



**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI  
DI GENOVA**

**Scuola di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali**

**Dipartimento di Matematica**

**Tesi di Laurea Magistrale**

**La trasformata di Radon nella  
tomografia computerizzata**

**CANDIDATO:**

**Lorenzo Bozzi**

**RELATORE:**

**Prof. Giovanni Alberti**

**CORRELATORE:**

**Prof. Matteo Santacesaria**

---

**ANNO ACCADEMICO 2023–24**

# Indice

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Spazi di Sobolev</b>  | <b>5</b>  |
| 1.1      | Derivata debole e prime proprietà degli spazi di Sobolev . . . . .                     | 5         |
| 1.2      | Teoremi degli embedding di Sobolev . . . . .   | 16        |
| <b>2</b> | <b>La trasformata di Radon</b>   | <b>23</b> |
| 2.1      | Definizioni e proprietà elementari di alcuni operatori integrali . .                   | 23        |
| 2.1.1    | Operatori aggiunti . . . . .   | 32        |
| 2.2      | Formule di inversione . . . . .  | 40        |
| 2.3      | Unicità . . . . .  | 48        |
| 2.4      | Rango . . . . .  | 55        |
| 2.5      | Stime di Sobolev . . . . .   | 61        |
| <b>3</b> | <b>Accuratezza della ricostruzione</b>   | <b>67</b> |
| 3.1      | Problemi mal posti . . . . .   | 67        |
| 3.2      | Stima degli errori per la trasformata di Radon e la trasformata a<br>Raggi X . . . . . | 75        |
| <b>4</b> | <b>Filtered Backprojection</b>   | <b>80</b> |
| 4.1      | Cos'è la retroproiezione filtrata? . . . . .   | 80        |
| 4.2      | Richiami di nozioni fondamentali . . . . .   | 82        |
| 4.2.1    | Funzioni a banda limitata e teorema di campionamento . .                               | 83        |
| 4.2.2    | Convoluzione discreta . . . . .  | 85        |
| 4.2.3    | Funzioni B-spline e funzioni $\eta$ . . . . .  | 87        |
| 4.3      | L'algoritmo di retroproiezione filtrata . . . . .                                      | 88        |

# Perché la trasformata di Radon?

Prima di tuffarci nel cuore dei tecnicismi, è ragionevole chiedersi da dove spunti la trasformata di Radon, quali siano le sue radici storiche e perché sia importante conoscerne le caratteristiche.

La trasformata di Radon è un operatore integrale sviluppato nel 1917 dal matematico austriaco Johann Radon. Inizialmente, il lavoro di Radon (*Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten* [10]), pensato per investigare ulteriormente la geometria integrale, non ricevette attenzioni per quasi mezzo secolo, finché intorno agli anni '70 il fisico Allan Cormarck e l'ingegnere Godfrey Hounsfield svilupparono ulteriormente tale teoria per implementarla in algoritmi di ricostruzione di immagini nell'ambito della tomografia computerizzata (TC).

La tomografia computerizzata è una tecnica di imaging medico che utilizza raggi X per creare immagini dettagliate dell'interno di un oggetto. Funziona attraverso la rotazione di una sorgente di raggi X attorno all'oggetto mentre questo giace su un tavolo mobile. Durante la rotazione, i raggi X attraversano il corpo e vengono rilevati da un insieme di sensori posti dal lato opposto rispetto alla sorgente. Un computer elabora i dati raccolti e li converte in immagini trasversali (o "fette") del corpo, consentendo la ricostruzione della parte interna dell'oggetto con grande precisione. È quindi chiaro che, sostituendo a tale fantomatico "oggetto" un paziente in carne ed ossa, ci troviamo di fronte ad uno strumento medico di utilità immensa. Nel 1979, grazie a questo lavoro, Allan Cormarck e Godfrey Hounsfield si aggiudicarono il premio Nobel per la Fisiologia o Medicina.

La trasformata di Radon, quindi, non è solo un utile strumento matematico teorico, ma è un brillante rappresentante dell'intersezione tra Matematica e Medicina. Ma precisamente, che cos'è la trasformata di Radon?

In poche parole, quello che vogliamo fare è catturare informazioni riguardo ad una certa funzione  $f$  integrandola lungo ogni possibile retta in un dato spazio.

Immaginiamo di avere una sorgente di raggi X che viaggiano lungo una retta  $L$ , attraversando un oggetto (di cui vogliamo conoscere la parte interna) e arrivando ad un recettore. Quello che ci aspettiamo è che l'intensità dei raggi X diminuisca man mano che questi ultimi attraversano l'oggetto (trascuriamo gli effetti di rifrazione e dispersione). Secondo la legge di Lambert-Beer, i raggi X al punto  $x$  sono attenuati da una costante di proporzionalità detta *coefficiente di attenuazione li-*

neare. Se i raggi X sono monocromatici<sup>1</sup>, il coefficiente di attenuazione lineare è proporzionale alla densità dell'oggetto.

Supponiamo quindi di scegliere un oggetto in modo tale che il coefficiente di attenuazione lineare sia uguale alla densità, che immaginiamo come una funzione  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Se indichiamo con  $I(x)$  l'intensità del fascio di raggi X al punto  $x$ , allora l'intensità in un segmento  $\Delta x$  diminuisce di un fattore  $f(x)\Delta x$ , quindi

$$\Delta I \approx -(f(x)\Delta x)I(x).$$

Se  $I(x_0) = I_0$  è l'intensità alla sorgente e  $I(x_1) = I_{x_1}$  l'intensità al recettore, possiamo differenziare e procedere per separazione delle variabili ottenendo

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} \frac{dI}{I(x)} dx &= - \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \implies \ln \left( \frac{I_1}{I_0} \right) = - \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \\ &\implies \frac{I_1}{I_0} = \exp \left\{ - \int_L f(x) dx \right\}. \end{aligned}$$

Il processo di scansione coinvolge quindi l'integrale della densità lungo tutte le linee  $L$  lungo le quali emettiamo raggi X. Nei casi di interesse pratico, la funzione di densità non è nota (infatti la parte interna dell'oggetto è "nascosta", non abbiamo informazioni su tale regione di spazio!), e per costruire graficamente un'immagine abbiamo bisogno di ricostruire la funzione  $f$ .

Matematicamente, definiamo l'operatore che mappa funzioni su  $\mathbb{R}^2$  nell'insieme dei suoi integrali di linea come la **trasformata di Radon** (bidimensionale). Il problema sopra descritto si traduce quindi nel tentativo di invertire la trasformata di Radon e ricavare  $f$ .

Il nostro scopo ora è chiaro, ed è altrettanto chiaro il perché vogliamo studiare le proprietà di questo operatore integrale. Tale studio trasporta intrinsecamente varie domande naturali, del tipo:

- Come definiamo la trasformata di Radon in più dimensioni?
- È sempre possibile invertire la trasformata di Radon?
- Lungo quante rette dobbiamo integrare per avere un risultato soddisfacente?
- Quali sono gli algoritmi migliori per implementare questi calcoli?

Queste domande saranno la forza motrice di questo elaborato.

---

<sup>1</sup>Se non sono monocromatici, i raggi X con livelli di energia minori vengono attenuati di più rispetto a raggi X con livelli di energia maggiori. Questo fenomeno, che trascuriamo per semplificare la modellizzazione, è conosciuto come *indurimento del fascio*.

# Sviluppo dell'elaborato

Di seguito, una breve serie di riassunti e anticipazioni su ciò che andremo ad affrontare nel corso di questo testo.

- **Capitolo 1: Spazi di Sobolev** - Gli spazi di Sobolev sono uno strumento che verrà sfruttato per studiare particolari proprietà della trasformata di Radon. L'approccio classico consiste nella generalizzazione del concetto di derivata e di integrazione per parti, giungendo dunque alla definizione di spazio di Sobolev  $W^{k,p}$  per esponenti naturali  $p, k \in \mathbb{N}$ . Tale approccio è utile per avvicinarsi agli spazi di Sobolev, capire come funzionano e dimostrarne alcune importanti proprietà. Tuttavia è doveroso sottolineare che, lavorando con la trasformata di Radon, ci sarà più utile lavorare con una definizione equivalente di spazi di Sobolev, definendoli tramite la trasformata di Fourier e le distribuzioni temperate. Ciò ci permetterà di estendere la definizione di spazi di Sobolev a esponenti reali in modo meno laborioso e più immediato.
- **Capitolo 2: La trasformata di Radon** - In questo capitolo ci occuperemo di definire la trasformata di Radon, la trasformata a raggi X e la trasformata Fan Beam, e ne analizzeremo le caratteristiche. Ci chiederemo come si comportano questi operatori rispetto alle operazioni di convoluzione, derivazione e trasformata di Fourier. Vedremo come sono definiti i loro operatori aggiunti e di quali proprietà godono. Esploreremo infine il concetto di inversione per tali trasformate, la conformazione dei loro ranghi e come si comportano quando ci "muoviamo" tra spazi di Sobolev.
- **Capitolo 3: Accuratezza della ricostruzione** - Ricostruire una funzione conoscendone la sua trasformata di Radon è un processo che, a livello teorico, è garantito dalle formule di inversione. In casi pratici, però, non conosciamo esattamente la trasformata di Radon di una funzione, ma ne abbiamo un campionamento lungo un numero finito di direzioni e parametri. In questo capitolo, dopo aver introdotto le nozioni basilari riguardanti il condizionamento di problemi lineari su spazi di Hilbert, investighiamo dunque la magnitudo dell'errore commesso effettuando campionamenti discreti.
- **Capitolo 4: Filtered Backprojection** - Avendo una formula di inversione, bisogna trovare un modo efficace per implementarla in un calcolatore. Gli algoritmi di ricostruzione sono svariati, ma in questo capitolo ci concentriamo sul più famoso ed utilizzato: la retroproiezione filtrata. Dopo averne capito il funzionamento, concluderemo l'elaborato stimando l'errore commesso implementando una versione discretizzata dell'algoritmo di retroproiezione filtrata.

# Capitolo 1

## Spazi di Sobolev

La trasformata di Radon, inizialmente, viene definita per funzioni appartenenti allo spazio di Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Se  $p < \infty$ , lo spazio di Schwartz è denso in  $L^p(\mathbb{R}^n)$ , ed è quindi naturale chiedersi come si comporti la trasformata di Radon quando la estendiamo a funzioni appartenenti a questi spazi. Vedremo in particolare che la trasformata di Radon e la trasformata a raggi X sono operatori continui su  $L^2$ . Purtroppo, l'inversa non risulta continua se rimaniamo su  $L^2$ , ma se ci spostiamo nei cosiddetti "Spazi di Sobolev", la situazione cambia. Ha quindi senso analizzare e comprendere cosa sono questi spazi e come funzionano. Il seguente capitolo è basato su *Sobolev Spaces* [8] di *Juha Kinnunen* e il *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations* [1] di *H. Brezis*, su cui è possibile trovare approfondimenti e/o chiarimenti.

### 1.1 Derivata debole e prime proprietà degli spazi di Sobolev

Per prima cosa, vogliamo "estendere" il concetto di derivata anche a funzioni non derivabili in senso classico (che magari presentano discontinuità a salto). È qui che entra in gioco il concetto di *derivata debole*. Fissiamo un aperto  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , e prendiamo due funzioni  $u \in C^1(\Omega)$  e  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ . L'integrazione per parti (visto che  $\varphi$  è a supporto compatto in  $\Omega$ , e quindi si annulla in  $\partial\Omega$ ) ci da:

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j} \varphi dx.$$

Notiamo che il membro di sinistra ha senso anche quando  $u$  **non** è derivabile in senso classico. Questo ci motiva nella seguente definizione:

**Definizione 1.1.1** (Derivata debole). Sia  $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  e  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ . Diciamo che  $v \in L^1_{\text{loc}}$  è la  $\alpha$ -esima derivata parziale debole di  $u$  (e scriviamo  $D^\alpha u = v$ ) se per

ogni  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$  vale

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \varphi \, dx.$$

Qualche ulteriore dettaglio di notazione:

- $D^0 u = D^{(0, \dots, 0)} u = u$ ;
- se  $|\alpha| = 1$ , abbiamo che  $D_j u = D^{e_j} u = \frac{\partial u}{\partial x_j}$ ,  $j = 1, \dots, n$ ;
- $\nabla u = (D_1 u, D_2 u, \dots, D_n u)$  è detto *gradiente debole di  $u$* .

Ha senso chiedersi quale sia la relazione tra derivata debole e derivata classica. Come suggerisce il nome, la derivata debole è una “generalizzazione” della derivata classica. Se prendiamo una funzione  $u \in C^k(\Omega)$ , le derivate deboli fino all’ordine  $k$  coincidono con le derivate parziali classiche. Nel caso unidimensionale, grazie all’integrazione per parti,

$$\int_{\Omega} f \varphi' = - \int_{\Omega} f' \varphi$$

e questo ci dice proprio per definizione che la derivata debole di  $f$  è proprio  $f'$ . Il ragionamento per più dimensioni (e per ordini di derivazione  $> 1$ ) è analogo.

La derivata classica è un concetto locale (infatti è definita come limite puntuale di un rapporto) mentre le derivate deboli sono definite come funzioni che, sostanzialmente, soddisfano l’integrazione per parti. In virtù di ciò, la derivata debole non cambia se modifichiamo i valori della funzione su un insieme di misura nulla, perchè l’integrale è “cieco” su tali insiemi. Oltre a ciò, la derivata debole è unica, nel senso seguente:

**Lemma 1.1.1.** *L’ $\alpha$ -esima derivata debole di una funzione, se esiste, è unica a meno di insiemi di misura nulla.*

*Dimostrazione.* Supponiamo ci siano due derivate deboli  $v, \tilde{v} \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  della stessa funzione  $u$ . Abbiamo per definizione che

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \tilde{v} \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

e quindi che

$$\int_{\Omega} (v - \tilde{v}) \varphi \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Dimostriamo che questo implica  $v = \tilde{v}$  quasi ovunque. Prendiamo  $\Omega' \Subset \Omega$  (i.e. un aperto la cui chiusura sia compatta e contenuta in  $\Omega$ ). Sappiamo che  $C_c^\infty(\Omega')$  è denso in  $L^1(\Omega')$ . Possiamo quindi scegliere una successione  $\varphi_i$  tale che  $\|\varphi_i\|_1 \leq 2$

e  $\varphi_i \rightarrow \text{sgn}(v - \tilde{v})$  quasi ovunque. Utilizzando allora il teorema di convergenza dominata e la maggiorazione  $|(v - \tilde{v})\varphi_i| \leq 2(|v| + |\tilde{v}|) \in L^1(\Omega)$ , abbiamo

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\Omega'} (v - \tilde{v})\varphi_i \, dx = \int_{\Omega'} \lim_{i \rightarrow \infty} (v - \tilde{v})\varphi_i \, dx \\ &= \int_{\Omega'} (v - \tilde{v}) \text{sgn}(v - \tilde{v}) \, dx = \int_{\Omega'} |v - \tilde{v}| \, dx. \end{aligned}$$

Questo implica che  $v = \tilde{v}$  quasi ovunque in ogni  $\Omega' \Subset \Omega$ , e quindi abbiamo la tesi.  $\square$

Usando lo stesso ragionamento si dimostra un importante risultato, che essenzialmente è “l’equivalente integrale” per dire che una funzione è zero:

**Corollario 1.1.1** (Lemma fondamentale del calcolo delle variazioni). *Sia  $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ . Se abbiamo che*

$$\int_{\Omega} f \varphi \, dx = 0$$

per ogni  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ , allora  $f = 0$  quasi ovunque in  $\Omega$ .

**Esempio.** Fissiamo  $n = 1$  e  $\Omega = (0, 2)$ . Prese

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{if } 0 < x < 1, \\ 1 & \text{if } 1 \leq x < 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad v(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{if } 1 \leq x < 2. \end{cases}$$

Vogliamo dimostrare che  $u' = v$  in senso debole. Dobbiamo quindi vedere se

$$\int_0^2 u \varphi' \, dx = - \int_0^2 v \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty((0, 2)).$$

Per dimostrarlo, ci affidiamo ad un’integrazione per parti e al teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\begin{aligned} \int_0^2 u(x)\varphi'(x) \, dx &= \int_0^1 x\varphi'(x) \, dx + \int_1^2 \varphi'(x) \, dx \\ &= x\varphi(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \varphi(x) \, dx + \varphi(2) - \varphi(1) \\ &= \varphi(1) - \int_0^1 \varphi(x) \, dx - \varphi(1) \\ &= - \int_0^1 \varphi(x) \, dx = - \int_0^2 v(x)\varphi(x) \, dx, \end{aligned}$$

dove abbiamo anche utilizzato che  $\varphi \in C_c^\infty((0, 2))$ , e quindi si annulla agli estremi di  $(0, 2)$ .



Possiamo ora chiederci se  $v$  a sua volta ammette una derivata debole. Supponiamo esista  $h$  derivata debole di  $v$ . Allora, per ogni  $\varphi \in C_c^\infty(0, 2)$ , dovrebbe essere soddisfatta l'equazione

$$\int_0^2 h(x)\varphi(x) dx = - \int_0^1 \varphi'(x) dx.$$

Ma il RHS, sfruttando il supporto compatto di  $\varphi$  e il teorema fondamentale del calcolo, si legge

$$- \int_0^1 \varphi'(x) dx = -\varphi(1) + \varphi(0) = -\varphi(1).$$

Otteniamo dunque la condizione necessaria che deve rispettare  $h$ , cioè che

$$\int_0^2 h(x)\varphi(x) dx = -\varphi(1) \quad \forall \varphi \in C_c^\infty((0, 2)),$$

e l'unica  $h$  a soddisfare tale condizione è  $\delta_1$ , la delta di Dirac concentrata in 1. Ma questa **non** è una funzione! Quindi  $v$  non ammette derivata debole in  $L^1_{\text{loc}}((0, 2))$ .

Siamo ora pronti a dare una definizione rigorosa di Spazi di Sobolev. Prendiamo  $\Omega$  un aperto in  $\mathbb{R}^n$ .

**Definizione 1.1.2.** Lo spazio di Sobolev  $W^{k,p}(\Omega)$  è lo spazio vettoriale delle funzioni  $u \in L^p(\Omega)$  tali che, per ogni multi-indice  $\alpha$  con  $|\alpha| \leq k$ , esista l' $\alpha$ -esima derivata debole  $D^\alpha u$  e appartenga a  $L^p(\Omega)$ . In simboli,

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq k\}.$$

Su questo spazio possiamo definire una norma, che dipende non solo dalla funzione ma anche dalle sue derivate:

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty$$

$$\|u\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

*Remark.* • Se  $p = 2$ , utilizzeremo la notazione

$$H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Usiamo la lettera  $H$  perchè  $H^k(\Omega)$  è uno spazio di Hilbert per ogni  $k$ , dotato del prodotto scalare

$$\langle u, v \rangle_{W^{k,2}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Notiamo anche che  $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$  per definizione.

- Esattamente come negli spazi  $L^p$ , negli spazi di Sobolev vengono identificate funzioni che coincidono quasi ovunque.
- Denotiamo con  $W_0^{k,p}(\Omega)$  la chiusura di  $C_c^\infty(\Omega)$  in  $W^{k,p}(\Omega)$ . Quindi abbiamo che  $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$  se e solo se esiste una successione di funzioni  $u_m \in C_c^\infty(\Omega)$  tale che  $u_m \rightarrow u$  in  $W^{k,p}(\Omega)$ . Si può dimostrare che  $W_0^{k,p}(\Omega)$  è lo spazio di funzioni che comprende le  $u \in W^{k,p}(\Omega)$  tali che

$$"D^\alpha u = 0 \text{ in } \partial U" \quad \forall |\alpha| < k.$$

Vediamo un esempio di funzione in questi spazi di Sobolev:

**Esempio.** Sia  $n \geq 2$  e  $u: B(0,1) \rightarrow [0, \infty]$  definita da  $u(x) = |x|^{-\beta}$ ,  $\beta > 0$ . È chiaro che  $u \in C^\infty(B(0,1) \setminus \{0\})$ , ma  $u$  non è limitata in ogni intorno dell'origine. Dimostriamo, come prima cosa, che  $u$  ammette derivata debole su tutta la palla unitaria. Quando  $x \neq 0$ , abbiamo che

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) = -\beta |x|^{-\beta-1} \frac{x_j}{|x|} = -\beta \frac{x_j}{|x|^{\beta+2}}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Quindi,

$$\nabla u(x) = -\beta \frac{x}{|x|^{\beta+2}}.$$

Fissiamo  $\varepsilon > 0$ . Per il teorema di Gauss, sappiamo che

$$\int_{B(0,1) \setminus \overline{B(0,\varepsilon)}} D_j(u\varphi) dx = \int_{\partial B(0,1) \setminus \overline{B(0,\varepsilon)}} u\varphi v_j dS,$$

dove  $\varphi \in C_c^\infty(B(0,1))$  e  $v = (v_1, \dots, v_n)$  è il vettore unitario normale alla frontiera. Usando la regola di Leibniz e ricordando che  $\varphi$  è a supporto compatto (e quindi si annulla in  $\partial B(0,1)$ ), otteniamo

$$\int_{B(0,1) \setminus \overline{B(0,\varepsilon)}} (D_j u)\varphi dx + \int_{B(0,1) \setminus \overline{B(0,\varepsilon)}} u(D_j \varphi) dx = \int_{\partial B(0,\varepsilon)} u\varphi v_j dS.$$

Ri-arrangiando i termini,

$$\int_{B(0,1) \setminus \overline{B(0,\varepsilon)}} u(D_j \varphi) dx = - \int_{B(0,1) \setminus \overline{B(0,\varepsilon)}} (D_j u)\varphi dx + \int_{\partial B(0,\varepsilon)} u\varphi v_j dS.$$

Cerchiamo di stimare l'ultimo integrale: utilizzando che  $|v_j| \leq 1$ , si ha quindi

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial B(0,\varepsilon)} u\varphi v_j dS \right| &\leq \|\varphi\|_{L^\infty(B(0,1))} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \varepsilon^{-\beta} dS \\ &= \|\varphi\|_{L^\infty(B(0,1))} \omega^{n-1} \varepsilon^{n-1-\beta} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

se  $n - 1 - \beta > 0$ , dove abbiamo indicato con  $\omega^{n-1}$  la misura della palla  $(n - 1)$ -dimensionale. Studiamo ora l'integrabilità di  $D_j u$ . Quest'informazione ci servirà in seguito per applicare il teorema di convergenza dominata. Abbiamo che

$$\begin{aligned}
\int_{B(0,1)} |D_j u| dx &\leq \int_{B(0,1)} |\nabla u| dx = \beta \int_{B(0,1)} |x|^{-\beta-1} dx \\
&= \beta \int_0^1 \int_{\partial B(0,r)} r^{-\beta-1} dS dr \\
&= \beta \omega^{n-1} \int_0^1 r^{-\beta-1+n-1} dr \\
&= \beta \omega^{n-1} \int_0^1 r^{n-\beta-2} dr \\
&= \frac{\beta \omega^{n-1}}{n - \beta - 1} r^{n-\beta-1} \Big|_0^1 < \infty,
\end{aligned}$$

se  $n - \beta - 1 > 0$ . Proviamo ora a dimostrare che  $D_j u$  è la derivata debole di  $u$  anche in un intorno dell'origine. Abbiamo che

$$\begin{aligned}
\int_{B(0,1)} u D_j \varphi dx &= \int_{B(0,1)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (u D_j \varphi \mathbb{1}_{B(0,1) \setminus \overline{B(0,\varepsilon)}}) dx \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B(0,1) \setminus \overline{B(0,\varepsilon)}} u D_j \varphi dx \\
&= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B(0,1) \setminus \overline{B(0,\varepsilon)}} D_j u \varphi dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} u \varphi \nu_j dS \\
&= - \int_{B(0,1)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} D_j u \varphi \mathbb{1}_{B(0,1) \setminus \overline{B(0,\varepsilon)}} dx \\
&= - \int_{B(0,1)} D_j u \varphi dx,
\end{aligned}$$

dove nel secondo e quarto passaggio abbiamo utilizzato il teorema di convergenza dominata; la prima volta per la funzione  $u D_j \varphi \mathbb{1}_{B(0,1) \setminus \overline{B(0,\varepsilon)}}$  (maggiorata da  $|u| \|D_j \varphi\|_\infty \in L^1(B(0,1))$ ), la seconda volta per la funzione  $D_j u \varphi \mathbb{1}_{B(0,1) \setminus \overline{B(0,\varepsilon)}}$  (maggiorata da  $|Du| \|\varphi\|_\infty \in L^1(B(0,1))$ ). Ricordiamo che stiamo supponendo  $\beta < n - 1$ , quindi abbiamo  $u, D_j u$  sono funzioni assolutamente integrabili in un intorno dell'origine. Ora che abbiamo mostrato che  $u$  ammette derivate deboli, ha senso chiedersi se appartiene a qualche spazio di Sobolev. Fissiamo  $1 \leq p < \infty$ , e notiamo che

$$u \in L^p(B(0,1)) \iff -p\beta + n > 0 \iff \beta < \frac{n}{p},$$

mentre

$$Du \in L^p(B(0,1)) \iff -p(\beta + 1) + n > 0 \iff \beta < \frac{n-p}{p}.$$

In conclusione, abbiamo

$$u \in W^{1,p}(B(0,1)) \iff \beta < \frac{n-p}{p}.$$

Prendiamo ora  $(q_i)_{i \in \mathbb{N}}$  un sottoinsieme denso e numerabile in  $B(0,1)$ , e utilizziamo le informazioni appena ottenute per studiare il comportamento della funzione

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} |x - q_i|^{-\beta}.$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} \||x - q_i|^{-\beta}\|_{W^{1,p}(B(0,1))}^p &= \||x - q_i|^{-\beta}\|_{L^p(B(0,1))}^p + \|D(|x - q_i|^{-\beta})\|_{L^p(B(0,1))}^p \\ &= \||x - q_i|^{-\beta}\|_{L^p(B(0,1))}^p + \|\beta|x - q_i|^{-\beta-1}\|_{L^p(B(0,1))}^p \\ &= \int_{B(0,1)} |x - q_i|^{-p\beta} dx + \beta^p \int_{B(0,1)} |x - q_i|^{-\beta p - p} dx \\ &\leq \int_{B(0,2)} |x|^{-\beta p} dx + \beta^p \int_{B(0,2)} |x|^{-\beta p - p} dx \\ &= \int_{B(0,1)} |2x|^{-\beta p} 2^n dx + \beta^p \int_{B(0,1)} |2x|^{-\beta p - p} 2^n dx \\ &= 2^{-\beta p + n} \int_{B(0,1)} |x|^{-\beta p} dx + 2^{-\beta - p + n} \beta^p \int_{B(0,1)} |x|^{-\beta p - p} dx \\ &\leq 2^{-\beta p + n} (1 + 2^{-p}) \||x|^{-\beta}\|_{W^{1,p}(B(0,1))}^p < \infty \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Notiamo che l'ultimo RHS è indipendente da  $i$ . Analizzando quindi la norma di  $\psi$ , ne segue che, se  $\beta < \frac{n-p}{p}$ , allora:

$$\begin{aligned} \|\psi\|_{W^{1,p}(B(0,1))} &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \||x - q_i|^{-\beta}\|_{W^{1,p}(B(0,1))} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} (2^{-\beta p + n} (1 + 2^{-p}))^{\frac{1}{p}} \||x|^{-\beta}\|_{W^{1,p}(B(0,1))} \\ &= (2^{-\beta p + n} (1 + 2^{-p}))^{\frac{1}{p}} \||x|^{-\beta}\|_{W^{1,p}(B(0,1))} < \infty. \end{aligned}$$

Quest'ultimo esempio evidenzia un fatto importante riguardante gli spazi di Sobolev: una funzione in  $W^{k,p}(\Omega)$ , nonostante possa possedere alcune proprietà di "lisciezza", potrebbe comunque avere un comportamento anomalo (in questo caso, per esempio, la funzione  $\psi$  non è limitata su ogni insieme aperto in  $B(0,1)$ ).

