noti che, per ogni $t > 0$, applicando il Teorema 3.1.2 alla funzione ψ, si ha che

$$\begin{aligned}
(|u| * \varphi_t)(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} |u(y)|\varphi_t(x-y)dy \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} |u(y)||\varphi_t(x-y)|dy \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} |u(y)|\psi_t(x-y)dy \\
&= (|u| * \psi_t)(x) \\
&\leq \|\psi\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} M^C u(x).
\end{aligned}$$

Passando all'estremo superiore su $t > 0$, si ottiene la tesi. □

3.2 Operatore massimale del calore su spazi di Lebesgue

Lo sviluppo della tesi nelle prossime sezioni sarà relativo allo studio delle proprietà dell'operatore massimale del calore, riprendendo lo schema utilizzato nella discussione delle proprietà dell'operatore massimale di Hardy-Littlewood. In particolare, il nostro scopo è quello di indagare in primo luogo sulla possibilità di estendere i risultati di limitatezza forte e debole su spazi di Lebesgue, già visti per l'operatore massimale di Hardy-Littlewood, al caso dell'operatore massimale del calore. Il risultato principale di questa sezione è dato dal Teorema 3.2.2.

Per prima cosa, introduciamo la definizione di operatore massimale del calore. Prendiamo in considerazione una specifica identità approssimata, ossia il nucleo del calore $\{K_t\}_{t>0}$, dove, per ogni $t > 0$, si ha

$$K_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}},$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^d$. Data $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, consideriamo i prodotti di convoluzione $f = u * K_t$ per ogni $t > 0$. Sappiamo che $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d \times (0, +\infty))$ e risolve l'equazione del calore

$$\partial_t f - \Delta f = 0$$

in $\mathbb{R}^d \times (0, +\infty)$, con la condizione che $\lim_{t \to 0^+} f(x, t) = u(x)$ per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^d$. Definiamo infine l'*operatore massimale del calore*

$$M_h \colon L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d) \to L^0(\mathbb{R}^d)$$

definito in modo tale che per ogni $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ si abbia

$$M_h u(x) = \sup_{t>0} (|u| * K_t)(x),$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^d$.

Notiamo innanzitutto che la definzione di M_h è ben posta. Si noti infatti che, siccome $K_t \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$, si ha che $f = u * K_t$ è continua per ogni $t > 0$, per ogni $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Proviamo che, data una famiglia $\{f_i\}_{i \in I}$ di funzioni continue, con I insieme di indici di cardinalità qualsiasi e $f_i \colon \Omega \to \mathbb{R}$ per un certo $\Omega \in \mathbb{R}^d$ dominio qualsiasi, la funzione $f = \sup_{i \in I} f_i$ è una funzione inferiormente semicontinua. Sia $c \in \mathbb{R}$. Proviamo che l'insieme $f^{-1}((c, +\infty))$ è aperto in Ω. Sia $x \in f^{-1}((c, +\infty))$, ossia tale che $f(x) > c$. Allora esiste $i \in I$ tale che $f_i(x) > c$. Dal momento che f_i è continua, si deduce in particolare che f_i è inferiormente semicontinua, pertanto esiste $U \subset \Omega$ intorno aperto di x tale che $f_i(y) > c$ per ogni $y \in U$. Ma allora si ha che

$$f(y) > f_i(y) > c$$

per ogni $y \in U$. Segue che f è inferiormente semicontinua. Ma allora, per ogni $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ si ha che $M_h u$ è inferiormente semicontinua, quindi misurabile.

Siamo ora intenzionati ad andare a indagare sulle possibili buone proprietà dell'operatore massimale del calore tra spazi di Lebesgue. La strategia adottata in questa tesi consiste nell'andare a maggiorare l'operatore massimale del calore con un multiplo dell'operatore massimale di Hardy-Littlewood centrato, derivando poi le interessanti proprietà che ne conseguono. In particolare, vale il seguente Teorema.

Teorema 3.2.1. *Si ha che*

$$M_h u(x) \leq c_d M^C u(x)$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^d$, per ogni $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$.

Dimostrazione. Sia $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Ricordiamo che

$$M_h u = \sup_{t>0} (|u| * K_t)$$

e che il nucleo del calore è un'identità approssimata data dalla famiglia delle gaussiane dilatate $G_{\sqrt{t}}$, con $t > 0$, dove $G(x) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4}}$, per ogni $x \in \mathbb{R}^d$. Si noti che $G \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $G(x) = g(|x|)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^d$, dove $g(x) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4}}$ per ogni $x \in [0, +\infty)$ è una funzione integrabile, non crescente, non negativa e continua su $[0, +\infty)$. Per il Corollario 3.1.2.1 si ha che

$$M_h u(x) \leq \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} M^C u(x).$$

da cui segue la tesi. □

Il Teorema 3.2.1 permette di estendere il risultato già noto sulle proprietà degli operatori massimali di Hardy-Littlewood centrato e non centrato su spazi di Lebesgue, anche al caso dell'operatore massimale del calore. Come specificato in precedenza, tale risultato sarà una conseguenza del controllo dell'operatore massimale del calore esercitato da un multiplo dell'operatore massimale di Hardy-Littlewood centrato.

Teorema 3.2.2. *L'operatore massimale del calore è di tipo debole* $(1, 1)$ *e di tipo forte* (p, p) *per ogni* $p \in (1, \infty]$.

Dimostrazione. Proviamo inizialmente che l'operatore massimale del calore è un operatore di tipo debole $(1, 1)$, ossia è limitato come operatore da $L^1(\mathbb{R}^d)$ in $L^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$. Sia $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Si ha che, sfruttando il Teorema 2.2.3, per ogni $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned}
\lambda \mathscr{L}^d \left(\{x \in X \mid |M_h u(x)| > \lambda\} \right) &\leq \lambda \mathscr{L}^d \left(\left\{x \in X \mid c_d \left|M^C u(x)\right| > \lambda\right\} \right) \\
&= \lambda \mathscr{L}^d \left(\left\{x \in X \mid \left|M^C u(x)\right| > \frac{\lambda}{c_d}\right\} \right) \\
&= c_d \frac{\lambda}{c_d} \mathscr{L}^d \left(\left\{x \in X \mid \left|M^C u(x)\right| > \frac{\lambda}{c_d}\right\} \right) \\
&\leq c_d \left\|M^C u\right\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)} \\
&\leq c_d 3^d \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

Passando all'estremo superiore per $\lambda > 0$, si ottiene che

$$\|M_h u\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)} \leq c_d 3^d \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^d)},$$

da cui segue la tesi.

Proviamo ora che M_h è un operatore limitato da $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ in sè. Sia $u \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Si ha che, per il Teorema 3.2.1 e per la Proposizione 2.2.1,

$$|M_h u(x)| \leq c_d \left|M^C u(x)\right| \leq c_d \left\|M^C u\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq c_d \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$$

per q.o. $x \in \mathbb{R}^d$. Passando all'estremo superiore essenziale si ottiene che

$$\|M_h u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq c_d \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)},$$

da cui segue la tesi. Infine, per il Teorema 1.3.2, si deduce che M_h è un operatore di tipo forte (p, p) per ogni $p \in (1, +\infty)$, il che permette di concludere. □

3.3 Operatore massimale del calore su spazi di Sobolev

In questa sezione andiamo a studiare le proprietà dell'operatore massimale del calore su spazi di Sobolev. In particolare, è possibile dimostrare che la funzione massimale del calore costruita a partire da un dato iniziale $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ per ogni $p \in (1, +\infty]$, è ancora un elemento dello spazio di Sobolev e che, in tal caso, M_h è un operatore limitato tra gli spazi di Sobolev. Inoltre, è possibile dimostrare l'esistenza di stime contrattive in norma $L^p(\mathbb{R}^d)$ per $d = 1$ e per ogni $p \in (1, \infty]$ oppure, in dimensione maggiore, solo per $p = 2$ e $p = \infty$, che legano il gradiente debole della funzione massimale del calore e il gradiente debole del dato iniziale. Tali stime contrattive rappresentano un elemento di novità rispetto a quanto studiato nel capitolo precedente, dal momento che non è noto se siano valide anche per l'operatore massimale di Hardy-Littlewood. Nella tesi si vedrà una dimostrazione di tali risultati che sfrutta fortemente le proprietà dell'operatore massimale del calore e che, pertanto, non ha speranza di essere adattata al caso dell'operatore massimale di Hardy-Littlewood. È inoltre interessante notare come i risultati precedenti valgano solo in dimensione $d = 1$ per ogni $p \in (1, +\infty]$ e in dimensione maggiore solo per $p = 2$ e $p = \infty$, mentre non è noto se sia possibile considerarne un estensione anche nel caso in cui si considerino dimensioni maggiori di 1 e $p \in (1, 2) \cup (2, +\infty)$. Infine, andremo ad accennare a possibili risultati più deboli per $p = 1$, ma va detto che lo studio di tale caso risulta essere più complicato, principalmente per la mancanza di una proprietà importante come la limitatezza forte tra spazi $L^p(\mathbb{R}^d)$ per $p \in (1, \infty]$.

Mostriamo innanzitutto che l'operatore massimale del calore è un operatore limitato dallo spazio di Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ in sé per ogni $p \in (1, \infty]$. Si noti che tale risultato si dimostra facilmente adattando al caso di M_h l'argomento in [8].

Teorema 3.3.1. *Sia $p \in (1, +\infty)$. Se $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, allora $M_h u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ e*

$$|\partial_i M_h u| \leq M_h \partial_i u$$

quasi ovunque su $\mathbb{R}^d$, per ogni $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq d$.

Dimostrazione. Si osservi che, dal momento che $|u| \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ e $K_t \in L^1(\mathbb{R}^d)$ per ogni $t > 0$, per la Proposizione A.3.1 si ha che $|u| * K_t \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. Sia ora $(t_j)_{j\in\mathbb{N},\, j>0}$ un'enumerazione dei numeri razionali positivi. Dal momento che u è localmente integrabile, è possibile restringere l'insieme di numeri reali su cui si effettua l'estremo superiore nella definizione della funzione massimale, ad un estremo superiore su raggi che siano numeri razionali positivi. E' pertanto possibile scrivere

$$M_h u(x) = \sup_{j\in\mathbb{N},\, j>0} (|u| * K_{t_j})(x)$$

per q.o. $x \in \mathbb{R}^d$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$, definiamo le funzioni $v_k \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ tali che, per ogni $x \in \mathbb{R}^d$, si abbia

$$v_k(x) = \max_{j\in\mathbb{N},\, 1\leq j\leq k} (|u| * K_{t_j})(x)$$

Si noti che la successione $(v_k)_{K\in\mathbb{N},\,k>0}$ è crescente in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ e converge puntualmente a $M^C u$. Inoltre, utilizzando il Corollario A.3.3 ed il Corollario A.3.3.1, si ottiene che

$$
\begin{aligned}
|\partial_i v_k| &= \left|\partial_i\left(\max_{j\in\mathbb{N},\,1\le j\le k}(|u| * K_{t_j})\right)\right| \\
&\le \max_{1\le j\le k}\left|\partial_i(|u| * K_{t_j})\right| \\
&= \max_{1\le j\le k}\left|K_{t_j} * \partial_i|u|\right| \\
&= \max_{1\le j\le k}\left|\frac{1}{(4\pi t_j)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t_j}}\partial_i|u|(y)dy\right| \\
&\le \max_{1\le j\le k}\frac{1}{(4\pi t_j)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t_j}}\left|\partial_i|u|(y)\right|dy \\
&\le \max_{1\le j\le k}\frac{1}{(4\pi t_j)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t_j}}\left|\partial_i u(y)\right|dy \\
&= M^C\partial_i u
\end{aligned}
$$

quasi ovunque su $\mathbb{R}^d$ e per ogni $i\in\mathbb{N}$, $1\le i\le d$. Ma allora si ha che

$$
\|\nabla v_k\|_{L^p(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)} \le \sum_{i=1}^d \|\partial_i v_k\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \le \sum_{i=1}^d \|M_h\partial_i u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.
$$

Inoltre, per il Teorema 2.2.3, si ha che

$$
\begin{aligned}
\|v_k\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} &= \|v_k\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \|\nabla v_k\|_{L^p(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)} \\
&\le \|M_h u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \sum_{i=1}^d \|M_h\partial_i u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \\
&\le c_p\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d} + c_p\sum_{i=1}^d \left\|M^C\partial_i u\right\|_{L^p(\mathbb{R}^d} < +\infty
\end{aligned}
$$

per una certa costante $c_p\in\mathbb{R}$, $c_p>0$, per ogni $k\in\mathbb{N}$, $k>0$. Si deduce che la successione $(v_k)_{k\in\mathbb{N},\,k>0}$ è limitata nello spazio $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ rispetto alla sua norma. Dal momento che lo spazio $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ è uno spazio riflessivo, la topologia debole su tale spazio coincide con la topologia debole $*$. Ma allora, per il Teorema di Banach-Alaoglu-Bourbaki, si ha che la palla chiusa

$$
\overline{B_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)}\left(0_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)},1\right)}
$$

è debolmente compatta in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. Pertanto, esistono un'estratta $(k_m)_{m\in\mathbb{N},\,m>0}$ tale che $k_m\to+\infty$ per $m\to+\infty$ e $v_0\in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ tali che $v_{k_m}\rightharpoonup v_0$ per $m\to+\infty$.

Proviamo infine che, se la successione $(v_k)_{K\in\mathbb{N},\,k>0}$ converge puntualmente a $M_h u$, allora $v_0 = M_h u$. Dal momento che $v_{k_m}\rightharpoonup v_0$, per il Lemma 2.3.1 esiste una successione $(y_h)_{h\in\mathbb{N},\,h>0}$ tale che, per ogni $h\in\mathbb{N}$, $h>0$, $y_h=\sum_{j=r_h}^{s_h}\alpha_j v_{k_j}$ sia una combinazione convessa degli elementi di $(v_{k_m})_{m\in\mathbb{N},\,m>0}$ per certi $r_h, s_h\in\mathbb{N}$, $r_h, s_h>0$

e $\alpha_j \in \mathbb{R}$ per $j \in \mathbb{N}$, $r_h \leq j \leq s_h$, con $h \in \mathbb{N}$, $h > 0$, e $y_h \to v_0$ in norma $\| \ \|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)}$, per $h \to +\infty$. Dal momento che la successione $(v_{k_m})_{m\in\mathbb{N},\, m>0}$ converge puntualmente a $M_h u$, necessariamente si ha che $v_0 = M_h u$.

D'altra parte, dal momento che $y_h \to v_0 = M_h u$ in norma $\| \ \|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)}$, si ha che $\nabla y_h \to \nabla M_h u$ in norma $\| \ \|_{L^p(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)}$. Ma allora, esiste un'estratta $(h_l)_{l\in\mathbb{N},\, l>0}$ tale che $h_l \to +\infty$ per $l \to +\infty$ e la sottosuccessione $(\nabla y_{h_l})_{l\in\mathbb{N},\, l>0}$ converga a $\nabla M_h u$ quasi ovunque. Segue che, osservando che

$$|\partial_i y_{h_l}|\,(x) = \left| \sum_{j=r_{h_l}}^{s_{h_l}} \alpha_j \partial_i v_{k_j} \right| \leq M_h \partial_i u(x).$$

per ogni $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq d$ e passando al limite nella disuguaglianza, si ottiene la tesi. □

Corollario 3.3.1.1. *Sia $p \in (1, \infty]$. Allora si ha che l'operatore massimale del calore è un operatore limitato da $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$.*

Dimostrazione. Proviamo la tesi nel caso in cui $p \in (1, +\infty)$. Mostriamo inizialmente che

$$|\nabla M_h u(x)| \leq M_h |\nabla u|(x)$$

per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^d$. Sia $x \in \mathbb{R}^d$. Se $|\nabla M_h u(x)| = 0$ allora la tesi è verificata banalmente. Supponiamo pertanto che $|\nabla M_h u(x)| > 0$. Dato $n \in \mathbb{R}^d$ tale che $|n| = 1$, sia $\partial_n u = \langle \nabla u, n \rangle$ la derivata direzionale debole di u lungo la direzione n. Poniamo

$$n = \frac{\nabla M_h u(x)}{|\nabla M_h u(x)|}.$$

A meno di ruotare gli assi coordinati in modo tale che n coincida con una delle direzioni coordinate, si ottiene che, per il Teorema 3.3.1,

$$|\nabla M_h u(x)| = |\partial_n M_h u(x)| \leq M_h \partial_n u(x) \leq M_h |\nabla u|(x).$$

Ma allora, si conclude che, per il Teorema 3.2.2,

$$\begin{aligned}
\|M_h u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} &= \|M_h u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \|\nabla M_h u\|_{L^p(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)} \\
&\leq C(d,p)\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla M_h u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C(d,p)\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \left(\int_{\mathbb{R}^d} |M_h |\nabla u|(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= C(d,p)\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \|M_h |\nabla u|\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \\
&\leq C(d,p) \left(\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)} \right) \\
&= C(d,p) \frac{p}{p-1} \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

Abbiamo quindi mostrato che M_h è un operatore limitato dallo spazio di Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ in sé, nel caso in cui $p \in (1, +\infty)$.

Supponiamo ora che $p = \infty$. Si ha che Sia $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$. Per il Teorema A.2.2, è possibile modificare u su un insieme di misura nulla per ottenere una funzione Lipschitziana. Si noti che l'operatore massimale del calore M_h commuta con le traslazioni. Siano infatti $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ e $y \in \mathbb{R}^d$. Per ogni $x \in \mathbb{R}^d$ si ha che

$$\tau_y M_h u(x) = \sup_{t>0} \tau_y \left(|u| * K_t\right)(x) = \sup_{t>0} \left(|\tau_y u| * K_t\right)(x) = M_h(\tau_y u)(x)$$

Inoltre, date $u, v \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, si ha che, per ogni $x \in \mathbb{R}^d$,

$$|M_h u(x) - M_h v(x)| \leq M_h|u - v|(x).$$

Segue che, dati $x \in \mathbb{R}^d$ e $h \in \mathbb{R}^d$, si ha che

$$|\tau_y M_h u(x) - M_h u(x)| = |M_h(\tau_y u)(x) - M_h u(x)| \leq M_h|\tau_y u - u|(x) \leq \text{Lip}(u)|h|.$$

Pertanto, $M_h u$ è una funzione Lipschitziana con costante di Lipschitz maggiorata dalla costante di Lipschitz di u. Inoltre, dal momento che $M_h u \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ per la proposizione 2.2.1, si ottiene che, per il Teorema A.2.2, $M_h u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$, il che conclude la dimostrazione. $\square$

3.3.1 Risultati preliminari

Introduciamo innanzitutto alcuni Lemmi preliminari che, oltre ad essere interessanti di per sé in quanto forniscono ulteriori proprietà dell'operatore massimale del calore, risultano essere fondamentali del prosieguo della sezione. Consideriamo un dato iniziale $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. Assumiamo senza perdita di generalità che u sia non negativo. E' possibile scegliere u in questo modo grazie al Corollario A.3.3.