Verifichiamo ora alcune proprietà delle derivate deboli. Nonostante tali regole siano soddisfatte per funzioni lisce, è bene ricordare che le funzioni negli spazi di Sobolev non sono necessariamente lisce. Occorre quindi verificare tali proprietà con la sola definizione di derivata debole.

**Proposizione 1.1.1.** *Siano  $u, v \in W^{k,p}(\Omega)$  e  $|\alpha| \leq k$ . Allora*

- (i)  $D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$  e  $D^\beta(D^\alpha u) = D^\alpha(D^\beta u) = D^{\alpha+\beta}u$  per ogni multi-indice  $\alpha, \beta$  con  $|\alpha| + |\beta| \leq k$ ;
- (ii) Per ogni  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda u + \mu v \in W^{k,p}(\Omega)$  e si ha  $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$ ,  $|\alpha| \leq k$ ;
- (iii) Se  $U$  è un aperto di  $\Omega$ , allora  $u \in W^{k,p}(U)$ ;
- (iv) Se  $\eta \in C_c^\infty(\Omega)$ , allora  $\eta u \in W^{k,p}(\Omega)$  e

$$D^\alpha(\eta u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \eta D^{\alpha-\beta} u \quad (\text{Formula di Leibniz}).$$

*Dimostrazione.* (i) Il fatto che  $D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$  discende dalla definizione. Fissiamo  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ . Allora  $D^\beta \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ , e quindi

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} D^\alpha u D^\beta \varphi \, dx &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^{\alpha+\beta} \varphi \, dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} (-1)^{|\alpha+\beta|} \int_{\Omega} D^{\alpha+\beta} u \varphi \, dx \\ &= (-1)^{|\beta|} \int_{\Omega} D^{\alpha+\beta} u \varphi \, dx, \end{aligned}$$

e quindi  $D^\alpha(D^\beta u) = D^\beta(D^\alpha u) = D^{\alpha+\beta}u$  in senso debole.

- (ii) Dimostriamo che  $\lambda u + \mu v$  ammette derivate deboli. Per ogni  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$  abbiamo:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\lambda u + \mu v) D^\alpha \varphi \, dx &= \lambda \int_{\Omega} u D^\alpha \varphi \, dx + \mu \int_{\Omega} v D^\alpha \varphi \, dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \lambda \int_{\Omega} D^\alpha u \varphi \, dx + (-1)^{|\alpha|} \mu \int_{\Omega} D^\alpha v \varphi \, dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} (\lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v) \varphi \, dx, \end{aligned}$$

dove nel secondo passaggio abbiamo utilizzato che  $u, v \in W^{k,p}(\Omega)$ , e quindi ammettono derivate deboli  $D^\alpha u$  e  $D^\alpha v$ . Queste derivate sono in  $L^p(\Omega)$ , poiché gli spazi  $L^p$  sono spazi vettoriali, quindi chiusi rispetto a somma e moltiplicazione per scalare, e sappiamo per ipotesi che  $u, v$  e le loro derivate deboli stanno in  $L^p$ .

- (iii) Ovvvia, basta considerare le restrizioni di  $u$  e  $D^\alpha u$  a  $U$ .

(iv) Procediamo per induzione su  $|\alpha|$ . Sia  $|\alpha| = 1$  e  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ . Siccome  $D^\alpha(\eta\varphi) = \eta D^\alpha\varphi + \varphi D^\alpha\eta$ , abbiamo

$$\int_{\Omega} \eta u D^\alpha \varphi \, dx = \int_{\Omega} (u D^\alpha(\eta\varphi) - u\varphi D^\alpha\eta) \, dx = - \int_{\Omega} (\eta D^\alpha u + u D^\alpha\eta) \varphi \, dx,$$

e quindi  $D^\alpha(\eta u) = \eta D^\alpha u + u D^\alpha\eta$ . Sia ora  $l < k$  e supponiamo

$$D^\alpha(\eta u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \eta D^{\alpha-\beta} u$$

per ogni multi-indice  $\alpha$  con  $|\alpha| \leq l$  e per ogni  $\eta \in C_c^\infty(\Omega)$ . Prendiamo ora  $\alpha$  un multi-indice con  $|\alpha| = l + 1$ . Allora  $\alpha = \beta + \gamma$ , con  $|\beta| = l$  e  $|\gamma| = 1$ . In modo analogo a prima, abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \eta u D^\alpha \varphi \, dx &= \int_{\Omega} \eta u D^{\beta+\gamma} \varphi \, dx = \int_{\Omega} \eta u D^\beta (D^\gamma \varphi) \, dx \\ &= (-1)^{|\beta|} \int_{\Omega} \sum_{\sigma \leq \beta} \binom{\beta}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\beta-\sigma} u D^\gamma \varphi \, dx. \end{aligned}$$

Per ipotesi induttiva su  $D^{\beta-\sigma} \in W^{k-|\beta|+|\sigma|,p}(\Omega)$  e  $D^\gamma \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ , si ha

$$\begin{aligned} (-1)^{|\beta|} \int_{\Omega} \sum_{\sigma \leq \beta} \binom{\beta}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\beta-\sigma} u D^\gamma \varphi \, dx \\ = (-1)^{|\beta|+|\gamma|} \int_{\Omega} \sum_{\sigma \leq \beta} \binom{\beta}{\sigma} D^\gamma (D^\sigma \eta D^{\beta-\sigma} u) \varphi \, dx. \end{aligned}$$

Riutilizziamo l'ipotesi induttiva sempre su  $D^{\beta-\sigma} u \in W^{k-|\beta|+|\sigma|,p}(\Omega)$  e  $D^\sigma \eta \in C_c^\infty(\Omega)$  e otteniamo

$$\begin{aligned} &= (-1)^{|\beta|+|\gamma|} \int_{\Omega} \sum_{\sigma \leq \beta} \binom{\beta}{\sigma} D^\gamma (D^\sigma \eta D^{\beta-\sigma} u) \varphi \, dx \\ &= (-1)^\alpha \int_{\Omega} \sum_{\sigma \leq \beta} (D^\rho \eta D^{\alpha-\rho} + D^\sigma \eta D^{\alpha-\sigma} u) \varphi \, dx, \end{aligned}$$

dove  $\rho = \sigma + \gamma$  in modo tale che  $\alpha - \rho = \beta - \sigma$ . Concludiamo quindi che

$$\begin{aligned} &(-1)^\alpha \int_{\Omega} \sum_{\sigma \leq \beta} \binom{\beta}{\sigma} (D^\rho \eta D^{\alpha-\rho} + D^\sigma \eta D^{\alpha-\sigma} u) \varphi \, dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \left( \sum_{\sigma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha-\sigma} u \right) \varphi \, dx, \end{aligned}$$

siccome per i multi-indici vale la legge del triangolo di Pascal, ergo

$$\binom{\beta}{\sigma - \gamma} + \binom{\beta}{\sigma} = \binom{\alpha}{\sigma}.$$

□

Abbiamo quindi visto che negli spazi di Sobolev la derivata debole rispetta le principali regole soddisfatte dalla derivata classica. Gli spazi di Sobolev possiedono altri importanti caratteristiche che vale la pena analizzare, e cioè che sono completi, riflessivi ( $p \neq 1, \infty$ ) e separabili ( $p \neq \infty$ ).

**Teorema 1.1.1.** *Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto. Allora  $W^{k,p}(\Omega)$  è*

- *uno spazio di Banach ( $1 \leq p \leq \infty$ );*
- *riflessivo ( $1 < p < \infty$ );*
- *separabile ( $1 \leq p < \infty$ ).*

*Dimostrazione.* • Dimostriamo la completezza. Per prima cosa, è necessario mostrare che stiamo lavorando con una norma. Chiaramente

$$\|\lambda u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = |\lambda| \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)},$$

e

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 0 \iff u = 0 \text{ quasi ovunque.}$$

Per la disuguaglianza triangolare, prendiamo due funzioni  $u, v \in W^{k,p}(\Omega)$  e sfruttiamo la disuguaglianza di Minkowski:

$$\begin{aligned} \|u + v\|_{W^{k,p}(\Omega)} &= \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha(u + v)\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u + D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p + \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} + \|v\|_{W^{k,p}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Sia ora  $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  una successione di Cauchy in  $W^{k,p}(\Omega)$ . Allora per ogni  $|\alpha| \leq k$ ,  $\{D^\alpha u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  è una successione di Cauchy in  $L^p(\Omega)$ . Per il teorema di Fischer-Riesz,  $L^p(\Omega)$  è completo, e quindi esistono funzioni  $u_\alpha \in L^p(\Omega)$  tali che, per ogni  $|\alpha| \leq k$ ,

$$D^\alpha u_m \rightarrow u_\alpha \quad \text{in } L^p(\Omega).$$

In particolare,  $u_m \rightarrow u_{(0,\dots,0)} = u$  in  $L^p(\Omega)$ . Dobbiamo dimostrare ora che  $u \in W^{k,p}(\Omega)$  e  $D^\alpha u = u_\alpha$  ( $|\alpha| \leq k$ ). Fissiamo quindi  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$  e abbiamo che

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u D^\alpha \varphi \, dx &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_m D^\alpha \varphi \, dx \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^\alpha u_m \varphi \, dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u_\alpha \varphi \, dx. \end{aligned}$$

Dunque  $u$  ammette derivate deboli, che sono in  $L^p(\Omega)$  per costruzione. Siccome  $D^\alpha u_m \rightarrow D^\alpha u$  in  $L^p(\Omega)$ , abbiamo che  $u_m \rightarrow u$  in  $W^{k,p}(\Omega)$ .

- Per chiarezza, iniziamo ad analizzare il caso  $k = 1$  (per  $k \geq 2$  il ragionamento è analogo). Consideriamo lo spazio prodotto  $\mathbf{E} := L^p(\Omega) \times (L^p(\Omega))^n$ , e prendiamo un operatore  $T : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbf{E}$  definito da  $Tu = (u, \nabla u)$ , dove  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  e  $\nabla u$  è il gradiente debole di  $u$ .  $T$  risulta essere un'isometria, siccome sul prodotto degli spazi  $L^p$  consideriamo una norma equivalente a quella definita sullo spazio di Sobolev (cioè  $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^n}$ ). Gli spazi  $L^p$  sono riflessivi per  $1 < p < \infty$ , e sappiamo che il prodotto di spazi riflessivi è riflessivo. Siccome  $W^{1,p}(\Omega)$  è di Banach, ne segue che  $T(W^{1,p}(\Omega))$  è chiuso in  $L^p(\Omega) \times (L^p(\Omega))^n$ . Ma un sottospazio chiuso in uno spazio riflessivo è anch'esso riflessivo. Ne segue che  $W^{1,p}(\Omega)$  è riflessivo.

Se  $k \geq 2$ , il ragionamento è completamente analogo, l'unica differenza è nella costruzione di  $T$ . Quest'operatore deve essere definito da  $Tu = (u, v)$ , dove  $v$  è il vettore contenente tutte le derivate fino all'ordine  $k$ . Dobbiamo solo capire quanto entrate ha questo vettore: deve contenere tutte le derivate di ordine 1, tutte le derivate di ordine 2 e così via fino all'ordine  $k$  (contando anche le derivate miste). Ricordiamo che la formula di una combinazione con ripetizione di classe  $l$  di  $m$  elementi distinti è data dal coefficiente binomiale

$$C_{m,l} = \binom{m+l-1}{l}.$$

Quindi in totale  $v$  sarà lungo  $\sum_{i=1}^k C_{n,i}$ . Allora il nostro insieme  $\mathbf{E}$  sarà definito come  $L^p(\Omega) \times (L^p(\Omega))^{\sum_{i=1}^k C_{n,i}}$ . Da qui in poi i ragionamenti sono analoghi.



- Il prodotto finito di spazi  $L^p$  è separabile, e tramite l'isometria  $T$  definita sopra si arriva alla tesi con lo stesso ragionamento utilizzato per dimostrare la riflessività. □

## 1.2 Teoremi degli embedding di Sobolev

In questa sezione, cerchiamo di identificare uno spazio ambiente in cui collocare gli spazi di Sobolev. Siccome per definire questi ultimi abbiamo utilizzato gli spazi  $L^p$ , viene naturale chiedersi se ci sia una qualche inclusione tra i  $W^{k,p}$  e gli spazi  $L^p$  o addirittura gli spazi di funzioni continue  $C^\lambda$ . In parole **molto** povere, quando lavoriamo con spazi di misura finita, le funzioni in  $L^q$  sono più “belle” di quelle in  $L^p$  se  $q > p$  (poiché abbiamo un naturale inscatolamento degli spazi  $L^p$ ). In questa scala di “integrabilità”, le funzioni in  $L^\infty$  sono più simili alle funzioni continue di quanto lo siano le funzioni in  $L^1$ . I *teoremi degli embedding di Sobolev* dicono che, quando una funzione  $f$  e le sue derivate appartengono ad uno spazio  $L^p$ , automaticamente  $f$  appartiene ad uno spazio “più bello”, che può essere  $L^q$  per qualche  $q > p$  o qualche spazio di funzioni continue.

In una dimensione, per esempio, il risultato è immediato: se  $f' \in L^1(\mathbb{R})$ , allora  $f$  è limitata ed è assolutamente continua. In dimensioni superiori, però, non possiamo procedere con altrettanta tranquillità. I teoremi degli embedding di Sobolev ci dicono a quali spazi  $L^p$  o a quali spazi  $C^\lambda$  appartiene  $f$  se le sue derivate sono in  $L^p$ . Per arrivare a questi risultati cercheremo quindi delle stime della forma

$$\|f\|_{L^p} \text{ oppure } \|f\|_{C^\lambda} \leq K \|\nabla f\|_{L^p}.$$

Prima di cominciare, dobbiamo ricordare un paio di nozioni fondamentali. La prima è la disuguaglianza di Hölder generalizzata: supponiamo  $\sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i} = 1$  e  $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$  per  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Allora abbiamo che

$$\int_{\Omega} |f_1(x)f_2(x)\cdots f_m(x)| dx \leq \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \cdots \|f_m\|_{L^{p_m}(\Omega)}. \quad (1.1)$$

Mentre la seconda è la definizione di funzione Hölder-continua (e conseguentemente, di spazi di funzioni Hölder-continue): una funzione è *Hölder-continua* in  $\Omega$  se esistono  $C \geq 0$  e  $0 < \alpha < 1$  tali che, per ogni  $x, y \in \Omega$ , si abbia

$$|f(x) - f(y)| \leq C \|x - y\|^\alpha.$$

Quest'ultima è detta *condizione di Hölder*, e  $\alpha$  è detto *esponente della condizione di Hölder*. Si può dimostrare che una funzione che su un intervallo soddisfa la condizione di Hölder con  $\alpha > 1$  è costante. Se  $\alpha = 1$  la funzione è Lipschitziana, mentre se  $\alpha = 0$  la funzione è limitata. Tale definizione ci permette di definire per  $k \in \mathbb{N}$  gli spazi di Hölder  $C^{k,\alpha}(\Omega)$ , formato dalle funzioni derivabili con continuità

fino all'ordine  $k$  e tali che ogni derivata fino all'ordine  $k$  sia Hölder-continua di esponente  $\alpha$ . Se il cosiddetto *coefficiente di Hölder*

$$\|f\|_{C^{k,\alpha}} = \sup_{x,y \in \Omega} \frac{|f(x) - f(y)|}{\|x - y\|^\alpha}$$

è finito,  $f$  viene detta *uniformemente Hölder-continua*.

Il nostro scopo sarà quello di dimostrare i teoremi degli embedding di Sobolev per  $W^{k,p}(\Omega)$ . Partendo dal caso  $k = 1$ , occasionalmente ci sarà più comodo lavorare con funzioni  $u \in C_c^1(\Omega)$  piuttosto che funzioni in  $W^{1,p}(\Omega)$ . Questo è giustificato dal seguente fatto: le stime che otterremo saranno della forma

$$\|u\|_Y \leq C \cdot H \left( \|D_1 u\|_{L^p(\Omega)}, \dots, \|D_n u\|_{L^p(\Omega)} \right),$$

dove  $H$  sarà una somma o un prodotto e  $Y$  sarà  $L^q(\Omega)$  o qualche spazio di funzioni continue  $C^\lambda(\Omega)$ . Supponiamo di prendere una successione di funzioni  $\{u_j\}_{j \in \mathbb{N}} \in C_c^1(\Omega)$ . Tali stime ci dicono che  $u_j$  è di Cauchy in  $Y$ , che è uno spazio completo, quindi sono valide anche quando le derivate (distribuzionali) di  $u$  appartengono a  $L^p(\Omega)$ . E lo spazio delle funzioni le cui prime derivate (distribuzionali) appartengono a  $L^p(\Omega)$  non è altro che lo spazio di Sobolev  $W^{1,p}(\Omega)$ . Ora che abbiamo chiarito la strada da seguire, possiamo gettarci nella dimostrazione del primo teorema degli embedding di Sobolev.

**Teorema 1.2.1.** *Sia  $k = 1$ . Allora*

$$W^{1,p}(\Omega) \subseteq \begin{cases} L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega), & p < n \\ C^{0,1-\frac{n}{p}}(\Omega), & p > n. \end{cases}$$

*Dimostrazione.* (**Caso  $p = 1$** ): fissiamo un indice  $i \in \{1, \dots, n\}$ , e notiamo che

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} D_i u(x_1, \dots, t, \dots, x_n) dt.$$

Maggiorando l'insieme di integrazione, otteniamo la disuguaglianza

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |D_i u(x_1, \dots, t, \dots, x_n)| dt.$$

Ripetiamo questo ragionamento per ogni  $i$ , prendiamo il prodotto dei termini e applichiamo la radice  $(n-1)$ -esima da entrambi i lati, per ottenere

$$|u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leq \prod_{i=1}^n \left( \int_{\mathbb{R}} |D_i u| dx_i \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Integriamo ora lungo l'asse  $x_1$ , e utilizziamo la disuguaglianza di Hölder 1.1 con  $m = n-1$  e  $p_i = n-1$ :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 &\leq \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^n \left( \int_{\mathbb{R}} |D_i u| dx_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \\
&= \left( \int_{\mathbb{R}} |D_1 u| dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot \int_{\mathbb{R}} \left( \prod_{i=2}^n \int_{\mathbb{R}} |D_i u| dx_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \\
&\leq \left( \int_{\mathbb{R}} |D_1 u| dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot \prod_{i=2}^n \left( \int_{\mathbb{R}} \left[ \int_{\mathbb{R}} |D_i u| dx_i \right]^{\frac{n-1}{n-1}} dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \\
&= \left( \int_{\mathbb{R}} |D_1 u| dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot \left( \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |D_2 u| dx_2 dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \\
&\quad \cdot \prod_{i=3}^n \left[ \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} |D_i u| dx_i \right) dx_1 \right]^{\frac{1}{n-1}}.
\end{aligned}$$

Continuando impavidamente con questi calcoli, procediamo a integrare sull'asse  $x_2$ . Questo è il motivo per cui abbiamo isolato il secondo termine dai rimanenti  $n-2$ ; se avessimo integrato rispetto all'asse  $x_j$ , avremmo isolato il termine contenente l'integrazione lungo tale asse. Ora che integriamo rispetto a  $x_2$ , il secondo termine risulta una costante rispetto a quest'operazione, mentre gli altri due subiscono l'integrazione. Otteniamo dunque:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 dx_2 \\
&\leq \left( \int_{\mathbb{R}^2} |D_2 u| dx_2 dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \left( \int_{\mathbb{R}} \left[ \left( \int_{\mathbb{R}} |D_1 u| dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=3}^n \left( \int_{\mathbb{R}} |D_i u| dx_i \right) \right] dx_2 \right)^{\frac{1}{n-1}},
\end{aligned}$$

e, usando la disuguaglianza di Hölder, il secondo fattore diventa

$$\leq \left( \prod_{i=3}^n \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |D_i u| dx_i dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Continuiamo isolando il termine che coinvolge l'integrazione lungo  $x_3$  e riappliciamo Hölder, e così via per tutti gli altri termini, arrivando infine a

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 \cdots dx_n \leq \prod_{j=1}^n \left( \int_{\mathbb{R}^n} |D_j u| dx_1 \cdots dx_n \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Restringendoci finalmente a  $\Omega$ , otteniamo

$$(\|u\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\Omega)})^{\frac{n}{n-1}} \leq \prod_{j=1}^n \left( \int_{\Omega} |D_j u| dx \right)^{\frac{1}{n-1}},$$

o ancora più chiaramente

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\Omega)} &\leq \prod_{j=1}^n \left( \int_{\Omega} |D_j u| dx \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} |D_j u| dx \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} |\nabla u| dx = \int_{\Omega} |\nabla u| dx = \|\nabla u\|_{L^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

e questo conclude il caso  $p = 1$ .

**(Caso  $1 < p < n$ ):** avendo ricavato il risultato precedente, utilizziamo un truccetto per ricondurci a quanto dimostrato sopra. Sia  $\gamma > 1$  una costante (che specificheremo in seguito). Grazie al risultato precedente, abbiamo

$$\| |u|^\gamma \|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\Omega)} \leq \int_{\Omega} |D(|u|^\gamma)| dx \leq \gamma \int_{\Omega} |u|^{\gamma-1} |Du| dx.$$

Consideriamo l'esponente coniugato di  $p' = \frac{p}{p-1}$ , e utilizziamo la disuguaglianza di Hölder:

$$\left( \int_{\Omega} |u|^{\frac{n}{n-1}} dx \right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \left( \int_{\Omega} |u|^{(\gamma-1)p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \cdot \left( \int_{\Omega} |Du|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Scegliamo ora  $\gamma = \frac{n-1}{n-p}p$ , in modo tale da avere  $(\gamma-1)p' = \frac{n}{n-1}$ . Quindi:

$$\left( \int_{\Omega} |u|^{\frac{(n-1)p}{n-p} \frac{n}{n-1}} dx \right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \left( \int_{\Omega} |u|^{(\frac{n-1}{n-p}p-1)p'} dx \right)^{\frac{p-1}{p'}} \cdot \left( \int_{\Omega} |Du|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

che più elegantemente si legge

$$\|u\|_{L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |u|^{\frac{np}{n-p}} dx \right)^{\frac{n-1-p}{n}} \leq \frac{n-1}{n-p} p \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)},$$

concludendo il caso  $1 < p < n$ .

**(Caso  $p > n$ ):** per dimostrare questa parte, avremo bisogno di un paio di risultati preliminari.

**Lemma 1.2.1.** *Sia  $B$  una palla di raggio  $R$  contenuta in  $\Omega$ . Allora per ogni  $x \in \Omega$  si ha:*

$$|u(x) - \frac{1}{|B|} \int_B u dy| \leq \frac{(2R)^n}{n|B|} \int_B \frac{|Du(z)|}{|x-z|^{n-1}} dz.$$

*Dimostrazione.* Prendiamo  $x, y \in \Omega$  con  $x \neq y$ , e definiamo  $\omega := \frac{y-x}{|y-x|}$ . Abbiamo che

$$u(y) - u(x) = \int_0^{|x-y|} \frac{\partial u}{\partial r}(x+r\omega) dr.$$

Integriamo ora sulla palla  $B \subseteq \Omega$ :

$$\int_B u(y) dy - |B|u(x) = \int_B \left( \int_0^{|x-y|} \frac{\partial u}{\partial r}(x+r\omega) dr \right) dy.$$

Definiamo ora

$$v(x+r\omega) = \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r}(x+r\omega) & x \in \Omega \\ 0 & x \notin \Omega \end{cases},$$

e otteniamo:

$$\left| \frac{1}{|B|} \int_B u(y) dy - u(x) \right| \leq \frac{1}{|B|} \int_{|x-y| < 2R} \left( \int_0^\infty |v(x+r\omega)| dr \right) dy.$$

Ora possiamo scambiare l'ordine di integrazione e passare dalla variabile  $y$  alle coordinate sferiche:

$$\left| \frac{1}{|B|} \int_B u(y) dy - u(x) \right| \leq \frac{1}{|B|} \int_0^\infty \left( \int_0^{2R} \left( \int_{S^{n-1}} |v(x+r\omega)| \rho^{n-1} d\omega_{S^{n-1}} \right) d\rho \right) dr,$$

dove  $(\rho, \omega_{S^{n-1}})$  sono le coordinate sferiche. Ora possiamo invertire nuovamente l'ordine di integrazione e svolgere l'integrale nella variabile  $\rho$ :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{|B|} \int_B u(y) dy - u(x) \right| &\leq \frac{(2R)^n}{n|B|} \int_0^\infty \left( \int_{S^{n-1}} |v(x+r\omega)| d\omega_{S^{n-1}} \right) dr \\ &= \frac{(2R)^n}{n|B|} \int_0^\infty \left( \int_{S^{n-1}} \frac{|v(x+r\omega)|}{r^{n-1}} r^{n-1} d\omega_{S^{n-1}} \right) dr. \end{aligned}$$

Imponiamo ora il cambio di variabile  $z = x+r\omega$ , da cui ricaviamo che  $r = |r\omega| = |x-z|$  e che  $r^{n-1} d\omega_{S^{n-1}} dr = dz$ , per ottenere:

$$\left| \frac{1}{|B|} \int_B u(y) dy - u(x) \right| \leq \frac{(2R)^n}{n|B|} \int_B \frac{|v(z)|}{|x-z|^{n-1}} dz,$$

e siccome  $B \subseteq \Omega$ , possiamo maggiorare con

$$\left| \frac{1}{|B|} \int_B u(y) dy - u(x) \right| \leq \frac{(2R)^n}{n|B|} \int_B \frac{|Du(z)|}{|x-z|^{n-1}} dz,$$

concludendo la dimostrazione. □

Enunciamo e dimostriamo ora il secondo lemma necessario a concludere la dimostrazione del teorema degli embedding di Sobolev:

**Lemma 1.2.2.** *Sia  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $C \in \mathbb{R}$  e definiamo  $B_R := B(x_0, R) \subseteq \mathbb{R}^n$ . Allora abbiamo*

$$\int_{B_R} |x-z|^{1-n} |Du(z)| dz \leq CR^{1-\frac{n}{p}} \|Du\|_{L^p(B_R)}.$$

*Dimostrazione.* Fissato  $q$  tale che  $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$  e utilizziamo la disuguaglianza di Hölder per ottenere:

$$\begin{aligned}
\int_{B_R} |x - z|^{1-n} |Du(z)| dz &\leq \left\{ \int_{B_R} |x - z|^{(1-n)q} dz \right\}^{\frac{1}{q}} \cdot \|Du\|_{L^p(B_R)} \\
&\leq \sup_{x \in \Omega} \left\{ \int_{B_R} |x - z|^{(1-n)q} dz \right\}^{\frac{1}{q}} \cdot \|Du\|_{L^p(B_R)} \\
&= c \cdot \left\{ \int_{B_R} |x_0 - z|^{(1-n)q} dz \right\}^{\frac{1}{q}} \cdot \|Du\|_{L^p(B_R)} \\
&= c \cdot \left\{ \int_0^R r^{(1-n)q} r^{n-1} dz \right\}^{\frac{1}{q}} \cdot \|Du\|_{L^p(B_R)} \\
&= c \cdot \left\{ \int_0^R r^{\frac{n-1}{1-p}} dz \right\}^{\frac{1}{q}} \cdot \|Du\|_{L^p(B_R)} \\
&= c \left( \frac{n-1}{1-p} + 1 \right) R^{\frac{(n-1)+1}{1-p} / q} \cdot \|Du\|_{L^p(B_R)} \\
&= C(n, p) R^{\frac{p-n}{p}} \cdot \|Du\|_{L^p(B_R)},
\end{aligned}$$

dove negli ultimi passaggi abbiamo usato che  $\left(\frac{n-1}{1-p} + 1\right) \frac{1}{q} = \frac{(n-p)}{1-p} \frac{p-1}{p} = \frac{p-n}{p}$ .  $\square$

Siamo ora pronti a dimostrare il caso  $p > n$ :

Per prima cosa, utilizziamo la disuguaglianza triangolare e il primo lemma per ottenere

$$|u(x) - u(y)| \leq \left| u(x) - \frac{1}{|B|} \int_B u \right| + \left| \frac{1}{|B|} \int_B u - u(y) \right| \leq 2c \cdot \int_B \frac{|Du(z)|}{|x - z|^{n-1}} dz.$$

Scegliamo ora una palla  $B = B(x, |x - y|)$  e utilizziamo il secondo lemma sull'ultimo membro della disuguaglianza per concludere:

$$2c \cdot \int_B \frac{|Du(z)|}{|x - z|^{n-1}} dz \leq c(n, p) |x - z|^{1-\frac{n}{p}} \|Du\|_{L^p(B)}.$$

Siccome tali stime valgono  $\forall x, y \in \Omega$  e  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ , otteniamo che  $u \in C^{1-\frac{n}{p}}(\Omega)$ .  $\square$

Abbiamo quindi dimostrato i teoremi degli embedding di Sobolev nel caso  $k = 1$ . Cosa succede se lavoriamo con  $W^{k,p}$ ? Molto poco sorprendentemente, i risultati finora ricavati si mantengono quasi inalterati:

**Corollario 1.2.1.** *Per ogni  $k \geq 2$  si ha che*

$$W^{k,p} \subseteq \begin{cases} L^{\frac{np}{n-kp}}(\Omega) & kp < n \\ C^m(\Omega) & 0 \leq m \leq k - \frac{n}{p} \end{cases}.$$

*Dimostrazione.* Fissiamo  $k = 2$ . Allora  $u \in W^{2,p}(\Omega) \implies u, Du \in W^{1,p}(\Omega)$ . Grazie al caso  $k = 1$ , abbiamo che  $u, Du \in L^{\frac{np}{n-p}}$ . Utilizzando nuovamente il caso  $k = 1$ , sappiamo che  $Du \in W^{1, \frac{np}{n-p}} \implies u \in W^{1, \tilde{p}}$ , dove

$$\tilde{p} = \frac{n\left(\frac{np}{n-p}\right)}{n - \left(\frac{np}{n-p}\right)} = \frac{n^2p}{n^2 - np - np} = \frac{np}{n - 2p}.$$

Questa dimostrazione si ripete per ogni  $k \in \mathbb{N}$ .

Per quanto riguarda l'inclusione nello spazio di funzioni continue, si itera nuovamente su  $k$ : una volta ottenuta la Hölder-continuità per  $u$ , abbiamo che  $Du \in W^{1,p}$ , e applichiamo quindi il primo teorema a  $Du$  per ottenere che  $Du$  è Hölder continua e così via.  $\square$

# Capitolo 2

## La trasformata di Radon

Nel corso del seguente capitolo, ci occuperemo di definire la trasformata di Radon (oltre ad altre trasformate che ci torneranno utili) e ne analizzeremo le proprietà e il comportamento rispetto ad operazioni come la derivazione, la convoluzione e la trasformata di Fourier. Questo lavoro è basato principalmente sul testo *The Mathematics of Computerized Tomography* [9], con aggiunte e riferimenti ispirati da testi secondari come *The Radon Transform* [3] e *The Radon Transform - Theory and Implementation* [12].

### 2.1 Definizioni e proprietà elementari di alcuni operatori integrali

Abbiamo visto che, nel caso bidimensionale, la trasformata di Radon associa una funzione  $f$  all'insieme di tutti i suoi integrali di linea. Quindi, nel piano (bidimensionale) integriamo lungo tutte le rette (che altro non sono che piani unidimensionali). Per definire questo operatore in  $n$  dimensioni in modo naturale, ad una funzione definita su  $\mathbb{R}^n$  assoceremo i suoi integrali lungo gli iperpiani  $(n-1)$ -dimensionali.

**Definizione 2.1.1** (Trasformata di Radon). Siano  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\theta \in S^{n-1}$  e  $s \in \mathbb{R}$ . La trasformata di Radon  $n$ -dimensionale è definita da

$$\mathbf{R}f(\theta, s) = \mathbf{R}_\theta f(s) = \int_{x \cdot \theta = s} f(x) dx = \int_{\theta^\perp} f(s\theta + y) dy.$$

Fissata una direzione  $\theta$  e un numero reale  $s$ , la trasformata di Radon di  $f$  è quindi l'integrale sull'iperpiano perpendicolare a  $\theta$  con distanza  $s$  dall'origine. Ovviamente,  $\mathbf{R}f$  è una funzione pari sul cilindro unitario  $\mathbf{Z} := S^{n-1} \times \mathbb{R}$ . Infatti

$$\mathbf{R}f(-\theta, -s) = \int_{x \cdot (-\theta) = -s} f(x) dx = \int_{x \cdot \theta = s} f(x) dx = \mathbf{R}f(\theta, s).$$



A questo punto è utile definire due ulteriori operatori simili a  $\mathbf{R}$ , che invece di integrare su iperpiani  $(n - 1)$ -dimensionali, integrano su rette e semi-rette, a prescindere da quale sia la dimensione  $n$ .

**Definizione 2.1.2** (Trasformata a raggi X). Siano  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\theta \in S^{n-1}$  e  $x \in \mathbb{R}^n$ . La trasformata a raggi X  $n$ -dimensionale è definita da

$$\mathbf{P}f(\theta, x) = \mathbf{P}_\theta f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x + t\theta) dt.$$

La trasformata a raggi X integra una funzione  $f$  lungo la retta passante per  $x$  con direzione  $\theta$ . È chiaro che il valore di  $\mathbf{P}f(\theta, x)$  non cambia se muoviamo  $x$  lungo la direzione  $\theta$ . Possiamo quindi restringere la scelta di  $x$  a  $\theta^\perp$ , rendendo in questo modo  $\mathbf{P}f$  una funzione sul fibrato tangente

$$\mathbf{T} = \{(\theta, x) : \theta \in S^{n-1}, x \in \theta^\perp\} \subseteq \mathbb{R}^{2n}.$$

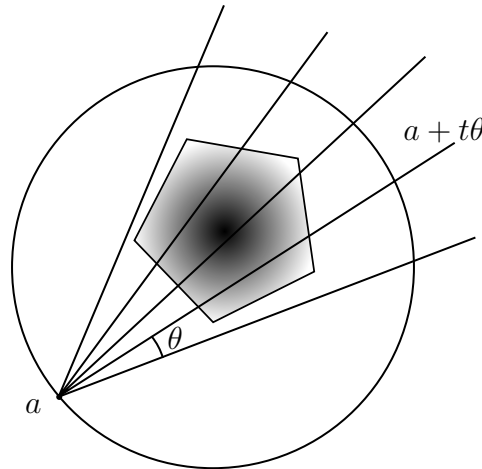
L'ultimo operatore che andiamo a introdurre si comporta come la trasformata a raggi X, ma lavora su semi-rette:

**Definizione 2.1.3** (Trasformata Divergent Beam). Siano  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\theta \in S^{n-1}$  e  $a \in \mathbb{R}^n$ . La trasformata divergent beam  $n$ -dimensionale è definita da

$$\mathbf{D}f(a, \theta) = \mathbf{D}_a f(\theta) = \int_0^{\infty} f(a + t\theta) dt.$$

Nel processo di scansione tomografica l'operatore che viene utilizzato maggiormente è quest'ultimo. Infatti, la trasformata Divergent Beam integra lungo una retta che ha un certo punto di partenza  $a$ , che all'atto pratico è la sorgente di raggi X.

Figura 2.1: Modello di scansione tomografica.



La trasformata a raggi X  $\mathbf{P}_\theta f$  viene anche detta *proiezione di  $f$  su  $\theta^\perp$* . Per  $n = 2$ ,  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{R}$  coincidono, ma la loro relazione non finisce qui: la prima integra lungo le rette, la seconda lungo gli iperpiani. È naturale pensare allora di utilizzare la prima per esprimere la seconda, e infatti abbiamo

**Proposizione 2.1.1.** *Siano  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\theta, \omega \in S^{n-1}$  tali che  $\omega \perp \theta$  e sia  $s \in \mathbb{R}$ . Allora si ha*

$$\mathbf{R}f(\omega, s) = \int_{x \in \theta^\perp, x \cdot \omega = s} \mathbf{P}f(\theta, x) dx.$$

*Dimostrazione.* Partendo dal membro destro e utilizzando la definizione di trasformata a raggi X, si ha

$$\int_{x \in \theta^\perp, x \cdot \omega = s} \mathbf{P}f(\theta, x) dx = \int_{x \in \theta^\perp, x \cdot \omega = s} \int_{-\infty}^{\infty} f(x + t\theta) dt dx.$$

Ricordando che  $x, \omega \in \theta^\perp$ , e denominando  $y = x + t\theta$ , otteniamo che  $y \cdot \omega = s$  e il differenziale (siccome stiamo utilizzando una trasformazione ortogonale) diventa  $dy = dt dx$ , quindi:

$$\int_{x \in \theta^\perp, x \cdot \omega = s} \int_{-\infty}^{\infty} f(x + t\theta) dt dx = \int_{y \cdot \omega = s} f(y) dy = \mathbf{R}f(\omega, s).$$

□

A questo punto, comprese le definizioni di tali operatori, è naturale chiedersi quali proprietà abbiano.

*Remark.* Nel seguito analizzeremo il comportamento di  $\mathbf{R}$ , e  $\mathbf{P}$  rispetto a convoluzione e trasformata di Fourier. Da qui fino alla fine dell'elaborato, quando verranno effettuate queste operazioni, si applicheranno sempre rispetto alla seconda variabile. Ricordiamo inoltre la definizione di trasformata di Fourier e alcune delle principali proprietà, che ci torneranno utile in seguito.

Per una funzione  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , la sua trasformata di Fourier  $\hat{f}$  e la sua inversa  $\tilde{f}$  sono definite da

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx,$$

$$\tilde{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} f(x) dx.$$

Inoltre, la trasformata di Fourier rispetta le seguenti proprietà (se non specificato diversamente, assumiamo  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ):

**R1:** Se  $r > 0$ , sia  $f_r(x) = f(rx)$ . Allora

$$\hat{f}_r(\xi) = r^{-n} \hat{f}(r^{-1}\xi).$$

**R2:** Se  $y \in \mathbb{R}^n$ , sia  $f_y(x) = f(x + y)$ . Allora

$$\hat{f}_y(\xi) = e^{i\xi \cdot y} \hat{f}(\xi)$$

**R3:** Se  $k \in \mathbb{Z}_+^n$ , abbiamo per  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\widehat{D^k f}(\xi) = i^{|k|} \xi^k \hat{f}(\xi), \quad \widehat{(x^k f)}(\xi) = i^{|k|} D^k \hat{f}(\xi).$$

**R4:** Se  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , abbiamo

$$\widehat{f * g} = (2\pi)^{n/2} \hat{f} \hat{g}, \quad \widehat{fg} = (2\pi)^{-n/2} \hat{f} * \hat{g}.$$

**R5:** Vale la *relazione di Parseval*:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \hat{g} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} g dx.$$

La prima cosa che vogliamo dimostrare, è che fissata una  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , allora anche  $\mathbf{R}_\theta f, P_\theta f, \mathbf{R}f, \mathbf{P}f$  sono negli spazi di Schwartz rispettivamente su  $\mathbb{R}, \theta^\perp, \mathbf{Z}$  e  $\mathbf{T}$ . Procediamo solo per quanto riguarda  $\mathbf{R}_\theta f$ , poiché per gli altri operatori si utilizzano ragionamenti simili ma che richiederebbero troppo spazio e si allontanano dall'obiettivo principale di questo elaborato. Il primo passo è dimostrare che la trasformata di Radon di una funzione in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  è assolutamente integrabile.

**Proposizione 2.1.2.** *Se  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , allora abbiamo che  $\mathbf{R}_\theta f \in L^1(\mathbb{R})$ .*

*Dimostrazione.* Cerchiamo di maggiorare  $|\mathbf{R}_\theta f|$  con qualcosa assolutamente integrabile su tutto  $\mathbb{R}$ . Prima di procedere ricordiamo che una funzione  $f$  appartiene allo spazio di Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  se ha norma di Schwartz finita, cioè

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n.$$

Un'altra caratterizzazione che ci tornerà utile, è che  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  se e solo se per ogni  $\alpha \in \mathbb{N}^d$  e  $N > 0$  esiste una costante  $C_{\alpha, N}$  tale che

$$|\partial^\alpha f(x)| \leq \frac{C_{\alpha, N}}{(1 + |x|^N)}. \quad (2.1)$$

Possiamo ora procedere a stimare il modulo di  $\mathbf{R}_\theta f$ . Fissiamo  $N \geq 2$ :

$$\begin{aligned} \sup_{s \in \mathbb{R}} (1 + |s|^N) |\mathbf{R}_\theta f(s)| &\leq \sup_{s \in \mathbb{R}} \int_{\theta^\perp} (1 + |s|^N) |f(s\theta + y)| dy \\ &\leq \sup_{s \in \mathbb{R}} \int_{\theta^\perp} (1 + |s\theta + y|^N) |f(s\theta + y)| dy \\ &\leq \sup_{s \in \mathbb{R}} \int_{\theta^\perp} \frac{C_{0, N}}{(1 + |s\theta + y|^M)} dy \\ &\leq \sup_{s \in \mathbb{R}} \int_{\theta^\perp} \frac{C_{0, N}}{(1 + |y|^M)} dy \\ &\leq \sup_{s \in \mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{C_{0, N}}{(1 + |y|^M)} dy = C < \infty, \end{aligned}$$

dove nel penultimo passaggio abbiamo usato che, siccome  $y \in \theta^\perp$ , vale  $|s\theta + y| \geq |y|$ , mentre nel terzultimo abbiamo usato (2.1) su  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , scegliendo un  $M$  sufficientemente grande (basta che  $M > n - 1$ , in modo che l'integrale finale su  $\mathbb{R}^{n-1}$  risulti convergente). A questo punto abbiamo dimostrato che, per qualsiasi  $N$ , abbiamo

$$|\mathbf{R}_\theta f(s)| \leq \frac{C}{(1 + |s|^N)}.$$

Quindi, in conclusione:

$$\int_{\mathbb{R}} |\mathbf{R}_\theta f(s)| ds \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{C}{(1 + |s|^N)} ds,$$

che è un integrale convergente a patto di scegliere  $N > 1$ .  $\square$

Iniziamo con uno dei risultati principali sul rapporto tra la trasformata di Fourier e le trasformate di Radon e a raggi X:

**Teorema 2.1.1** (Teorema della proiezione (Fourier slice theorem)). *Sia  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Abbiamo che*

$$\widehat{\mathbf{R}_\theta f}(\sigma) = (2\pi)^{(n-1)/2} \hat{f}(\sigma\theta), \quad \sigma \in \mathbb{R},$$

$$\widehat{\mathbf{P}_\theta f}(\eta) = (2\pi)^{1/2} \hat{f}(\eta), \quad \eta \in \theta^\perp.$$

*Dimostrazione.* Applicando la definizione di trasformata di Fourier in  $L^1(\mathbb{R})$ , si ha:

$$\widehat{\mathbf{R}_\theta f}(\sigma) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\sigma s} \mathbf{R}_\theta f(s) ds = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\sigma s} \int_{\theta^\perp} f(s\theta + y) dy ds.$$

Utilizzando una nuova variabile di integrazione  $x = s\theta + y$  abbiamo (con un ragionamento analogo alla dimostrazione della Proposizione 2.1.1) che  $x \cdot \theta = s$ ,  $dx = dy ds$ , quindi

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{R}_\theta f}(\sigma) &= (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\sigma x \cdot \theta} f(x) dx = (2\pi)^{-1/2} (2\pi)^{n/2} (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\sigma x \cdot \theta} f(x) dx \\ &= (2\pi)^{(n-1)/2} \hat{f}(\sigma\theta). \end{aligned}$$

Similmente per  $\mathbf{P}$ , abbiamo

$$\begin{aligned} \widehat{(\mathbf{P}_\theta f)}(\eta) &= (2\pi)^{-(n-1)/2} \int_{\theta^\perp} e^{-i\eta \cdot y} \mathbf{P}_\theta f(y) dy \\ &= (2\pi)^{-(n-1)/2} \int_{\theta^\perp} e^{-i\eta \cdot y} \int_{\mathbb{R}} f(y + t\theta) dt dy \\ &= (2\pi)^{-(n-1)/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\eta \cdot x} f(x) dx \\ &= (2\pi)^{1/2} \hat{f}(\eta). \end{aligned} \quad \square$$

Come diretta conseguenza, possiamo dimostrare che  $\mathbf{R}_\theta f$  è liscia; la derivata viene infatti trasposta su  $f$ :

**Corollario 2.1.1.** *Se  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , e  $a \in \mathbb{N}^d$  è un multi-indice, si ha*

$$\mathbf{R}_\theta D^\alpha f = \theta^\alpha D^{|\alpha|} \mathbf{R}_\theta f.$$

*Dimostrazione.* Utilizzando il Fourier Slice Theorem 2.1.1 e il fatto che l'operatore di derivazione, sotto la trasformata di Fourier, "esce" come polinomio (**R3**), si ha

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{R}_\theta D^\alpha f}(\sigma) &= (2\pi)^{(n-1)/2} \widehat{D^\alpha f}(\sigma\theta) \\ &= (2\pi)^{(n-1)/2} i^{|\alpha|} \sigma^{|\alpha|} \theta^\alpha \hat{f}(\sigma\theta) \\ &= i^{|\alpha|} \sigma^{|\alpha|} \theta^\alpha \widehat{\mathbf{R}_\theta f}(\sigma) \\ &= \theta^\alpha \widehat{D^{|\alpha|} \mathbf{R}_\theta f}(\sigma). \end{aligned}$$

Per concludere basta ricordare che  $\mathbf{R}_\theta f \in L^1(\mathbb{R})$  e che la trasformata di Fourier è invertibile su  $L^1(\mathbb{R})$ .  $\square$

Abbiamo ora gli strumenti necessari per dimostrare che la trasformata di Radon appartiene allo spazio di Schwartz:

**Proposizione 2.1.3.** *Sia  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Allora  $\mathbf{R}_\theta f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ .*

*Dimostrazione.* Lavoriamo su una sola componente per semplicità. Preso  $\theta \in S^{n-1}$ , sappiamo che esiste una direzione  $\theta_i \neq 0$ . Senza perdita di generalità, consideriamo il multi-indice di lunghezza  $k \in \mathbb{N}$ , orientato nella direzione  $\theta_i$  (ergo  $\alpha = (0, \dots, k, \dots, 0)$ ). Usiamo il corollario 2.1.1 ponendo  $x = s\theta + y$ :

$$\theta_i^k \partial_s^k \mathbf{R}_\theta f = \mathbf{R}_\theta D_x^\alpha f \implies \partial_s^k \mathbf{R}_\theta f = \theta_i^{-k} \mathbf{R}_\theta D_x^\alpha f.$$

Cerchiamo ora di stimare la norma di Schwartz di  $\mathbf{R}_\theta f$ :

$$\begin{aligned} \sup_{s \in \mathbb{R}} |s|^m |\partial_s^k \mathbf{R}_\theta f(s)| &= \sup_{s \in \mathbb{R}} |s|^m |\theta_i|^{-k} |\mathbf{R}_\theta D_x^\alpha f(s)| \\ &= \sup_{s \in \mathbb{R}} |s|^m |\theta_i|^{-k} \left| \int_{\theta^\perp} D_x^\alpha f(s\theta + y) dy \right| \\ &\leq \sup_{s \in \mathbb{R}} |\theta_i|^{-k} \int_{\theta^\perp} |s|^m |D_x^\alpha f(s\theta + y)| dy \\ &= \sup_{s \in \mathbb{R}} |\theta_i|^{-k} \int_{\theta^\perp} |s\theta|^m |D_x^\alpha f(s\theta + y)| dy \\ &= \sup_{s \in \mathbb{R}} |\theta_i|^{-k} \int_{\theta^\perp} |s\theta + y|^m |D_x^\alpha f(s\theta + y)| dy, \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato che, siccome  $y \in \theta^\perp$ , vale  $|s\theta| \leq |s\theta + y|$ . A questo punto, possiamo sfruttare la caratterizzazione delle funzioni in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Infatti, fissati  $m, N \in \mathbb{N}$ :

$$|x|^m |D_x^\alpha f(x)| \leq C_{\alpha, m} \quad \text{e} \quad |x|^{m+N} |D_x^\alpha f(x)| \leq C_{\alpha, m+N}.$$

Sommando membro a membro le due disequazioni e denominando  $C' = C_{\alpha, m} + C_{\alpha, m+N}$ , otteniamo

$$|x|^m (1 + |x|^N) |D_x^\alpha f(x)| \leq C' \implies |x|^m |D_x^\alpha f(x)| \leq \frac{C'}{1 + |x|^N}.$$

Possiamo ora tornare alla catena di disuguaglianze di sopra e, ricordando che  $|y| \geq |s\theta + y|$ , abbiamo:

$$\begin{aligned} \sup_{s \in \mathbb{R}} |\theta_i|^{-k} \int_{\theta^\perp} |s\theta + y|^m |D_x^\alpha f(s\theta + y)| dy &\leq \sup_{s \in \mathbb{R}} |\theta_i|^{-k} \int_{\theta^\perp} \frac{C'}{1 + |s\theta + y|^N} dy \\ &\leq \sup_{s \in \mathbb{R}} |\theta_i|^{-k} \int_{\theta^\perp} \frac{C'}{1 + |y|^N} dy, \end{aligned}$$

che è finito se scegliamo  $N > n - 1$ . Abbiamo quindi dimostrato che

$$\sup_{s \in \mathbb{R}} |s|^m |\partial_s^k \mathbf{R}_\theta f(s)| < \infty,$$

e quindi che  $\mathbf{R}_\theta f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . □

Come già anticipato nelle scorse pagine, per dimostrare che  $\mathbf{P}_\theta f \in \mathcal{S}(\theta^\perp)$ ,  $\mathbf{R}f \in \mathcal{S}(\mathbf{Z})$  e  $\mathbf{P}f \in \mathcal{S}(\mathbf{T})$  si utilizzano ragionamenti simili, ma su cui non ci soffermiamo per motivi tecnici.

È ora chiaro come si comporta la trasformata di Radon rispetto alla derivazione nella seconda variabile. Cosa succede quando la deriviamo rispetto a  $\theta$ ? Per investigare questo fatto, ci sarà utile ridefinire la trasformata di Radon in termini di  $\delta$  di Dirac 1-dimensionale. Iniziamo definendo

$$\delta^b(t) := \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b e^{its} ds. \quad (2.2)$$

Questa funzione, per  $b \rightarrow \infty$ , tende alla  $\delta$  di Dirac in  $\mathcal{S}'$  (ricordiamo che una successione di distribuzioni temperate  $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge a  $\psi$  in  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  se e solo se  $\lim_k \int_{\mathbb{R}^n} \psi_k \phi = \int_{\mathbb{R}^n} \psi \phi \quad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ). Infatti,

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \delta^b(y) f(y) dy = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b e^{iys} f(y) ds dy$$

Possiamo portare il limite sotto il segno di integrale e scambiare gli integrali (per Fubini-Tonelli). Utilizzando la formula per la trasformata di Fourier e l'inversa, otteniamo

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{iys} f(y) dy ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(s) ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (e^{is0}) \hat{f}(s) ds = f(0),$$

e abbiamo quindi che  $\delta^b \rightarrow \delta$  in  $\mathcal{S}'$ . Dunque se prendiamo  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , utilizzando il solito cambio di variabile  $x = t\theta + y$  con  $y \in \theta^\perp$ , abbiamo che

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \delta^b(s - x \cdot \theta) dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \int_{\theta^\perp} f(t\theta + y) dy \delta^b(s - t) dt \\ &= \int_{\theta^\perp} f(s\theta + y) dy \\ &= \mathbf{R}f(\theta, s). \end{aligned}$$

In questo senso possiamo scrivere che

$$\mathbf{R}f(\theta, s) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \delta(s - x \cdot \theta) dx.$$

Grazie a questa caratterizzazione possiamo estendere in modo naturale la trasformata di Radon a  $(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$  come una funzione omogenea di grado  $-1$ . Infatti, fissati i soliti  $\theta \in S^{n-1}$  e  $s \in \mathbb{R}$ , si ha per  $r > 0$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}f(r\theta, rs) &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \delta^b(rs - rx \cdot \theta) dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{-b}^b f(x) e^{i(rs - rx \cdot \theta)t} dx dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{-rb}^{rb} r^{-1} f(x) e^{i(s - x \cdot \theta)y} dx dy \\ &= r^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \delta(s - x \cdot \theta) dx \\ &= r^{-1} \mathbf{R}f(\theta, s). \end{aligned}$$

Possiamo ora chiederci come si comporta la differenziazione rispetto a  $\theta$ . Omettiamo il passaggio esplicito ma, esattamente come prima, possiamo lavorare sulla  $\delta$  passando prima per il limite di  $\delta^b$ . Abbiamo quindi che

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta_k} \mathbf{R}f(\theta, s) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{\partial}{\partial \theta_k} \delta(s - x \cdot \theta) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} f(x) x_k \delta'(s - x \cdot \theta) dx \\ &= - \frac{\partial}{\partial s} \int_{\mathbb{R}^n} x_k f(x) \delta(s - x \cdot \theta) dx \\ &= - \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{R}(x_k f)(\theta, s). \end{aligned}$$

Se  $k$  è un multi-indice, con lo stesso ragionamento, si ottiene

$$D_{\theta}^k \mathbf{R}f = (-1)^{|k|} \frac{\partial^{|k|}}{\partial s^{|k|}} \mathbf{R}(x^k f)$$

Sappiamo ora come si comporta la trasformata di Radon rispetto alla trasformata di Fourier e rispetto alla derivazione. È naturale chiedersi come si comporti anche rispetto all'operazione di convoluzione:

**Teorema 2.1.2.** *Siano  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Allora*

$$\mathbf{R}_{\theta}(f * g) = \mathbf{R}_{\theta}f * \mathbf{R}_{\theta}g,$$

$$\mathbf{P}_{\theta}(f * g) = \mathbf{P}_{\theta}f * \mathbf{P}_{\theta}g.$$

*Dimostrazione.* Iniziamo da  $\mathbf{R}$ , anche se per  $\mathbf{P}$  seguiremo esattamente la stessa strada. Possiamo studiare il problema in trasformata di Fourier, siccome quest'ultima su  $\mathcal{S}$  è un isomorfismo topologico. Utilizzando prima il Fourier Slice Theorem 2.1.1 e successivamente la proprietà **(R4)** della trasformata di Fourier, il membro sinistro diventa:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{R}_{\theta}(f * g)}(\sigma) &= (2\pi)^{(n-1)/2} \widehat{f * g}(\sigma\theta) \\ &= (2\pi)^{(n-1)/2} (2\pi)^{n/2} \hat{f}(\sigma\theta) \hat{g}(\sigma\theta) = (2\pi)^{n-1/2} \hat{f}(\sigma\theta) \hat{g}(\sigma\theta). \end{aligned}$$

Mentre il membro destro (applicando le stesse proprietà in ordine inverso):

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{R}_{\theta}f * \mathbf{R}_{\theta}g}(\sigma) &= (2\pi)^{1/2} \widehat{\mathbf{R}_{\theta}f}(\sigma) \widehat{\mathbf{R}_{\theta}g}(\sigma) \\ &= (2\pi)^{1/2} (2\pi)^{(n-1)/2} \hat{f}(\sigma\theta) (2\pi)^{(n-1)/2} \hat{g}(\sigma\theta) \\ &= (2\pi)^{n-1/2} \hat{f}(\sigma\theta) \hat{g}(\sigma\theta). \end{aligned}$$

Per ottenere la tesi è sufficiente applicare l'anti-trasformata a entrambi i membri.