Lemma 3.3.2. *Sia $p \in [1, +\infty)$. Si ha che*

1. *se $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d)$, allora $M_h u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$;*
2. *se u è limitata e Lipshitziana, allora $M_h u$ è limitata e Lipschitziana. Inoltre, $Lip(M_h u) \leq Lip(u)$.*

Dimostrazione. Sia $y \in \mathbb{R}^d$ e sia $\varepsilon > 0$. Si noti innanzitutto che, per definizione del nucleo del calore, esiste $t_\varepsilon > 0$ tale che, per ogni $t > t_\varepsilon$, per la disuguaglianza di Jensen prima e per la disuguaglianza di Young poi, si ha

$$\begin{aligned}
\left(|\tau_y u - u| * K_t\right)(x) &\leq \left(|\tau_y u - u|^p * (K_t(x))^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\|\tau_y u - u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^d)} \|K_t\|^p_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{\|\tau_y u - u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} \\
&\leq \frac{2\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

D'altra parte, dati $x \in \mathbb{R}^d$ e $0 < t < t_\varepsilon$, esiste $\delta > 0$, tale che, se $|y| < \delta$, allora, usando la disuguaglianza di Hölder,

$$\begin{aligned}
&\left(|\tau_y u - u| * K_t\right)(x) \\
&= \int_{\left\{z \in \mathbb{R}^d \,|\, |z| < \sqrt{t_\varepsilon}\right\}} |\tau_y u - u|\,(x-z) K_t(z) dz + \int_{\left\{z \in \mathbb{R}^d \,|\, |z| \geq \sqrt{t_\varepsilon}\right\}} |\tau_y u - u|\,(x-z) K_t(z) dz \\
&\leq \sup_{z \in B_{\mathbb{R}^d}\left(x, \sqrt{t_\varepsilon}\right)} |\tau_y u - u|\,(z) + \|\tau_y u - u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \left\| \mathbb{1}_{\left\{z \in \mathbb{R}^d \,|\, |z| \geq \sqrt{t_\varepsilon}\right\}} K_t \right\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} < \varepsilon,
\end{aligned}$$

dove p' denota l'esponente coniugato di p, osservando che la norma

$$\left\| \mathbb{1}_{\{z \in \mathbb{R}^d \,|\, |z| \geq \sqrt{t_\varepsilon}\}} K_t \right\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)}$$

è limitata per $t \leq t_\varepsilon$. Per la sublinearità dell'operatore massimale, se $|y| < \delta$, si ha che

$$|\tau_y M_h u(x) - M_h u(x)| \leq M_h(\tau_y u - u)(x) < \varepsilon,$$

da cui segue la tesi in 1.. Proviamo ora 2.. A tal proposito, supponiamo ora che u sia limitata e Lipschitziana. In particolare, esiste $M > 0$, tale che $|u(x)| \leq M$ per ogni $x \in \mathbb{R}^d$. Ma allora, si ha che, per ogni $t > 0$,

$$\left|\left(u * K_t\right)(x)\right| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} u(x-y) K_t(y) dy \right| \leq M \int_{\mathbb{R}^d} K_t(y) dy = M,$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^d$, da cui segue la limitatezza di $M_h u$, passando all'estremo superiore per $t > 0$. Inoltre, siccome u è Lipschitiziana, per ogni $x, y \in \mathbb{R}^d$ tali che $x \neq y$, si ha che

$$|u(x) - u(y)| \leq \mathrm{Lip}(u)|x - y|.$$

Ma allora, per ogni $t > 0$, si ha che

$$\begin{aligned}
\left|\left(u * K_t\right)(x) - \left(u * K_t\right)(y)\right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} u(x-z) K_t(z) dz - \int_{\mathbb{R}^d} u(y-z) K_t(z) dz \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} |u(x-z) - u(y-z)| K_t(z) dz \\
&\leq \mathrm{Lip}(u)|x-y|.
\end{aligned}$$

Passando all'estremo superiore per $t > 0$, si ottiene che $M_h u$ è Lipschitziana con la stessa costante di Lipschitz di u. □

Lemma 3.3.3. *Siano $p \in [1, +\infty)$ e supponiamo che $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d)$ oppure che u sia limitata e Lipschitziana. Allora $M_h u$ è una funzione subarmonica nell'aperto*

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid M_h u(x) > u(x) \right\}.$$

Dimostrazione. Si noti che, per le ipotesi sulla funzione u, per il Lemma 3.3.2, si ha che $M_h u$ è continua e pertanto, A è effettivamente un insieme aperto di $\mathbb{R}^d$. Siano

$x_0 \in A$ e $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ tali che $\overline{B_{\mathbb{R}^d}(x_0, r)} \subseteq A$. Consideriamo poi la funzione $h \colon \overline{B_{\mathbb{R}^d}(x_0, r)} \to \mathbb{R}$, che sia soluzione del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta h = 0 & \text{in } B_{\mathbb{R}^d}(x_0, r) \\ h = M_h u & \text{in } \partial B_{\mathbb{R}^d}(x_0, r) \end{cases} . \tag{3.2}$$

Dal momento che $M_h u$ è continua, per il Corollario B.1.2.1 il problema (3.2) ammette un'unica soluzione $h \in \mathcal{C}^2(B_{\mathbb{R}^d}(x_0, r)) \cap \mathcal{C}\left(\overline{B_{\mathbb{R}^d}(x_0, r)}\right)$.

Sia ora $T > 0$ e sia $\Omega = B_{\mathbb{R}^d}(x_0, r) \times (0, T)$. Si noti che la funzione $v \colon \Omega \to \mathbb{R}$, definita da

$$v(x, t) = f(x, t) - h(x)$$

per ogni $(x, t) \in \overline{\Omega}$, dove $f(x, t) = (u * K_t)(x)$ per ogni $(x, t) \in \overline{\Omega}$, è una funzione tale che $v \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}\left(\overline{\Omega}\right)$ e v risolve l'equazione del calore in Ω. Per il Teorema B.2.2 il massimo della funzione v in $\overline{\Omega}$ è raggiunto sulla frontiera parabolica di Ω e, pertanto, su $\partial B_{\mathbb{R}^d}(x_0, r) \times [0, T]$ oppure su $\overline{B_{\mathbb{R}^d}(x_0, r)} \times \{0\}$. Si noti innanzitutto che, per definizione dell'insieme A, dal momento che

$$\overline{B_{\mathbb{R}^d}(x_0, r)} \subseteq A,$$

si ha che

$$\max_{\partial B_{\mathbb{R}^d}(x_0,r) \times [0,T]} v = \max_{\partial B_{\mathbb{R}^d}(x_0,r) \times [0,T]} (f - M_h u) \leq 0,$$

Sia ora $y_0 \in \overline{B_{\mathbb{R}^d}(x_0, r)}$ tale che

$$\max_{x \in \overline{B_{\mathbb{R}^d}(x_0,r)}} v(x, 0) = v(y_0, 0).$$

Proviamo che $v(y_0, 0) \leq 0$. Se per assurdo si avesse $v(y_0, 0) > 0$, per il Teorema B.2.2 si avrebbe che $v(y_0, t) \leq v(y_0, 0)$ per ogni $t \in [0, T]$, da cui seguirebbe che

$$f(y_0, t) \leq f(y_0, 0) = u(y_0)$$

per ogni $t \in [0, T]$. Per l'arbitrarietà di $T > 0$, si avrebbe che $M_h u(y_0) = u(y_0)$, da cui seguirebbe che $y_0 \notin A$, il che è assurdo dal momento che $y_0 \in \overline{B_{\mathbb{R}^d}(x_0, r)} \subseteq A$. Pertanto, si ha necessariamente che

$$\max_{x \in \overline{B_{\mathbb{R}^d}(x_0,r)}} v(x, 0) \leq 0.$$

Si deduce quindi che $f(x_0, t) \leq h(x_0)$ per ogni $t \in [0, T]$ e, per l'arbitrarietà di T, si conclude che $M_h u(x_0) \leq h(x_0)$.

Dal momento che h è una funzione armonica su $B_{\mathbb{R}^d}(x_0, r)$, per il Teorema B.1.1 si ha che

$$h(x_0) = \frac{1}{\mathscr{L}^d(B_{\mathbb{R}^d}(0, 1)) r^d} \int_{\partial B_{\mathbb{R}^d}(x_0,r)} h(y) dy,$$

da cui segue direttamente che $M_h u$ è subarmonica in x_0. Per l'arbitrarietà del punto $x_0 \in A$ scelto, si deduce che $M_h u$ è subarmonica in A. $\square$

Lemma 3.3.4. *Siano $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d) \cap W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$, con g funzione Lipschitziana. Supponiamo che g sia non negativa e che f sia subarmonica nell'aperto*

$$J = \{x \in \mathbb{R}^d \mid g(x) > 0\}.$$

Allora si ha che

$$\int_{\mathbb{R}^d} \langle \nabla f(x), \nabla g(x) \rangle_{\mathbb{R}^d} dx \leq 0.$$

Dimostrazione. Mostriamo innanzitutto che è possibile supporre senza perdita di generalità che g abbia supporto compatto. Sia $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ una funzione non negativa tale che $\psi(x) = 1$ per ogni $x \in B_{\mathbb{R}^d}(0,1)$ e $\mathrm{supp}(\psi) \subset B_{\mathbb{R}^d}(0,2)$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, poniamo $\psi_n(x) = \psi\left(\frac{x}{n}\right)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^d$ e $g_n(x) = g(x)\psi_n(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^d$. Se la tesi valesse per g_n per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, dal momento che la successione $(g_n)_{n \in \mathbb{N},\, n>0}$ converge a g in $W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$, si avrebbe che

$$\int_{\mathbb{R}^d} \langle \nabla f(x), \nabla g(x) \rangle_{\mathbb{R}^d} dx = \lim_n \int_{\mathbb{R}^d} \langle \nabla f(x), \nabla g_n(x) \rangle_{\mathbb{R}^d} dx \leq 0.$$

Assumiamo pertanto che $\mathrm{supp}(g) \subseteq B_{\mathbb{R}^d}(0,R)$ per un certo $R > 0$. Sia poi $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ una funzione non negativa tale che $\mathrm{supp}(\varphi) \subset B_{\mathbb{R}^d}(0,1)$ e

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) dx = 1.$$

Per ogni $\varepsilon > 0$, poniamo

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^d} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^d$ e $f_\varepsilon = f * \varphi_\varepsilon$. Sia $\varepsilon > 0$. Si osservi che, per le proprietà del prodotto di convoluzione, $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ e, per ogni $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq d$,

$$\partial_{x_i} f_\varepsilon = (\partial_{x_i} f) * \varphi_\varepsilon = f * (\partial_{x_i} \varphi_\varepsilon).$$

Inoltre, per ogni $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq d$, si ha che

$$\partial_{x_i x_i} f_\varepsilon = (\partial_{x_i} f) * (\partial_{x_i} \varphi_\varepsilon) = f * \partial_{x_i x_i} \varphi_\varepsilon.$$

Poniamo $J_\varepsilon = \{x \in J \mid \mathrm{dist}(x, \partial J) > \varepsilon\}$. Si noti che $J_\varepsilon \in \mathbb{R}^d$ è un aperto. Pertanto, dato $x \in J_\varepsilon$, esiste $r > 0$ tale che $\overline{B_{\mathbb{R}^d}(x,r)} \subset J_\varepsilon$. Dal momento che f è subarmonica su J, lo è anche su $B_{\mathbb{R}^d}(x,r) \subset J_\varepsilon \subseteq J$. Pertanto, si ha che

$$f(x) \leq \frac{1}{\mathscr{L}^d(B_{\mathbb{R}^d(0,1)}) r^d} \int_{B_{\mathbb{R}^d}(x,r)} f(y) dy.$$

Inoltre, per ogni $y \in B_{\mathbb{R}^d}(0,\varepsilon)$ si ha che $|x-y| < |x| + \varepsilon$. Pertanto, per definizione di J_ε, si ha che $B_{\mathbb{R}^d}(x-y,r) \subseteq J_\varepsilon$, da cui segue che f è subarmonica su $B_{\mathbb{R}^d}(x-y,r)$.

Ma allora, si ha che

$$\begin{aligned}
f_\varepsilon(x) &= \int_{B_{\mathbb{R}^d}(0,\varepsilon)} f(x-y)\varphi_\varepsilon(y)dy \\
&\leq \int_{B_{\mathbb{R}^d}(0,\varepsilon)} \left(\frac{1}{\mathscr{L}^d(B_{\mathbb{R}^d(0,1)})r^d} \int_{B_{\mathbb{R}^d}(x-y,r)} f(z)dz \right) \varphi_\varepsilon(y)dy \\
&= \int_{B_{\mathbb{R}^d}(0,\varepsilon)} \left(\frac{1}{\mathscr{L}^d(B_{\mathbb{R}^d(0,1)})r^d} \int_{B_{\mathbb{R}^d}(x,r)} f(z-y)dz \right) \varphi_\varepsilon(y)dy \\
&= \frac{1}{\mathscr{L}^d(B_{\mathbb{R}^d(0,1)})r^d} \int_{B_{\mathbb{R}^d}(x,r)} \left(\int_{B_{\mathbb{R}^d}(0,\varepsilon)} f(z-y)\varphi_\varepsilon(y)dy \right) dz \\
&= \frac{1}{\mathscr{L}^d(B_{\mathbb{R}^d(0,1)})r^d} \int_{B_{\mathbb{R}^d}(x,r)} f_\varepsilon(z)dz,
\end{aligned}$$

da cui segue che f_ε è subarmonica su J_ε. Ma dal momento che $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, per una proprietà della convoluzione, si ha che

$$(-\Delta f_\varepsilon)(x) \leq 0 \tag{3.3}$$

per ogni $x \in J_\varepsilon$ per il Teorema B.1.4. Inoltre, per ogni $\varepsilon > 0$, si ha che, integrando per parti, per ogni $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \langle \nabla f_\varepsilon(x), \nabla \psi(x) \rangle_{\mathbb{R}^d} dx = \int_{\mathbb{R}^d} (-\Delta f_\varepsilon)(x)\psi(x)dx.$$

Ora, dal momento che $|\nabla f_\varepsilon| \in L^2(\mathbb{R}^d)$ e $\Delta f_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}^d)$, siccome è possibile approssimare $g \in W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$ tramite funzioni $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ per il Teorema A.1.7, si ottiene che, per (3.3),

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \langle \nabla f_\varepsilon(x), \nabla g(x) \rangle_{\mathbb{R}^d} dx &= \int_{\mathbb{R}^d} (-\Delta f_\varepsilon)(x)g(x)dx \\
&= \int_{J\setminus J_\varepsilon} (-\Delta f_\varepsilon)(x)g(x)dx + \int_{J_\varepsilon} (-\Delta f_\varepsilon)(x)g(x)dx \\
&\leq \int_{J\setminus J_\varepsilon} (-\Delta f_\varepsilon)(x)g(x)dx.
\end{aligned}$$

Dal momento che g è Lipschitziana per ipotesi, per ogni $x \in J \setminus J_\varepsilon$ si ha che $|g(x)| \leq \mathrm{Lip}(g)\varepsilon$. Segue che, denotando con $(\theta)_\varepsilon$ la funzione

$$\left(\mathbb{R}^d \ni x \mapsto \frac{1}{\varepsilon}\theta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \in \mathbb{R} \right)$$

per una certa funzione $\theta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$,

$$
\begin{aligned}
\int_{J\setminus J_\varepsilon} |(-\Delta f_\varepsilon)(x)g(x)|\,dx &\le \mathrm{Lip}(g)\int_{J\setminus J_\varepsilon}\sum_{i=1}^d |(\partial_{x_i}f)*(\partial_{x_i}\varphi)_\varepsilon(x)|\,dx \\
&\le \mathrm{Lip}(g)d\int_{J\setminus J_\varepsilon}\left(|\nabla f|*(|\nabla\varphi|)_\varepsilon\right)(x)dx \\
&\le \mathrm{Lip}(g)d\left(\int_{J\setminus J_\varepsilon}\left||\nabla f|*(|\nabla\varphi|)_\varepsilon\right|^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\mathscr{L}^d(J\setminus J_\varepsilon)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le \mathrm{Lip}(g)d\|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)}\|\nabla\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)}\left(\mathscr{L}^d(J\setminus J_\varepsilon)\right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}
$$

utilizzando la disuguaglianza di Hölder e la disuguaglianza di Young. Dal momento che $\mathrm{supp}(g)\subset B_{\mathbb{R}^d}(0,R)$, si ha che $\mathscr{L}^d(J\setminus J_\varepsilon)\to 0$ per $\varepsilon\to 0^+$. Infine, dal momento che $f_\varepsilon \to f$ in $W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$ per $\varepsilon\to 0^+$, si ottiene che

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d}\langle\nabla f(x),\nabla g(x)\rangle_{\mathbb{R}^d}dx &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\mathbb{R}^d}\langle\nabla f_\varepsilon(x),\nabla g(x)\rangle_{\mathbb{R}^d}dx \\
&\le \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{J\setminus J_\varepsilon}(-\Delta f_\varepsilon)(x)g(x)dx = 0,
\end{aligned}
$$

da cui segue direttamente la tesi. □

3.3.2 Il caso 1−dimensionale

Dopo aver raccolto i lemmi preliminari che saranno poi fondamentali nello sviluppo di questa sezione, procediamo con lo studio dei risultati principali. Studiamo innanzitutto il comportamento dell'operatore massimale del calore tra spazi di Sobolev in dimensione 1. In tal caso, è possibile avere un quadro abbastanza completo della situazione, come si può dedurre dal seguente risultato.