Per  $\mathbf{P}$  si procede in modo analogo: il membro sinistro diventa

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{P}_{\theta}(f * g)}(\eta) &= (2\pi)^{1/2} \widehat{f * g}(\eta) \\ &= (2\pi)^{1/2} (2\pi)^{n/2} \hat{f}(\eta) \hat{g}(\eta) \\ &= (2\pi)^{(n+1)/2} \hat{f}(\eta) \hat{g}(\eta), \end{aligned}$$

mentre il membro destro (ricordando che la convoluzione  $\mathbf{P}_{\theta}f * \mathbf{P}_{\theta}g$  viene effettuata su  $\theta^{\perp}$ , che è un sottospazio  $(n-1)$ -dimensionale) diventa:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{P}_{\theta}f * \mathbf{P}_{\theta}g}(\eta) &= (2\pi)^{(n-1)/2} \widehat{\mathbf{P}_{\theta}f}(\eta) \widehat{\mathbf{P}_{\theta}g}(\eta) \\ &= (2\pi)^{(n-1)/2} (2\pi)^{1/2} \hat{f}(\eta) (2\pi)^{1/2} \hat{g}(\eta) \\ &= (2\pi)^{(n+1)/2} \hat{f}(\eta) \hat{g}(\eta). \end{aligned} \quad \square$$



### 2.1.1 Operatori aggiunti

Vogliamo ora provare a definire gli operatori duali delle trasformate di Radon e a raggi X (che denoteremo con  $\mathbf{R}_\theta^\#, \mathbf{R}^\#, \mathbf{P}_\theta^\#, \mathbf{P}^\#$ ). Iniziamo analizzando come si comporta  $\mathbf{R}$  quando viene integrata contro un'altra funzione  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ :

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbf{R}_\theta f(s)g(s) ds = \int_{\mathbb{R}} \int_{\theta^\perp} f(s\theta + y)g(s) dy ds = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x \cdot \theta) dx,$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo effettuato la sostituzione  $x = s\theta + y$  e utilizzato il teorema di Fubini per scambiare i due integrali.

Possiamo allora definire

$$\mathbf{R}_\theta^\# g(x) = g(x \cdot \theta),$$

e ottenere

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbf{R}_\theta f(s)g(s) ds = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathbf{R}_\theta^\# g(x) dx,$$

per cui, se lavoriamo con  $\mathbf{R}$  (e quindi scegliamo  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ), otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{R} f(\theta, s)g(\theta, s) ds d\theta &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathbf{R}^\# g(x) dx, \\ \text{con } \mathbf{R}^\# g(x) &= \int_{S^{n-1}} g(\theta, x \cdot \theta) d\theta. \end{aligned}$$

Si procede analogamente per  $\mathbf{P}$ , quindi (denotando con  $E_\theta$  la proiezione ortogonale su  $\theta^\perp$ ) abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{\theta^\perp} \mathbf{P}_\theta f(y)g(y) dy &= \int_{\theta^\perp} \int_{\mathbb{R}} f(y + t\theta) dt g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(E_\theta x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathbf{P}_\theta^\# g(x) dx, \end{aligned}$$

dove chiaramente  $\mathbf{P}_\theta^\# g(x) = g(E_\theta x)$ . Integrando poi su  $S^{n-1}$  si ha

$$\begin{aligned} \int_{S^{n-1}} \int_{\theta^\perp} \mathbf{P} f(\theta, x)g(\theta, x) dx d\theta &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathbf{P}^\# g(x) dx, \\ \text{con } \mathbf{P}^\# g(x) &= \int_{S^{n-1}} g(\theta, E_\theta x) d\theta. \end{aligned}$$

È interessante notare che  $\mathbf{R}$  integra lungo tutti i punti di un iperpiano, mentre  $\mathbf{R}^\#$  integra lungo tutti gli iperpiani passanti per un certo punto. Analogamente,  $\mathbf{P}$  integra tutti i punti lungo una retta, mentre  $\mathbf{P}^\#$  integra lungo tutte le rette per un dato punto.

Dopo aver capito come si comportano  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{P}$  rispetto alla convoluzione e alla trasformata di Fourier, è lecito domandarsi come si comportino anche i loro operatori duali. Abbiamo dunque

**Teorema 2.1.3.** Se  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  e rispettivamente  $g \in \mathcal{S}(\mathbf{Z}), \mathcal{S}(\mathbf{T})$ , abbiamo

$$(\mathbf{R}^\# g) * f = \mathbf{R}^\#(g * \mathbf{R}f),$$

$$(\mathbf{P}^\# g) * f = \mathbf{P}^\#(g * \mathbf{P}f).$$

*Dimostrazione.* Per calcolo diretto, abbiamo che

$$\begin{aligned} ((\mathbf{R}^\# g) * f)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{R}^\# g(x-y) f(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{S^{n-1}} g(\theta, (x-y) \cdot \theta) d\theta f(y) dy \\ &= \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} g(\theta, (x-y) \cdot \theta) f(y) dy d\theta. \end{aligned}$$

Imponiamo il cambio di variabile  $y = s\theta + z$  con  $z \in \theta^\perp$ , che comporta il solito  $dy = dz ds$ , per ottenere

$$\begin{aligned} ((\mathbf{R}^\# g) * f)(x) &= \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\theta^\perp} g(\theta, x \cdot \theta - s) f(s\theta + z) dz ds d\theta \\ &= \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} g(\theta, x \cdot \theta - s) \mathbf{R}f(\theta, s) ds d\theta \\ &= \int_{S^{n-1}} (g * \mathbf{R}f)(\theta, x \cdot \theta) d\theta \\ &= \mathbf{R}^\#(g * \mathbf{R}f)(x). \end{aligned}$$

Per  $\mathbf{P}$ , procediamo allo stesso modo:

$$\begin{aligned} ((\mathbf{P}^\# g) * f)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{P}^\# g(x-y) f(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{S^{n-1}} g(\theta, E_\theta(x-y)) d\theta f(y) dy \\ &= \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} g(\theta, E_\theta(x-y)) f(y) dy d\theta. \end{aligned}$$

Come prima, chiamiamo  $y = s\theta + z$  con  $z \in \theta^\perp$ , e notiamo che  $E_\theta(x-y) = E_\theta x - z$ . Abbiamo così:

$$\begin{aligned} ((\mathbf{P}^\# g) * f)(x) &= \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\theta^\perp} g(\theta, E_\theta - z) f(s\theta + z) dz ds d\theta \\ &= \int_{S^{n-1}} \int_{\theta^\perp} g(\theta, E_\theta x - z) \mathbf{P}f(\theta, z) dz d\theta \\ &= \int_{S^{n-1}} (g * \mathbf{P}f)(\theta, E_\theta x) d\theta \\ &= \mathbf{P}^\#(g * \mathbf{P}f)(x). \end{aligned}$$

□

Analizziamo ora come si comporta l'operatore duale di  $\mathbf{R}$  sotto trasformata di Fourier.

**Teorema 2.1.4.** *Sia  $g \in \mathcal{S}(\mathbf{Z})$ . Allora*

$$\widehat{(\mathbf{R}^\# g)}(\xi) = (2\pi)^{(n-1)/2} |\xi|^{1-n} \left( \hat{g} \left( \frac{\xi}{|\xi|}, |\xi| \right) + \hat{g} \left( -\frac{\xi}{|\xi|}, -|\xi| \right) \right).$$

*Dimostrazione.* Fissiamo una funzione  $w \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  e consideriamo l'azione duale di  $\mathbf{R}^\# g$  su  $\hat{w}$  (i.e. l'integrale della moltiplicazione tra queste due). Ricordando che su  $\mathcal{S}$  vale la cosiddetta "formula di moltiplicazione", che ci dice

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}g = \int_{\mathbb{R}^n} f\hat{g},$$

e denotando con  $\sim$  l'anti-trasformata di Fourier, abbiamo che

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\mathbf{R}^\# g) \hat{w} dx = \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} g(\theta, s) \mathbf{R}\hat{w}(\theta, s) ds d\theta = \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\theta, \sigma) (\mathbf{R}\hat{w})^\sim(\theta, \sigma) d\sigma d\theta.$$

Grazie al Fourier Slice Theorem 2.1.1, abbiamo

$$(\mathbf{R}\hat{w})^\sim(\theta, \sigma) = (2\pi)^{(n-1)/2} w(\sigma\theta).$$

Sostituendo nell'integrale, si ottiene

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\mathbf{R}^\# g) \hat{w} dx = (2\pi)^{(n-1)/2} \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\theta, \sigma) w(\sigma\theta) d\sigma d\theta.$$

Passiamo ora a coordinate polari  $\xi = \sigma\theta$ , con  $\sigma \in \mathbb{R}$ . Possiamo allora "spezzare"  $\hat{g}$  in due, e ricavare

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\mathbf{R}^\# g) \hat{w} dx = (2\pi)^{(n-1)/2} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \hat{g} \left( \frac{\xi}{|\xi|}, |\xi| \right) + \hat{g} \left( -\frac{\xi}{|\xi|}, -|\xi| \right) \right) |\xi|^{1-n} w(\xi) d\xi.$$

Utilizzando ora la formula di moltiplicazione, arriviamo quindi a dimostrare che la distribuzione temperata  $\widehat{\mathbf{R}^\# g}$  è rappresentata da

$$(2\pi)^{(n-1)/2} |\xi|^{1-n} \left( \hat{g} \left( \frac{\xi}{|\xi|}, |\xi| \right) + \hat{g} \left( -\frac{\xi}{|\xi|}, -|\xi| \right) \right).$$

□

Prima di proseguire con altre informazioni sugli operatori aggiunti, ci sarà utile un brevissimo detour riguardante l'integrazione su sfere e su  $SO(n)$ , il gruppo delle matrici ortogonali reali di taglia  $n \times n$  con determinante +1. Per integrare su questo gruppo abbiamo bisogno di definire una misura su questo gruppo, che risulterà essere una misura di Haar normalizzata.

Prendiamo quindi un vettore  $\theta^{m-1} \in S^{m-1}$ , descritto da coordinate sferiche  $\theta_{m-1}^{m-1}, \dots, \theta_1^{m-1}$ . Essendo un vettore in  $S^{m-1}$ ,  $\theta^{m-1}$  può essere ottenuto dall' $m$ -esimo vettore unitario tramite rotazioni negli iperpiani  $x_l - x_{l+1}$  con angolo  $\theta_l^{m-1}$ , con  $l = m - 1, \dots, 1$ . Denotiamo con  $u^{m-1}(\theta^{m-1})$  il prodotto di queste rotazioni. Mostriamo per induzione che ogni  $u \in SO(n)$  ammette una rappresentazione

$$u = u^{n-1}(\theta^{n-1})u^{n-2}(\theta^{n-2}) \dots u^1(\theta^1).$$

Per  $n = 2$  l'uguaglianza è ovvia (infatti una matrice ortogonale con determinante  $+1$  rappresenta una rotazione). Supponiamo la tesi vera per  $n - 1$ , e prendiamo  $\theta^{n-1} = ue_n$ . Abbiamo allora che

$$(u^{n-1}(\theta^{n-1}))^{-1}ue_n = (u^{n-1}(\theta^{n-1}))^{-1}\theta^{n-1} = e_n,$$

cioè  $(u^{n-1}(\theta^{n-1}))^{-1}u$  lascia  $e_n$  fissato. Questo vuol dire che  $(u^{n-1}(\theta^{n-1}))^{-1}u = v$ , con  $v \in SO(n - 1)$ . In questo modo abbiamo ottenuto che

$$u = u^{n-1}(\theta^{n-1})v,$$

ma  $v \in SO(n - 1)$ , quindi per ipotesi induttiva possiamo scriverlo come prodotto di  $n - 1$  rotazioni, e la tesi è provata.

Possiamo ora definire la misura di Haar normalizzata su  $SO(n)$ , che altro non è che la misura di Lebesgue normalizzata su  $S^{n-1} \times \dots \times S^1$ , cioè

$$\int_{SO(n)} f(u) du = \frac{1}{|S^{n-1}| \dots |S^1|} \int_{S^{n-1}} \dots \int_{S^1} f(u^{n-1}(\theta^{n-1}) \dots u^1(\theta^1)) d\theta^1 \dots d\theta^{n-1}.$$

Avendo definito un modo per integrare su  $SO(n)$ , abbiamo ora il seguente risultato

**Lemma 2.1.1.** *Sia  $f$  una funzione su  $S^{n-1}$  e  $\theta_0 \in S^{n-1}$ . Abbiamo allora che*

$$\int_{SO(n)} f(u\theta_0) du = \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} f(\theta) d\theta.$$

*Dimostrazione.* Siccome il membro sinistro non dipende da  $\theta_0$ , possiamo assumere  $\theta_0 = e_n$  (se così non fosse possiamo agire per rotazioni finché  $\theta_0$  non coincide con  $e_n$ ). Tali rotazioni verranno "inglobate" in  $u$ . Scrivendo quindi  $u = u^{n-1}(\theta^{n-1}) \dots u^1(\theta^1)$ , abbiamo che  $u\theta_0 = \theta^{n-1}$ , e quindi

$$\begin{aligned} \int_{SO(n)} f(u\theta_0) du &= \frac{1}{|S^{n-1}| \dots |S^1|} \int_{S^{n-1}} \dots \int_{S^1} f(\theta^{n-1}) d\theta^1 \dots d\theta^{n-1} \\ &= \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} f(\theta^{n-1}) d\theta^{n-1}. \end{aligned}$$

□

Possiamo ora dimostrare un importante lemma che utilizzeremo varie volte durante l'elaborato.

**Lemma 2.1.2.** *Sia  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Allora*

$$\int_{S^{n-1}} \int_{\theta^\perp} f(y) dy d\theta = |S^{n-2}| \int_{\mathbb{R}^n} |y|^{-1} f(y) dy.$$

*Dimostrazione.* Applichiamo il Lemma 2.1.1 alla funzione

$$S^{n-1} \ni \theta \rightarrow \int_{\theta^\perp} f(y) dy \in \mathbb{R}.$$

Fissato  $\theta_0 \in S^{n-1}$  otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{S^{n-1}} \int_{\theta^\perp} f(y) dy d\theta &= |S^{n-1}| \int_{SO(n)} \int_{(u\theta_0)^\perp} f(y) dy du \\ &= |S^{n-1}| \int_{SO(n)} \int_{\theta_0^\perp} f(uy) dy du \\ &= |S^{n-1}| \int_{\theta_0^\perp} \int_{SO(n)} f\left(|y|u \frac{y}{|y|}\right) dudy \\ &= \int_{\theta_0^\perp} \int_{S^{n-1}} f(|y|\theta) d\theta dy. \end{aligned}$$

Possiamo ora effettuare il classico cambio di variabile  $y = r\omega$ , ricordando che  $\omega$  può variare solo in  $\theta_0^\perp$ :

$$\begin{aligned} \int_{\theta_0^\perp} \int_{S^{n-1}} f(|y|\theta) d\theta dy &= \int_0^\infty r^{n-2} \int_{\theta_0^\perp \cap S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} f(r\theta) d\theta d\omega dr \\ &= |S|^{n-2} \int_0^\infty r^{n-2} \int_{S^{n-1}} f(r\theta) d\theta dr \\ &= |S^{n-2}| \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-1} f(x) dx. \quad \square \end{aligned}$$

Possiamo ora analizzare cosa succede quando componiamo gli operatori  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{P}$  coi loro operatori duali.

**Teorema 2.1.5.** *Se  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  abbiamo che*

$$\mathbf{R}^\# \mathbf{R}f = |S^{n-2}| |x|^{-1} * f,$$

$$\mathbf{P}^\# \mathbf{P}f = 2|x|^{1-n} * f.$$

*Dimostrazione.* Abbiamo

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}^\# \mathbf{R}f(x) &= \int_{S^{n-1}} (\mathbf{R}f)(\theta, x \cdot \theta) d\theta \\
&= \int_{S^{n-1}} \int_{\theta^\perp} f((x \cdot \theta)\theta + y) dy d\theta \\
&= \int_{S^{n-1}} \int_{\theta^\perp} f(x - x + (x \cdot \theta)\theta + y) dy d\theta \\
&= \int_{S^{n-1}} \int_{\theta^\perp} f(x + y) dy d\theta,
\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato che  $x - (x \cdot \theta)\theta \in \theta^\perp$ .

Possiamo ora utilizzare il Lemma 2.1.2 per ottenere

$$\int_{S^{n-1}} \int_{\theta^\perp} f(x + y) dy d\theta = |S^{n-2}| \int_{\mathbb{R}^n} |y|^{-1} f(x + y) dy,$$

e quindi

$$\mathbf{R}^\# \mathbf{R}f(x) = |S^{n-2}| \int_{\mathbb{R}^n} |x - y|^{-1} f(y) dy = (|S^{n-2}| \cdot |\cdot|^{-1}) * f(x).$$

Per  $\mathbf{P}$  si procede in modo simile:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^\# \mathbf{P}f(x) &= \int_{S^{n-1}} \mathbf{P}f(\theta, E_\theta x) d\theta \\
&= \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} f(E_\theta x + t\theta) dt d\theta \\
&= \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} f(x + t\theta) dt d\theta,
\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato che  $x - E_\theta x = (x \cdot \theta)\theta$ . Spezziamo l'integrale in parte positiva e parte negativa ed effettuiamo la sostituzione  $y = t\theta$  per ottenere:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^\# \mathbf{P}f(x) &= 2 \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty f(x + t\theta) dt d\theta \\
&= 2 \int_{\mathbb{R}^n} f(x + y) |y|^{1-n} dy \\
&= 2 \int_{\mathbb{R}^n} f(y) |x - y|^{1-n} dy \\
&= (2|\cdot|^{1-n}) * f(x).
\end{aligned}$$

□

Finora abbiamo considerato le trasformate solo su  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Idealmente, ci piacerebbe estendere questi risultati su alcuni spazi  $L^p$ . Sapendo che valgono le seguenti disuguaglianze,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\mathbf{R}_\theta f(s)| ds &= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\theta^\perp} f(s\theta + y) dy \right| ds \leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\theta^\perp} |f(s\theta + y)| dy ds = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx, \\ \int_{\theta^\perp} |\mathbf{P}_\theta f(x)| dx &= \int_{\theta^\perp} \left| \int_{\mathbb{R}} f(s\theta + x) ds \right| \leq \int_{\theta^\perp} \int_{\mathbb{R}} |f(s\theta + x)| ds = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx, \\ \int_{S^{n-1}} |\mathbf{D}_a(f, \theta)| d\theta &= \int_{S^{n-1}} \left| \int_0^\infty f(a + t\theta) dt \right| d\theta \\ &\leq \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty |f(a + t\theta)| dt d\theta \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(a + y)| |y|^{1-n} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| |x - a|^{1-n} dx, \end{aligned}$$

gli operatori  $\mathbf{R}_\theta, \mathbf{P}_\theta$  si estendono per densità a  $L^1(\mathbb{R}^n)$ , l'operatore  $\mathbf{D}_a$  ad  $L^1(\mathbb{R}^n, |x - a|^{1-n})$ , cioè lo spazio  $L^p$  dove la misura di Lebesgue è "pesata" secondo la funzione  $|x - a|^{1-n}$ . È quindi naturale chiedersi come si comportino questi operatori nell'unico  $L^p$  spazio di Hilbert (cioè il caso  $p = 2$ ). Abbiamo il seguente risultato:

**Teorema 2.1.6.** *Sia  $\Omega^n$  la palla unitaria in  $\mathbb{R}^n$ . Allora gli operatori*

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_\theta &: L^2(\Omega^n) \rightarrow L^2([-1, 1], (1 - s^2)^{(1-n)/2}), \\ \mathbf{P}_\theta &: L^2(\Omega^n) \rightarrow L^2(\theta^\perp, (1 - |x|^2)^{-1/2}), \\ \mathbf{R} &: L^2(\Omega^n) \rightarrow L^2(\mathbf{Z}, (1 - s^2)^{(1-n)/2}), \\ \mathbf{P} &: L^2(\Omega^n) \rightarrow L^2(\mathbf{T}, (1 - |x|^2)^{-1/2}), \\ \mathbf{D}_a &: L^2(\Omega^n) \rightarrow L^2(S^{n-1}), \quad (|a| > 1) \end{aligned}$$

*sono continui.*

*Dimostrazione.* Partiamo da  $\mathbf{R}_\theta$ . Prendiamo una funzione  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  con supporto contenuto in  $\Omega^n$ . Siccome il supporto è contenuto nella palla unitaria, l'integrale non sarà come al solito solo su  $\theta^\perp$ , ma terremo anche conto del fatto che la variabile di integrazione "non può uscire" dalla palla (e che quindi deve rispettare il vincolo  $|y| \leq (1 - s^2)^{1/2}$ ). Abbiamo allora, utilizzando la disuguaglianza

di Cauchy-Schwarz, che

$$\begin{aligned}
|\mathbf{R}_\theta f(s)|^2 &= \left| \int_{y \in \theta^\perp, |y| \leq (1-s^2)^{1/2}} f(s\theta + y) dy \right|^2 \\
&= \left| \int_{y \in \theta^\perp, |y| \leq (1-s^2)^{1/2}} 1 f(s\theta + y) dy \right|^2 \\
&\leq \int_{y \in \theta^\perp, |y| \leq (1-s^2)^{1/2}} |1|^2 dy \int_{y \in \theta^\perp, |y| \leq (1-s^2)^{1/2}} |f(s\theta + y)|^2 dy \\
&= |\Omega^{n-1}|(1-s^2)^{(n-1)/2} \int_{\theta^\perp} |f(s\theta + y)|^2 dy.
\end{aligned}$$

Quindi, se vogliamo calcolare  $\|\cdot\|_2$  di  $\mathbf{R}_\theta f$  in  $L^2([-1, 1], (1-s^2)^{(1-n)/2})$ , abbiamo che

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} (1-s^2)^{(1-n)/2} |\mathbf{R}_\theta f(\theta, s)|^2 ds &\leq |\Omega^{n-1}| \int_{\mathbb{R}} \int_{\theta^\perp} |f(s\theta + y)|^2 ds dy \\
&= |\Omega^{n-1}| \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx < \infty,
\end{aligned}$$

e questo conclude il caso per  $\mathbf{R}_\theta$ . Per  $\mathbf{R}$ , basta integrare su  $S^{n-1}$ :

$$\begin{aligned}
\int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} (1-s^2)^{(1-n)/2} |\mathbf{R}_\theta f(\theta, s)|^2 ds d\theta &= \int_{\mathbf{Z}} (1-s^2)^{(1-n)/2} |\mathbf{R}_\theta f(\theta, s)|^2 ds d\theta \\
&= \int_{S^{n-1}} \|\mathbf{R}_\theta f\|_{L^2([-1, 1], (1-s^2)^{(1-n)/2})}^2 d\theta \\
&= |S^{n-1}| \|\mathbf{R}_\theta f\|_{L^2([-1, 1], (1-s^2)^{(1-n)/2})}^2 \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Il caso di  $\mathbf{P}_\theta$  e  $\mathbf{P}$  si tratta in modo analogo:

$$\begin{aligned}
|\mathbf{P}_\theta f(x)|^2 &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x + s\theta) ds \right|^2 \\
&= \left| \int_{-(1-|x|^2)^{1/2}}^{(1-|x|^2)^{1/2}} f(x + s\theta) ds \right|^2 \\
&\leq \int_{-(1-|x|^2)^{1/2}}^{(1-|x|^2)^{1/2}} |1|^2 ds \int_{-(1-|x|^2)^{1/2}}^{(1-|x|^2)^{1/2}} |f(x + s\theta)|^2 ds \\
&\leq 2(1-|x|^2)^{1/2} \int_{\mathbb{R}} |f(x + s\theta)|^2 ds.
\end{aligned}$$



Quindi abbiamo che

$$\begin{aligned} \int_{\theta^\perp} (1 - |x|^2)^{1/2} |\mathbf{P}f(\theta, x)|^2 dx &\leq 2 \int_{\theta^\perp} \int_{\mathbb{R}} |f(x + s\theta)|^2 ds dx \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx < \infty. \end{aligned}$$

Per  $\mathbf{P}$ , integriamo su  $S^{n-1}$ :

$$\begin{aligned} \int_{S^{n-1}} \int_{\theta^\perp} (1 - |x|^2)^{1/2} |\mathbf{P}f(\theta, x)|^2 dx d\theta &= \int_{\mathbf{T}} (1 - |x|^2)^{1/2} |\mathbf{P}f(\theta, x)|^2 dx d\theta \\ &\leq \int_{S^{n-1}} \|\mathbf{P}_\theta f\|_{L^2(\theta^\perp, (1-|x|^2)^{1/2})} d\theta \\ &\leq |S^{n-1}| \|\mathbf{P}_\theta f\|_{L^2(\theta^\perp, (1-|x|^2)^{1/2})} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Per quanto riguarda  $\mathbf{D}_a$ , il ragionamento è molto simile: ricordando che la funzione  $f$  ha supporto in  $\Omega^n$ , possiamo restringere l'integrale solo sul tratto di retta che interseca  $\Omega^n$ . Quindi, nel caso “peggiore” possibile, integreremo su tutto il diametro (di lunghezza 2). Combinando questo fatto con la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, abbiamo

$$\begin{aligned} |\mathbf{D}_a f(\theta)|^2 &= \left| \int_0^\infty f(a + t\theta) dt \right|^2 \\ &\leq 2 \int_0^\infty |f(a + t\theta)|^2 dt, \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \int_{S^{n-1}} |\mathbf{D}_a f(\theta)|^2 d\theta &\leq \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty |f(a + t\theta)|^2 dt d\theta \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}^n} |f(a + y)|^2 |y|^{1-n} dy \\ &\leq 2(|a| - 1)^{1-n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx < \infty. \quad \square \end{aligned}$$

Avendo dimostrato la continuità tra gli spazi  $L^2$  di  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{R}_\theta$ ,  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{P}_\theta$  e  $\mathbf{D}_a$  ne segue che i loro aggiunti hilbertiani sono continui.