Teorema 3.3.5. *Siano $p\in(1,\infty]$ e $u\in W^{1,p}(\mathbb{R})$. Allora si ha che $M_hu\in W^{1,p}(\mathbb{R})$ ed inoltre*

$$\left\|(M_hu)'\right\|_{L^p(\mathbb{R})}\le \|u'\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

Dimostrazione. Se $p\in(1,+\infty)$, il fatto che $M_hu\in W^{1,p}(\mathbb{R})$ segue dal Teorema 3.3.1 e dal Corollario 3.3.1.1. Mostriamo innanzitutto che è sufficiente considerare il caso in cui $u\in W^{1,p}(\mathbb{R})$ sia Lipschitziana. Supponiamo che $u\in W^{1,p}(\mathbb{R})$ e, per ogni $\varepsilon>0$, consideriamo la funzione $u_\varepsilon = u*K_\varepsilon$. Si ha che u_ε è Lipschitziana, infatti,

$$\|(u*K_\epsilon)'\|_\infty = \|u'*K_\epsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\le \|u'\|_{L^p(\mathbb{R})}\|K_\epsilon\|_{L^{p'}(\mathbb{R})}\le C(\epsilon),$$

dove p' denota l'esponente coniugato di p. Supponiamo che la tesi valga per u_ε per ogni $\varepsilon>0$, ossia che $M_hu_\varepsilon\in W^{1,p}(\mathbb{R})$ e

$$\left\|(M_hu_\varepsilon)'\right\|_{L^p(\mathbb{R})}\le\left\|(u_\varepsilon)'\right\|_{L^p(\mathbb{R})},$$

dove

$$M_h u_\varepsilon(x) = \sup_{\tau>0} \left(u_\varepsilon * K_\tau\right)(x) = \sup_{t>\varepsilon} \left(u * K_t\right)(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \forall \epsilon > 0.$$

Per la disuguaglianza di Young si ha che

$$\|u_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R})} = \|u * K_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R})} \|K_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R})} = \|u\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

ed inoltre

$$\left\|(u_\varepsilon)'\right\|_{L^p(\mathbb{R})} = \left\|(u * K_\varepsilon)'\right\|_{L^p(\mathbb{R})} = \|u' * K_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|u'\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

Pertanto, $M_h u_\varepsilon$ è uniformemente limitata in $W^{1,p}(\mathbb{R})$. Si noti che la successione $(M_h u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge puntualmente a $M_h u$ per $\varepsilon \to 0^+$. Per la locale compattezza debole di $W^{1,p}(\mathbb{R})$ (si veda il Teorema **??**) segue che $M_h u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ e $M_h u_\varepsilon \rightharpoonup M_h u$ per $\varepsilon \to 0^+$. Quindi, per la semicontinuità inferiore della norma L^p, $1 < p < \infty$, rispetto alla convergenza debole,

$$\left\|(M_h u)'\right\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \liminf_{\varepsilon\to 0^+} \left\|(M_h u_\varepsilon)'\right\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \liminf_{\varepsilon\to 0^+} \left\|(u_\varepsilon)'\right\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \left\|(u)'\right\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

Pertanto, è possibile assumere che $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ sia Lipschitziana. Si noti ora che per il Lemma 3.3.2 la funzione $M_h u$ è Lipschitziana, mentre per il Lemma 3.3.3 la funzione $M_h u$ è subarmonica sull'insieme aperto

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid M_h u(x) > u(x)\}.$$

Scriviamo A come unione numerabile disgiunta di intervalli aperti non vuoti:

$$A = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} I_j = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} (a_j, b_j).$$

Definiamo ora la famiglia di funzioni Lipschitziane

$$\mathcal{S} = \left\{f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid u \leq f \leq M_h u, \ \mathrm{Lip}(f) \leq \mathrm{Lip}(u), \ \|f'\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|u'\|_{L^p(\mathbb{R})}\right\}$$

Si noti che $\mathcal{S} \neq \emptyset$, dal momento che $u \in \mathcal{S}$. Consideriamo la relazione d'ordine parziale $\preceq$ su $\mathcal{S}$ definita in modo tale che, date $f, g \in \mathcal{S}$, si ha che $f \preceq g$ se e solo se $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Proviamo che $(\mathcal{S}, \preceq)$ è un insieme induttivo. Sia $\{f_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ con $\mathcal{I}$ insieme di indici, un sottoinsieme di $\mathcal{S}$ totalmente ordinato e poniamo

$$\overline{f}(x) = \sup_{i\in\mathcal{I}} f_i(x)$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. Mostriamo che $\overline{f} \in \mathcal{S}$. Dal momento che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha che $\overline{f}(x)$ è definito come estremo superiore di valori in x di funzioni in $\mathcal{S}$, segue direttamente che, per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$, si ha che, per ogni $i \in \mathcal{I}$,

$$|f_i(x) - f_i(y)| \leq \mathrm{Lip}\,(f_i)\,|x - y| \leq \mathrm{Lip}\,(u)\,|x - y|.$$

Passando all'estremo superiore per $i \in \mathcal{I}$, si ottiene che

$$\left|\overline{f}(x) - \overline{f}(y)\right| \leq \mathrm{Lip}\,(u)\,|x-y|$$

da cui segue che $\overline{f}$ è Lipschitziana e $\mathrm{Lip}\left(\overline{f}\right) \leq \mathrm{Lip}(u)$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ consideriamo l'insieme di $2n^2+1$ punti

$$\mathcal{J} = \left\{\frac{j}{n} \mid j \in \mathbb{Z},\ -n^2 \leq j \leq n^2\right\}$$

Per la caratterizzazione di estremo superiore, per ogni $j \in \mathbb{Z}$, $-n^2 \leq j \leq n^2$ esiste una funzione $f_{j,n} \in \mathcal{S}$ tale che

$$\overline{f}\left(\frac{j}{n}\right) - f_{j,n}\left(\frac{j}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

Poniamo ora

$$f_n = \sup_{\{j\in\mathbb{Z} | -n^2 \leq j \leq n^2\}} f_{j,n}.$$

Si noti ora che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che $f_n(x)$ è estremo superiore di funzioni in $\mathcal{S}$ valutate in x, per ogni $x \in \mathbb{R}$. Pertanto, per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$, si ha che, per ogni $j \in \mathbb{Z}$, $-n^2 \leq j \leq n^2$,

$$|f_{j,n}(x) - f_{j,n}(y)| \leq \mathrm{Lip}\,(f_{j,n})\,|x-y| \leq \mathrm{Lip}\,(u)\,|x-y|.$$

Passando all'estremo superiore per $j \in \mathbb{Z}$, $-n^2 \leq j \leq n^2$, si ottiene che

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq \mathrm{Lip}\,(u)\,|x-y|,$$

da cui segue che f_n è Lipschitziana con costante di Lipschitz maggiorata da $\mathrm{Lip}\,(u)$. Si osservi ora che per ogni $x \in \mathbb{R}$ tale che $\left|x - \frac{j}{n}\right| < \frac{1}{2n}$, si ha che

$$\begin{aligned}
\left|\overline{f}(x) - f_n(x)\right| &= \left|\overline{f}(x) - \overline{f}\left(\frac{j}{n}\right) + \overline{f}\left(\frac{j}{n}\right) - f_{j,n}\left(\frac{j}{n}\right) + f_{j,n}\left(\frac{j}{n}\right) - f_n(x)\right| \\
&\leq \left|\overline{f}(x) - \overline{f}\left(\frac{j}{n}\right)\right| + \left|\overline{f}\left(\frac{j}{n}\right) - f_{j,n}\left(\frac{j}{n}\right)\right| + \left|f_{j,n}\left(\frac{j}{n}\right) - f_n(x)\right| \\
&\leq \left|\overline{f}(x) - \overline{f}\left(\frac{j}{n}\right)\right| + \left|\overline{f}\left(\frac{j}{n}\right) - f_{j,n}\left(\frac{j}{n}\right)\right| + \left|f_n\left(\frac{j}{n}\right) - f_n(x)\right| \\
&< \mathrm{Lip}\left(\overline{f}\right)\left|x - \frac{j}{n}\right| + \frac{1}{n} + \mathrm{Lip}\,(f_n)\left|x - \frac{j}{n}\right| \\
&< \frac{1}{n} + \frac{\mathrm{Lip}(u)}{n},
\end{aligned}$$

da cui segue direttamente che la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a $\overline{f}$ per $n \to +\infty$. Si noti inoltre che, per le proprietà di $\mathcal{S}$, si ha che $\|f_n\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})}$ è uniformemente limitata per ogni $n \in \mathbb{N}$. Ma allora, dal momento che $W^{1,p}(\mathbb{R})$ è debolmente localmente compatto, si ha che la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ammette un'estratta debolmente convergente ad una certa $h \in W^{1,p}(\mathbb{R})$. Ma per unicità del limite segue direttamente che $h = \overline{f}$ e, pertanto, $\overline{f} \in W^{1,p}(\mathbb{R})$. Inoltre, si ha che

$$\left\|\overline{f}'\right\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \liminf_n \|f_n'\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|u'\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

Infine, si noti che per ogni $i \in \mathcal{I}$ si ha che $f_i \in \mathcal{S}$, pertanto $f_i(x) \geq u(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, da cui segue che $\overline{f}(x) \geq u(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Inoltre, si ha che $f_i(x) \leq M_h u(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, pertanto, passando all'estremo superiore per $i \in \mathcal{I}$, si ottiene che $\overline{f}(x) \leq M_h u(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Si deduce quindi che $\overline{f} \in \mathcal{S}$, da cui segue che $(\mathcal{S}, \preceq)$ è un insieme induttivo. Pertanto, per il Lemma di Zorn esiste un elemento massimale $g \in \mathcal{S}$ rispetto alla relazione d'ordine $\preceq$.

Proviamo ora che $g = M_h u$. Supponiamo per assurdo che ciò non sia vero, ossia che l'insieme aperto

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid M_h u(x) > g(x)\} \subset A$$

sia non vuoto. Come visto per l'insieme A, è possibile scrivere B come unione numerabile disgiunta di intervalli aperti $J_l = (c_l, d_l)$, dove $c_l, d_l \in \mathbb{R}$, $c_l \leq d_l$ per ogni $l \in \mathbb{N}$. In particolare si ha che

$$B = \bigcup_{l \in \mathbb{N}} J_l = \bigcup_{l \in \mathbb{N}} (c_l, d_l).$$

Dimostriamo che g non è superarmonica su B. Se uno degli intervalli è finito, diciamo (c_l, d_l) per un certo $l \in \mathbb{N}$, si ha che $M_h u(c_l) = g(c_l)$ e $M_h u(d_l) = g(d_l)$ per definizione di B. Ma allora, per il Teorema B.2.2, si ottiene che $M_h u(x) = g(x)$ per ogni $x \in [c_l, d_l]$, il che è assurdo. Se invece l'intervallo è del tipo $(c_j, +\infty)$ per un certo $l \in \mathbb{N}$, si ha che la funzione $M_h u - g$ è una funzione strettamente positiva e convessa su $(c_l, +\infty)$ e tale che $(M_h u - g)(c_l) = 0$. Ma ciò è assurdo dal momento che $M_h u - g$ è una funzione Lipschitziana ed è un elemento di $L^p(\mathbb{R})$, quindi dovrebbe essere infinitesima all'infinito. Analogamente, se l'intervallo è del tipo $(-\infty, d_l)$ per un certo $l \in \mathbb{N}$, si ottiene che $M_h u - g$ è una funzione strettamente positiva e convessa su $(-\infty, d_l)$ e tale che $(M_h u - g)(d_l) = 0$ e si conclude come nel caso precedente. Infine, se $B = \mathbb{R}$, detto $x_0 \in \mathbb{R} = B$ il punto di massimo globale di u, si ha che $u(x_0) = g(x_0) = M_h u(x_0)$, il che è assurdo. Si ha quindi che g non è superarmonica su B. Ma allora, si deduce che esiste un intervallo $[a, b] \subset B$, con $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, tale che

$$g\left(\frac{a+b}{2}\right) < \frac{1}{\omega_1} \int_{\partial B_{\mathbb{R}}\left(\frac{b+a}{2}, \frac{b-a}{2}\right)} g(y)dy = \frac{g(a) + g(b)}{2}. \tag{3.4}$$

Sia ora

$$\gamma \colon [a, b] \to \mathbb{R}$$

la curva definita da

$$\gamma(t) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}(t - a) + g(a)$$

per ogni $t \in [a,b]$, che connette i punti $(a, g(a))$ e $(b, g(b))$. Poniamo ora

$$\widetilde{M_h u}(x) = M_h u(x) - \gamma(x)$$

per ogni $x \in [a,b]$ e

$$\tilde{g}(x) = g(x) - \gamma(x)$$

per ogni $x \in [a,b]$. Si noti che, dal momento che g e γ sono due funzioni continue su $[a,b]$, la funzione $\tilde{g}$ è continua su $[a,b]$. Pertanto, per il Teorema di Weierstrass $\tilde{g}$ ammette minimo su $[a,b]$. Sia $y_0 \in [a,b]$ tale minimo. Da (3.4) segue direttamente che

$$\tilde{g}\left(y_0\right) \leq \tilde{g}\left(\frac{a+b}{2}\right) < \frac{1}{2}g(a) + \frac{1}{2}g(b) - \frac{g(b)-g(a)}{b-a}\frac{b-a}{2} - g(a) = 0.$$

Mostriamo ora che esiste una retta $\tilde{\sigma}$ parallela all'asse delle ascisse tale che il grafico di $\widetilde{M_h u}$ sia al di sopra di $\tilde{\sigma}$ e il grafico di $\tilde{g}$ sia al di sotto di $\tilde{\sigma}$ in un intorno di y_0. Notiamo innanzitutto che

$$\widetilde{M_h u}\left(y_0\right) - \tilde{g}\left(y_0\right) = M_h u\left(y_0\right) - g\left(y_0\right) > 0,$$

dal momento che $y_0 \in [a,b] \subset B$. Per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $0 < \varepsilon < -\tilde{g}\left(y_0\right)$, poniamo

$$a_\varepsilon = \max\left\{x \in [a, y_0] \mid \tilde{g}(x) \geq \tilde{g}\left(y_0\right) + \varepsilon\right\}$$

e

$$b_\varepsilon = \min\left\{x \in [y_0, b] \mid \tilde{g}(x) \geq \tilde{g}\left(y_0\right) + \varepsilon\right\}.$$

Si ha che $\tilde{g}(x) \leq \tilde{g}\left(y_0\right) + \varepsilon$ per ogni $x \in [a_\varepsilon, b_\varepsilon]$ e vale l'uguaglianza agli estremi. Supponiamo per assurdo che per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ esista un punto $z_\varepsilon \in [a_\varepsilon, b_\varepsilon]$ tale che $\widetilde{M_h u}\left(z_\varepsilon\right) < \tilde{g}\left(y_0\right) + \varepsilon$. Allora esisterebbe un insieme di punti $\left\{z_\varepsilon\right\}_{\varepsilon>0}$ che ammetterebbe un punto di accumulazione $z_0 \in [a,b]$. In tal caso si avrebbe che

$$\widetilde{M_h u}\left(z_0\right) \leq \tilde{g}\left(y_0\right) \leq \tilde{g}\left(z_0\right) < \widetilde{M_h u}\left(z_0\right),$$

il che è assurdo. Pertanto esiste $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_0 > 0$ tale che

$$\widetilde{M_h u}(x) \geq \tilde{g}\left(y_0\right) + \varepsilon_0$$

per ogni $x \in [a_{\varepsilon_0}, b_{\varepsilon_0}]$. Ma allora, si ha che la curva

$$\tilde{\sigma}\colon\ [a_{\varepsilon_0}, b_{\varepsilon_0}] \to \mathbb{R},$$

definita da $\tilde{\sigma}(t) = \tilde{g}\left(y_0\right) + \varepsilon_0$ per ogni $t \in [a_{\varepsilon_0}, b_{\varepsilon_0}]$, è la retta cercata. Si noti ora che per ogni $x \in [a_{\varepsilon_0}, b_{\varepsilon_0}]$, si ha che

$$M_h u(x) = \widetilde{M_h u}(x) + \gamma(x) \geq \tilde{g}(y_0) + \varepsilon_0 + \gamma(x) \geq \tilde{g}(x) + \gamma(x) = g(x).$$

Pertanto, se poniamo

$$\sigma\colon\ [a_{\varepsilon_0}, b_{\varepsilon_0}] \to \mathbb{R}$$

la curva definita da $\sigma(t) = \tilde{g}(y_0)+\varepsilon_0+\gamma(t)$, si ha che tale retta separa completamente i grafici di $M_h u$ e g nell'intervallo $[a_{\varepsilon_0}, b_{\varepsilon_0}]$.