## 2.2 Formule di inversione

Abbiamo visto che, nel campo della tomografia computerizzata, uno dei passaggi chiave riguarda il poter ricostruire la funzione di densità  $f$  conoscendone la

sua trasformata di Radon. Questo, tradotto in linguaggio matematico, vuol dire riuscire a trovare una formula di inversione per la trasformata. Tali formule di inversione sono chiaramente vitali sia per lo sviluppo di algoritmi di inversione da implementare nella TC, sia per lo studio della dipendenza locale della soluzione dai dati iniziali. Nel seguito ricaveremo le formule di inversione per  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{P}$ . Preliminarmente, definiamo due operatori che ci torneranno utili in seguito:

**Definizione 2.2.1** (Potenziale di Riesz). Sia  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Il *potenziale di Riesz* è l'operatore definito tramite

$$\widehat{\mathbf{I}^\alpha \phi}(\xi) = |\xi|^{-\alpha} \widehat{\phi}(\xi).$$

Se  $0 < \alpha < n$ , possiamo definire il potenziale di Riesz come

$$\mathbf{I}^\alpha \phi := \phi * K_\alpha,$$

dove  $K_\alpha$  è una funzione localmente integrabile definita da

$$K_\alpha := \frac{1}{c_\alpha} \frac{1}{|x|^{n-\alpha}},$$

con  $c_\alpha = \pi^{n/2} 2^\alpha \frac{\Gamma(\alpha/2)}{\Gamma((n-\alpha)/2)}$ . Per le proprietà della trasformata di Fourier, abbiamo che  $\mathbf{I}^\alpha \phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , quindi  $\mathbf{I}^\alpha \phi$  è ben definito e  $\mathbf{I}^{-\alpha} \mathbf{I}^\alpha \phi = \phi$ .

**Definizione 2.2.2** (Trasformata di Hilbert). Sia  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . La *Trasformata di Hilbert* è l'operatore definito da  $\mathbf{H}\phi := \frac{1}{\pi}$  p.v.  $(\frac{1}{x}) * \phi$ , cioè

$$\mathbf{H}\phi(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\phi(y)}{x-y} dy.$$

Anche questo operatore, sotto trasformata di Fourier, si rivela essere un moltiplicatore di Fourier. Infatti si ha che

$$\widehat{\mathbf{H}\phi}(\xi) = -i \operatorname{sgn}(\xi) \widehat{\phi}(\xi).$$

Una proprietà che ci tornerà utile della trasformata di Hilbert è il suo comportamento rispetto alla derivazione. Abbiamo infatti che

$$\mathbf{H}\left(\frac{d}{dt}\phi(t)\right) = \frac{d}{dt}\mathbf{H}(\phi(t)).$$

Siamo ora pronti a enunciare e dimostrare le formule di inversione per la trasformata di Radon e la trasformata a raggi X:

**Teorema 2.2.1** (Formule di inversione). Sia  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Allora, per ogni  $\alpha < n$ , abbiamo

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{2} (2\pi)^{1-n} \mathbf{I}^{-\alpha} \mathbf{R}^\# \mathbf{I}^{\alpha-n+1} g, & g &= \mathbf{R}f, \\ f &= \frac{1}{|S^{n-2}|} (2\pi)^{-1} \mathbf{I}^{-\alpha} \mathbf{P}^\# \mathbf{I}^{\alpha-1} g, & g &= \mathbf{P}f. \end{aligned}$$

*Dimostrazione.* Utilizziamo l'inversione della trasformata di Fourier sul potenziale di Riesz:

$$\mathbf{I}^\alpha f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} |\xi|^{-\alpha} \widehat{f}(\xi) d\xi. \quad (2.3)$$

Passiamo quindi a coordinate polari ( $\xi = \sigma\theta$ ) e otteniamo

$$\mathbf{I}^\alpha f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty e^{i\sigma x \cdot \theta} \sigma^{n-1-\alpha} \widehat{f}(\sigma\theta) d\sigma d\theta.$$

A questo punto, grazie al Fourier Slice Theorem 2.1.1, possiamo esprimere  $\widehat{f}$  utilizzando  $\widehat{\mathbf{R}f}$ :

$$\mathbf{I}^\alpha f(x) = (2\pi)^{-n+\frac{1}{2}} \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty e^{i\sigma x \cdot \theta} |\sigma|^{n-1-\alpha} \widehat{\mathbf{R}f}(\theta, \sigma) d\sigma d\theta.$$

Sostituendo  $\theta$  con  $-\theta$  e  $\sigma$  con  $-\sigma$ , e usando il fatto che  $\widehat{\mathbf{R}f}$  è pari, otteniamo la stessa formula dove al posto dell'integrale su  $(0, \infty)$  abbiamo l'integrale su  $(-\infty, 0)$ . Sommiamo le due formule per avere:

$$\mathbf{I}^\alpha f(x) = \frac{1}{2} (2\pi)^{-n+\frac{1}{2}} \int_{S^{n-1}} \int_{-\infty}^\infty e^{i\sigma x \cdot \theta} |\sigma|^{n-1-\alpha} \widehat{\mathbf{R}f}(\theta, \sigma) d\sigma d\theta.$$

L'integrale in  $d\sigma$  può ora essere espresso come potenziale di Riesz:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^\alpha f(x) &= \frac{1}{2} (2\pi)^{-n+\frac{1}{2}} \int_{S^{n-1}} \int_{-\infty}^\infty e^{i\sigma x \cdot \theta} \mathbf{I}^{\alpha+1-n}(\widehat{\mathbf{R}f})(\theta, \sigma) d\sigma d\theta \\ &= \frac{1}{2} (2\pi)^{-n+1} \int_{S^{n-1}} \mathbf{I}^{\alpha+1-n}(\mathbf{R}f)(\theta, x \cdot \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} (2\pi)^{-n+1} \mathbf{R}^\# \mathbf{I}^{\alpha+1-n} \mathbf{R}f(x). \end{aligned}$$

Applicando ora  $\mathbf{I}^{-\alpha}$  ad entrambi i lati otteniamo la nostra tesi per la trasformata di Radon:

$$f = \frac{1}{2} (2\pi)^{1-n} \mathbf{I}^{-\alpha} \mathbf{R}^\# \mathbf{I}^{\alpha-n+1} \mathbf{R}f.$$

Per la formula di inversione di  $\mathbf{P}$  partiamo nuovamente dall'equazione (2.3): utilizziamo il Lemma 2.1.2, che ricordiamo ci dice:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) d\xi = \frac{1}{|S^{n-2}|} \int_{S^{n-1}} \int_{\theta^\perp} |\eta| f(\eta) d\eta d\theta.$$

Otteniamo quindi

$$\mathbf{I}^\alpha f(x) = (2\pi)^{-n/2} \frac{1}{|S^{n-2}|} \int_{S^{n-1}} \int_{\theta^\perp} e^{ix \cdot \eta} |\eta|^{1-\alpha} \widehat{f}(\eta) d\eta d\theta.$$

Da questo punto in poi i passaggi sono analoghi al caso precedente: utilizziamo il Fourier Slice Theorem 2.1.1 esprimendo  $\widehat{f}$  tramite  $\widehat{\mathbf{P}}f$  per ottenere

$$\mathbf{I}^\alpha f(x) = (2\pi)^{-(n+1)/2} \frac{1}{|S^{n-2}|} \int_{S^{n-1}} \int_{\theta^\perp} e^{ix \cdot \eta} |\eta|^{1-\alpha} \widehat{\mathbf{P}}f(\eta) d\eta d\theta.$$

L'integrale interno si può esprimere tramite potenziale di Riesz:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^\alpha f(x) &= (2\pi)^{-1} \frac{1}{|S^{n-2}|} \int_{S^{n-1}} \mathbf{I}^{\alpha-1} \mathbf{P}f(\theta, E_\theta x) d\theta \\ &= (2\pi)^{-1} \frac{1}{|S^{n-2}|} \mathbf{P}^\# \mathbf{I}^{\alpha-1} \mathbf{P}f(x), \end{aligned}$$

e ora non resta che applicare  $\mathbf{I}^{-\alpha}$  da entrambi i lati per ottenere

$$f = \frac{1}{|S^{n-2}|} (2\pi)^{-1} \mathbf{I}^{-\alpha} \mathbf{P}^\# \mathbf{I}^{\alpha-1} \mathbf{P}f. \quad \square$$

A questo punto è doveroso sottolineare alcuni aspetti che potrebbero passare inosservati:

(i) Fissando  $\alpha = 0$ , la formula di inversione per la trasformata di Radon diventa

$$f = \frac{1}{2} (2\pi)^{1-n} \mathbf{R}^\# \mathbf{I}^{1-n} g, \quad g = \mathbf{R}f,$$

dove  $\mathbf{I}^{1-n}$  agisce su una funzione in una variabile. Siccome per  $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  abbiamo

$$\widehat{\mathbf{I}^{1-n} h}(\sigma) = |\sigma|^{n-1} \widehat{h}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma)^{n-1} \sigma^{n-1} \widehat{h}(\sigma),$$

e siccome (come ricordato precedentemente) la trasformata di Hilbert soddisfa

$$\widehat{\mathbf{H}}h(\sigma) = -i \operatorname{sgn}(\sigma) \widehat{h}(\sigma),$$

abbiamo che

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^{1-n} h &= \left( \widehat{\mathbf{I}^{n-1} h} \right)^\sim = \left( \operatorname{sgn}(\sigma)^{n-1} \sigma^{n-1} \widehat{h}(\sigma) \right)^\sim \\ &= \left( \operatorname{sgn}(\sigma)^{n-1} i^{n-1} \widehat{h^{(n-1)}}(\sigma) \right)^\sim \\ &= \left( \widehat{\mathbf{H}^{n-1} h^{(n-1)}} - 1 \right)^\sim = \mathbf{H}^{n-1} h^{(n-1)}, \end{aligned}$$

e quindi, in conclusione, la formula di inversione si legge

$$f = \frac{1}{2} (2\pi)^{1-n} \mathbf{R}^\# \mathbf{H}^{n-1} g^{(n-1)},$$

dove la  $(n-1)$ -esima derivata e  $\mathbf{H}^{n-1}$  sono riferiti al secondo argomento. Utilizziamo ora la forma esplicita di  $\mathbf{R}^\#$  e il fatto che

$$\mathbf{H}^{n-1} = \begin{cases} (-1)^{(n-2)/2} \mathbf{H} & \text{se } n \text{ è pari} \\ (-1)^{(n-1)/2} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

per riscrivere in modo esplicito la nostra formula di inversione:

$$f = \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n} \begin{cases} (-1)^{(n-2)/2} \int_{S^{n-1}} \mathbf{H} g^{(n-1)}(\theta, x \cdot \theta) d\theta & \text{se } n \text{ è pari} \\ (-1)^{(n-1)/2} \int_{S^{n-1}} g^{(n-1)}(\theta, x \cdot \theta) d\theta & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Ricordiamo che  $g(\theta, x \cdot \theta)$  è l'integrale di  $f$  lungo l'iperpiano perpendicolare a  $\theta$  contenente  $x$ . Alla luce di ciò, il fatto che la trasformata di Hilbert appaia solo per  $n$  pari ha un'importante conseguenza pratica: per  $n$  dispari, la formula di inversione può essere calcolata se  $g(\theta, y \cdot \theta)$  è noto per  $\theta \in S^{n-1}$  e  $y$  in un intorno di  $x$ , cioè se gli integrali di  $f$  lungo tutti gli iperpiani che incontrano un intorno di  $x$  sono noti. Quindi, conoscendo gli integrali sugli iperpiani, il problema di ricostruire la funzione  $f$  ha una natura locale: la funzione in un punto è definita dagli integrali lungo tutti gli iperpiani che intersecano **un intorno di quel punto**.

Per  $n$  pari, ciò non è più vero, poiché la trasformata di Hilbert non è un operatore locale. In dimensione pari, il problema di ricostruire  $f$  in un dato punto richiede la conoscenza degli integrali lungo ogni iperpiano che interseca il supporto di  $f$ .

- (ii) Sempre per  $n$  pari, possiamo dare una versione più dettagliata della formula di inversione, esplicitando  $\mathbf{H}$ :

$$\begin{aligned} f(x) &= (-1)^{\frac{n}{2}+1} (2\pi)^{-n} \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \frac{g^{(n-1)}(\theta, t)}{x \cdot \theta - t} dt d\theta \\ &= (-1)^{\frac{n}{2}} (2\pi)^{-n} \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \frac{g^{(n-1)}(\theta, x \cdot \theta + q)}{q} dq d\theta, \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo effettuato la sostituzione  $t = q + x \cdot \theta$ . L'integrale interno è un integrale al valor principale di Cauchy, e può essere espresso tramite un integrale ordinario:

$$f(x) = (-1)^{\frac{n}{2}} (2\pi)^{-n} \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \frac{g^{(n-1)}(\theta, x \cdot \theta + q) - g^{(n-1)}(\theta, x \cdot \theta - q)}{q} dq d\theta.$$

Possiamo ora scambiare l'ordine di integrazione per ottenere

$$\begin{aligned} f(x) &= (-1)^{\frac{n}{2}} (2\pi)^{-n} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{q} \left( \int_{S^{n-1}} g^{(n-1)}(\theta, x \cdot \theta + q) d\theta \right. \\ &\quad \left. - \int_{S^{n-1}} g^{(n-1)}(\theta, x \cdot \theta - q) d\theta \right) dq. \end{aligned}$$

Siccome  $g$  è pari e  $n-1$  è dispari, abbiamo che  $g^{(n-1)}$  è dispari. Sostituendo  $\theta$  con  $-\theta$  nel secondo termine dell'integrale interno notiamo che i due integrali su  $S^{n-1}$  sono uguali. Tutto ciò si legge

$$f(x) = c(n) \int_{\mathbb{R}} \frac{F_x^{(n-1)}(q)}{q} dq, \quad c(n) = (-1)^{\frac{n}{2}} (2\pi)^{-n} |S^{n-1}|,$$

$$F_x(q) = \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} g(\theta, x \cdot \theta + q) d\theta.$$

$F_x$  è pari poiché lo è  $g$ . Quindi  $F_x^{n-1}$  è dispari e otteniamo infine la formula di inversione originale di Radon:

$$f(x) = 2c(n) \int_0^\infty \frac{F_x^{(n-1)}(q)}{q} dq,$$

che, per  $n = 2$ , può essere scritta in modo più compatto:

$$f(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{dF_x(q)}{q} dq.$$

Tali formule furono pubblicate sul *Journal for Computer Assisted Tomography*, 1997 [4].

- (iii) Se consideriamo funzioni radiali (i.e.  $f(x) = f_0(|x|)$  con  $f_0$  una funzione su  $\mathbb{R}$ ) allora  $g(s) = \mathbf{R}f(\theta, s)$  è indipendente da  $\theta$  e si ha che

$$\begin{aligned} g(s) &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_0((s^2 + |y|^2)^{\frac{1}{2}}) dy \\ &= |S^{n-2}| \int_0^\infty r^{n-2} f_0((s^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}) dr \\ &= |S^{n-2}| \int_s^\infty (t^2 - s^2)^{\frac{n-3}{2}} t f_0(t) dt, \end{aligned}$$

dove nel secondo passaggio siamo passati in coordinate polari e nel terzo abbiamo effettuato la sostituzione  $(s^2 + r^2)^{\frac{1}{2}} = t$ . In questo modo otteniamo quella che viene definita un'equazione integrale di Abel, che può essere risolta col seguente procedimento: integriamo contro  $s(s^2 - r^2)^{(n-3)/2}$  da  $r$  a  $\infty$  l'equazione precedente per ottenere

$$\begin{aligned} \int_r^\infty s(s^2 - r^2)^{\frac{n-3}{2}} g(s) ds &= |S^{n-2}| \int_r^\infty \int_s^\infty s((s^2 - r^2)(t^2 - s^2))^{\frac{n-3}{2}} t f_0(t) dt ds \\ &= |S^{n-2}| \int_r^\infty \int_r^t s((s^2 - r^2)(t^2 - s^2))^{\frac{n-3}{2}} ds t f_0(t) dt. \end{aligned}$$

Lavoriamo ora sull'integrale interno. Se effettuiamo la (molto poco naturale) sostituzione

$$s' = \frac{r^2 + t^2 - 2s^2}{r^2 - t^2},$$

il cambio di differenziale diventa

$$ds = \frac{t^2 - r^2}{4 \left( \frac{r^2 + t^2 - s'(r^2 - t^2)}{2} \right)^{\frac{1}{2}}},$$

e gli estremi di integrazione passano da  $(r, t)$  a  $(-1, 1)$ . Sfruttando una grossa dose di buona volontà, l'integrale interno si riscrive come

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \left( \frac{r^2 + t^2 - s'(r^2 - t^2)}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \left( \frac{r^2 + t^2 - s'(r^2 - t^2)}{2} - r^2 \right) \right. \\ & \quad \left. \cdot \left( t^2 - \frac{r^2 + t^2 - s'(r^2 - t^2)}{2} \right) \right)^{\frac{n-3}{2}} \frac{t^2 - r^2}{4 \left( \frac{r^2 + t^2 - s'(r^2 - t^2)}{2} \right)^{\frac{1}{2}}} ds' \\ &= \int_{-1}^1 \frac{(t^2 - r^2)}{4} \left( \left( \frac{(t^2 - r^2)(1 + s')}{2} \right) \left( \frac{(t^2 - r^2)(1 - s')}{2} \right) \right)^{\frac{n-3}{2}} ds' \\ &= \int_{-1}^1 \frac{(t^2 - r^2)^{n-2}}{4} 2^{3-n} (1 - (s')^2)^{\frac{n-3}{2}} ds' \\ &= 2^{1-n} (t^2 - r^2)^{n-2} \int_{-1}^1 (1 - (s')^2)^{\frac{n-3}{2}} ds' \\ &= c(n) (t^2 - r^2)^{n-2}, \quad c(n) = 2^{1-n} \int_{-1}^1 (1 - (s')^2)^{\frac{n-3}{2}} ds'. \end{aligned}$$

Otteniamo quindi

$$\int_r^\infty s(s^2 - r^2)^{\frac{n-3}{2}} g(s) ds = |S^{n-2}| c(n) \int_r^\infty (t^2 - r^2)^{n-2} t f_0(t) dt.$$

Analizziamo l'integrale nell'ultimo termine. Se differenziamo rispetto ad  $r$ , per la regola integrale di Leibniz, abbiamo che

$$\frac{1}{2r} \frac{d}{dr} \int_r^\infty (t^2 - r^2)^{n-2} t f_0(t) dt = \begin{cases} -(n-2) \int_r^\infty (t^2 - r^2)^{n-3} t f_0(t) dt & \text{se } n > 2 \\ -\frac{1}{2} f_0(r) & \text{se } n = 2 \end{cases}.$$

Abbiamo quasi concluso. Se applichiamo altre  $n-2$  volte l'operatore  $\left(\frac{1}{2r} \frac{d}{dr}\right)$  giungiamo a:

$$\left( \frac{1}{2r} \frac{d}{dr} \right)^{n-1} \int_r^\infty s(s^2 - r^2)^{\frac{n-3}{2}} g(s) ds = |S^{n-2}| c(n) (-1)^{n-1} \frac{(n-2)!}{2} f_0(r),$$

da cui possiamo esplicitare  $f_0(r)$  e ottenere esplicitamente la nostra formula di inversione.

- (iv) Per  $n = 2$ , la formula di inversione per  $\mathbf{P}$  coincide con la formula per  $\mathbf{R}$ . Per  $n > 3$  tale formula è in generale poco utile visto che richiede la conoscenza di **tutti** gli integrali di linea, mentre all'atto pratico possono essere misurati solo un certo numero di integrali di linea.
- (v) Prima di procedere in quest'ultima osservazione, dobbiamo definire brevemente alcune nozioni necessarie (su cui non ci dilungheremo, in quanto richiederebbero uno sforzo tecnico ingiustificato ai fini di questo elaborato).

**Definizione 2.2.3** (Polinomi di Gegenbauer). Sia  $\lambda > -\frac{1}{2}$ . I *polinomi di Gegenbauer*  $C_l^\lambda$  di grado  $l$  sono i polinomi ortogonali sull'intervallo  $[-1, 1]$ . Su questo intervallo definiamo una misura pesata dalla funzione  $(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$ . Tali polinomi sono detti *normalizzati* se  $C_l^\lambda(1) = 1$ . Abbiamo allora

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} C_l^\lambda(x) C_k^\lambda(x) dx = \begin{cases} 0 & l \neq k \\ \frac{2^{2\lambda-1} \Gamma(\lambda+\frac{1}{2})^2 l!}{(l+\lambda)\Gamma(l+2\lambda)} & l = k \end{cases}.$$

Per  $\lambda = 0$  dobbiamo prendere il limite per  $\lambda \rightarrow 0$ .

**Definizione 2.2.4.** Un'armonica sferica  $Y_l$  di grado  $l$  è la restrizione a  $S^{n-1}$  di un polinomio armonico omogeneo di grado  $l$  su  $\mathbb{R}^n$ . Ci sono

$$N(n, l) = \frac{(2l+n-2)(n+l-3)!}{l!(n-2)!}, \quad N(n, 0) = 1$$

armoniche sferiche di grado  $l$  linearmente indipendenti. Inoltre, armoniche sferiche di grado differente sono ortogonali su  $S^{n-1}$ .

Utilizzando i polinomi di Gegenbauer, è possibile dimostrare che

$$|Y_l(\theta)|^2 \leq \frac{1}{c(n, l)} \int_{S^{n-1}} Y_l^2(\omega) d\omega \leq 1, \quad (2.4)$$

dove

$$c(n, l) = |S^{n-2}| 2^{n-3} \left( \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \right)^2 \frac{1}{l+n/2-1} \frac{l!}{(l+n-3)!}.$$

Tale costante ha senso se  $n \neq 2$  e  $l \neq 0$ , nel qual caso abbiamo che  $c(2, 0) = 2\pi$ .

Utilizzando questi concetti possiamo riscrivere la formula di inversione per  $\mathbf{R}$  espandendo  $f$  e  $g = \mathbf{R}f$  in armoniche sferiche:

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{N(n, l)} f_{lk}(|x|) Y_{lk}\left(\frac{x}{|x|}\right),$$



$$g(\theta, s) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{N(n,l)} g_{lk}(s) Y_{lk}(\theta).$$

A questo punto possiamo trovare una relazione tra le  $f_{lk}$  e le  $g_{lk}$  (non dimostriamo questo risultato poiché esula dagli scopi di questo elaborato):

**Teorema 2.2.2.** *Sia  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Per  $s > 0$  abbiamo*

$$g_{lk}(s) = |S^{n-2}| \int_s^{\infty} C_l^{\frac{n-2}{2}} \left(\frac{s}{r}\right) \left(1 - \frac{s^2}{r^2}\right)^{\frac{n-3}{2}} f_{lk}(r) r^{n-2} dr,$$

$$f_{lk}(s) = c(n) s^{2-n} \int_s^{\infty} (r^2 - s^2)^{\frac{n-3}{2}} C_l^{\frac{n-2}{2}} \left(\frac{r}{s}\right) g_{lk}^{(n-1)}(r) dr,$$

dove

$$c(n) = \frac{(-1)^{n-1} \Gamma(\frac{n-2}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}} \Gamma(n-2)}.$$

*Dimostrazione.* Vedasi *The Mathematics of Computerized Tomography* II.2.2 e II.2.3 [9] □

Queste ultime relazioni ci torneranno utili all'inizio della sezione successiva, quando parleremo del problema dell'unicità per la trasformata di Radon.

## 2.3 Unicità

Nel paragrafo precedente, abbiamo ricavato esplicitamente delle formule di inversione per la trasformata di Radon e per la trasformata a Raggi X. Questo vuol dire che una funzione  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  è unicamente determinata da  $\mathbf{R}f$  o  $\mathbf{P}f$ , ed è possibile ricostruirla conoscendo i valori di queste due ultime funzioni. Dobbiamo notare però che, all'atto pratico, conosciamo i valori di queste funzioni solo su una parte del loro dominio. È naturale allora chiedersi quali siano le condizioni necessarie per la ricostruzione della soluzione, se possiamo accontentarci di informazioni parziali o quanto in profondità dobbiamo spingerci per ottenere tale risultato. I prossimi teoremi ci aiuteranno a chiarificare la questione.

**Teorema 2.3.1** (Teorema del buco). *Sia  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , e sia  $K$  un sottoinsieme convesso e compatto di  $\mathbb{R}^n$  (il nostro "buco"). Se  $\mathbf{R}f(\theta, s) = 0$  per ogni iperpiano  $x \cdot \theta = s$  che non interseca  $K$ , allora  $f = 0$  al di fuori di  $K$ .*

*Dimostrazione.* Se  $K$  è una palla, possiamo concludere grazie al Teorema 2.2.2. Infatti, espandiamo  $f(x)$  e  $g(\theta, s) = \mathbf{R}f(\theta, s)$  in armoniche sferiche: l'annullarsi di  $g(\theta, s)$  lungo ogni iperpiano  $x \cdot \theta = s$  ci implica che  $g_{lk} = 0$ . Il Teorema 2.2.2 ci dice che possiamo esprimere le  $f_{lk}$  in funzione delle  $g_{lk}$ , e quindi  $f_{lk} = 0$ , che in

conclusione ci dice che  $f = 0$  al di fuori di  $K$ . Nel caso generale, possiamo trovare per ogni  $x \notin K$  una palla che contiene  $K$  ma non  $x$ . Questa è una conseguenza del “Teorema di separazione tramite iperpiani”, che ci assicura che possiamo separare due convessi (il nostro  $K$  e il nostro  $x$ ) con un iperpiano. Se uno dei due è compatto, la separazione è stretta (cioè il piano non interseca nessuno dei due oggetti), quindi possiamo trovare sicuramente una palla contenente  $K$  che giace interamente nella parte di piano in cui non giace  $x$ . Applicando il teorema a tale palla possiamo concludere che  $f(x) = 0$ .  $\square$

Siccome gli integrali lungo gli iperpiani possono essere espressi in termini di integrali di linea (i.e. possiamo scrivere la trasformata di Radon in funzione della trasformata a Raggi X, vedasi la Proposizione 2.1.1), otteniamo immediatamente lo stesso risultato per  $\mathbf{P}$ :

**Corollario 2.3.1.** *Sia  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , e sia  $K$  un sottoinsieme convesso e compatto di  $\mathbb{R}^n$ . Se  $\mathbf{P}f(\theta, s) = 0$  per ogni linea  $x + t\theta$  che non interseca  $K$ , allora  $f = 0$  al di fuori di  $K$ .*

Il problema di ricostruire una funzione all'esterno di una palla conoscendone gli integrali di linea (o lungo gli iperpiani) è quindi unicamente risolvibile, a patto che la funzione decada in modo sufficientemente rapido all'infinito (le funzioni in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  soddisfano questa richiesta). Vediamo nel prossimo esempio come questa ipotesi sia fondamentale:

**Esempio.** Sia  $n = 2$ . Fissiamo  $z = x_1 + ix_2$  e

$$f(z) = z^{-p},$$

dove  $p \geq 2$  è un intero. Mostriamo che  $\mathbf{R}f(\theta, s) = 0$  per  $\theta \in S^1$  e  $s > 0$ . Otteniamo

$$\begin{aligned} \mathbf{R}f(\theta, s) &= \int_{\mathbb{R}} f(s\theta + t\theta^\perp) dt \\ &= (-\theta_2 + i\theta_1)^{-1} \int_L z^{-p} dz, \quad \theta = (\theta_1, \theta_2), \end{aligned}$$

dove  $L$  è la linea  $x \cdot \theta = s$ . Se effettuiamo la sostituzione  $w = \frac{1}{z}$ , abbiamo

$$\int_L z^{-p} dz = - \int_C w^{p-2} dw,$$

dove  $C$  è l'immagine di  $L$  tramite la trasformazione  $w = \frac{1}{z}$ . Siccome  $L$  non interseca l'origine (dato che  $s > 0$ ), abbiamo che  $C$  è una curva chiusa. Per il teorema di Cauchy, l'integrale su  $C$  si annulla se  $p \geq 2$ , e quindi  $\mathbf{R}f(\theta, s) = 0$  per  $s > 0$  e  $p \geq 2$ . Ma  $f \neq 0$ , quindi il nostro teorema non è valido in questo caso.