Poniamo ora

$$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

la funzione definita da

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \notin [a_{\varepsilon_0}, b_{\varepsilon_0}] \\ \frac{g\left(b_{\varepsilon_0}\right)-g\left(a_{\varepsilon_0}\right)}{b_{\varepsilon_0}-a_{\varepsilon_0}}\left(x-a_{\varepsilon_0}\right)+g\left(a_{\varepsilon_0}\right) & \text{se } x \in [a_{\varepsilon_0}, b_{\varepsilon_0}] \end{cases}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. Per quanto appena provato, si ha che $u \le h \le M_h u$ ed inoltre si mostra direttamente dalla definizione che h e Lipschitziana con costante di Lipschitz

$$\operatorname{Lip}(h) \le \operatorname{Lip}(g) \le \operatorname{Lip}(u).$$

Si noti che, dal momento che la mappa $(\mathbb{R} \ni t \to t^p \in \mathbb{R})$ è una funzione convessa, per la disuguaglianza di Jensen si ottiene che

$$\begin{aligned} \|g'\|_{L^p(\mathbb{R})}^p &= \int_{\mathbb{R}\setminus\left[a_{\varepsilon_0},b_{\varepsilon_0}\right]} |g'(x)|^p\,dx + \int_{\left[a_{\varepsilon_0},b_{\varepsilon_0}\right]} |g'(x)|^p\,dx \\ &\ge \int_{\mathbb{R}\setminus\left[a_{\varepsilon_0},b_{\varepsilon_0}\right]} |g'(x)|^p\,dx + (b_{\varepsilon_0}-a_{\varepsilon_0})\left(\int_{a_{\varepsilon_0}}^{b_{\varepsilon_0}} |g'(x)|\,\frac{dx}{b_{\varepsilon_0}-a_{\varepsilon_0}}\right)^p \\ &\ge \int_{\mathbb{R}\setminus\left[a_{\varepsilon_0},b_{\varepsilon_0}\right]} |g'(x)|^p\,dx + (b_{\varepsilon_0}-a_{\varepsilon_0})\left|\int_{a_{\varepsilon_0}}^{b_{\varepsilon_0}} g'(x)\frac{dx}{b_{\varepsilon_0}-a_{\varepsilon_0}}\right|^p \\ &= \int_{\mathbb{R}\setminus\left[a_{\varepsilon_0},b_{\varepsilon_0}\right]} |g'(x)|^p\,dx + (b_{\varepsilon_0}-a_{\varepsilon_0})\left|\frac{g\left(b_{\varepsilon_0}\right)-g\left(a_{\varepsilon_0}\right)}{b_{\varepsilon_0}-a_{\varepsilon_0}}\right|^p \\ &= \int_{\mathbb{R}} |h'(x)|^p\,dx = \|h'\|_{L^p(\mathbb{R})}^p. \end{aligned}$$

Riassumendo, abbiamo ottenuto che $u(x) \le h(x) \le M_h u(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Lip}(h) \le \operatorname{Lip}(u)$ ed inoltre $\|h'\|_{L^p(\mathbb{R})} \le \|g'\|_{L^p(\mathbb{R})} \le \|u'\|_{L^p(\mathbb{R})}$, dal momento che $g \in \mathcal{S}$. Ma allora, si ha che $h \in \mathcal{S}$, ma ciò è assurdo dal momento che, per quanto abbiamo provato in precedenza,

$$h(x) = \frac{g\left(a_{\varepsilon_0}\right)-g\left(b_{\varepsilon_0}\right)}{b_{\varepsilon_0}-a_{\varepsilon_0}}\left(x-a_{\varepsilon_0}\right)+g\left(a_{\varepsilon_0}\right) > g(x)$$

per ogni $x \in [a_{\varepsilon_0}, b_{\varepsilon_0}]$ e g è un elemento massimale in $\mathcal{S}$. Pertanto, si ottiene che $g = M_h u$, da cui segue direttamente la tesi dal momento che $M_h u \in \mathcal{S}$. □

Anche in questo caso, esattamente come accade per gli operatori massimali di Hardy-Littlewood, il caso $p = 1$ risulta essere piuttosto problematico. Tuttavia, è possibile dimostrare che, data $u \in W^{1,1}(\mathbb{R})$, si ha che $M_h u \in L^\infty(\mathbb{R})$ e $\left\|(M_h u)'\right\|_{L^1(\mathbb{R})} \le \|u'\|_{L^1(\mathbb{R})}$. Per quanto riguarda la dimostrazione di questo fatto si veda [4], Capitolo 2, Teorema 1, punto (ii).

3.3.3 Il caso multidimensionale

Lo scopo è ora quello di andare a studiare una possibile estensione dei risultati appena visti anche al caso multidimensionale. Come già anticipato, tuttavia, tale è noto che sia possibile effettuare tale estensione soltanto nei casi $p = 2$ e $p = \infty$. Riportiamo di seguito il caso in cui $p = \infty$.

Teorema 3.3.6. *Siano $d \in \mathbb{N}$, $d > 0$, $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$ e $M_h u$ la funzione massimale del calore associata. Allora $M_h u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$ e*

$$\|\nabla M_h u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)} \leq \|\nabla u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)}.$$

Dimostrazione. Come nella dimostrazione del Teorema 3.3.5, è possibile assumere senza perdita di generalità che u sia Lipschitziana con costante di Lipschitz

$$\mathrm{Lip}\,(u) \leq \|\nabla u\|_{L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})}\,.$$

In tal caso, per il Lemma 3.3.2 si ha che $M_h u$ è limitata e Lipschitziana con costante di Lipschitz $\mathrm{Lip}\,(M_h u) \leq \mathrm{Lip}\,(u)$. Ma allora, sappiamo che $M_h u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$ ed inoltre,

$$\|\nabla M_h u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)} \leq \mathrm{Lip}\,(M_h u) \leq \mathrm{Lip}\,(u) \leq \|\nabla u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)}\,,$$

da cui segue direttamente la tesi. □

Affrontiamo ora il caso in cui $p = 2$ nel seguente Teorema.

Teorema 3.3.7. *Siano $d \in \mathbb{N}$, $d > 0$, $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$ e $M_h u$ la funzione massimale del calore associata. Allora $M_h u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$ e*

$$\|\nabla M_h u\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)} \leq \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)}.$$

Dimostrazione. Come nella dimostrazione del Teorema 3.3.5, è possibile assumere senza perdita di generalità che u sia Lipschitziana. In tal caso, per il Lemma 3.3.2 si ha che $M_h u$ è Lipschitziana e, per il Lemma 3.3.3, si ha che $M_h u$ è subarmonica sull'insieme aperto

$$A = \{x \in \mathbb{R}^d \mid M_h u(x) > u(x)\}.$$

Sapendo che $M_h u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$ per il Teorema 3.3.1 e applicando il Lemma 3.3.4 con $M_h u$ funzione subarmonica su A e $M_h u - u$ Lipschitziana, si ottiene che

$$\begin{aligned}
\|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)} &= \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(x)|^2\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla M_h u(x) - \nabla\left(M_h u - u\right)(x)|^2\,dx \\
&\geq \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\left(M_h u - u\right)(x)|^2 dx - 2\int_{\mathbb{R}^d} \langle \nabla M_h u(x), \nabla\left(M_h u - u\right)(x)\rangle_{\mathbb{R}^d}\,dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla M_h u(x)|^2\,dx \\
&\geq \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla M_h u(x)|^2\,dx \\
&= \|\nabla M_h u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)}\,,
\end{aligned}$$

da cui segue direttamente la tesi. □

Appendice A

Spazi di Sobolev

In questa prima appendice presentiamo un'introduzione alla teoria degli spazi di Sobolev, riportando definizioni, proprietà fondamentali e alcuni risultati essenziali nella trattazione proposta nei capitoli precedenti. Per quanto riguarda il contenuto di tale appendice, si è fatto riferimento al testo [3].

A.1 Definizioni e proprietà

Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ aperto, $p \in [1, \infty]$ e $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Diremo che u è un elemento dello *spazio di Sobolev* $W^{1,p}(\Omega)$ se esistono $g_i \in L^p(\Omega)$ con $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq d$, tali che

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega g_i \varphi dx$$

per ogni $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. La funzione $g \colon \Omega \to \mathbb{R}^d$, definita da $g = (g_i)_{1 \leq i \leq d}$, si dice *gradiente debole* di u e verrà di seguito denotata con ∇u.

Dato $p \in [1, \infty]$, muniamo lo spazio di Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ della norma

$$\| \ \|_{W^{1,p}(\Omega)} \colon W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$$

definita da $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega, \mathbb{R}^d)}$. Si noti che il fatto che la mappa appena definita sia effettivamente una norma discende direttamente dal fatto che $\| \ \|_{L^p(\Omega)}$ è una norma.

Proposizione A.1.1. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ aperto. Si ha che*

1. *lo spazio di Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ è uno spazio di Banach per ogni $p \in [1, \infty]$;*
2. *lo spazio di Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ è uno spazio riflessivo per ogni $p \in (1, +\infty)$;*
3. *lo spazio di Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ è uno spazio separabile per ogni $p \in [1, +\infty)$.*

Dimostrazione. Proviamo inizialmente 1.. Sia $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di Cauchy di elementi di $W^{1,p}(\Omega)$. Sia $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Allora esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $n_\varepsilon > 0$ tale che, per ogni $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m > n_\varepsilon$, si ha che

$$\|u_n - u_m\|_{W^{1,p}(\Omega)} < \varepsilon.$$

Ma allora, per ogni $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m > n_\varepsilon$, si ha che

$$\|u_n - u_m\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u_n - u_m\|_{W^{1,p}(\Omega)} < \varepsilon$$

e

$$\|\nabla u_n - \nabla u_m\|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^d)} < \|u_n - u_m\|_{W^{1,p}(\Omega)} < \varepsilon.$$

Segue che le successioni $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(\nabla u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono due successioni di Cauchy in $L^p(\Omega)$ e $L^p(\Omega, \mathbb{R}^d)$ rispettivamente. Dal momento che $L^p(\Omega)$ e $L^p(\Omega, \mathbb{R}^d)$ sono spazi di Banach, esistono $u \in L^p(\Omega)$, $g \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^d)$ tali che $u_n \underset{n}{\to} u$ in $L^p(\Omega)$ e $\nabla u \underset{n}{\to} g$ in $L^p(\Omega, \mathbb{R}^d)$. Passando al limite nella definizione di gradiente debole si ottiene che $g = \nabla u$ e $u_n \underset{n}{\to} u$.

Proviamo ora 2.. Consideriamo la mappa

$$T \colon W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega) \times L^p(\Omega, \mathbb{R}^d)$$

definita da $Tu = (u, \nabla u)$ per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Si noti che T è un operatore lineare ed è un'isometria, rispetto alle norme $\| \ \|_{W^{1,p}(\Omega)}$ e $\| \ \|_{L^p(\Omega)\times L^p(\Omega,\mathbb{R}^d)}$ definita da

$$\|(u, F)\|_{L^p(\Omega)\times L^p(\Omega,\mathbb{R}^d)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|F\|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^d)}$$

per ogni $(u, F) \in L^p(\Omega) \times L^p(\Omega, \mathbb{R}^d)$. Siano infatti $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ e $\beta > 0$. Si ha che

$$\begin{aligned} T(\alpha u + \beta v) &= (\alpha u + \beta v, \alpha \nabla u + \beta \nabla v) \\ &= \alpha(u, \nabla u) + \beta(v, \nabla v) \\ &= \alpha T u + \beta T v. \end{aligned}$$

Inoltre, data $u \in W^{1,p}(\Omega)$, si ha che

$$\|Tu\|_{L^p(\Omega)\times L^p(\Omega,\mathbb{R}^d)} = \|(u, \nabla u)\|_{L^p(\Omega)\times L^p(\Omega,\mathbb{R}^d)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^d)} = \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Segue che $T\left(W^{1,p}(\Omega)\right)$ è chiuso in $L^p(\Omega) \times L^p(\Omega, \mathbb{R}^d)$. Siccome per ipostesi si ha che $p \in (1, +\infty)$, allora $L^p(\Omega)$ e $L^p(\Omega, \mathbb{R}^d)$ sono riflessivi, quindi anche $L^p(\Omega) \times L^p(\Omega, \mathbb{R}^d)$ è riflessivo. Segue che $T(W^{1,p}(\Omega))$ è riflessivo, da cui segue la tesi.

Proviamo infine 3.. Sia $p \in [1, +\infty)$. In tal caso si ha che $L^p(\Omega)$ è separabile, da cui segue che $L^p(\Omega) \times L^p(\Omega, \mathbb{R}^d)$ è separabile. Si conclude come nel caso precedente. □

Vediamo di seguito un risultato centrale della teoria degli spazi di Sobolev, che prende il nome di Lemma fondamentale del calcolo delle variazioni.

Lemma A.1.2. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un aperto e $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Supponiamo che*

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = 0$$

per ogni $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$. Allora $u(x) = 0$ per q.o. $x \in \Omega$.

Dimostrazione. Sia $g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ tale che $\mathrm{supp}(g)$ sia un compatto contenuto in Ω. Sia ora $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di mollificatori in $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo

$$g_n = \rho_n * g$$

e notiamo che $g_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ per $n \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande. Per ipotesi si ha che

$$\int_\Omega u(x) g_n(x) dx = 0 \tag{A.1}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dal momento che $g_n \underset{n}{\to} g$ in $L^1(\mathbb{R}^d)$, si ha che esiste un'estratta $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tale che $g_{n_k} \underset{k}{\to} g$ q.o. su $\mathbb{R}^d$. Inoltre si ha che $\|g_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Passando al limite per $n \to +\infty$ in (A.1), si ottiene che

$$\int_\Omega u(x) g(x) dx = 0.$$

Sia ora $K \subset \Omega$ un compatto. Poniamo

$$g(x) = \begin{cases} \mathrm{sgn}(u(x)) & \text{se } x \in K \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^d \setminus K \end{cases}.$$

Si noti che $g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ e, per quanto visto, si ha che

$$\int_K |u(x)| dx = \int_\Omega u(x) g(x) dx = 0.$$

Segue pertanto che $u(x) = 0$ per q.o. $x \in K$. Per l'arbitrarietà del compatto K scelto si ottiene la tesi. □

Studiamo ora un'applicazione del Lemma precedente che fornisce un importante proprietà delle funzioni Sobolev. Per i nostri scopi tratteremo il caso unidimensionale.

Lemma A.1.3 (Lemma fondamentale del calcolo delle variazioni a media nulla)**.** *Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto e $u \in L^1_{loc}(I)$. Supponiamo che*

$$\int_I u(x) \varphi'(x) dx$$

per ogni $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$. Allora $u(x) = c$ per q.o. $x \in I$.

Dimostrazione. Sia $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$ tale che

$$\int_I \psi(x) dx = 1.$$

Sia poi $\omega \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$. Consideriamo una funzione $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(I)$ tale che

$$\varphi' = \omega - \left(\int_I \omega(x) dx \right) \psi.$$

Si noti che la funzione definita al membro di destra dell'assegnazione precedente è continua, ha supporto compatto contenuto in I e ha integrale nullo su I. Pertanto, essa ammette una primitiva con supporto compatto in I. Usando l'ipotesi, si deduce che

$$\int_I u(x)\left(\omega(x)-\left(\int_I \omega(y)dy\right)\psi(x)\right)dx$$

per ogni $\omega \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$, ossia,

$$\int_I \left(u(x)-\left(\int_I u(y)\psi(y)dy\right)\right)\omega(x)dx$$

. Pertanto, per il Lemma A.1.2 si ottiene che

$$u(x)-\left(\int_I u(y)\psi(y)dy\right)=0$$

per q.o. $x \in I$, da cui segue direttamente la tesi. □

Teorema A.1.4. *Siano $I \subset \mathbb{R}$ intervallo aperto e $p \in [1,\infty]$. Allora esiste $\tilde{u} \in \mathcal{C}(I)$ tale che $u(x)=\tilde{u}(x)$ per q.o. $x \in I$.*

Dimostrazione. Sia $x_0 \in I$ e poniamo

$$v(x)=\int_{x_0}^{x} u'(y)dy$$

per q.o. $x \in I$. Si noti che $v \in \mathcal{C}(I)$. Infatti, data $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in I tale che $x_n \underset{n}{\to} x_0$. Allora si ha che, per il Teorema di convergenza dominata,

$$\begin{aligned} v(x_n) &= \lim_n \int_{x_0}^{x_n} u'(y)dy \\ &= \lim_n \int_I u'(y)\mathbb{1}_{[x_0,x_n]}(y)dy \\ &= \int_I \mathbb{1}_{[x_0,x]}(y)u'(y)dy = v(x). \end{aligned}$$

Si noti che, per ogni $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$, si ha che, supponendo che $I=[a,b]$ con $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$,

$$\begin{aligned} \int_I v(x)\varphi'(x)dx &= \int_I \left(\int_{x_0}^{x} u'(y)dy\right)\varphi'(x)dx \\ &= \int_I \int_{x_0}^{x} u'(y)\varphi'(y)dydx \\ &= \int_{x_0}^{b} u'(y)\left(\int_y^b \varphi'(x)dx\right)dy - \int_a^{x_0} u'(y)\left(\int_a^y \varphi'(x)dx\right)dy \\ &= -\int_{x_0}^{b} u'(y)\varphi(y)dy - \int_a^{x_0} u'(y)\varphi(y)dy \\ &= \int_I u'(y)\varphi(y)dy, \end{aligned}$$

osservando che

$$\varphi_a^y \varphi'(x)dx = \varphi(y)$$

per ogni $y \in I$. Si noti ora che, per ogni $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$, si ha che

$$\begin{aligned}\int_I (v(x) - u(x))\varphi'(x)dx &= \int_I v(x)\varphi'(x)dx - \int_I u(x)\varphi'(x)dx \\ &= -\int_I u'(y)\varphi(y)dy + \int_I u'(x)\varphi(x)dx = 0.\end{aligned}$$

Ma allora, per il Lemma A.1.3 si ha che $v(x) - u(x) = c$ per q.o. $x \in I$, con $c \in \mathbb{R}$ costante. Segue che $u = v - c$ q.o. e $v - c \in \mathcal{C}(I)$. □

Si consideri ora il seguente Lemma, nel quale studiamo una proprietà fondamentale del prodotto di convoluzione di elementi dello spazio di Sobolev.