Tramite la divergent beam transform, possiamo dare un risultato analogo se  $f$  è una funzione a supporto compatto:

**Teorema 2.3.2.** *Sia  $S$  un insieme aperto in  $S^{n-1}$ , e sia  $A$  una curva differenziabile con continuità su  $\mathbb{R}^n$ . Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un insieme aperto e limitato. Assumiamo che per ogni  $\theta \in S$  esista un  $a \in A$  tale che la semi-retta  $a + t\theta$  non intersechi  $\Omega$  per  $t \geq 0$ . Se  $f \in C_c^\infty(\Omega)$  e  $\mathbf{D}f(a, \theta) = 0$  per  $a \in A$  e  $\theta \in S$ , allora  $f = 0$  sull'insieme  $\{a + t\theta: a \in A, \theta \in S\}$ .*

*Dimostrazione.* Definiamo per ogni intero  $k \geq 0$  e  $a, x \in \mathbb{R}^n$ , la funzione

$$\mathbf{D}_k f(a, x) = \int_0^\infty t^k f(a + tx) dt.$$

Proviamo che, sotto le ipotesi del teorema,

$$\mathbf{D}_k f(a, \theta) = 0 \quad \text{se } a \in A, \quad \theta \in S \quad (2.5)$$

e per ogni  $k \geq 0$ . Questo ci implica il fatto che  $f = 0$  nella regione desiderata. Infatti, se  $\int_0^\infty t^k f(a + tx) dt = 0 \quad \forall k \geq 0$ , questo vale anche per i polinomi, ergo

$$\int_0^\infty p(x) f(a + tx) dt = 0 \quad \forall k \geq 0.$$

Siccome  $f$  è a supporto compatto, stiamo integrando su un insieme di misura finita. Per il teorema di approssimazione di Weierstrass abbiamo che  $\int gf = 0$  per ogni  $g$  continua. Prendendo allora  $g = f$ , otteniamo che l'integrale del quadrato di  $f$  è zero, che ci implica  $f = 0$ .

Proviamo (2.5) per induzione su  $k$ . Il caso  $k = 0$  è verificato dall'ipotesi  $\mathbf{D}f(a, \theta) = 0$ ,  $a \in A$ ,  $\theta \in S$ . Supponiamo l'equazione valga per  $k$ , e abbiamo che

$$\mathbf{D}_k f(a, x) = 0, \quad a \in A$$

per  $x$  appartenente al cono aperto  $\{x \neq 0: \frac{x}{|x|} \in S\}$ . Fissiamo  $a = a(s)$  una parametrizzazione di  $A$ . Allora

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \mathbf{D}_{k+1} f(a(s), x) &= \frac{d}{ds} \int_0^\infty t^{k+1} f(a(s) + tx) dt \\ &= \int_0^\infty t^{k+1} \sum_{i=1}^n a'_i(s) f_i(a(s) + tx) dt \\ &= \int_0^\infty t^k \sum_{i=1}^n a'_i(s) \frac{\partial}{\partial x_i} f(a(s) + tx) dt \\ &= \sum_{i=1}^n a'_i(s) \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{D}_k f(a(s), x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

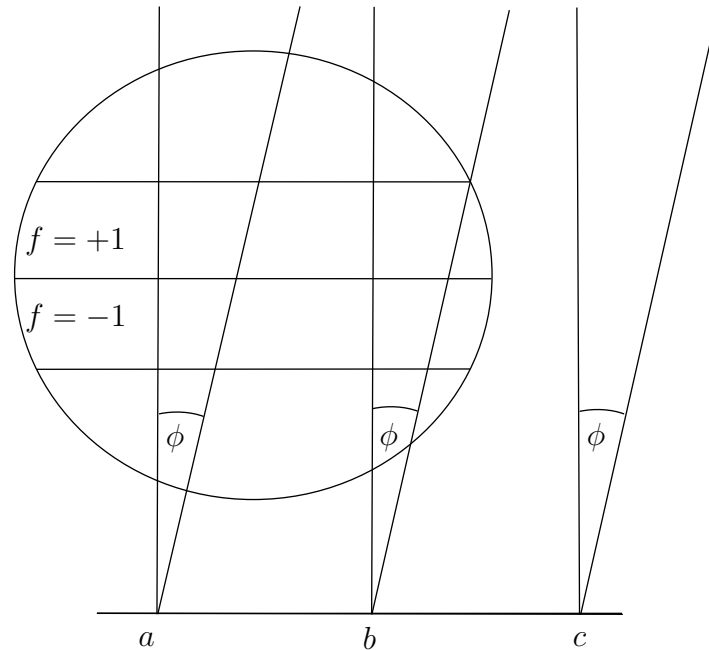
per  $x \in C$ , dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato che  $\mathbf{D}_k f(a(s), x)$  si annulla su  $C$ . Abbiamo quindi dimostrato che  $D_{k+1} f(a, x)$  è costante lungo  $A$  se  $x \in C$ . Per l'ipotesi del teorema, esiste almeno un  $\tilde{a} \in A$  tale che  $\mathbf{D}_{k+1} f(\tilde{a}, x) = 0$  per  $x \in C$ . Abbiamo quindi che  $\mathbf{D}_{k+1} f$  deve annullarsi su tutto  $A$ . Ma questa è (2.5) per  $k + 1$ , e abbiamo quindi la tesi.  $\square$

Nel corso del processo di tomografia computerizzata,  $S$  è l'insieme di direzioni lungo cui proiettiamo i raggi X, mentre  $A$  sono tutti i punti in cui collochiamo la sorgente di raggi X.

L'ipotesi per cui la semi-retta non intersechi  $\Omega$  potrebbe sembrare barocca, ma è fondamentale, come mostrato dalla seguente immagine. Prendiamo come  $\Omega$  il disco unitario in  $\mathbb{R}^2$ , e come  $f$  una "versione liscia" della funzione che vale  $+1$  nella striscia superiore e  $-1$  nella striscia inferiore (al di fuori di tali strisce vale  $0$ ). Scegliendo come  $A$  il segmento  $ab$  e  $S$  l'insieme delle direzioni comprese dall'angolo  $\phi$ , le ipotesi del teorema non sono soddisfatte. Infatti, presa una direzione arbitraria in  $\phi$ , non esiste alcun punto sul segmento  $ab$  che **non** intersechi il disco unitario. Possiamo quindi notare che, nonostante  $\mathbf{D}f = 0$  su tutto  $A \times S$ , la nostra funzione  $f$  non è identicamente nulla.

Potremmo provare a prolungare il segmento fino ad un nuovo punto  $c$ , per ovviare al problema di cui sopra, ma questo comporterebbe una differente complicazione, poiché in questo nuovo scenario avremmo che  $\mathbf{D}f$  non si annulla più lungo tutto  $A \times S$ .

Figura 2.2: L'ipotesi che la semi-retta non intersechi  $\Omega$  è fondamentale.



Lavorando con funzioni a supporto compatto, possiamo sfruttare le loro proprietà sotto trasformata di Fourier per arrivare a risultati analoghi a quelli sopracitati:

**Teorema 2.3.3.** *Sia  $A$  un insieme di direzioni tali che nessun polinomio omogeneo non banale si annulli su  $A$ . Se  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  e  $\mathbf{R}_\theta f = 0$  per  $\theta \in A$ , allora  $f = 0$ .*

*Dimostrazione.* Grazie al Fourier Slice Theorem 2.1.1, abbiamo

$$\widehat{f}(\sigma\theta) = (2\pi)^{\frac{1-n}{2}} \widehat{\mathbf{R}_\theta f}(\sigma) = 0$$

per  $\theta \in A$ . Siccome  $f$  ha supporto compatto,  $\widehat{f}$  è una funzione analitica, e quindi sviluppabile in serie di potenze:

$$\widehat{f}(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\xi),$$

con  $a_k$  polinomi omogenei di grado  $k$ . Ponendo  $\xi = \sigma\theta$ , abbiamo

$$\widehat{f}(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma^k a_k(\theta) = 0$$

per ogni  $\sigma$  e per ogni  $\theta \in A$ . Ne segue che  $a_k(\theta)$  si annulla per  $\theta \in A$ , ma abbiamo detto che nessun polinomio omogeneo non banale si annulla su  $A$ . Quindi  $a_k = 0$  per ogni  $k$  e di conseguenza  $f = 0$ .  $\square$

Se vogliamo ottenere un risultato simile per  $\mathbf{P}_\theta f$ , dobbiamo richiedere delle ipotesi più forti.

**Teorema 2.3.4.** *Sia  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ , e sia  $\mathbf{P}_\theta f = 0$  per un numero infinito di direzioni. Allora abbiamo che  $f = 0$ .*

*Dimostrazione.* Sempre utilizzando il Fourier Slice Theorem 2.1.1, abbiamo per infiniti  $\theta$  che

$$\widehat{f}(\eta) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \widehat{\mathbf{P}_\theta f}(\eta) = 0$$

se  $\eta \in \theta^\perp$ . Come prima,  $\widehat{f}$  è analitica, quindi  $\widehat{f}(\eta)$  conterrà il fattore  $\eta \cdot \theta$  per ogni direzione  $\theta$ . Quindi  $\widehat{f}$  ha un fattore che si annulla in 0 di ordine infinito, e quindi si annulla ovunque.  $\square$

Cerchiamo di ottenere un risultato simile per la trasformata Divergent Beam.

**Teorema 2.3.5.** *Sia  $\Omega^n$  la palla unitaria in  $\mathbb{R}^n$ , e sia  $A$  un insieme infinito al di fuori di  $\Omega^n$ . Se  $f \in C_c^\infty(\Omega^n)$  e  $\mathbf{D}_a f = 0$  per  $a \in A$ , allora  $f = 0$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $\theta_0$  un punto di accumulazione per  $\{\frac{a}{|a|} : a \in A\}$ . Scegliamo  $\varepsilon > 0$  tale che  $f(x) = 0$  per  $|x| > 1 - 2\varepsilon$  (ciò è possibile poiché  $f$  è a supporto compatto nella palla unitaria). Siccome  $\theta_0$  è di accumulazione, possiamo scegliere  $U(\theta_0)$  un intorno non vuoto di  $\theta_0$  su  $S^{n-1}$  tale che

$$a \cdot \theta > 1 - \varepsilon, \quad a \in A, \theta \in U(\theta_0).$$

Calcoliamo ora

$$\begin{aligned} \int_{S^{n-1}} \mathbf{D}_a f(\omega)(\omega \cdot \theta)^{1-n} d\omega &= \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty f(a + t\omega)(\omega \cdot \theta)^{1-n} dt d\omega \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(a + y)(y \cdot \theta)^{1-n} dy \\ &= \int_{|x| < 1 - 2\varepsilon} f(x)(x \cdot \theta - a \cdot \theta)^{1-n} dx, \end{aligned}$$

dove abbiamo effettuato due sostituzioni, prima  $y = t\omega$  e successivamente  $x = a + y$ . Notiamo che nell'ultimo integrale abbiamo un fattore  $\frac{1}{x \cdot \theta - a \cdot \theta}^{n-1}$  che, a priori, potrebbe annullarsi. Notiamo però che utilizzando le condizioni imposte qualche riga sopra si ha

$$x \cdot \theta - a \cdot \theta < 1 - 2\varepsilon - (1 - \varepsilon) = -\varepsilon.$$

A questo punto, imponiamo  $x = s\theta + y$  con  $y \in \theta^\perp$ , e otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{S^{n-1}} \mathbf{D}_a f(\omega)(\omega \cdot \theta)^{1-n} d\omega &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\theta^\perp} f(s\theta + y)(s - a \cdot \theta)^{1-n} dy ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathbf{R}f(\theta, s)(s - a \cdot \theta)^{1-n} ds. \end{aligned}$$

Per ipotesi abbiamo  $\mathbf{D}_a f = 0$  per  $a \in A$ , quindi si ha che

$$\int_{|s| < 1 - 2\varepsilon} \mathbf{R}f(\theta, s)(s - a \cdot \theta)^{1-n} ds = 0$$

per  $a \in A$  e  $\theta \in U(\theta_0)$ . Possiamo riscrivere il secondo fattore in serie di potenze come

$$(s - a \cdot \theta)^{1-n} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (a \cdot \theta)^{1-n-k} s^k,$$

che è una serie di potenze uniformemente convergente per  $|s| < 1 - 2\varepsilon$ . Non siamo interessati alla forma dei  $c_k$ , ci basta sapere che non sono tutti identicamente nulli.

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (a \cdot \theta)^{1-n-k} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{R}f(\theta, s) s^k ds = 0$$

per  $a \in A$  e  $\theta \in U(\theta_0)$ . Anticipando un risultato che dimostreremo nella prossima sezione, abbiamo che

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbf{R}f(\theta, s) s^k ds = P_k(\theta),$$

dove  $P_k$  è un polinomio omogeneo di grado  $k$ . Ne segue che

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (a \cdot \theta)^{1-n-k} P_k(\theta) = 0$$

per  $a \in A$  e  $\theta \in U(\theta_0)$ . Siccome l'insieme degli  $a \in A$  tali per cui  $a \cdot \theta$  assume un numero finito di valori è contenuto in uno spazio  $(n-1)$ -dimensionale, possiamo trovare un sottoinsieme  $U' \subseteq U(\theta_0)$  tale che  $\{a \cdot \theta : a \in A\}$  è infinito per  $\theta \in U'$ . Allora, facendo variare  $a$  in  $A$ , otteniamo

$$P_k(\theta) = 0$$

per  $\theta \in U'$  ed per ogni  $k$ , quindi  $P_k = 0$  per ogni  $k$ . In conclusione, abbiamo che

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbf{R}f(\theta, s) s^k ds = 0 \quad \forall k > 0.$$

Siccome i monomi sono densi in  $L^2([-1, 1])$ , concludiamo che  $\mathbf{R}f = 0$ , e quindi che  $f = 0$ . □

Tra i teoremi sopra dimostrati, l'unico a non richiedere (a priori) un numero infinito di direzioni è il Teorema 2.3.3. Se consideriamo solo un numero finito di direzioni, possiamo ottenere un risultato molto utile per la trasformata a raggi X:

**Teorema 2.3.6.** *Siano  $\theta_1, \dots, \theta_p \in S^{n-1}$ ,  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  compatto e  $f \in C_c^\infty(K)$ . Allora, per ogni compatto  $K_0$  contenuto nella parte interiore di  $K$ , esiste una funzione  $f_0 \in C_c^\infty(K)$  tale che coincida con  $f$  su  $K_0$  e tale che  $\mathbf{P}_{\theta_k} f_0 = 0$  per ogni  $k = 1, \dots, p$ .*

*Dimostrazione.* Definiamo

$$q(\xi) := \prod_{k=1}^p \theta_k \cdot \xi,$$

e sia  $Q$  l'operatore differenziale ottenuto sostituendo a ogni  $\xi_l$  la derivata  $-i \frac{\partial}{\partial x_l}$ . Cerchiamo allora una soluzione dell'equazione differenziale

$$Qh = f.$$

Per  $p = 1$ , tale equazione si legge

$$-i\theta_1 \cdot \nabla h = f,$$

dove  $\nabla$  è il gradiente. Ponendo  $x = s\theta_1 + y$ , con  $y \in \theta_1^\perp$ , una soluzione è

$$h(x) = i \int_0^s f(t\theta_1 + y) dt.$$

Per  $p > 1$  si ripete questa costruzione. Ora prendiamo  $\Psi \in C_c^\infty(K)$  tale che valga 1 su  $K_0$  e definiamo

$$f_0 = Q\Psi h.$$

Abbiamo allora che  $f_0 \in C_c^\infty(K)$  e che  $f_0 = Qh = f$  su  $K_0$ . Passando in trasformata di Fourier, e utilizzando **(R3)**, abbiamo allora

$$\widehat{f_0}(\xi) = q(\xi)\widehat{\Psi}h(\xi).$$

Non resta che utilizzare il Fourier Slice Theorem 2.1.1, per ottenere

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{P}_\theta f_0}(\eta) &= (2\pi)^{\frac{1}{2}} \widehat{f_0}(\eta) \\ &= (2\pi)^{\frac{1}{2}} q(\eta)\widehat{\Psi}h(\eta) \\ &= 0 \end{aligned}$$

per  $\eta \in \theta_k^\perp$ . Ne segue che  $\mathbf{P}_{\theta_k} f = 0$  per ogni  $k = 1, \dots, p$ . □

Proviamo a descrivere questo teorema a parole: il risultato appena dimostrato ci dice che per ogni oggetto che vogliamo ricostruire ne esiste uno che differisce dal primo solo in un intorno arbitrariamente piccolo della frontiera, e per il quale le proiezioni lungo le direzioni scelte  $\theta_1, \dots, \theta_p$  si annullano. A prima vista, sembrerebbe impossibile ricostruire la nostra  $f$  avendo un numero finito di direzioni, visto che in ogni compatto posso trovare una funzione che coincide con  $f$  stessa ma che non è  $f$ . Se però guardiamo la dimostrazione, notiamo che  $f_0$  (la funzione “copia” di  $f$ ), è una funzione con carattere altamente oscillante: siccome  $q$  è un polinomio di grado  $p$ ,  $\widehat{f_0}$  assume valori grandi per  $p$  grande e  $|\xi| > 1$  fissato. Questo vuol dire che  $f_0$  si comporta in modo molto irregolare nei dintorni della frontiera (dove appunto  $f_0 \neq f$ ).

Per risolvere questi problemi di indeterminazione, solitamente, si impongono condizioni sulla variazione della funzione  $f$ . Ma di questo ci occuperemo nel quarto capitolo di questa tesi.

## 2.4 Rango

In questa sezione ci occupiamo di descrivere i ranghi della trasformata di Radon e della trasformata a Raggi X. Come dimostreremo, questi ranghi non coincidono con tutto  $\mathcal{S}(\mathbf{Z})$  o, rispettivamente,  $\mathcal{S}(\mathbf{T})$ , ma soddisfano determinate condizioni, che ci permettono comunque di caratterizzare l'immagine di queste due trasformate. Iniziamo con un risultato che ci tornerà utile più avanti.



**Teorema 2.4.1.** Sia  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Per  $m = 0, 1, \dots$ , definiamo

$$p_m(\theta) := \int_{\mathbb{R}} s^m \mathbf{R}_\theta f(s) ds, \quad (2.6)$$

$$q_m(y) := \int_{\theta^\perp} (x \cdot y)^m \mathbf{P}_\theta f(x) dx, \quad y \perp \theta. \quad (2.7)$$

Abbiamo allora che  $p_m$  e  $q_m$  sono polinomi omogenei di grado  $m$ , con  $q_m$  indipendente da  $\theta$ . Le condizioni (2.6) e (2.7) sono dette “condizioni di consistenza di Helgason-Ludwig”.

*Dimostrazione.* Partiamo con  $\mathbf{R}_\theta$ . Scriviamo esplicitamente l’integrale di partenza e otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} s^m \mathbf{R}_\theta f(s) ds &= \int_{\mathbb{R}} s^m \int_{\theta^\perp} f(s\theta + y) dy ds \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (x \cdot \theta)^m f(x) dx, \end{aligned}$$

dove nel secondo passaggio abbiamo effettuato la sostituzione  $x = s\theta + y$ . Il termine  $(x \cdot \theta)^m$  è la nostra chiave di volta: sviluppando il prodotto scalare otteniamo una somma di termini in  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ , ed elevando il risultato alla  $m$  otteniamo una serie di termini di grado  $m$ . Usiamo la linearità dell’integrale per spezzare la somma, e a questo punto ricordiamo che tali integrali sono in  $dx$ , quindi i termini  $\theta_k$  rimangono intatti. Il risultato è quindi un polinomio omogeneo in  $\theta$  di grado  $m$ , proprio come volevamo.

Per  $\mathbf{P}_\theta$  il ragionamento è analogo:

$$\begin{aligned} \int_{\theta^\perp} (x \cdot y)^m \mathbf{P}_\theta f(x) dx &= \int_{\theta^\perp} (x \cdot y)^m \int_{\mathbb{R}} f(x + t\theta) dt dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (z \cdot y)^m f(z) dz, \end{aligned}$$

dove abbiamo posto  $z = x + t\theta$ . Ricordiamo che abbiamo supposto  $y \perp \theta$ , quindi  $x \cdot y = z \cdot y$ . Sfruttiamo di nuovo il prodotto scalare e la linearità dell’integrale e possiamo concludere (esattamente come prima) che quello ottenuto non è altro che un polinomio omogeneo di grado  $m$  nella variabile  $y$ .  $\square$

Utilizzando questi risultati siamo ora in grado di caratterizzare le funzioni nel rango della trasformata di Radon e della trasformata a Raggi X.

**Teorema 2.4.2.** Sia  $g \in \mathcal{S}(\mathbf{Z})$  una funzione pari (i.e.  $g(\theta, s) = g(-\theta, -s)$ ) e assumiamo che, per ogni  $m \in \mathbb{N}$ , si abbia

$$\int_{\mathbb{R}} s^m g(\theta, s) ds = p_m(\theta),$$

con  $p_m$  polinomio omogeneo di grado  $m$  in  $\theta$ . Allora, esiste  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  tale che  $g = \mathbf{R}f$ . Inoltre, se  $g(\theta, s) = 0$  per  $|s| \geq a$ , allora  $f(x) = 0$  per ogni  $|x| \geq a$ .

*Dimostrazione.* Riconducendosi al nostro beneamato Fourier Slice Theorem 2.1.1, è naturale definire  $f$  tramite la sua trasformata di Fourier, ponendo

$$\widehat{f}(\sigma\theta) = (2\pi)^{\frac{1-n}{2}} \widehat{g}(\theta, \sigma), \quad \sigma > 0. \quad (2.8)$$

Questo per il seguente motivo: siccome  $g$  è pari per ipotesi, lo è anche  $\widehat{g}$ , quindi l'equazione è valida anche per  $\sigma < 0$ . Se infine mostriamo che  $\widehat{f} \in \mathcal{S}$  abbiamo finito, poiché in tal caso avremmo che  $f \in \mathcal{S}$  e, applicando l'antistrasformata di Fourier all'equazione (2.8), avremmo  $g = \mathbf{R}f$ . L'unico punto critico da verificare è la lisciezza all'origine. Iniziamo riscrivendoci l'esponenziale complesso troncato ad un certo ordine  $q$ , ergo

$$e^{it} = \sum_{m=0}^{q-1} \frac{(it)^m}{m!} + e_q(t), \quad e_q(t) = \sum_{m=q}^{\infty} \frac{(it)^m}{m!}.$$

Per  $\widehat{f}$  definita come sopra, abbiamo

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\sigma\theta) &= (2\pi)^{\frac{1-n}{2}} \widehat{g}(\theta, \sigma) \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-is\sigma} g(\theta, s) ds \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left[ \sum_{m=0}^{q-1} \frac{(-i\sigma)^m}{m!} \int_{\mathbb{R}} s^m g(\theta, s) ds + \int_{\mathbb{R}} e_q(-\sigma s) g(\theta, s) ds \right] \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left[ \sum_{m=0}^{q-1} \frac{(-i\sigma)^m}{m!} p_m(\theta) + \int_{\mathbb{R}} e_q(-\sigma s) g(\theta, s) ds \right], \end{aligned}$$

con  $p_m$  il polinomio del Teorema 2.4.1. Siccome  $p_m$  è un polinomio omogeneo, effettuando la sostituzione  $\xi = \sigma\theta$  otteniamo

$$\widehat{f}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left[ \sum_{m=0}^{q-1} \frac{(-i)^m}{m!} p_m(\xi) + \int_{\mathbb{R}} e_q(-\sigma s) g(\theta, s) ds \right]. \quad (2.9)$$

A questo punto, denominiamo  $A_p$  l'insieme delle funzioni della forma

$$\sigma^p a(s\sigma) h(\theta, s),$$

dove  $a$  sono funzioni  $C^\infty$  e limitate, mentre  $h \in \mathcal{S}(\mathbf{Z})$  oppure è una combinazione lineare finita di funzioni in  $\mathcal{S}(\mathbf{Z})$ . Presa una multiderivata  $D^\alpha$  di ordine  $|\alpha| \leq q$  rispetto a  $\xi$ , dimostreremo che

$$D^\alpha e_q(\sigma s) g(\theta, s) \in A_{q-|\alpha|}. \quad (2.10)$$

Supponiamo di aver verificato (2.10). In tal caso, abbiamo dimostrato che  $\widehat{f}$  è liscia nell'origine: infatti, presa una multiderivata di ordine  $|\alpha| = q$  e  $\xi \neq 0$ , grazie a (2.9) abbiamo che

$$D^\alpha \widehat{f}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}} D^\alpha e_q(-\sigma s) g(\theta, s) ds.$$

Il primo addendo infatti sparisce poiché stiamo facendo una derivata di ordine  $q$ , e la sommatoria coinvolge polinomi di grado fino all'ordine  $q - 1$ . Siccome vale (2.10), abbiamo che l'integranda di quest'ultima equazione è una funzione limitata e  $C^\infty$ , e quindi  $D^\alpha \widehat{f}$  è liscia. Ma siccome  $q$  è arbitrario, abbiamo che  $\widehat{f} \in C^\infty$ .