Lemma A.1.5. *Siano $p \in [1, \infty]$, $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$ e $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. Allora si ha che $u * v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ ed inoltre*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(u * v) = u * \frac{\partial v}{\partial x_i}.$$

Dimostrazione. Supponiamo innanzitutto che u abbia supporto compatto. Si noti che, se $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, allora $v \in L^p(\mathbb{R}^d)$ ed inoltre

$$\|u * v\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^p \le \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \|v\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} < +\infty,$$

pertanto si ha che $u * v \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Sia ora $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Segue che

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} (u * v)(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} u(x - y)v(y)dy \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} v(y) \left(\int_{\mathbb{R}^d} \check{u}(y - x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} v(y) \left(\check{u} * \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) (x)dy \\ &= -\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial v}{\partial x_i}(y) \left(\check{u} * \varphi \right) (y)dy \\ &= -\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial v}{\partial x_i}(y) \int_{\mathbb{R}^d} \check{u}(y - x)\varphi(x)dxdy \\ &= -\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial v}{\partial x_i}(y) \int_{\mathbb{R}^d} u(x - y)\varphi(x)dxdy \\ &= -\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} u(x - y) \frac{\partial v}{\partial x_i}(y)dy \right) \varphi(x)dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}^d} \left(u * \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) (x)\varphi(x)dx.\end{aligned}$$

Pertanto, segue che $u * v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(u * v) = u * \frac{\partial v}{\partial x_i}$. □

Riportiamo di seguito un risultato fondamentale della teoria degli spazi di Sobolev, riguardante l'approssimazione di funzioni in $W^{1,p}(\Omega)$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ aperto, tramite funzioni differenziabili infinte volte e a supporto compatto. Prima di enunciare e dimostrare il Teorema principale, occorre fare alcune precisazioni preliminari. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un aperto. Data f una funzione definita su Ω, sia

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in \Omega \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega \end{cases}$$

Lemma A.1.6. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un aperto, $p \in [1, \infty]$, $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e $\zeta \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Allora si ha che $\widetilde{\zeta u} \in W^{1,p}(\Omega)$ ed inoltre*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\widetilde{\zeta u} = \widetilde{\left(\zeta \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} u\right)}$$

per ogni $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq d$.

Dimostrazione. Sia $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq d$. Data $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ si ha che

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{\zeta u}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx &= \int_\Omega \zeta(x) u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx \\
&= \int_\Omega u(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}(\zeta \varphi)(x) - \frac{\partial \zeta}{\partial x_i}(x) \varphi(x) \right) dx \\
&= -\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \zeta(x) \varphi(x) + u(x) \frac{\partial \zeta}{\partial x_i}(x) \varphi(x) \right) dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{\left(\zeta \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\zeta}{\partial x_i} u \right)}(x) \varphi(x) dx,
\end{aligned}$$

da cui segue direttamente la tesi. □

Siamo ora pronti per enunciare e dimostrare il Teorema di Friedrichs.

Teorema A.1.7 (Teorema di Friedrichs)**.** *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto, $p \in [1, +\infty)$ e $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Allora esiste una successione $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di elementi di $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ tale che*

$$u_n\big|_\Omega \underset{n}{\to} u$$

in $L^p(\Omega)$ e

$$\nabla u_n\big|_{\tilde{\Omega}} \underset{n}{\to} \nabla u$$

in $L^p(\tilde{\Omega})$ per ogni $\tilde{\Omega} \subset\subset \Omega$. Se $\Omega = \mathbb{R}^d$, si ha che esiste una successione $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di elementi di $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ tale che

$$u_n \underset{n}{\to} u$$

in $L^p(\mathbb{R}^d)$ e

$$\nabla u_n \underset{n}{\to} \nabla u$$

in $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Dimostrazione. Poniamo

$$\overline{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se } x \in \Omega \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega \end{cases} .$$

e sia $u_n = \eta_n * \overline{u}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, dove $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di mollificatori in $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ con $\operatorname{supp}(\eta_n) \subset B_{\mathbb{R}^d}\left(0, \frac{1}{n}\right)$. Allora si ha che $v_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ e $v_n \underset{n}{\to} \overline{u}$ in $L^p(\mathbb{R}^d)$. Proviamo che

$$\nabla v_n\big|_{\tilde{\Omega}} \underset{n}{\to} \nabla u\big|_{\tilde{\Omega}},$$

per ogni $\tilde{\Omega} \subset\subset \Omega$. Sia pertanto $\tilde{\Omega} \subset\subset \Omega$ e sia $\zeta \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ tale che $0 \leq \zeta(x) \leq 1$ per ogni $x \in \Omega$ ed inoltre $\zeta = 1$ in un intorno di $\tilde{\Omega}$. Per $n \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande si ha che

$$\begin{aligned} \operatorname{supp}\left(\eta_n * \widetilde{\zeta u} - \eta_n * \tilde{u}\right) &= \operatorname{supp}\left(\eta_n * \left(1 - \tilde{\zeta}\right)\tilde{u}\right) \\ &\subset \overline{\operatorname{supp}(\eta_n) + \operatorname{supp}\left(\left(1-\tilde{\zeta}\right)\tilde{u}\right)} \\ &\subset \overline{B_{\mathbb{R}^d}\left(0, \frac{1}{n}\right) + \operatorname{supp}\left(1 - \tilde{\zeta}\right)} \\ &\subset \mathbb{R}^d \setminus \tilde{\Omega}, \end{aligned}$$

da cui segue che, per $n \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande si ha che

$$\eta_n * \left(\widetilde{\zeta u}\right) = \eta_n * \tilde{u}. \tag{A.2}$$

Per i Lemmi A.1.5 e A.1.6 si ha che

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\eta_n * \widetilde{\zeta u}\right) = \eta_n * \left(\zeta \widetilde{\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial \zeta}{\partial x_i}} u\right).$$

Pertanto, la successione $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\eta_n * \widetilde{\zeta u}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\zeta \widetilde{\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial \zeta}{\partial x_i}} u$ in $L^p(\mathbb{R}^d)$. In particolare, si ha che tale successione converge a $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ in $L^p(\tilde{\Omega})$, da cui segue che la successione $\left(\frac{\partial v_n}{\partial x_i}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ in $L^p(\tilde{\Omega})$ per (A.2). Data una successione $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di funzioni cut-off in $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, poniamo $u_n = v_n \rho_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora si ha che $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di elementi di $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ tale che $u_n \underset{n}{\to} u$ in $L^p(\Omega)$ e $\nabla u_n \underset{n}{\to} \nabla u$ in $L^p(\tilde{\Omega})$ per ogni $\tilde{\Omega} \subset \Omega$, il che conclude la prima parte del Teorema.

Nel caso in cui $\Omega = \mathbb{R}^d$, la successione $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $u_n = \rho_n(\eta_n * u)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ ha già le proprietà richieste, pertanto, si conclude come sopra. $\square$

Proposizione A.1.8. *Siano $p \in (1, \infty]$, $\Omega \in \mathbb{R}^d$ aperto e $u \in L^p(\Omega)$. I seguenti fatti sono equivalenti:*

1. *$u \in W^{1,p}(\Omega)$;*
2. *esiste una costante $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$ tale che*
$$\left| \int_\Omega u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx \right| \leq c \|\varphi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)}$$
per ogni $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, per ogni $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq d$, dove $p' \in [1, +\infty)$ è l'esponente coniugato di p;
3. *esiste una costante $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$ tale che per ogni $\tilde{\Omega} \subset\subset \Omega$ e $h \in \mathbb{R}^d$ sufficientemente piccolo si ha che*
$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\tilde{\Omega})} \leq c|h|.$$

Dimostrazione. Mostriamo che da 1. segue 2.. Supponiamo che $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Per ogni $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$
$$\left| \int_\Omega u(x)\varphi(x) dx \right| = \left| \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\varphi(x) dx \right| \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)} \|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Proviamo ora che da 2. segue 1.. Sia $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq d$. Consideriamo l'applicazione
$$F_i \colon \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$
definita da
$$F_i\varphi = \int_\Omega u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx$$
per ogni $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Si noti che F_i è un funzionale lineare e continuo per ipotesi, definito su un sottospazio denso di $L^{p'}(\Omega)$. Per il Teorema di rappresentazione di Riesz esiste $g \in L^p(\Omega)$ tale che
$$F_i(\varphi) = \int_\Omega g(x)\varphi(x) dx = \langle g, \varphi \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Per definizione di derivata debole, si ottiene che $g = -\frac{\partial u}{\partial x_i}$. Per l'arbitrarietà di $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq d$ si ottiene che $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Mostriamo ora che 1. implica 3.. Dimostriamo innanzitutto che la tesi vale per funzioni $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Siano $\tilde{\Omega} \subset\subset \Omega$, $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ e $h \in \mathbb{R}^d$. Poniamo
$$f(t) = u(x + th),$$
con $t \in \mathbb{R}$. Allora si ha che $f'(t) = \langle h, \nabla u(x + th) \rangle_{\mathbb{R}^d}$, pertanto
$$u(x + h) - u(x) = f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(t) dt = \int_0^1 \langle h, \nabla u(x + th) \rangle_{\mathbb{R}^d} dt.$$

Segue che, per ogni $p \in (1, +\infty)$, si ha

$$|\tau_h u(x) - u(x)|^p = \left| \int_0^1 \langle h, \nabla u(x+th) \rangle_{\mathbb{R}^d} dt \right|^p \leq |h|^p \int_0^1 |\nabla u(x+th)|^p dt,$$

da cui segue che

$$\begin{aligned}
\int_{\tilde{\Omega}} |\tau_h u(x) - u(x)|^p \, dx &\leq |h|^p \int_{\tilde{\Omega}} \int_0^1 |\nabla u(x+th)|^p dt dx \\
&= |h|^p \int_0^1 \int_{\tilde{\Omega}} |\nabla u(x+th)|^p dx dt \\
&\leq |h|^p \int_0^1 \int_{\left\{y = x+th \in \mathbb{R}^d | x \in \tilde{\Omega}\right\}} |\nabla u(y)|^p dy dt \\
&= |h|^p \int_{\left\{y = x+th \in \mathbb{R}^d | x \in \tilde{\Omega}\right\}} |\nabla u(y)|^p dy
\end{aligned}$$

Se $|h| < \operatorname{dist}(\tilde{\Omega}, \partial\Omega)$, esiste $\Omega' \subset\subset \Omega$ tale che $\left\{ y = x + th \in \mathbb{R}^d \mid x \in \tilde{\Omega} \right\} \subset \Omega'$ per ogni $t \in [0,1]$, pertanto

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\Omega)} \leq |h|^p \int_{\Omega'} |\nabla u(x)|^p dx$$

e si conclude ponendo $c = \int_{\Omega'} |\nabla u(x)|^p$. Sia ora $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Allora per il Teorema A.1.7 esiste una successione $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di elementi di $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ tale che $u_n \underset{n}{\to} u$ in $L^p(\Omega)$ e $\nabla u_n \underset{n}{\to} \nabla u$ in $L^p(\tilde{\Omega})$ per ogni $\tilde{\Omega} \subset\subset \Omega$. Inoltre, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che

$$\|\tau_h u_n - u_n\|_{L^p(\Omega)} \leq |h|^p \int_{\Omega'} |\nabla u_n(x)|^p dx.$$

Ma allora, dal momento che $\Omega' \subset\subset \Omega$, si ottiene che

$$\begin{aligned}
\|\tau_h u - u\|_{L^p(\Omega)} &\leq \|\tau_h u - \tau_h u_n\|_{L^p(\Omega)} + \|\tau_h u_n - u_n\|_{L^p(\Omega)} + \|u_n - u\|_{L^p(\Omega)} \\
&= 2\|u - u_n\|_{L^p(\Omega)} + |h|^p \int_{\Omega'} |\nabla u_n(x)|^p dx,
\end{aligned}$$

da cui segue la tesi passando al limite per $n \to +\infty$.

Proviamo infine che da 3. segue 2.. Sia $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ e sia $\tilde{\Omega} \in \mathbb{R}^d$ un aperto tale che $\operatorname{supp}(\varphi) \subset \tilde{\Omega} \subset\subset \Omega$. Sia poi $h \in \mathbb{R}^d$ tale che $|h| < \operatorname{dist}(\tilde{\Omega}, \partial\Omega)$. Sfruttando l'ipotesi, si ha che, per la disuguaglianza di Hölder,

$$\left| \int_\Omega (\tau_h u(x) - u(x)) \, \varphi(x) dx \right| \leq \|\tau_h u - u\|_{L^p(\Omega)} \|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)} \leq c|h| \|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)},$$

dove $p' \in [1, +\infty)$ è l'esponenente coniugato di p. D'altra parte, dal momento che

$$\begin{aligned}\int_\Omega (\tau_h u(x) - u(x))\,\varphi(x)dx &= \int_\Omega (u(x+h) - u(x))\,\varphi(x)dx \\ &= \int_\Omega u(x+h)\varphi(x)dx - \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx \\ &= \int_\Omega u(x)\varphi(x-h)dx - \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx \\ &= \int_\Omega u(x)(\varphi(x-h) - \varphi(x))dx,\end{aligned}$$

si ha che

$$\int_\Omega u(x)\frac{\varphi(x-h) - \varphi(x)}{|h|}dx = \int_\Omega \frac{\tau_h u(x) - u(x)}{|h|}\varphi(x)dx \le c\|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega}.$$

Per ogni $i \in \mathbb{N}$, $1 \le i \le d$, scegliendo $h = te_i$ con $t \in \mathbb{R}$ e passando al limite per $t \to 0$, si ottiene la tesi. □

A.2 Lo spazio $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$

Lo scopo della seguente sezione consiste nel fornire un'utile caratterizzazione dello spazio $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$. Per farlo, occorre fare riferimento innanzitutto al Teorema di Rademacher. Per la dimostrazione si veda [10], cap. 7.3.

Teorema A.2.1 (Teorema di Rademacher)**.** *Siano $d, m \in \mathbb{N}$, $d > 0$, $m > 0$, $u\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ una funzione Lipschitziana. Allora u è differenziabile q.o. su $\mathbb{R}^d$.*

Enunciamo e dimostriamo di seguito il risultato principale di questa sezione.

Teorema A.2.2. *Sia $u \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Si ha che, se $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$, allora u ammette un rappresentante Lipschitziano. Viceversa, se u è Lipschitziana, allora $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$.*

Dimostrazione. Supponiamo innanzitutto che $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$. Sia $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ un'identità approssimata in $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ e poniamo

$$u_\varepsilon = u * \varphi_\varepsilon,$$

per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Si noti che, per ogni $h \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned}|u_\varepsilon(x+h) - u_\varepsilon(x)| &= \left|\int_0^1 \langle h, \nabla u_\varepsilon(x+ht)\rangle_{\mathbb{R}^d} dt\right| \\ &\le \int_0^1 |h| \left|\int_{\mathbb{R}^d} \nabla u(x+ht-y)\varphi_\varepsilon(y)dy\right| dt \\ &\le \|\nabla u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)}|h|\end{aligned}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^d$. Segue che, dati $x, y \in \mathbb{R}^d$,

$$|u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y)| \leq |\nabla u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} |x - y|.$$

Sia $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali strettamente positivi tale che $\varepsilon_n \to 0^+$ per $n \to +\infty$. Si noti che, per le proprietà del prodotto di convoluzione con identità approssimate... Pertando, passando al limite per ... si ottiene che

$$|u(x) - u(y)| \leq \|\nabla u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)}|x - y| \tag{A.3}$$

per q.o. $x, y \in \mathbb{R}^d$. Pertanto, esiste $N \subset \mathbb{R}^d$ tale che $\mathscr{L}^d(N) = 0$ e vale $A.3$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^d \setminus N$. Siano ora $\overline{x}, \overline{y} \in N$. Dal momento che N è denso in $\mathbb{R}^d$, esistono due successioni $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^d \setminus N$ tali che $x_n \underset{n}{\to} \overline{x}$ e $y_n \underset{n}{\to} \overline{y}$. Si noti che per ogni $n, m \in \mathbb{N}$, si ha che

$$|u(x_n) - u(x_m)| \leq \|\nabla u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} |x_n - x_m| ,$$

per quanto abbiamo appena provato. Pertanto, si ha che $(u(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{R}^d$. Dal momento che $\mathbb{R}^d$ è completo, esiste $z \in \mathbb{R}^d$ tale che $u(x_n) \underset{n}{\to} z$. Si noti ora che, data $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}^d \setminus N$ tale che $z_n \underset{n}{\to} \overline{x}$ si ha che

$$|u(x_n) - u(z_n)| \leq \|\nabla u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} |x_n - z_n| \underset{n}{\to} 0.$$

Pertanto, si ha che per ogni successione $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^d \setminus N$ convergente a $\overline{x}$, la successione $(u(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ammette lo stesso limite, da cui segue che esiste

$$\lim_{x\to\overline{x}} u(x)$$

che definiamo come $u(\overline{x})$. Ma allora, si noti che, considerando il rappresentante di u così definito, si ottiene che

$$\begin{aligned} |u(\overline{x}) - u(\overline{y})| &\leq |u(\overline{x}) - u(x_n)| + |u(x_n) - u(y_n)| + |u(y_n) - u(\overline{y})| \\ &\leq \|\nabla u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} |x_n - y_n| \underset{n}{\to} \|\nabla u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} |\overline{x} - \overline{y}| , \end{aligned}$$

da cui segue che u è Lipschitziana su $\mathbb{R}^d$.

Viceversa, sia $u \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ una funzione Lipschitziana. Siano $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ e $j \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq d$. Utilizzando il Teorema di convergenza dominata di Lebesgue nel primo caso poiché $u \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ e $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, nel secondo caso poiché u è Lipschitziana e φ è integrabile su $\mathbb{R}^d$, si ottiene che

$$\begin{aligned} -\int_{\mathbb{R}^d} u(x)\partial_j\varphi(x)dx &= -\lim_{h\to 0^+} \int_{\mathbb{R}^d} u(x)\frac{\varphi(x + he_j) - \varphi(x)}{h}dx \\ &\lim_{h\to 0^+} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{u(x + he_j) - u(x)}{h}\varphi(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \partial_j u(x)\varphi(x)dx \end{aligned}$$

dal momento che u è differenziabile q.o. su $\mathbb{R}^d$ per il Teorema di Rademacher. Ma allora, esiste la derivata debole $\partial_j u$. Dal momento che $\|\nabla u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)} \leq \mathrm{Lip}(u)$, si deduce che $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$. $\square$

A.3 Operazioni stabili su spazi di Sobolev

Ci occupiamo ora di formalizzare l'estensione di risultati già noti per funzioni differenziabili anche al caso di elementi di uno spazio di Sobolev, ossia a classi di funzioni che ammettono un gradiente debole. Dimostriamo innanzitutto la differenziabilità debole del prodotto.

Proposizione A.3.1. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ aperto, $p \in [1, \infty]$ e $u, v \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Allora si ha che $uv \in W^{1,p}(\Omega)$ ed inoltre,*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(uv) = \frac{\partial u}{\partial x_i} v + u \frac{\partial v}{\partial x_i}$$

per ogni $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq d$.

Per la dimostrazione si veda [3], Capitolo 9, Proposizione 9.4.

Proposizione A.3.2. *Sia $G \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ tale che $G(0) = 0$ e $|G'(s)| \leq M$ per ogni $s \in \mathbb{R}$, dove $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$. Siano poi $p \in [1, \infty]$ e $u \in W^{1,p}(\Omega)$ a valori reali. Allora si ha che $G \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$ ed inoltre*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(G \circ u) = (G' \circ u) \frac{\partial u}{\partial x_i},$$

per ogni $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq d$.

Dimostrazione. Dall'ipotesi segue direttamente che $|G(s)| \leq M|s|$ per ogni $s \in \mathbb{R}$ e pertanto, si ha che $|G \circ u| \leq M|u|$. Ma allora, si ha che $G \circ u \in L^p(\Omega)$ ed inoltre $(G' \circ u) \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)$, per ogni $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq d$. Sia $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq d$ e supponiamo che $p \in [1, +\infty)$. Per il Teorema A.1.7 esiste una successione $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di elementi di $W^{1,p}(\Omega)$ tale che $u_n \underset{n}{\to} u$ in $L^p(\Omega)$ e $\nabla u_n \underset{n}{\to} \nabla u$ in $L^p(\tilde{\Omega})$ per ogni $\tilde{\Omega} \subset\subset \Omega$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che

$$\int_\Omega (G \circ u_n)(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx = -\int_\Omega (G' \circ u_n) \frac{\partial}{\partial x_i} u_n(x) \varphi(x) dx.$$

La tesi segue direttamente dal momento che $G \circ u_n \underset{n}{\to} G \circ u$ in $L^p(\Omega)$ ed inoltre

$$(G' \circ u_n) \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \underset{n}{\to} (G' \circ u) \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

per il Teorema di convergenza dominata di Lebesgue. □

Proposizione A.3.3. *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto, $p \in [1, \infty]$ e $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Allora si ha che*

1. *se u è a valori reali, si ha che $u_+, u_-, |u| \in W^{1,p}(\Omega)$ ed inoltre $|\nabla |u|| = |\nabla u|$;*

2. *se u è a valori complessi, si ha che*

$$\nabla |u| = Re\left(\frac{\overline{u}}{|u|}\nabla u\right)\mathbb{1}_{x\in\mathbb{R}^d|u\neq 0}.$$

In particolare, si ha che $|\nabla|u|| \leq |\nabla u|$.

Dimostrazione. Proviamo 1.. Mostriamo innanzitutto che $u_+ \in W^{1,p}(\Omega)$. Per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, consideriamo la funzione

$$G_\varepsilon\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

definita da

$$G_\varepsilon(t) = \begin{cases} \sqrt{t^2+\varepsilon^2} - \varepsilon & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$. Si noti che per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha che

$$G'_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{t}{\sqrt{t^2+\varepsilon^2}} & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}.$$

Inoltre, si ha che

$$\lim_{t\to 0^+} G'_\varepsilon(t) = 0$$

e

$$\lim_{t\to 0^-} G'_\varepsilon(t) = 0,$$

pertanto $G_\varepsilon \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Inoltre, si ha che, per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, si ha che $G_\varepsilon(0) = 0$, $|G'_\varepsilon(t)| \leq 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ ed inoltre, detta

$$G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

la mappa definita da

$$G(t) = \begin{cases} t & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$, si ha che

$$\|G_\varepsilon - G\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < \varepsilon$$

Per la Proposizione A.3.2 si ha che $G_\varepsilon \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$ e $\nabla(G_\varepsilon \circ u) = G'_\varepsilon(u)\nabla u$. Inoltre, si ha che $\|G_\varepsilon - G\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \to 0$ per $\varepsilon \to 0^+$. Si noti ora che, per il Teorema di convergenza dominata di Lebesgue, per ogni $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq d$,

$$\begin{aligned}\int_\Omega u_+(x)\frac{\partial G}{\partial x_i}(x)dx &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\Omega G_\varepsilon(u(x))\frac{\partial G}{\partial x_i}(x)dx \\ &= -\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\Omega G'_\varepsilon(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)G(x)dx \\ &- \int_\Omega \mathbb{1}_{\left\{y\in\mathbb{R}^d|u(y)>0\right\}}\frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi(x)dx,\end{aligned}$$

da cui segue che, per ogni $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq d$,

$$\frac{\partial u_+}{\partial x_i} = \mathbb{1}_{\{y \in \mathbb{R}^d | u(y) > 0\}} \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Ma allora, si ha che $u_+ \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ e

$$\nabla u_+ = \mathbb{1}_{\{y \in \mathbb{R}^d | u(y) > 0\}} \nabla u.$$

Analogamente, si dimostra che $u_{\in} W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ e

$$\nabla u_- = -\mathbb{1}_{\{y \in \mathbb{R}^d | u(y) > 0\}} \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

Ma allora, dal momento che $u = u_+ + u_-$ e $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ è uno spazio vettoriale, si ha che $|u| \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ e

$$\nabla |u| = \operatorname{sign}(u) \nabla u.$$

In particolare, si ha che

$$|\nabla |u|| = |\operatorname{sign}(u) \nabla u| = |\nabla u|,$$

da cui segue la tesi.

Proviamo ora 2.. Dal momento che nel corso della dimostrazione si andrà ad integrare con funzioni test a supporto compatto, è sufficiente dimostrare il risultato per $u \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$. Proviamo che

$$\nabla |u| = \operatorname{Re}\left(\frac{u}{|u|} \nabla u\right) \mathbb{1}_{\{x \in \mathbb{R}^d | u(x) \neq 0\}}.$$

Sia $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Definiamo la funzione

$$F_\varepsilon \colon \mathbb{C} \to [\varepsilon, +\infty)$$

tale che

$$F_\varepsilon(z) = \sqrt{|z|^2 + \varepsilon}$$

per ogni $z \in \mathbb{C}$. Si noti che, per ogni $j \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq d$,

$$\partial_j F_\varepsilon(u) = \operatorname{Re}\left(\frac{\overline{u}}{\sqrt{u^2 + \varepsilon}} \partial_j u\right).$$

Per il Teorema A.1.7 esiste una successione $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ tale che $u_n \underset{n}{\to} u$ in $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Fissiamo $\psi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d)$. Si ha che, per ogni $j \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq d$,

$$-\int_{\mathbb{R}^d} F_\varepsilon(u_n)(x) \partial_j \psi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \partial_j F_\varepsilon(u_n)(x) \psi(x) dx. \tag{A.4}$$

Sia $j \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq d$. Dal momento che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che

$$|F_\varepsilon(u_n) - F_\varepsilon(u)| \leq \|\nabla F_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)} |u_n - u| = |u_n - u|,$$

si ottiene che, per il Teorema di convergenza dominata di Lebesgue,

$$-\int_{\mathbb{R}^d} F_\varepsilon(u_n)(x)\partial_j\psi(x)dx \underset{n}{\to} -\int_{\mathbb{R}^d} F_\varepsilon(u)(x)\partial_j\psi(x)dx. \tag{A.5}$$

D'altra parte, si ha che

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\overline{u_n(x)}}{\sqrt{|u_n(x)|^2+\varepsilon}}\partial_j u_n(x)\psi(x)dx - \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\overline{u(x)}}{\sqrt{|u(x)|^2+\varepsilon}}\partial_j u(x)\psi(x)dx\right| \\ \leq &\int_{\mathbb{R}^d} \left|\frac{\overline{u_n(x)}}{\sqrt{|u_n(x)|^2+\varepsilon}}\right| |\partial_j u_n(x) - \partial_j u(x)|\,|\psi(x)|dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^d} \left|\frac{\overline{u_n(x)}}{\sqrt{|u_n(x)|^2+\varepsilon}} - \frac{\overline{u(x)}}{\sqrt{|u(x)|^2+\varepsilon}}\right| |\partial_j u(x)\psi(x)|\,dx.\end{aligned}$$

Si noti che $\partial_j u_n \underset{n}{\to} \partial_j u$ in $L^1(\mathbb{R}^d)$ ed inoltre

$$\left|\frac{\overline{u_n}}{\sqrt{|u_n|^2+\varepsilon}}\right| \leq 1.$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. D'altra parte, si ha che

$$\left|\frac{\overline{u_n}}{\sqrt{|u_n|^2+\varepsilon}} - \frac{\overline{u}}{\sqrt{|u|^2+\varepsilon}}\right| \leq 2$$

e $\partial_j u\psi \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Pertanto, applicando il Teorema di convergenza dominata e ricordando (A.4) e (A.5), si ottiene che per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$,

$$\nabla F_\varepsilon(u) = \mathrm{Re}\left(\frac{\overline{u}}{\sqrt{|u|^2+\varepsilon}}\nabla u\right).$$

Sia ora $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Si ha che, fissato $j \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq d$,

$$-\int_{\mathbb{R}^d} F_\varepsilon(u(x))\partial_j\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{Re}\left(\frac{\overline{u(x)}}{\sqrt{|u(x)|^2+\varepsilon}}\partial_j u(x)\right)\varphi(x)dx.$$

Si noti dapprima che, a meno di considerare $\varepsilon \leq 1$, cosa che possiamo fare senza perdita di generalità, si ha che

$$|F_\varepsilon(u)| \leq |u| + 1.$$

D'altra parte, si ha che $F_\varepsilon(u)(x) \to |u|(x)$ per $\varepsilon \to 0^+$ per q.o. $x \in \mathbb{R}^d$. Pertanto, per il Teorema di convergenza dominata si deduce che

$$-\int_{\mathbb{R}^d} F_\varepsilon(u(x))\partial_j\varphi(x)dx \to -\int_{\mathbb{R}^d} |u|(x)\partial_j\varphi(x)dx$$

per $\varepsilon \to 0^+$. D'altra parte, si noti che $\partial_j u\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ e

$$\frac{\overline{u(x)}}{\sqrt{|u(x)|^2+\varepsilon}} \to \frac{\overline{u}(x)}{|u(x)|}\mathbb{1}_{\{y\in\mathbb{R}^d | u(y)\neq 0\}}(x)$$

per $\varepsilon \to 0^+$ per q.o. $x \in \mathbb{R}^d$. Pertanto, per il Teorema di convergenza dominata di Lebesgue, si ottiene che

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{Re}\left(\frac{\overline{u(x)}}{\sqrt{|u(x)|^2+\varepsilon}}\partial_j u(x)\right)\varphi dx \to \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{Re}\left(\frac{\overline{u(x)}}{|u(x)|}\mathbb{1}_{\{y\in\mathbb{R}^d | u(y)\neq 0\}}(x)\partial_j u(x)\right)\varphi(x)dx,$$

da cui segue direttamente la tesi.

Si conclude che

$$|\nabla|u|| = \left|\mathrm{Re}\left(\frac{u}{|u|}\nabla u\right)\mathbb{1}_{\{x\in\mathbb{R}^d | u(x)\neq 0\}}\right| \leq |\nabla u|.$$

□

Corollario A.3.3.1. *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto, $p \in [1,\infty]$ e $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$. Allora si ha che*

$$\nabla\left(\max\{u,v\}\right) \leq \max\left\{\nabla u, \nabla v\right\}.$$

Dimostrazione. Si noti che

$$\max\{u,v\} = \frac{1}{2}\left(u+v+|u-v|\right).$$

Pertanto, per il Corollario A.3.3, si ottiene che

$$\begin{aligned}
\nabla\left(\max\{u,v\}\right) &= \nabla\left(\frac{1}{2}\left(u+v+|u-v|\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\nabla u + \nabla v + \nabla|u-v|\right) \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\nabla u + \nabla v + |\nabla|u-v||\right) \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\nabla u + \nabla v + |\nabla u - \nabla v|\right) \\
&= \max\left\{\nabla u_1, \nabla u_2\right\},
\end{aligned}$$

da cui segue direttamente la tesi. □

A.4 Debole compattezza locale dello spazio di Sobolev

Concludiamo questa appendice con un risultato di locale compattezza debole per lo spazio di Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ per $p \in (1, +\infty)$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ aperto. Tale risultato è fondamentale nella dimostrazione delle proprietà degli operatori massimali introdotti su spazi di Sobolev.

Teorema A.4.1. *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto e $p \in (1, +\infty)$. Si ha che lo spazio di Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ è localmente debolmente compatto.*

Dimostrazione. Sia $p \in (1, +\infty)$. Mostriamo che ogni punto di $W^{1,p}(\Omega)$ ammette un intorno debolmente compatto. Sia pertanto $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e consideriamo un intorno aperto del tipo

$$u \in B_{W^{1,p}(\Omega)}(u, 1) \subset W^{1,p}(\mathbb{R}^d).$$

Mostriamo che

$$\overline{B_{W^{1,p}(\Omega)}(u, 1)}$$

è debolmente compatto. Per il Teorema di Banach-Alaoglu-Bourbaki tale palla chiusa è compatta rispetto alla topologia debole $*$. Dal momento che $W^{1,p}(\Omega)$ è riflessivo per la Proposizione A.1.1, si ha che

$$\overline{B_{(W^{1,p}(\Omega))^{**}}(u, 1)} = \overline{B_{W^{1,p}(\Omega)}(u, 1)},$$

e la topologia debole e la topologia debole $*$ coincidono. Pertanto,

$$\overline{B_{W^{1,p}(\Omega)}(u, 1)}$$

è debolmente compatta e ciò permette di concludere dal momento che

$$u \in \overline{B_{W^{1,p}(\Omega)}(u, 1)} \subset W^{1,p}(\Omega).$$

$\square$

Appendice B

Equazioni di Laplace e del calore

In questa appendice presentiamo un'introduzione all'equazione di Laplace e all'equazione del calore. I testi di riferimento per i risultati di seguito riportati sono [7] e [11].

Nella prima sezione verranno introdotte le funzioni armoniche, subarmoniche e superarmoniche e alcune loro proprietà fondamentali. Inoltre, si provvederà a fornire un risultato di esistenza e unicità della soluzione del problema di Laplace su $B_{\mathbb{R}^d}(0, R)$, con $R \in \mathbb{R}$, $R > 0$.

Nella seconda sezione si andrà a studiare invece un'introduzione al problema del calore, enunciando e dimostrando in seguito il principio del massimo debole.

B.1 Equazione di Laplace e funzioni armoniche

Sia $\Omega \in \mathbb{R}^d$ un aperto e sia $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. La funzione u si dice *armonica* su Ω se verifica l'*equazione di Laplace* su Ω

$$\Delta u = 0. \tag{B.1}$$

Studiamo di seguito le proprietà di media delle funzioni armoniche. Denotiamo con ω_d la misura superficiale di $\partial B_{\mathbb{R}^d}(0, 1)$.

Teorema B.1.1. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un aperto e $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ una funzione armonica su Ω. Allora per ogni $x \in \Omega$ e $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, tali che $\overline{B_{\mathbb{R}^d}(x, r)} \subset \Omega$, si ha che*

$$u(x) = \frac{d}{\omega_d r^d} \int_{B_{\mathbb{R}^d}(x,r)} u(y)dy$$

ed inoltre

$$u(x) = \frac{1}{\omega_d r^{d-1}} \int_{\partial B_{\mathbb{R}^d}(x,r)} u(\sigma)d\sigma.$$

Dimostrazione. Siano $x \in \Omega$ e $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Proviamo innanzitutto la seconda uguaglianza. Per ogni $\rho < r$ poniamo

$$g(\rho) = \frac{1}{\omega_d \rho^{d-1}} \int_{\partial B_{\mathbb{R}^d}(x,\rho)} u(\sigma)d\sigma.$$

e $\sigma = x + \rho\sigma'$. Allora $\sigma' \in \partial B_{\mathbb{R}^d}(0,1)$ e $d\sigma = \rho^{d-1} d\sigma'$, pertanto

$$g(\rho) = \frac{1}{\omega_d} \int_{\partial B_{\mathbb{R}^d}(0,1)} u\left(x + \rho\sigma'\right) d\sigma'.$$

Poniamo ora $v(y) = u(x+\rho y)$ per ogni $y \in B_{\mathbb{R}^d}(0,1)$. Si ha che $\nabla v(y) = \rho \nabla u(x+\rho y)$ per ogni $y \in B_{\mathbb{R}^d}(0,1)$ ed inoltre $\Delta v(y) = \rho^2 \delta u(x+\rho y)$ per ogni $y \in B_{\mathbb{R}^d}(0,1)$. Segue che, per il Teorema della divergenza,

$$\begin{aligned} g'(\rho) &= \frac{1}{\omega_d} \int_{\partial B_{\mathbb{R}^d}(0,1)} \frac{d}{d\rho} u\left(x + \rho\sigma'\right) d\sigma' \\ &= \frac{1}{\omega_d} \int_{\partial B_{\mathbb{R}^d}(0,1)} \left\langle \nabla u\left(x + \rho\sigma'\right), \sigma' \right\rangle d\sigma' \\ &= \frac{1}{\omega_d \rho} \int_{\partial B_{\mathbb{R}^d}(0,1)} \left\langle \nabla v\left(\sigma'\right), \sigma' \right\rangle d\sigma' \\ &= \frac{1}{\omega_d \rho} \int_{B_{\mathbb{R}^d}(0,1)} \Delta v(y) dy \\ &= \frac{\rho}{\omega_d} \int_{B_{\mathbb{R}^d}(0,1)} \Delta u\left(x + \rho y\right) dy = 0. \end{aligned}$$

Ma allora si ottiene che g è costante e, dal momento che

$$\begin{aligned} \lim_{r \to 0^+} g(r) &= \lim_{r \to 0^+} \frac{1}{\omega_d} \int_{\partial B_{\mathbb{R}^d}(0,1)} u\left(x + \rho\sigma'\right) d\sigma' \\ &= u(x) \frac{1}{\omega_d} \int_{\partial B_{\mathbb{R}^d}(0,1)} d\sigma' = u(x), \end{aligned}$$

si ha la tesi. Proviamo ora la prima uguaglianza. Integrando tra 0 e r, si ottiene che

$$\begin{aligned} \frac{r^d}{d} u(x) &= \frac{1}{\omega_d} \int_0^r \left(\int_{\partial B_{\mathbb{R}^d}(x,\rho)} u(\sigma) d\sigma \right) d\rho \\ &= \frac{1}{\omega_d} \int_{B_{\mathbb{R}^d}(x,r)} u(y) dy, \end{aligned}$$

da cui segue direttamente la tesi. $\square$

Ci occupiamo ora della ricerca della soluzione del problema di Dirichlet sulla palla in $\mathbb{R}^d$ con dimensione d qualsiasi. Tale problema è costituito da un'equazione di Laplace del tipo (B.1) e da una condizione al bordo del tipo di Dirichlet, che assegna un dato noto alla funzione u ristretta a $\partial B_{\mathbb{R}^d}(0,R)$, per un certo $R \in \mathbb{R}$, $R > 0$. Per poter ottenere questo risultato saranno necessario alcune considerazioni preliminari.