Procediamo ora a dimostrare (2.10). Per questa dimostrazione dovremo esprimere la derivata rispetto a  $\xi$  in termini di derivate rispetto a  $\sigma$  e  $\theta$ . Poniamoci nella calotta sferica

$$\begin{aligned} \xi_i &= \sigma \theta_i, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \xi_n &= \sigma \sqrt{1 - \theta_1^2 - \dots - \theta_{n-1}^2}, \quad \theta_1^2 + \dots + \theta_{n-1}^2 < 1, \quad \sigma > 0. \end{aligned}$$

Tramite la regola della catena otteniamo subito

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} = \frac{\partial \sigma}{\partial \xi_j} \frac{\partial}{\partial \sigma} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \theta_i}{\partial \xi_j} \frac{\partial}{\partial \theta_i}.$$

Siccome

$$\sigma = \sqrt{(\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2)}, \quad \theta_i = \frac{\xi_i}{\sigma}, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

otteniamo per  $i = 1, \dots, n-1$  e  $j = 1, \dots, n$  che

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \xi_j} = \theta_j, \quad \frac{\partial \theta_i}{\partial \xi_j} = \frac{1}{\sigma} (\delta_{ij} - \theta_i \cdot \theta_j),$$

con  $\delta_{ij}$  il delta di Kronecker. Giungiamo quindi ad una descrizione esplicita della derivata rispetto a  $\xi_j$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi_j} &= \theta_j \frac{\partial}{\partial \sigma} + \frac{1}{\sigma} \sum_{i_1}^{n-1} (\delta_{ij} - \theta_i \cdot \theta_j) \frac{\partial}{\partial \theta_i} \\ &= \theta_j \frac{\partial}{\partial \sigma} + \frac{1}{\sigma} D_\theta, \end{aligned}$$

dove  $S_\theta = \sum_{i_1}^{n-1} (\delta_{ij} - \theta_i \cdot \theta_j)$  è un operatore differenziale lineare del primo ordine nelle variabili  $\theta_1, \dots, \theta_{n-1}$ , a coefficienti  $C^\infty$  che dipendono solo da  $\theta$ . Notiamo che

$$\left( \theta_j \frac{\partial}{\partial \sigma} + \frac{1}{\sigma} D_\theta \right) A_p \subseteq A_{p-1}, \quad p = 1, 2, \dots$$

Svolgendo questo calcolo in una calotta sferica, abbiamo

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} A_p \subseteq A_{p-1}, \quad p = 1, 2, \dots$$

Possiamo provare ora (2.10) per induzione. Il caso  $|\alpha| = 0$  equivale a provare che  $e_q(s\sigma)g(\theta, s) \in A_q$ . Questo è ovvio, basta raccogliere un fattore  $\sigma^q$ :

$$e_q(s\sigma)g(\theta, s) = \sum_{m=q}^{\infty} \frac{(is\sigma)^m}{m!} g(\theta, s) = \sigma^q \sum_{m=q}^{\infty} \frac{(is)^m \sigma^{m-q}}{m!} g(\theta, s).$$

Il fattore centrale è  $C^\infty$  e limitato, e sappiamo già che  $g \in \mathcal{S}$ . Assumiamo ora che (2.10) sia vera per tutte le derivate fino ad un ordine  $p < q$ , e sia  $|\alpha| = p$ . Allora, per i calcoli sopracitati, abbiamo che

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} D^\alpha e_q(s\sigma)g(\theta, s) \in \left( \theta_j \frac{\partial}{\partial \sigma} + \frac{1}{\sigma} D_\theta \right) A_{q-|\alpha|} \subseteq A_{q-|\alpha|-1},$$

e ciò significa che (2.10) vale anche per le derivate di ordine  $p+1$ . Questo conclude la prova per induzione, e quindi abbiamo che  $\widehat{f} \in C^\infty$ . Ci rimane da dimostrare che  $\widehat{f}$  e le sue derivate decadono all'infinito più velocemente di qualsiasi potenza di  $|\xi|$  quando  $|\xi| \rightarrow \infty$ . Ma questo è immediato: applicare  $\theta_j \frac{\partial}{\partial \sigma} + \frac{1}{\sigma} D_\theta$  a  $\widehat{f}(\sigma\theta)$  equivale ad applicarla a  $\widehat{g}(\theta, \sigma)$  grazie a (2.9), ma sappiamo già che  $\widehat{g}$  è una funzione Schwartz, quindi ha decadimento all'infinito maggiore di qualsiasi potenza di  $\xi$ .

Per quanto riguarda l'ultimo punto del teorema, le ipotesi ci dicono che  $g = \mathbf{R}f = 0$  al di fuori di una palla di raggio  $a$ . Come ben sappiamo, le palle in  $\mathbb{R}^n$  sono insiemi compatti e convessi, quindi possiamo applicare il Teorema del Buco 2.3.1 per concludere immediatamente.  $\square$

È ora il turno della trasformata a Raggi X:

**Teorema 2.4.3.** *Sia  $g \in \mathcal{S}(\mathbf{T})$  e sia  $g(\theta, x) = 0$  per  $|x| \geq a$ . Assumiamo che, per  $m = 1, 2, \dots$ , si abbia*

$$\int_{\theta^\perp} (x \cdot y)^m g(\theta, x) dx = q_m(y), \quad y \perp \theta,$$

con  $q_m$  polinomio omogeneo di grado  $m$  in  $y$  e indipendente da  $\theta$ . Allora esiste  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  con  $f(x) = 0$  per  $|x| \geq a$  tale che  $g = \mathbf{P}f$ .

*Dimostrazione.* Vogliamo ridurre questa dimostrazione al teorema appena dimostrato. Supponendo di sapere che  $g = \mathbf{P}f$ , potremmo esprimere  $\mathbf{R}f(\omega, s)$  in termini di  $\mathbf{P}f$  come dimostrato nella Proposizione 2.1.1. Per  $\theta \perp \sigma$  poniamo quindi

$$h_\theta(\omega, s) = \int_{\theta^\perp, x \cdot \omega = s} g(\theta, x) dx, \quad (2.11)$$

e mostriamo che  $h_\theta$  non dipende da  $\theta$  e che  $h_\theta = \mathbf{R}f$  per una certa  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , con supporto in  $|x| \leq a$ . Iniziamo calcolando

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} s^m h_\theta(\omega, s) ds &= \int_{\mathbb{R}} s^m \int_{\theta^\perp, x \cdot \omega = s} g(\theta, x) dx ds \\ &= \int_{\theta^\perp} (x \cdot \omega)^m g(\theta, x) dx \\ &= q_m(\omega), \end{aligned}$$

dove  $q_m$  è il polinomio del Teorema 2.4.1. Sappiamo che  $q_m$  non dipende da  $\theta$ , quindi il primo membro dell'equazione non dipende anch'esso da  $\theta$ . Sappiamo inoltre che  $h_\theta(\omega, s)$  si annulla se  $|s| \geq a$ , poiché  $g(\theta, x) = 0$  se  $|x| \geq a$ . Siccome i polinomi sono densi in  $L^2(-a, a)$ , ne segue che  $h_\theta$  non dipende da  $\theta$ , e quindi  $h = h_\theta$  soddisfa le ipotesi del teorema precedente. Quindi esiste  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  con supporto in  $|x| \leq a$  tale che  $h = \mathbf{R}f$ .

Se  $n = 2$ , abbiamo che  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{R}$  coincidono, quindi abbiamo la tesi. Se  $n > 2$  dobbiamo mostrare che  $g = \mathbf{P}f$ . Fissiamo  $\theta$ , e dimostriamo che l'integrale di  $g$  e  $\mathbf{P}f$  su iperpiani arbitrari in  $\theta^\perp$  coincidono. Se  $\{x \in \theta^\perp : x \cdot \omega = s\}$  è un iperpiano tale che  $\omega \in \theta^\perp$ , l'integrale di  $g$  su questo iperpiano ci restituisce esattamente  $h(\omega, s)$  (vedasi (2.11)). L'integrale di  $\mathbf{P}f$  invece ci restituisce:

$$\begin{aligned} \int_{\theta^\perp, x \cdot \omega = s} \mathbf{P}f(\theta, x) dx &= \int_{\theta^\perp, x \cdot \omega = s} \int_{-\infty}^{\infty} f(x + t\theta) dt dx \\ &= \int_{\theta^\perp \cap \omega^\perp} \int_{-\infty}^{\infty} f(s\omega + y + t\theta) dt dy \\ &= \int_{\omega^\perp} f(s\omega + z) dz \\ &= \mathbf{R}f(\omega, s). \end{aligned}$$

Siccome abbiamo detto che  $h = \mathbf{R}f$ , l'integrale di  $g$  e l'integrale di  $\mathbf{P}f$  coincidono. Questo vuol dire che la trasformata di Radon di  $g(\theta, \cdot)$  e di  $\mathbf{P}f(\theta, \cdot)$  coincidono su  $\theta^\perp$ . Ma la trasformata di Radon è iniettiva su  $\mathcal{S}(\theta^\perp)$ , quindi  $g = \mathbf{P}f$ .  $\square$

Sottolineiamo una sottile differenza fra i due teoremi: oltre alla condizione sull'integrale, il primo per ipotesi richiede di considerare una funzione  $g$  che sia pari (poiché lo è la trasformata di Radon) e appartenga a  $\mathcal{S}$ . Il secondo teorema richiede ipotesi analoghe, ma aggiunge la condizione che il supporto di  $g$  sia contenuto in una certa bolla di raggio  $a$ . Tale ipotesi, come vedremo nel seguente esempio, è essenziale.

Consideriamo  $h$  una funzione pari non banale in  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  tale che

$$\int_0^\infty s^m h(s) ds = 0, \quad m = 0, 1, \dots,$$

e sia  $u \in C^\infty(S^{n-1})$ . Definiamo allora

$$g(\theta, x) = u(\theta)h(|x|).$$

Chiaramente  $g \in \mathcal{S}(\mathbf{T})$ , visto che  $h$  è in  $\mathcal{S}$  e lo stiamo moltiplicando per una funzione liscia. Oltre a ciò, abbiamo che

$$\begin{aligned} \int_{\theta^\perp} (x \cdot y)^m g(\theta, x) dx &= u(\theta) \int_{\theta^\perp} (x \cdot y)^m h(|x|) dx \\ &= u(\theta) \int_{S^{n-1} \cap \theta^\perp} (\omega \cdot y)^m \int_0^\infty s^{n-2+m} h(s) ds d\omega \\ &= 0, \end{aligned}$$

dove nel penultimo passaggio abbiamo effettuato la sostituzione  $x = s\omega$  in  $\theta^\perp$ . Quindi,  $g$  soddisfa le condizioni di consistenza del teorema. Per  $n > 3$ , sia  $\omega \perp \theta$ . Allora abbiamo che

$$\int_{x \perp \theta, x \cdot \omega = s} g(\theta, x) dx = u(\theta) \int_{x \perp \theta, x \cdot \omega = s} h(|x|) dx = u(\theta) \mathbf{R}h(\omega, s),$$

dove  $h$  è considerata come la funzione radiale  $x \rightarrow h(|x|)$ , e  $\mathbf{R}$  è la trasformata di Radon  $(n-1)$ dimensionale. D'altra parte, se  $g = \mathbf{P}f$  per una qualche  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , abbiamo che

$$\int_{x \perp \theta, x \cdot \omega = s} g(\theta, x) dx = \int_{x \perp \theta, x \cdot \omega = s} \mathbf{P}f(\theta, x) dx = \mathbf{R}f(\omega, s).$$

In definitiva, abbiamo che

$$\mathbf{R}f(\omega, s) = u(\theta) \mathbf{R}h(\omega, s),$$

per  $\omega \perp \theta$ . Ma, se  $u$  non è costante, questa è una contraddizione, siccome  $\mathbf{R}h$  è indipendente da  $\omega$  e  $\mathbf{R}h \neq 0$  per l'iniettività di  $\mathbf{R}$ .

## 2.5 Stime di Sobolev

In questa sezione, ci poniamo l'obiettivo di stimare la norma di Sobolev della trasformata di Radon. Abbiamo dimostrato nel Teorema (2.1.6) alcuni risultati sulla continuità in spazi  $L^2$ . Il problema è che, lavorando su questi spazi, le inverse non risultano continue. Senza scendere nei dettagli per ogni trasformata, limitiamoci a mostrare intuitivamente cosa succede per  $\mathbf{R}_\theta$ . Se lavorassimo su spazi  $L^2$ , per studiare la continuità dell'inversa dovremmo cercare un  $M > 0$  tale che, per ogni  $f \in L^2$ , valga.

$$\|\mathbf{R}_\theta f\|_2 \geq M \|f\|_2.$$

Equivalentemente, siccome la trasformata di Fourier è un'isometria su  $L^2$ , possiamo provare a verificare

$$\|\widehat{\mathbf{R}_\theta f}\|_2 \geq M \|\widehat{f}\|_2. \quad (2.12)$$

Utilizzando le coordinate polari e il Fourier Slice Theorem 2.1.1, la norma di  $\widehat{f}$  si scrive

$$\begin{aligned}\|\widehat{f}\|_2 &= \int |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = \iint \sigma^{n-1} |\widehat{f}(\sigma\theta)|^2 d\sigma d\theta \\ &= (2\pi)^{\frac{1-n}{2}} \iint \sigma^{n-1} |\widehat{\mathbf{R}_\theta f}(\sigma)|^2 d\sigma d\theta.\end{aligned}$$

Quindi, mettendo assieme i pezzi, vorremmo avere che

$$\int |\widehat{\mathbf{R}_\theta f}(\sigma)|^2 d\sigma \geq (2\pi)^{\frac{1-n}{2}} \iint \sigma^{n-1} |\widehat{\mathbf{R}_\theta f}(\sigma)|^2 d\sigma d\theta,$$

ma è chiaro che la presenza di  $\sigma^{n-1}$  (che ricordiamo rappresenta il raggio delle nostre coordinate polari) nell'integrale del membro destra vanifica ogni speranza di poter verificare (2.12).

Non è consigliabile quindi lavorare su spazi  $L^2$ . Per ovviare a questo inconveniente ci spostiamo su spazi di Sobolev. Il nostro scopo sarà quindi studiare le norme di Sobolev delle trasformate analizzate finora. Visto che sappiamo come si comporta la trasformata di Fourier con la trasformata di Radon e a Raggi X, ci tornerà comodo definire una norma equivalente sugli spazi di Sobolev che utilizzi la trasformata di Fourier. Prima di procedere per tale percorso, ricordiamo che gli spazi di Sobolev su  $\mathbf{Z}$  e  $\mathbf{T}$  sono definiti dalle norme

$$\begin{aligned}\|g\|_{H^k(\mathbf{Z})} &= \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} (1 + \sigma^2)^k |\widehat{g}(\theta, \sigma)|^2 d\sigma d\theta, \\ \|g\|_{H^k(\mathbf{T})} &= \int_{S^{n-1}} \int_{\theta^\perp} (1 + |\eta|^2)^k |\widehat{g}(\theta, \eta)|^2 d\eta d\theta.\end{aligned}$$

Nel seguito, le derivate del tipo  $D^\alpha$  saranno sempre riferite al secondo argomento della funzione.

**Proposizione 2.5.1.** *Sia  $f \in H^k(\mathbb{K})$ , con  $\mathbb{K} = \mathbf{Z}$  o  $\mathbf{T}$ . Allora le norme*

$$\begin{aligned}\|f\|_{H^k(\mathbb{K})}^2 &= \int_{\mathbb{K}} \sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha f(x)|^2 dx, \\ \|f\|_{\widehat{H}^k(\mathbb{K})}^2 &= \int_{\mathbb{K}} (1 + |\eta|^2)^k |\widehat{f}(\theta, \eta)|^2 d\eta d\theta,\end{aligned}$$

*sono equivalenti.*

*Dimostrazione.* La prima norma può essere riscritta invertendo integrale e sommatoria per ottenere

$$\|f\|_{H^k(\mathbb{K})}^2 = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{L^2(\mathbb{K})}^2.$$

Grazie al teorema di Plancherel, sappiamo che la trasformata è un'isometria su  $L^2$ , e utilizzando le proprietà della trasformata di Fourier (**R3**), abbiamo che

$$\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{L^2(\mathbb{K})}^2 = \sum_{|\alpha| \leq k} \left\| \widehat{D^\alpha f} \right\|_{L^2(\mathbb{K})}^2 = \sum_{|\alpha| \leq k} \left\| |\eta|^\alpha \widehat{f} \right\|_{L^2(\mathbb{K})}^2 = \int_{\mathbb{K}} \sum_{|\alpha| \leq k} |\eta|^{2\alpha} |\widehat{f}|^2.$$

Utilizzando il binomio di Newton, la seconda norma può essere riscritta come

$$\int_{\mathbb{K}} (1 + |\eta|^2)^k \widehat{f}^2 = \int_{\mathbb{K}} \sum_{|\alpha| \leq k} \binom{k}{\alpha} |\eta|^{2\alpha} |\widehat{f}|^2.$$

Notiamo quindi che le due norme differiscono solo per il coefficiente binomiale di fronte al termine  $|\eta|^{2\alpha}$ . Siccome stiamo lavorando con somme finite, possiamo trovare due costanti  $c, C \in \mathbb{R}$  tali che

$$c \binom{k}{\alpha} \leq 1, \quad C \binom{k}{\alpha} \geq 1 \quad \forall |\alpha| \leq k.$$

In tal modo, otteniamo che

$$c \|f\|_{\widehat{H}^k(\mathbb{K})}^2 \leq \|f\|_{H^k(\mathbb{K})}^2 \leq C \|f\|_{\widehat{H}^k(\mathbb{K})}^2,$$

ergo le due norme sono equivalenti.  $\square$

Possiamo sfruttare queste nuove informazioni per ridefinire gli spazi di Sobolev  $H^k$  (e di conseguenza anche  $H_0^k$ ) su un aperto  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  tramite le distribuzioni temperate. In simboli,

$$H^k(\Omega) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\Omega) : (1 + |\xi|^2)^{k/2} \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\},$$

$$H_0^k(\Omega) = \left\{ f \in H^k(\mathbb{R}^n) : \text{supp}(f) \subseteq \overline{\Omega} \right\},$$

dove il supporto di  $f \in \mathcal{S}'$  è il complementare dei punti aventi un intorno in cui  $f$  si annulla (i.e.,  $f$  si annulla per ogni funzione  $C^\infty$  che ha supporto in tale intorno).

Non solo: possiamo anche ridefinire il prodotto scalare (ricordiamo che  $H^k$  è uno spazio di Hilbert) utilizzando la trasformata di Fourier:

$$(f, g)_{H^k(\Omega)} = \int_{\Omega} (1 + |\xi|^2)^k \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}(\xi)} d\xi.$$

Notiamo che questa definizione degli spazi di Sobolev è valida per  $k \in \mathbb{R}$ , mentre la definizione tramite le derivate deboli ha senso solo per  $k \in \mathbb{N}$ . Nonostante questo, tutto è coerente: senza utilizzare la trasformata di Fourier, gli spazi di Sobolev a esponente negativo  $H^{-k}$  si possono definire come i duali degli  $H^k$ . Si può dimostrare (ma non verrà fatto in questo elaborato) che le definizioni sono equivalenti. Per una trattazione più dettagliata, si rimanda a *On the maximal Sobolev regularity of distributions supported by subsets of Euclidean space* [6].

Siamo pronti ad enunciare il risultato chiave di questa sezione. Nel seguito indicheremo con  $\Omega^n$  la palla unitaria in  $\mathbb{R}^n$ .



**Teorema 2.5.1.** *Per ogni  $k \in \mathbb{R}$  esistono costanti positive  $c_{k,n}$ ,  $c'_{k,n}$ ,  $C_{k,n}$  e  $C'_{k,n}$  tali che, se  $f \in C_c^\infty(\Omega)$ , abbiamo*

$$c_{k,n} \|f\|_{H_0^k(\Omega^n)} \leq \|\mathbf{R}f\|_{H^{k+(n-1)/2}(\mathbf{Z})} \leq C_{k,n} \|f\|_{H_0^k(\Omega^n)}, \quad (2.13)$$

$$c'_{k,n} \|f\|_{H_0^k(\Omega^n)} \leq \|\mathbf{P}f\|_{H^{k+1/2}(\mathbf{T})} \leq C'_{k,n} \|f\|_{H_0^k(\Omega^n)}. \quad (2.14)$$

*Dimostrazione.* Iniziamo a dimostrare le disequazioni per  $\mathbf{R}$ . Come sempre, sfruttiamo il Fourier Slice Theorem 2.1.1, per avere

$$\widehat{\mathbf{R}f}(\theta, \sigma) = (2\pi)^{(n-1)/2} \widehat{f}(\sigma\theta).$$

Questo ci permette di riscrivere la norma di  $\mathbf{R}f$  in modo esplicito:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{R}f\|_{H^{k+(n-1)/2}(\mathbf{Z})}^2 &= \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} (1 + \sigma^2)^{k + \frac{n-1}{2}} |\widehat{\mathbf{R}f}(\sigma\theta)|^2 d\sigma d\theta \\ &= (2\pi)^{n-1} \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} (1 + \sigma^2)^{k + \frac{n-1}{2}} |\widehat{f}(\sigma\theta)|^2 d\sigma d\theta \\ &= 2(2\pi)^{n-1} \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty (1 + \sigma^2)^{k + \frac{n-1}{2}} |\widehat{f}(\sigma\theta)|^2 d\sigma d\theta. \end{aligned}$$

Effettuiamo la sostituzione  $\xi = \sigma\theta$  e abbiamo

$$\begin{aligned} \|\mathbf{R}f\|_{H^{k+(n-1)/2}(\mathbf{Z})}^2 &= 2(2\pi)^{n-1} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{1-n} (1 + |\xi|^2)^{k + \frac{n-1}{2}} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \quad (2.15) \\ &\geq 2(2\pi)^{n-1} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^k |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \\ &= 2(2\pi)^{n-1} \|f\|_{H_0^k(\Omega^n)}^2, \end{aligned}$$

e questo è il membro sinistro di (2.13). Per l'altra disuguaglianza, ripartiamo da (2.15), e spezziamo l'integrale in due parti, in cui nella prima integreremo su  $|\xi| \geq 1$  e nella seconda su  $|\xi| \leq 1$ . Nella prima abbiamo che vale  $|\xi|^2 \geq 2^{-1}(1 + |\xi|^2)$ , e quindi

$$\begin{aligned} \int_{|\xi| \geq 1} |\xi|^{1-n} (1 + |\xi|^2)^{k + \frac{n-1}{2}} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi &\leq 2^{\frac{n-1}{2}} \int_{|\xi| \geq 1} (1 + |\xi|^2)^k |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq 2^{\frac{n-1}{2}} \|f\|_{H_0^k(\Omega^n)}^2. \end{aligned}$$

L'integrale su  $|\xi| \leq 1$  si stima con

$$\begin{aligned} \int_{|\xi| \leq 1} |\xi|^{1-n} (1 + |\xi|^2)^{k + \frac{n-1}{2}} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi &\leq \sup_{|\xi| \leq 1} |\widehat{f}(\xi)|^2 \int_{|\xi| \leq 1} |\xi|^{1-n} (1 + |\xi|^2)^{k + \frac{n-1}{2}} d\xi \\ &= c_1(k, n) \sup_{|\xi| \leq 1} |\widehat{f}(\xi)|^2, \end{aligned}$$

dove  $\sup |\widehat{f}|^2$  è finito poiché  $f \in C_c^\infty(\Omega^n)$ . A questo punto vogliamo cercare di stimare questo estremo superiore. Scegliamo una funzione  $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  che valga 1 su  $\Omega^n$ , e definiamo  $\chi_\xi(x) = e^{-ix \cdot \xi} \chi(x)$ . Allora, utilizzando la relazione di Parseval (**R5**), abbiamo

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(\xi)| &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \chi_\xi(x) f(x) dx \right| \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left| \int_{\mathbb{R}^n} (\chi_\xi)^\sim(\eta) \widehat{f}(\eta) d\eta \right| \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left| \int_{\mathbb{R}^n} (\chi_\xi)^\sim(\eta) (1 + |\eta|^2)^{-\frac{k}{2}} (1 + |\eta|^2)^{\frac{k}{2}} \widehat{f}(\eta) d\eta \right| \\ &\leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\eta|^2)^{-k} |(\chi_\xi)^\sim(\eta)|^2 d\eta \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\eta|^2)^k |\widehat{f}(\eta)|^2 d\eta \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|\chi_\xi\|_{H^{-k}(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{H_0^k(\Omega^n)}, \end{aligned}$$

dove nel penultimo passaggio abbiamo applicato la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. La norma di  $\chi_\xi$  è continua nella variabile  $\xi$ , quindi sappiamo che esiste una costante  $c_2(k, n)$  tale che

$$\sup_{|\xi| \leq 1} \|\chi_\xi\|_{H^{-k}(\mathbb{R}^n)} \leq c_2(k, n).$$

Mettendo assieme i pezzi, otteniamo quindi

$$\|\mathbf{R}f\|_{H^{k+(n-1)/2}}^2 \leq 2(2\pi)^{n-1} \left( 2^{(n-1)/2} + (2\pi)^{-n} c_2^2(k, n) c_1(k, n) \right) \|f\|_{H_0^k(\Omega^n)},$$

che non è altro che il membro destro di (2.13), concludendo la dimostrazione per **R**.

Per la disuguaglianza di **P**, procediamo in modo simile. Utilizziamo per prima cosa il Fourier Slice Theorem, e come seconda cosa il Lemma (2.1.2):

$$\begin{aligned} \|\mathbf{P}f\|_{H^{k+1/2}(\mathbf{T})}^2 &= \int_{S^{n-1}} \int_{\theta^\perp} (1 + |\eta|^2)^{k+1/2} |\widehat{\mathbf{P}_\theta f}(\eta)|^2 d\eta d\theta \\ &= 2\pi \int_{S^{n-1}} \int_{\theta^\perp} (1 + |\eta|^2)^{k+1/2} |\widehat{f}(\eta)|^2 d\eta d\theta \\ &= 2\pi |S^{n-2}| \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{-1} (1 + |\xi|^2)^{k+1/2} |\widehat{f}|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Quest'ultimo pezzo è l'equivalente di (2.15) per **P**. Da qui in poi si procede esattamente alla stessa maniera di quanto fatto per **R**.  $\square$

Abbiamo quindi raggiunto il nostro obiettivo. Se lavoriamo con funzioni in  $H_0^k(\Omega^n)$ , abbiamo il controllo della norma di  $\mathbf{R}f$  (o  $\mathbf{P}f$ ). Avevamo già dimostrato

che la trasformata di Radon e la trasformata a Raggi X sono continue quando lavoriamo su  $L^2$ , ma spostandoci sugli spazi di Sobolev abbiamo ottenuto una nuova informazione, cioè

$$\|\mathbf{R}f\|_{H^{k+(n-1)/2}(\mathbf{Z})} \geq c_{k,n} \|f\|_{H_0^k(\Omega^n)},$$

$$\|\mathbf{P}f\|_{H^{k+1/2}(\mathbf{T})} \geq c'_{k,n} \|f\|_{H_0^k(\Omega^n)},$$

e queste due disuguaglianze ci assicurano la continuità dell'operatore inverso. Questo risultato è vitale visto che, come accennato a inizio elaborato, nel processo di scansione tomografica siamo **molto** interessati a invertire queste trasformate.