Sia $\Omega \in \mathbb{R}^d$ un dominio limitato di classe $\mathcal{C}^1$ e siano $u, v \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Applicando il Teorema della divergenza alla funzione $w = v\nabla u$, si ottiene la *prima identità di Green*, data da

$$\int_\Omega v(x) \Delta u(x) dx + \int_\Omega \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle dx = \int_{\partial\Omega} v(x) \frac{\partial u}{\partial n}(x) d\sigma(x),$$

dove n indica la normale uscente e $d\sigma$ indica la misura superficiale su $\partial\Omega$. Scambiando i ruoli di u e v e sottraendo le due equazioni, si ottiene la *seconda identità di Green*

$$\int_\Omega (v(x)\Delta u(x) - u(x)\Delta v(x))\, dx = \int_{\partial\Omega} \left(v(x)\frac{\partial u}{\partial n}(x) - u(x)\frac{\partial v}{\partial n}(x) \right) d\sigma(x). \quad \text{(B.2)}$$

Dato $y \in \Omega$, consideriamo la *soluzione fondamentale* normalizzata dell'equazione di Laplace

$$\varPhi(x-y) = \varPhi(|x-y|) = \begin{cases} \frac{1}{d(2-d)\mathscr{L}^d\left(B_{\mathbb{R}^d}(0,1)\right)}|x-y|^{2-d} & \text{se } d > 2 \\ \frac{1}{2\pi}\log|x-y| & \text{se } d = 2 \end{cases}.$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^d$. Per ogni $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq d$ si ha che

$$\partial_{x_i}\varPhi(x-y) = \frac{1}{d\mathscr{L}^d\left(B_{\mathbb{R}^d}(0,1)\right)}(x_i - y_i)|x-y|^{-d}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^d$ ed inoltre, per ogni $i, j \in \mathbb{N}$, $1 \leq i, j \leq d$, si ha che

$$\partial_{x_i x_j}\varPhi(x-y) = \frac{1}{d\mathscr{L}^d\left(B_{\mathbb{R}^d}(0,1)\right)}\left(|x-y|^2\delta_{ij} - d(x_i-y_i)(x_j-y_j)\right)|x-y|^{-2-d}.$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^d$. Si noti che $\varPhi$ è una funzione armonica per ogni $x \in \Omega$, $x \neq y$. La singolarità di $\varPhi$ nel punto $x = y$ ci impedisce di considerare $\varPhi$ al posto di v in (B.2). Per aggirare il problema consideriamo $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ sufficientemente piccolo e studiamo l'identità (B.2) su $\Omega \setminus \overline{B_{\mathbb{R}^d}(y,r)}$. Si ha che

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\setminus\overline{B_{\mathbb{R}^d}(y,r)}} \varPhi(x)\Delta u(x)dx &= \int_{\partial\Omega}\left(\varPhi(x)\frac{\partial u}{\partial n}(x) - u(x)\frac{\partial \varPhi}{\partial n}(x)\right)d\sigma(x) \\ &\quad + \int_{\partial B_{\mathbb{R}^d}(y,r)}\left(\varPhi\frac{\partial u}{\partial n}(x) - u(x)\frac{\partial\varPhi}{\partial n}(x)\right)d\sigma(x).\end{aligned}$$

Si osservi ora che

$$\begin{aligned}\int_{\partial B_{\mathbb{R}^d}(y,r)} \varPhi(x)\frac{\partial u}{\partial n}(x)d\sigma(x) &= \varPhi(r)\int_{\partial B_{\mathbb{R}^d}(y,r)}\frac{\partial u}{\partial n}(x)d\sigma(x) \\ &\leq d\mathscr{L}^d\left(B_{\mathbb{R}^d}(0,1)\right)r^{d-1}\varPhi(r)\sup_{B_{\mathbb{R}^d}(0,1)}|\nabla u| \to 0\end{aligned}$$

per $r \to 0^+$. Inoltre, si ha che

$$\begin{aligned}\int_{\partial B_{\mathbb{R}^d}(y,r)} u(x)\frac{\partial\varPhi}{\partial n}(x)d\sigma(x) &= -\varPhi'(r)\int_{\partial B_{\mathbb{R}^d}(y,r)} u(x)d\sigma(x) \\ &= -\frac{1}{d\mathscr{L}^d\left(B_{\mathbb{R}^d}(0,1)\right)r^{d-1}}\int_{\partial B_{\mathbb{R}^d}(y,r)} u(x)d\sigma(x) \to -u(y)\end{aligned}$$

per $r \to 0^+$. Pertanto, passando al limite per $r \to 0^+$ si ottiene la *formula di rappresentazione di Green*

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} \left(u(x) \frac{\partial \Phi}{\partial n}(x-y) - \Phi(x-y) \frac{\partial u}{\partial n}(x) \right) d\sigma(x) + \int_{\Omega} \Phi(x-y) \Delta u(x) dx. \quad \text{(B.3)}$$

Supponiamo ora che $h \in \mathcal{C}^1\left(\overline{\Omega}\right) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$ sia tale che $\Delta h = 0$ in Ω. Per l'identità (B.2) si ha che

$$\int_{\Omega} h(x) \Delta u(x) dx = - \int_{\partial\Omega} \left(u(x) \frac{\partial h}{\partial n}(x) - h(x) \frac{\partial u}{\partial n}(x) \right) d\sigma(x) \quad \text{(B.4)}$$

Ponendo $G = \Phi + h$ e sommando (B.3) e (B.4), si ottiene una nuova formulazione della formula di rappresentazione di Green

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} \left(u(x) \frac{\partial G}{\partial n}(x,y) - G(x,y) \frac{\partial u}{\partial n}(x) \right) d\sigma(x) + \int_{\Omega} G(x,y) \Delta u(x) dx. \quad \text{(B.5)}$$

La funzione $G = G(x,y)$ si dice *funzione di Green* per il dominio Ω.

Supponiamo ora che $\Omega = B_{\mathbb{R}^d}(0,R)$ per un certo $R \in \mathbb{R}$, $R > 0$. In tal caso, è possibile calcolare esplicitamente la funzione di Green per $B_{\mathbb{R}^d}(0,R)$ tramite il metodo delle cariche immagine. Dato $x \in B_{\mathbb{R}^d}(0,R)$, $x \neq 0$, cerchiamo una funzione di correzione φ_x tale che

$$\varphi_x(y) = \Phi\left(|x-y|\right)$$

per ogni $y \in \partial B_{\mathbb{R}^d}(0,R)$. Si noti che, dato $y \in \partial B_{\mathbb{R}^d}(0,R)$, si ha che

$$\begin{aligned}
|x-y|^2 &= \langle x-y, x-y \rangle_{\mathbb{R}^d} \\
&= |y|^2 - 2\langle x,y \rangle_{\mathbb{R}^d} + |x|^2 \\
&= |x|^2 - 2\langle x,y \rangle_{\mathbb{R}^d} + R^2 \\
&= \frac{|x|^2}{R^2} \left(R^2 - \frac{2R^2 \langle x,y \rangle_{\mathbb{R}^d}}{|x|^2} + \frac{R^4}{|x|^2} \right) \\
&= \frac{|x|^2}{R^2} \left(R^2 - 2 \left\langle y, \frac{xR^2}{|x|^2} \right\rangle_{\mathbb{R}^d} + \frac{R^4 |x|^2}{|x|^4} \right) \\
&= |x|^2 \left| y - x^* \right|^2,
\end{aligned}$$

dove $x^* = \frac{xR^2}{|x|^2}$. Si noti che, se $x \in B_{\mathbb{R}^d}(0,R)$, si ha che

$$|x^*| = \frac{|x| R^2}{|x|^2} = \frac{R^2}{|x|} > R,$$

pertanto $x^* \in \mathbb{R}^d \backslash B_{\mathbb{R}^d}(0,R)$. Segue che la funzione $\left(y \in B_{\mathbb{R}^d}(0,R) \mapsto \Phi\left(|x|\,|y-x^*|\right)\right)$ è armonica su $B_{\mathbb{R}^d}(0,R)$. Inoltre, per quanto visto, si ha che

$$\Phi\left(|x|\,|y-x^*|\right) = \Phi\left(|y-x|\right)$$

per ogni $y \in \partial B_{\mathbb{R}^d}(0,R)$. Pertanto, ponendo

$$\varphi_x(y) = \Phi\left(|x|\,(y-x^*)\right),$$

si ha che φ_x è la funzione di correzione cercata e la funzione di Green per $B_{\mathbb{R}^d}(0,R)$ è data da

$$G(x,y) = \begin{cases} \Phi(|x-y|) - \Phi\left(\frac{|y|}{R}|x-\overline{y}|\right) & \text{se } y \neq 0 \\ \Phi(|x|) - \Phi(R) & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

per ogni $x, y \in B_{\mathbb{R}^d}(0,R)$ tali che $x \neq y$. Si noti che $G(x,y) = G(y,x)$ e $G(x,y) \leq 0$ per ogni $x, y \in B_{\mathbb{R}^d}(0,R)$ e, dato $x \in \partial B_{\mathbb{R}^d}(0,R)$, si ha che

$$\frac{\partial G}{\partial n}(x,y) = \frac{\partial G}{\partial |x|}(x,y) = \frac{R^2 - |y|^2}{d\mathscr{L}^d(B_{\mathbb{R}^d}(0,1))R|x-y|^d} \geq 0.$$

Pertanto, se $u \in \mathcal{C}^1\left(\overline{B_{\mathbb{R}^d}(0,R)}\right) \cap \mathcal{C}^2\left(B_{\mathbb{R}^d}(0,R)\right)$, utilizzando (B.5), si ottiene la *formula integrale di Poisson*

$$u(y) = \int_{\partial B_{\mathbb{R}^d}(0,R)} \frac{R^2 - |y|^2}{d\mathscr{L}^d(B_{\mathbb{R}^d}(0,1))R|x-y|^d} u(x) d\sigma(x). \tag{B.6}$$

La funzione

$$P_R(x,y) = \frac{R^2 - |x|^2}{d\mathscr{L}^d(B_{\mathbb{R}^d}(0,1))R|x-y|^d},$$

con $x \in B_{\mathbb{R}^d}(0,R)$, $y \in \partial B_{\mathbb{R}^d}(0,R)$, si dice *nucleo di Poisson* su $B_{\mathbb{R}^d}(0,R)$.

Siamo ora interessati a studiare l'esistenza e unicità del problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace su $B_{\mathbb{R}^d}(0,R)$. Consideriamo innanzitutto il seguente Teorema.

Teorema B.1.2. *Siano $R \in \mathbb{R}$, $R > 0$ e $\varphi \in \mathcal{C}\left(\partial B_{\mathbb{R}^d}(0,R)\right)$. Allora la funzione*

$$u(x) = \begin{cases} \int_{\partial B_{\mathbb{R}^d}(0,R)} P_R(x,y)\varphi(y) d\sigma(y) & \textit{se } x \in B_{\mathbb{R}^d}(0,R) \\ \varphi(x) & \textit{se } x \in \partial B_{\mathbb{R}^d}(0,R) \end{cases}$$

per ogni $x \in \overline{B_{\mathbb{R}^d}(0,R)}$ è tale che $u \in \mathcal{C}^2\left(B_{\mathbb{R}^d}(0,R)\right) \cap \mathcal{C}\left(\overline{B_{\mathbb{R}^d}(0,R)}\right)$ e $\Delta u = 0$ su $B_{\mathbb{R}^d}(0,R)$.

Dimostrazione. Il fatto che u sia armonica su $B_{\mathbb{R}^d}(0,R)$ segue direttamente dal fatto che G, quindi anche $\frac{\partial G}{\partial n}$, dove n indica la normale esterna a $\partial B_{\mathbb{R}^d}(0,R)$, è armonica in $B_{\mathbb{R}^d}(0,R)$. Studiamo ora la continuità di u su $\partial B_{\mathbb{R}^d}(0,R)$. Si noti che, applicando la formula integrale di Poisson nel caso in cui $u = \mathbb{1}_{\overline{B_{\mathbb{R}^d}(0,R)}}$, si ottiene che

$$\int_{\partial B_{\mathbb{R}^d}(0,R)} P_R(x,y) d\sigma(y) = 1 \tag{B.7}$$

per ogni $x \in B_{\mathbb{R}^d}(0,R)$. Sia $x_0 \in \partial B_{\mathbb{R}^d}(0,R)$ e sia $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Dal momento che φ è continua su $\partial B_{\mathbb{R}^d}(0,R)$, esiste $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ tale che, per ogni $x \in \partial B_{\mathbb{R}^d}(0,R)$ tale che $|x - x_0| < \delta$, si abbia che $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$. Inoltre, dal momento che $\partial B_{\mathbb{R}^d}(0,R)$ è compatto, esiste $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$ tale che $|\varphi(x)| \leq M$ per ogni $x \in \partial B_{\mathbb{R}^d}(0,R)$. Segue che, per ogni $x \in B_{\mathbb{R}^d}(0,R)$ tale che $|x - x_0| < \frac{\delta}{2}$, si ha che, sfruttando (B.7),

$$
\begin{aligned}
|u(x)-u(x_0)| &= \left|\int_{\partial B_{\mathbb{R}^d}(0,R)} P_R(x,y)\varphi(y)d\sigma(y) - \varphi(x_0)\right| \\
&= \left|\int_{\partial B_{\mathbb{R}^d}(0,R)} P_R(x,y)\varphi(y)d\sigma(y) - \varphi(x_0)\int_{\partial B_{\mathbb{R}^d}(0,R)} P_R(x,y)d\sigma(y)\right| \\
&= \left|\int_{\partial B_{\mathbb{R}^d}(0,R)} P_R(x,y)\left(\varphi(y)-\varphi(x_0)\right)d\sigma(y)\right| \\
&\le \int_{\left\{y\in\partial B_{\mathbb{R}^d}(0,R) \mid |y-x_0|\le\delta\right\}} P_R(x,y)\left|\varphi(y)-\varphi(x_0)\right|d\sigma(y) \\
&\quad + \int_{\left\{y\in\partial B_{\mathbb{R}^d}(0,R) \mid |y-x_0|>\delta\right\}} P_R(x,y)\left|\varphi(y)-\varphi(x_0)\right|d\sigma(y) \\
&\le \varepsilon + 2M\int_{\left\{y\in\partial B_{\mathbb{R}^d}(0,R) \mid |y-x_0|>\delta\right\}} P_R(x,y)d\sigma(y) \\
&= \varepsilon + \frac{2M\left(R^2-|x|^2\right)}{d\mathscr{L}^d\left(B_{\mathbb{R}^d}(0,R)\right)R}\int_{\left\{y\in\partial B_{\mathbb{R}^d}(0,R) \mid |y-x_0|>\delta\right\}} \frac{1}{|x-y|^d}d\sigma(y) \\
&< \varepsilon + \frac{2M\left(R^2-|x|^2\right)R^{d-2}}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^d}.
\end{aligned}
$$

Si noti che $R^2-|x|^2 = |x_0|^2-|x|^2 \le \left(|x_0|-|x|\right)^2 \le |x-x_0|^2 < \left(\frac{\delta}{2}\right)^2$. Scegliendo $\delta = \left(\frac{2\varepsilon}{2MR^{d-2}}\right)^{\frac{1}{2-d}}$, si ha che $|u(x)-u(x_0)| < 2\varepsilon$, da cui segue direttamente la tesi. $\square$

Corollario B.1.2.1. *Siano $R\in\mathbb{R}$, $R>0$ e $\varphi\in\mathcal{C}\left(\partial B_{\mathbb{R}^d}(0,R)\right)$. Allora il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace su $B_{\mathbb{R}^d}(0,R)$*

$$
\begin{cases}
\Delta u = 0 & su\ B_{\mathbb{R}^d}(0,R) \\
u = \varphi & su\ \partial B_{\mathbb{R}^d}(0,R)
\end{cases}
\tag{B.8}
$$

ammette un'unica soluzione.

Dimostrazione. Per il Teorema B.1.2, la funzione $u\in\mathcal{C}^2\left(B_{\mathbb{R}^d}(0,R)\right)\cap\mathcal{C}\left(\overline{B_{\mathbb{R}^d}(0,R)}\right)$ definita da

$$
u(x) = \begin{cases}
\int_{\partial B_{\mathbb{R}^d}(0,R)} P_R(x,y)\varphi(y)d\sigma(y) & \text{se } x\in B_{\mathbb{R}^d}(0,R) \\
\varphi(x) & \text{se } x\in\partial B_{\mathbb{R}^d}(0,R)
\end{cases}
$$

per ogni $x\in\overline{B_{\mathbb{R}^d}(0,R)}$, è una soluzione del problema (B.8). Supponiamo ora che u,v siano due soluzioni di questo tipo. Poniamo $w=u-v$. Allora si ha che $w\in\mathcal{C}^2\left(B_{\mathbb{R}^d}(0,R)\right)\cap\mathcal{C}\left(\overline{B_{\mathbb{R}^d}(0,R)}\right)$ e w risolve il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace con dato al bordo nullo. Poniamo ora $F=\langle w,\nabla x\rangle$. Si osservi che

$$
\mathrm{div}F = \langle\nabla w,\nabla w\rangle + w\Delta w = |\nabla w|^2
$$

su $B_{\mathbb{R}^d}(0,R)$. Per il Teorema della divergenza si ha che

$$0 \leq \int_{B_{\mathbb{R}^d}(0,R)} |\nabla w(x)|^2 dx = \int_{\partial B_{\mathbb{R}^d}(0,R)} w(x) \langle \nabla w(x), n \rangle d\sigma(x) = 0,$$

da cui segue che $\nabla w = 0$, pertanto w è costante. Ma siccome $w(x) = 0$ per ogni $x \in \partial B_{\mathbb{R}^d}(0,R)$, si ha che $w = 0$, da cui segue che $u = v$. □

Per concludere questa sezione, andiamo a studiare la nozione di funzione subarmonica e superarmonica e ne dimostriamo alcune proprietà fondamentali.

Definizione B.1.3. Sia $\Omega \in \mathbb{R}^d$ un aperto. Una funzione $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ si dice *subarmonica* su Ω se

$$u(x) \leq \frac{1}{\omega_d r^{d-1}} \int_{\partial B^d_{\mathbb{R}}(x,r)} u(\sigma) d\sigma.$$

per ogni $x \in \Omega$ e $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ tali che $\overline{B_{\mathbb{R}^d}(x,r)} \subset \Omega$. La funzione u si dice invece *superarmonica* se

$$u(x) \geq \frac{1}{\omega_d r^{d-1}} \int_{\partial B^d_{\mathbb{R}}(x,r)} u(\sigma) d\sigma.$$

per ogni $x \in \Omega$ e $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ tali che $\overline{B_{\mathbb{R}^d}(x,r)} \subset \Omega$.

Si noti che nella definizione precedente è equivalente utilizzare le medie integrali volumetriche anziché le medie integrali superficiali e le nozioni di subarmonicità e superarmonicità non cambiano. Riportiamo di seguito una propritā fondamentale delle funzioni subarmoniche e superarmoniche.

Teorema B.1.4. *Siano $\Omega \in \mathbb{R}^d$ aperto e $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Allora si ha che*

1. *u è subarmonica su Ω se e solo se $\Delta u \geq 0$ su Ω;*
2. *u è superarmonica su Ω se e solo se $\Delta u \leq 0$ su Ω.*

Dimostrazione. Proviamo innanzitutto 1.. Supponiamo dapprima che $\Delta u \geq 0$ su Ω. Sia $x \in \Omega$. Allora, posto

$$g(r) = \frac{1}{\omega_d r^{d-1}} \int_{\partial B^d_{\mathbb{R}}(x,r)} u(\sigma) d\sigma$$

per ogni $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ tale che $\overline{B_{\mathbb{R}^d}(x,r)} \subset \Omega$, si ha che, come nella dimostrazione del Teorema B.1.1,

$$g'(r) = \frac{r}{\omega_d} \int_{B_{\mathbb{R}^d}(0,1)} \Delta u\,(x + ry)\, dy \geq 0.$$

Ma allora si ha che g è una funzione non decrescente, da cui segue che

$$u(x) = g(0) \leq g(r) = \frac{1}{\omega_d r^{d-1}} \int_{\partial B^d_{\mathbb{R}}(x,r)} u(\sigma) d\sigma.$$

Viceversa, supponiamo che u sia subarmonica su Ω. Siano $x \in \Omega$ e $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, tali che $B_{\mathbb{R}^d}(x,r) \subset\subset \Omega$. Supponiamo per assurdo che esista $x_0 \in B_{\mathbb{R}^d}(x,r) \subset\subset \Omega$ tale che $\Delta u\,(x_0) < 0$. Dal momento che $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, si ha che Δu è continua in Ω e, pertanto, esiste $r_0 \in (0, \operatorname{dist}(x_0, \partial B_{\mathbb{R}^d}(x,r)))$ tale che $\Delta u < 0$ su $B_{\mathbb{R}^d}(x_0, \rho)$ per ogni $\rho \in \mathbb{R}$, $0 < \rho < r_0$. Ripetendo il ragionamento precedente, si ottiene che g è decrescente in $(0, r_0)$, da cui segue che

$$u\,(x_0) = g(0) > g\,(r_0) = \frac{1}{\omega_d r_0^{d-1}} \int_{\partial B^d_{\mathbb{R}}(x_0,r_0)} u(\sigma) d\sigma,$$

il che è assurdo. La 2. si dimostra in modo analogo. □

Vediamo infine un'interessante proprietà delle funzioni subarmoniche in una variabile reale, che lega subarmonicità e convessità.

Lemma B.1.5. *Sia $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ una funzione subarmonica su $[a,b] \subset \mathbb{R}$, con $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. In particolare, si ha che u gode della proprietà di convessità nel punto medio. Allora, u è convessa su $[a,b]$.*

Dimostrazione. Si noti che, per definizione di subarmonicità, si ha che

$$u\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{1}{\omega_1} \int_{\partial B_{\mathbb{R}}\left(\frac{b+a}{2}, \frac{b-a}{2}\right)} u(x) dx = \frac{u(a)+u(b)}{2}.$$

Proviamo che u è convessa su $[a,b]$, ossia che

$$u\,(tx + (1-t)) \leq tu(x) + (1-t)u(y)$$

per ogni $x, y \in [a,b]$, $t \in [0,1]$. Mostriamo innanzitutto che

$$u\left(\frac{m}{2^n}x + \left(1 - \frac{m}{2^n}y\right)\right) \leq \frac{m}{2^n}u(x) + \left(1 - \frac{m}{2^n}\right)u(y)$$

per ogni $x, y \in [a,b]$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \{k \in \mathbb{N} \mid 0 \leq k \leq 2^n\}$. Procedendo per induzione su $n \in \mathbb{N}$, si noti innanzitutto che, applicando l'ipotesi su u due volte, dati $x, y \in [a,b]$,

$$\begin{aligned} u\left(\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y\right) &= u\left(\frac{\frac{1}{2}(x+y) + x}{2}\right) \\ &\leq \frac{u\left(\frac{x+y}{2}\right) + u(x)}{2} \\ &\leq \frac{3}{4}u(x) + \frac{1}{4}u(y) \end{aligned}$$

Supponiamo ora che, dato $n \in \mathbb{N}$, la tesi valga per ogni $k \in \mathbb{N}$, $k < n$ e dimostriamo il fatto per n. Si ha che, dati $x, y \in [a,b]$, $m \in \{k \in \mathbb{N} \mid 0 \leq k \leq 2^n\}$, effettuando la divisione per 2 si ottiene che $m = 2p + r$, con $p \in \mathbb{N}$, $r \in \{0, 1\}$. Segue che

$$\begin{aligned}
\frac{m}{2^n}x + \left(1 - \frac{m}{2^n}\right) y &= \frac{2p+r}{2^n}x + \left(1 - \frac{2p+r}{2^n}\right) y \\
&= \frac{p}{2^n}x + \frac{p+r}{2^n}x + \left(1 - \frac{p}{2^n} - \frac{p+r}{2^n}\right) y \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{p}{2^{n-1}}x + \frac{p+r}{2^{n-1}}x + \left(2 - \frac{p}{2^{n-1}} - \frac{p+r}{2^{n-1}}\right) y\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{p}{2^{n-1}}x + \left(1 - \frac{p}{2^{n-1}}\right) y\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{p+r}{2^{n-1}}x + \left(1 - \frac{p+r}{2^{n-1}}\right) y\right).
\end{aligned}$$

Si noti che, dal momento che $r \in \{0, 1\}$ e $0 \leq m \leq 2^n$, si ha che $p, p+1 \in \{k \in \mathbb{N} \mid 0 \leq k \leq 2^{n-1}\}$, da cui segue direttamente che $p, p+r \in \{k \in \mathbb{N} \mid 0 \leq k \leq 2^{n-1}\}$. Ma allora, per ipotesi induttiva si ha che

$$\begin{aligned}
u\left(\frac{m}{2^n}x + \left(1 - \frac{m}{2^n}\right) y\right) &= u\left(\frac{\left(\frac{p}{2^{n-1}}x + \left(1 - \frac{p}{2^{n-1}}\right) y\right) + \left(\frac{p+r}{2^{n-1}}x + \left(1 - \frac{p+r}{2^{n-1}}\right) y\right)}{2}\right) \\
&\leq \frac{u\left(\frac{p}{2^{n-1}}x + \left(1 - \frac{p}{2^{n-1}}\right) y\right) + u\left(\frac{p+r}{2^{n-1}}x + \left(1 - \frac{p+r}{2^{n-1}}\right) y\right)}{2} \\
&= \frac{2p+r}{2^n}u(x) + \left(1 - \frac{2p+r}{2^n}\right) u(y) \\
&= \frac{m}{2^n}u(x) + \left(1 - \frac{m}{2^n}\right) u(y)
\end{aligned}$$

e da ciò si conclude. Per terminare la dimostrazione, mostriamo che l'insieme degli interi diadici

$$I = \left\{\frac{m}{2^n} \mid n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ 0 \leq m \leq 2^n\right\}$$

è denso in $[0, 1]$. A tal proposito, siano $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ e $x \in [0, 1]$. Per la proprietà Archimedea dei numeri reali esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Cerchiamo $k \in I$ tale che

$$|x - k| < \varepsilon.$$

Poniamo $m = \lfloor x2^n \rfloor$. Dal momento che $x \in [0, 1]$, si ha che $0 \leq m \leq 2^n$. Per le proprietà della parte intera inferiore si ha che

$$m = \lfloor x2^n \rfloor \leq x2^n \leq m + 1 = \lfloor x2^n \rfloor + 1,$$

ossia

$$\frac{m}{2^n} \leq x \leq \frac{m+1}{2^n},$$

da cui segue che

$$\left|x - \frac{m}{2^n}\right| \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

Pertanto, si ottiene che I è denso in $[0, 1]$, da cui segue che la disuguaglianza

$$u\left(tx + (1 - t)\right) \leq tu(x) + (1 - t)u(y)$$

vale per ogni $t \in [0, 1]$, dal momento che u è continua per ipotesi. Pertanto, si ottiene che u è convessa su $[a, b]$. $\square$

B.2 Equazione del calore e principio del massimo

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un dominio limitato e sia $T \in \mathbb{R}$, $T > 0$. L'*equazione del calore* su $\Omega \times [0, T]$ con incognita la funzione $u = u(x, t)$ con $(x, t) \in \Omega \times [0, T]$ e rifornimento q, assume la forma

$$\partial_t u - \Delta u = q.$$

Poniamo ora

$$Q_T = \Omega \times (0, T).$$

Per poter determinare, possibilmente univocamente, una soluzione dell'equazione del calore occorre assegnare prima di tutto la *condizione iniziale*

$$u(x, 0) = g(x)$$

per ogni $x \in \overline{\Omega}$, per una certa funzione g definita su $\overline{\Omega}$. Sarà poi opportuno assegnare *condizioni al bordo.* Tra le più comuni troviamo:

- *condizioni di Dirichlet*, che assegnano la temperatura al bordo:

  $$u(x, t) = h(x, t)$$

  per ogni $x \in \partial\Omega$, $t \in (0, T]$, per una certa funzione h definita su $\partial\Omega \times (0, T]$;

- *condizioni di Neumann*, che assegnano il flusso del calore entrante o uscente attraverso $\partial\Omega$:

  $$\partial_n u(x, t) = h(x, t)$$

  per ogni $x \in \partial\Omega$, $t \in (0, T]$, per una certa funzione h definita su $\partial\Omega \times (0, T]$, dove n è il versore normale esterno;

- *condizioni di Robin*, del tipo

  $$\partial_n u(x, t) + \alpha u(x, t) = h(x, t)$$

  per ogni $x \in \partial\Omega$, $t \in (0, T]$, per una certa funzione h definita su $\partial\Omega \times (0, T]$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, dove n è il versore normale esterno;

- *condizioni miste Dirichlet-Neumann.* Consideriamo due sottoinsiemi non vuoti e disgiunti $\partial_D\Omega$ e $\partial_N\Omega$ di $\partial\Omega$ tali che

  $$\partial\Omega = \overline{\partial_D\Omega} \cup \partial_N\Omega,$$

  poniamo

  $$\begin{cases} u(x, t) = h_1(x, t) & \text{se } (x, t) \in \overline{\partial_D\Omega} \times (0, T] \\ \partial_n u(x, t) = h_2(x, t) & \text{se } (x, t) \in \partial_N\Omega \times (0, T] \end{cases}$$

  per certe funzioni h_1 e h_2 definite su $\partial\Omega \times (0, T]$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, dove n è il versore normale esterno.

L'equazione del calore su $\Omega \times [0, T]$ munita della condizione iniziale e delle condizioni al bordo si dice *problema del calore*.

Studiamo ora un risultato centrale della teoria dell'equazione del calore, che prende il nome di *principio del massimo debole*. Denotiamo con $\mathcal{C}^{2,1}(Q_T)$ l'insieme delle funzioni definite su Q_T a valori reali con due derivate continue rispetto a x_j per ogni $j \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq d$, e una derivata continua rispetto a t.

Definizione B.2.1. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un dominio limitato e sia $T \in \mathbb{R}$, $T > 0$. Si definisce *frontiera parabolica* di Q_T l'insieme

$$\partial_p Q_T = \left(\overline{\Omega} \times \{0\}\right) \cup (\partial\Omega \times (0, T]).$$

Teorema B.2.2 (Principio del massimo debole)**.** *Sia $u \in \mathcal{C}^{2,1}(Q_T) \cap \mathcal{C}\left(\overline{Q_T}\right)$ tale che valga l'equazione del calore*

$$\partial_t u - \Delta u = q$$

con rifornimento $q \leq 0$, allora il massimo di u su $\overline{Q_T}$ è assunto sulla frontiera parabolica $\partial_p Q_T$ e, di conseguenza si ha che

$$\max_{\overline{Q_T}} u = \max_{\partial_p Q_T} u.$$

Se invece vale l'equazione del calore con rifornimento $q \geq 0$, allora il minimo di u su $\overline{Q_T}$ è assunto sulla frontiera parabolica $\partial_p Q_T$ e, di conseguenza, si ha che

$$\min_{\overline{Q_T}} u = \min_{\partial_p Q_T} u.$$

Dimostrazione. Sia $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ tale che $T - \varepsilon > 0$. Mostriamo che

$$\max_{\overline{Q_{T-\varepsilon}}} u \leq \max_{\partial_p Q_T} u + \varepsilon T.$$

Poniamo $v(x, t) = u(x, t) - \varepsilon t$ per ogni $(x, t) \in \overline{\Omega} \times [0, T]$. Allora si ha che v risolve l'equazione del calore

$$\partial_t v - \Delta v = q - \varepsilon < 0.$$

Si deduce che il massimo di v su $\overline{Q_{T-\varepsilon}}$ è assunto in un punto della frontiera parabolica $\partial_p Q_{T-\varepsilon}$. Se così no fosse esisterebbe un punto di massimo $(x_0, t_0) \in \Omega \times (0, T - \varepsilon]$. In tal caso si avrebbe che

$$\partial_{x_j x_j} v(x_0, t_0) \leq 0$$

per ogni $j \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq d$, pertanto

$$\Delta v(x_0, t_0) \leq 0.$$

Inoltre, se $t_0 < T - \varepsilon$ si ha che

$$\partial_t v(x_0, t_0) = 0,$$

mentre, se $t_0 = T - \varepsilon$, si ha che

$$\partial_t v\,(x_0, T - \varepsilon) \geq 0.$$

In ogni caso si ottiene che

$$(\partial_t v - \Delta v)\,(x_0, t_0) \geq 0,$$

il che è assurdo. Pertanto, si ha che

$$\max_{\overline{Q_{T-\varepsilon}}} v = \max_{\partial_p Q_{T-\varepsilon}} v.$$

Si noti ora che $u(x,t) = v(x,t) + \varepsilon t$ per ogni $(x,t) \in \overline{\Omega} \times [0,T]$, pertanto,

$$\max_{\overline{Q_{T-\varepsilon}}} u \leq \max_{\overline{Q_{T-\varepsilon}}} + \varepsilon T = \max_{\partial_p Q_{T-\varepsilon}} + \varepsilon T \leq \max_{\partial_p Q_T} u + \varepsilon T. \tag{B.9}$$

□

Dal momento che u è continua in $\overline{Q_T}$, deduciamo che

$$\max_{\overline{Q_{T-\varepsilon}}} \to \max_{\overline{Q_T}} u$$

per $\varepsilon \to 0^+$. Passando al limite per $\varepsilon \to 0^+$ nella catena di disuguaglianze (B.9), si ottiene che

$$\max_{\overline{Q_T}} u \leq \max_{\partial_p Q_T} u,$$

da cui segue direttamente la tesi.

Bibliografia

[1] J. M. Aldaz, J. Pérez-Lázaro, *Functions of bounded variation, the derivative of the one dimensional maximal function, and applications to inequalities*, Trans. Amer. Math. Soc. **359**, no. 5 (2007), 2443–2461.

[2] L. Ambrosio, G. Da Prato, A. Mennucci, *Introduction to measure theory and integration*, Edizioni della Normale, Pisa, 2011.

[3] H. Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Springer, New York, Heidelberg, Dordrecht, London, 2011.

[4] E. Carneiro, B. F. Svaiter. *On the variation of maximal operators of convolution type*, J. Funct. Anal. **265**, no. 5 (2013), 837–865.

[5] J. Duoandikoetxea, *Fourier analysis*, American Mathematical Society, Rhode Island, 2000.

[6] L. Grafakos. *Classical Fourier analysis. Third edition.* Springer, 2014.

[7] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer, New York, Heidelberg, Dordrecht, London, 2001.

[8] J.Kinnunen, *The Hardy–Littlewood maximal function of a Sobolev function*, Israel J. Math. **100** (1997), 117–124.

[9] O. Kurka, *On the variation of the Hardy-Littlewood maximal function*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **40** (2015), 109 – 133.

[10] F. Maggi, *Sets of finite perimeter and geometric variational problems. An introduction to geometric measure theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 2012.

[11] S. Salsa. *Equazioni a derivate parziali. Metodi, modelli e applicazioni*, Springer, New York, Heidelberg, Dordrecht, London, 2010.

[12] H.Tanaka, *A remark on the derivative of the one-dimensional Hardy–Littlewood maximal function*, Bull. Austral. Math. Soc. **65**, no.2 (2002), 253–258.