# Capitolo 3

## Accuratezza della ricostruzione

Abbiamo visto quali sono gli strumenti principali utilizzati nel corso del processo di scansione tomografica: la Trasformata di Radon e la Trasformata a Raggi X. Abbiamo anche visto che, a livello teorico, è possibile invertire la trasformata di Radon e ricavare la funzione  $f$  (che nel processo di scansione solitamente rappresenta la densità dell'oggetto). Nella pratica, ovviamente, non possiamo calcolare infiniti integrali su infiniti iperpiani, ma abbiamo a disposizione un numero limitato di informazioni. Dobbiamo quindi capire come implementare la nostra formula di inversione in casi realistici, e trovare una stima per l'errore che si può commettere nella ricostruzione. Per fare ciò, prima di tutto, dobbiamo gettare le basi: faremo una velocissima ricapitolazione dei concetti fondamentali riguardante i problemi inversi e, successivamente, procederemo a calcolare stime sugli errori possibili.

### 3.1 Problemi mal posti

In questa introduzione, discuteremo il condizionamento dei problemi solo per problemi lineari in spazi di Hilbert. Prendiamo  $H, K$  spazi di Hilbert, e sia  $A$  un operatore lineare limitato da  $H$  in  $K$ . Il problema

$$\text{dato } g \in K, \text{ trovare } f \in H \text{ t.c. } Af = g \quad (3.1)$$

è definito *ben posto secondo Hadamard* se

- esiste una soluzione per ogni  $g \in K$ ;
- la soluzione è unica per ogni  $g \in K$ ;
- la soluzione dipende in modo continuo da  $g$ .

Altrimenti, il problema viene detto *mal posto*.

In un problema mal posto sono presenti varie difficoltà: per esempio, l'operatore  $A^{-1}$  potrebbe non essere continuo, o non essere definito su tutto  $K$ , o addirittura

potrebbe non esistere. Anche supponendo che il problema sia effettivamente risolvibile, incontriamo grosse difficoltà pratiche: se il problema non dipende in modo continuo da  $g$ , abbiamo che la soluzione di  $Af = g$  non è necessariamente vicina a quella di  $Af = g^\varepsilon$  se  $g^\varepsilon$  è vicino a  $g$ .

I matematici non si sono lasciati scoraggiare da questi ostacoli, e nel seguito vedremo come aggirare tali complicazioni.

Per prima cosa, possiamo definire un “sostituto” della soluzione nel caso non ce ne sia una. Prendiamo come soluzione  $f$  l’elemento che minimizza la quantità  $\|Af - g\|$  (dove la norma è quella indotta dal prodotto interno in  $K$ ). Ciò è sensato se  $g \in R(A) + (R(A))^\perp$ , dove  $R(A)$  indica il rango di  $A$  (infatti, se supponessimo solo  $g \in R(A)$ , staremmo cercando una soluzione esatta).

Per risolvere il problema della non-unicità, tra tutti gli elementi che soddisfano la condizione precedente scegliamo quello di norma minima. Questo elemento di  $H$  è detto *soluzione generalizzata di Moore-Penrose*, ed è denotata con  $A^+g$ . Più rigorosamente, un operatore lineare  $A^+ : H \rightarrow K$  con dominio  $R(A) + (R(A))^\perp$  è detto *inverso generalizzato di Moore-Penrose di  $A$*  se rispetta le *condizioni di Penrose*:

$$\begin{aligned} AA^+A &= A, \\ A^+AA^+ &= A^+, \\ (AA^+)^* &= AA^+, \\ (A^+A)^* &= A^+A. \end{aligned}$$

Notiamo che se  $A$  è un operatore invertibile,  $A^{-1}$  rispetta le condizioni di Penrose, e quindi l’operatore inverso  $A^{-1}$  coincide con l’operatore pseudo-inverso  $A^+$  (per maggiori dettagli rifarsi a *Introduction to Numerical Analysis* [11]). Vediamo ora un risultato riguardante l’operatore di Moore-Penrose.

**Teorema 3.1.1.** *Nelle condizioni del problema (3.1), l’elemento  $f = A^+g$  è l’unica soluzione di*

$$A^*Af = A^*g$$

*in  $\overline{R(A^*)}$ .*

*Dimostrazione.* Abbiamo che  $f$  minimizza  $\|Af - g\|$  se e solo se

$$(Af - g, Au) = 0 \quad \forall u \in H,$$

che, utilizzando le proprietà dell’operatore aggiunto, si traduce in

$$A^*Af = A^*g.$$

Tra tutte le soluzioni di questa equazione, quella con norma minima si trova in  $(\text{Ker}(A))^\perp = \overline{R(A^*)}$ .  $\square$

In generale,  $A^+$  potrebbe non essere continuo. Si può dimostrare che  $A^+$  è limitato se e solo se  $R(A)$  è chiuso (per approfondimenti, consultare *Moore-Penrose inverse of linear operators in Hilbert Space* [7]). Per trovare un esempio di pseudo-inverso generalizzato non continuo, quindi, ci basta cercare un operatore che abbia rango aperto. Consideriamo allora  $T: \ell^2 \rightarrow \ell^2$  definito da

$$\ell^2 \ni (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \xrightarrow{T} (x_1, \frac{x_2}{2}, \dots, \frac{x_n}{n}, \dots) \in \ell^2.$$

Questo operatore è ben definito, lineare, limitato e iniettivo. Assumiamo per assurdo che  $R(T)$  sia chiuso. Allora per il Teorema della Mappa Aperta, l'inversa  $T^{-1}: R(T) \rightarrow \ell^2$  definita da

$$R(T) \ni (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) \xrightarrow{T^{-1}} (y_1, 2y_2, \dots, ny_n, \dots) \in \ell^2$$

sarebbe limitata. Consideriamo allora l'elemento canonico  $e_n$  (con tutte entrate zero eccetto per la posizione  $n$ -esima, dove vale 1). Siccome  $\|e_n\|_{\ell^2} = 1$ , avremmo allora che  $\|T^{-1}\| \geq \|T^{-1}(e_n)\|_{\ell^2} = n \rightarrow \infty$  per  $n \rightarrow \infty$ , contraddicendo la limitatezza di  $T^{-1}$ . Quindi non può avere rango chiuso e, per quanto detto prima, lo pseudo-inverso  $T^+$  non è continuo.

Per risolvere questo inconveniente sulla limitatezza, introduciamo la nozione di *regolarizzazione di  $A^+$* . La regolarizzazione di  $A^+$  è una famiglia di operatori lineari limitati  $(T_\gamma)_{\gamma>0}$  da  $K$  in  $H$  tali che

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} T_\gamma g = A^+ g$$

sul dominio di  $A^+$ . Supponendo  $A^+$  non limitato, abbiamo ovviamente che  $\|T_\gamma\| \rightarrow \infty$  se  $\gamma \rightarrow 0$ . Utilizzando il concetto di regolarizzazione possiamo risolvere (3.1) in modo approssimato.

Prendiamo  $g^\varepsilon \in K$  tale che  $\|g^\varepsilon - g\| \leq \varepsilon$ , e prendiamo  $\gamma(\varepsilon)$  tale che, se  $\varepsilon \rightarrow 0$ , si abbia

$$\gamma(\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \|T_{\gamma(\varepsilon)}\| \varepsilon \rightarrow 0.$$

Allora, se  $\varepsilon \rightarrow 0$ , abbiamo che

$$\begin{aligned} \|T_{\gamma(\varepsilon)}g^\varepsilon - A^+g\| &= \|T_{\gamma(\varepsilon)}g^\varepsilon - T_{\gamma(\varepsilon)}g + T_{\gamma(\varepsilon)}g - A^+g\| \\ &\leq \|T_{\gamma(\varepsilon)}(g^\varepsilon - g)\| + \|T_{\gamma(\varepsilon)}g - A^+g\| \\ &\leq \|T_{\gamma(\varepsilon)}\| \varepsilon + \|T_{\gamma(\varepsilon)}g - A^+g\| \\ &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Quindi  $T_{\gamma(\varepsilon)}g^\varepsilon$  è vicina a  $A^+g$  se  $g^\varepsilon$  è vicina a  $g$ .

Il parametro  $\gamma(\varepsilon)$  è detto *parametro di regolarizzazione*, e dipende dal rumore  $\varepsilon$ . Determinare un buon parametro di regolarizzazione è un punto cruciale in ogni metodo di regolarizzazione. In questo elaborato non ci occuperemo di questi

dettagli, ma assumeremo che sia sempre possibile trovare un buon parametro di regolarizzazione.

Ci sono vari metodi per costruire una regolarizzazione. Vediamo un paio di esempi.

**Esempio (1). *Decomposizione a valori singolari troncata.***

Supponiamo di poter rappresentare l'operatore  $A$  come

$$Af = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k(f, f_k) g_k, \quad (3.2)$$

dove  $\{f_k\}$  e  $\{g_k\}$  sono sistemi ortonormali rispettivamente in  $H$  e  $K$ , e i  $\sigma_k > 0$  sono i valori singolari di  $A$ . Assumiamo che la successione dei valori singolari  $\{\sigma_k\}$  sia limitata. Possiamo scriverci esplicitamente l'operatore  $A^*$  utilizzando la definizione di operatore aggiunto, cioè

$$(Af, g) = (f, A^*g).$$

Infatti, partendo dal membro di sinistra e sfruttando (3.2), abbiamo

$$(Af, g) = \left( \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k(f, f_k) g_k, g \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k(f, f_k) (g_k, g) = \left( f, \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k(g, g_k) f_k \right). \quad (3.3)$$

L'operatore  $A^*$  si rappresenta quindi come

$$A^*g = \sum_{k=1}^{\infty} (g, g_k) f_k.$$

La composizione dei due operatori, i.e.

$$A^*Af = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2(f, f_k) f_k,$$

$$AA^*g = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2(g, g_k) g_k,$$

restituisce operatori autoaggiunti in  $H$  e  $K$ . Lo spettro di  $A^*A$  consiste degli autovalori  $\sigma_k^2$  relativi agli autovettori  $f_k$ . Vale l'analogo per  $AA^*$  con autovettori  $g_k$ . Da queste equazioni discende che

$$A^*g_k = \sigma_k f_k, \quad Af_k = \sigma_k g_k. \quad (3.4)$$

Vediamo come sfruttare questa decomposizione per costruire la nostra regolarizzazione:

**Teorema 3.1.2.** *Se  $A$  ammette la decomposizione ai valori singolari (3.2), allora abbiamo*

$$A^+g = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^{-1}(g, g_k) f_k.$$

*Dimostrazione.* Per prima cosa mostriamo che la serie converge se  $g$  appartiene al dominio di  $A^+$ , cioè se  $g \in R(A) + (R(A))^\perp$ . Possiamo quindi scrivere  $g = Av + u$ , con  $u \in (R(A))^\perp$ . Abbiamo allora che

$$\begin{aligned} (g, g_k) &= (Av + u, g_k) \\ &= (Av, g_k) + (u, g_k) \\ &= (v, A^*g_k) + (u, g_k). \end{aligned}$$

Ricordando (3.4), abbiamo che  $g_k \in R(A)$ , quindi il prodotto interno con  $u \in (R(A))^\perp$  è zero. Inoltre sappiamo che  $A^*g_k = \sigma_k f_k$ , quindi in definitiva otteniamo

$$(g, g_k) = \sigma_k(v, f_k).$$

Abbiamo allora che

$$f^+ = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^{-1}(g, g_k) f_k = \sum_{k=1}^{\infty} (v, f_k) f_k,$$

che è una serie convergente (poiché non è altro che la proiezione di  $v$  sulla chiusura dello spazio vettoriale generato dal sistema ortonormale  $\{f_k\}$  in  $H$ ). Applicando l'operatore  $A^*A$  termine a termine, otteniamo

$$\begin{aligned} A^*A f^+ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^{-1}(g, g_k) A^*A f_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k(g, g_k) f_k \\ &= A^*g. \end{aligned}$$

Abbiamo che  $f^+ \in \overline{R(A^*)}$  (infatti  $f^+$  si scrive come limite di una combinazione lineare di  $\{f_k\}$ , ma da (3.4) sappiamo che  $\sigma_k f_k = A^*g_k$ ); utilizzando quindi il Teorema 3.1.1, otteniamo che  $f^+ = A^+g$ .  $\square$

Notiamo che l'operatore  $A^+$  non è limitato se e solo se  $\sigma_k \rightarrow 0$  per  $k \rightarrow \infty$ . Costruiamo quindi in questo caso la sopracitata *decomposizione a valori singolari troncata*, ponendo

$$T_\gamma g = \sum_{k \leq 1/\gamma} \sigma_k^{-1}(g, g_k) f_k.$$



Abbiamo, grazie al teorema precedente, che  $T_\gamma \rightarrow A^+$  se  $\gamma \rightarrow 0$ , è che  $T_\gamma$  è limitato con la stima

$$\|T_\gamma\| \leq \sup_{k \leq 1/\gamma} \sigma_k^{-1}.$$

In questo modo siamo in grado di individuare dove si concentrano le complicazioni se il problema è mal posto: sia  $g^\varepsilon$  un'approssimazione di  $g$  tale che  $\|g^\varepsilon - g\| \leq \varepsilon$ . Se conosciamo unicamente  $g^\varepsilon$ , quello che possiamo dire riguardo ai coefficienti nell'espansione di  $A^+g$  del Teorema 3.1.1 è che

$$|\sigma_k^{-1}(g, g_k) - \sigma_k^{-1}(g^\varepsilon, g_k)| \leq \frac{\varepsilon}{\sigma_k}.$$

Se  $\sigma_k$  è piccolo, la stima di cui sopra è molto imprecisa, ergo il contributo di  $g_k$  nella sommatoria di  $A^+g$  non può essere approssimato in maniera affidabile conoscendo solo  $g^\varepsilon$ . Abbiamo quindi compreso che analizzare i valori singolari (e le relative componenti  $g_k$ ) ci mostra quali parti della nostra soluzione  $f$  possiamo recuperare tramite un'approssimazione e quali no.

**Esempio (2). Metodi iterativi.** Supponiamo di avere un metodo iterativo per trovare la soluzione di  $Af = g$  che abbia la forma

$$f^{k+1} = B_k f^k + C_k g, \quad k = 0, 1, \dots$$

con  $B_k, C_k$  operatori lineari limitati. Assumiamo che  $f^k$  converga ad  $A^+g$ . Per ogni  $\gamma > 0$  sia  $k(\gamma)$  un indice tale che  $k(\gamma) \rightarrow \infty$  se  $\gamma \rightarrow 0$ . Allora

$$T_\gamma f := f^{k(\gamma)}$$

è una regolarizzazione di  $A^+$ . In questo caso, per determinare un buon parametro di regolarizzazione  $\gamma$  è necessario fermare l'iterazione dopo un certo numero di passi (early stopping). In generale, un metodo iterativo che converge per  $g$  nel dominio di  $A^+$  non è detto che converga per tutti i  $g$ . Piuttosto, esibisce un fenomeno di semi-convergenza: fornisce una soluzione soddisfacente dopo un certo numero di passi, ma si deteriora se l'iterazione viene prolungata troppo a lungo.

Grazie ai metodi di regolarizzazione possiamo risolvere un problema mal posto in modo approssimato. Imponendo condizioni su  $A$  e sulla soluzione  $f$  possiamo affinare l'accuratezza dell'approssimazione.

Nell'ambito della tomografia computerizzata prenderemo  $H = L^2(\Omega^n)$ , dove  $\Omega^n$  è la palla unitaria in  $\mathbb{R}^n$ , e imponiamo due condizioni:

- Esiste  $\alpha > 0$  e costanti positive  $m, M$  tali che

$$m \|f\|_{H_0^{-\alpha}(\Omega^n)} \leq \|Af\|_K \leq M \|f\|_{H_0^{-\alpha}(\Omega^n)}. \quad (3.5)$$

- La soluzione  $f$  appartiene allo spazio di Sobolev  $H_0^\beta(\Omega^n)$  e per  $\beta > 0$  si ha

$$\|f\|_{H_0^\beta(\Omega^n)} \leq \rho. \quad (3.6)$$

Da (3.5) segue che l'operatore  $A^{-1}$  da  $K$  in  $L^2(\Omega^n)$  non è limitato. Infatti abbiamo che l'operatore  $A|_{H_0^{-\alpha}(\Omega^n)} : H_0^{-\alpha}(\Omega^n) \rightarrow K$  è continuo e, per il teorema di Rellich-Kondrachov, l'inclusione  $i : L^2(\Omega^n) \hookrightarrow H_0^{-\alpha}(\Omega^n)$  è compatta (per una trattazione più analitica, rifarsi a *Partial Differential Equations* [2]). Quindi abbiamo che  $A = (A|_{H_0^{-\alpha}(\Omega^n)}) \circ i : L^2(\Omega^n) \hookrightarrow H_0^{-\alpha}(\Omega^n) \rightarrow K$  è compatto. Ma l'inverso di un'operatore compatto su uno spazio di dimensione infinita non è limitato.

Questo vuol dire che, assumendo valga (3.5),  $Af = g$  è un problema mal posto nel setting  $L^2(\Omega^n) \rightarrow K$ . La condizione (3.6) invece è una condizione di regolarità che imponiamo su  $f$ , ed è un'esempio di un'informazione *a priori* richiesta sulla soluzione esatta. Vedremo che, grazie a questa ipotesi, potremo ridurre la variazione di  $f$  ed evitare il problema di indeterminazione visto nel Teorema 2.3.6.

Supponiamo ora di non conoscere la soluzione  $g$  ma di avere solo un'approssimazione  $g^\varepsilon$  tale che  $\|g - g^\varepsilon\| \leq \varepsilon$ . Allora le informazioni che abbiamo sulla soluzione esatta  $f$  sono date da

$$\|Af - g^\varepsilon\|_K \leq \varepsilon, \quad \|f\|_{H_0^\beta(\Omega^n)} \leq \rho. \quad (3.7)$$

Se  $f_1, f_2$  sono due elementi che soddisfano (3.7) ne segue che

$$\|A(f_1 - f_2)\|_K \leq 2\varepsilon, \quad \|f_1 - f_2\|_{H_0^\beta(\Omega^n)} \leq 2\rho.$$

Definendo

$$d(\varepsilon, \rho) := \sup \left\{ \|f\|_{L^2(\Omega^n)} : \|Af\|_K \leq \varepsilon, \|f\|_{H_0^\beta(\Omega^n)} \leq \rho \right\},$$

otteniamo che

$$\|f_1 - f_2\|_{L^2(\Omega^n)} \leq d(2\varepsilon, 2\rho).$$

Abbiamo quindi che  $d(2\varepsilon, 2\rho)$  può essere considerato l'errore massimo nella ricostruzione di  $f$  a partire dal dato perturbato  $g^\varepsilon$  nel caso in cui valgano (3.5) e (3.6). A questo punto è naturale chiedersi quale sia il comportamento di  $d(\varepsilon, \rho)$  se  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Prima di parlare di ciò, dobbiamo dimostrare un risultato preliminare sull'interpolazione delle norme di Sobolev:

**Proposizione 3.1.1.** *Siano  $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ ,  $f \in H^{t_1}(\mathbb{R}^n)$  e definiamo  $t_\sigma = (1 - \sigma)t_0 + \sigma t_1$  con  $\sigma \in [0, 1]$ . Allora abbiamo*

$$\|f\|_{H^{t_\sigma}(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{H^{t_0}(\mathbb{R}^n)}^{1-\sigma} \|f\|_{H^{t_1}(\mathbb{R}^n)}^\sigma.$$

*Dimostrazione.* Scriviamo la norma di  $f$  in  $H^{t_\sigma}(\mathbb{R}^n)$  come

$$\|f\|_{H^{t_\sigma}(\mathbb{R}^n)} = \left\| (1 + |\cdot|^2)^{\frac{t_\sigma}{2}} \widehat{f} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Scegliamo ora  $\alpha, \beta$  tali che  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{2}$  per ottenere:

$$\begin{aligned} \|f\|_{H^{t_\sigma}(\mathbb{R}^n)} &= \left\| (1 + |\cdot|^2)^{\frac{t_\sigma}{2}} \widehat{f} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &= \left\| \left( (1 + |\cdot|^2)^{\frac{t_0}{2}} \right)^{1-\sigma} |\widehat{f}|^{1-\sigma} \cdot \left( (1 + |\cdot|^2)^{\frac{t_1}{2}} \right)^\sigma \widehat{f}^\sigma \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \left\| (1 + |\cdot|^2) \widehat{f} \right\|_{L^\alpha(\mathbb{R}^n)}^{1-\sigma} \left\| (1 + |\cdot|^2) \widehat{f} \right\|_{L^\beta(\mathbb{R}^n)}^\sigma, \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato la disuguaglianza di Hölder. Vogliamo che il primo fattore sia  $\|f\|_{H^{t_0}}$ , quindi scegliamo  $\alpha = \frac{2}{1-\sigma}$ . Di conseguenza abbiamo che

$$\beta = \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{\frac{\sigma}{2}} = \frac{2}{\sigma}.$$

Tirando le somme abbiamo quindi che

$$\begin{aligned} \|f\|_{H^{t_\sigma}(\mathbb{R}^n)} &\leq \left\| (1 + |\cdot|^2) \widehat{f} \right\|_{L^\alpha(\mathbb{R}^n)}^{1-\sigma} \left\| (1 + |\cdot|^2) \widehat{f} \right\|_{L^\beta(\mathbb{R}^n)}^\sigma \\ &= \left\| (1 + |\cdot|^2) \widehat{f} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{1-\sigma} \left\| (1 + |\cdot|^2) \widehat{f} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^\sigma \\ &= \|f\|_{H^{t_0}(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{H^{t_1}(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned}$$

cioè la nostra tesi. □

Si può dimostrare che questo risultato vale anche se prendiamo  $H_0^\alpha(\Omega^n)$ .

Siamo ora pronti per analizzare il comportamento asintotico di  $d(\varepsilon, \rho)$ :

**Teorema 3.1.3.** *Se vale la condizione (3.5), allora esiste una costante  $c(m, \alpha, \beta)$  tale che*

$$d(\varepsilon, \rho) \leq c(m, \alpha, \beta) \varepsilon^{\frac{\beta}{\beta+\alpha}} \rho^{\frac{\alpha}{\beta+\alpha}}.$$

*Dimostrazione.* Grazie alla Proposizione 3.1.1, sappiamo che, fissati  $\alpha \leq \gamma \leq \beta$ , si ha

$$\|f\|_{H^\gamma(\Omega^n)} \leq \|f\|_{H^\alpha(\Omega^n)}^{\frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha}} \|f\|_{H^\beta(\Omega^n)}^{\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}}.$$

Questa è infatti una diretta applicazione della proposizione sopracitata, scegliendo  $t_\sigma = \gamma$  e  $\sigma = \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ . Per dimostrare la nostra tesi, collochiamoci negli spazi di Sobolev  $H_0^{-\alpha}(\Omega^n)$ , scegliamo  $\gamma = 0$  e sostituiamo  $\alpha$  con  $-\alpha$  per ottenere

$$\|f\|_{L^2(\Omega^n)} \leq \|f\|_{H_0^{-\alpha}(\Omega^n)}^{\frac{\beta}{\beta+\alpha}} \|f\|_{H_0^\beta(\Omega^n)}^{\frac{\beta}{\beta+\alpha}}.$$

Se  $\|Af\| \leq \varepsilon$ , allora

$$\|f\|_{H_0^{-\alpha}(\Omega^n)} \leq \frac{\varepsilon}{m}$$

grazie a (3.5). Quindi, se  $\|Af\| \leq \varepsilon$  e  $\|f\|_{H_0^\beta(\Omega^n)} \leq \rho$ , otteniamo che

$$\|f\|_{L^2(\Omega^n)} \leq \left(\frac{\varepsilon}{m}\right)^{\frac{\beta}{\beta+\alpha}} \rho^{\frac{\alpha}{\beta+\alpha}}.$$

Passando al sup otteniamo quindi la tesi.  $\square$

Cosa ci dice, in parole povere, questo teorema?

Sia  $\varepsilon$  l'errore sui dati di un problema mal posto in cui le condizioni (3.5) e (3.6) sono rispettate. Allora la soluzione esatta può essere recuperata con un'accuratezza dell'ordine di  $O(\varepsilon^{\frac{\beta}{\beta+\alpha}})$ . Siccome  $\frac{\beta}{\beta+\alpha} < 1$ , abbiamo sempre una perdita di accuratezza. Questo ci permette di classificare i problemi mal posti:

- Gravemente mal posto (*severely ill-posed*) se  $\frac{\beta}{\beta+\alpha}$  è vicino a 0. Sotto tale condizione, la perdita di accuratezza è molto marcata. In questa casistica ricadono i problemi in cui  $\alpha = \infty$ , i.e. la stima (3.5) non è valida per nessun  $\alpha$  finito;
- Mediamente mal posto (*mildly ill-posed*) se  $\frac{\beta}{\beta+\alpha}$  è vicino ad 1. In quel caso abbiamo una piccola perdita di accuratezza;
- Leggermente mal posto (*modestly ill-posed*) se  $\frac{\beta}{\beta+\alpha}$  non è nè vicino a 0 nè vicino a 1.

Il parametro  $\alpha$  ci indica quanto l'operatore  $A$  sia "smoothing". Notiamo che la classificazione dei problemi mal posti non dipende solo dalle proprietà dell'operatore  $A$  (cioè da (3.5)), ma anche dalla regolarità della soluzione (cioè da (3.6)).

## 3.2 Stima degli errori per la trasformata di Radon e la trasformata a Raggi X

Utilizzando il Teorema 2.5.1,  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{P}$  soddisfano (3.5) rispettivamente con  $\alpha = \frac{n-1}{2}$  e  $\alpha = \frac{1}{2}$ . L'unico dettaglio rimasto da approfondire è decidere quale spazio di Sobolev scegliere in cui collocare la densità dell'immagine  $f$  che vorremmo ricostruire. Prima di fare ciò, dobbiamo introdurre un ultimo strumento che ci tornerà utile in seguito:

**Definizione 3.2.1.** Le funzioni di Bessel sono le soluzioni canoniche  $y(x)$  di particolari equazioni differenziali lineari del secondo ordine, dette equazioni di Bessel:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \alpha)y = 0,$$

con  $\alpha$  un numero complesso arbitrario, che rappresenta l'ordine della funzione. Quando  $\alpha \in \mathbb{N}$ , le funzioni di Bessel vengono anche dette armoniche cilindriche.

Le soluzioni di quest'equazione differenziale possono essere divise in due categorie principali, che si distinguono principalmente per il loro comportamento in un intorno dell'origine:

- *Funzioni di Bessel del primo tipo*  $J_\alpha(x)$ , che sono soluzioni che ammettono un valore finito in  $x = 0$ ;
- *Funzioni di Bessel del secondo tipo*  $K_\alpha(x)$  (dette anche funzioni di Neumann), che sono soluzioni che presentano una singolarità in  $x = 0$ .

Ci concentreremo brevemente solo sulla prima categoria, poiché in questo elaborato utilizzeremo solo funzioni di Bessel del primo tipo.

Utilizzando il Metodo di Frobenius sulle equazioni di Bessel, possiamo scriverci in maniera esplicita le funzioni di Bessel del primo tipo come:

$$J_\alpha(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m + \alpha + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m + \alpha}.$$

Nel seguito, utilizzeremo in particolare due proprietà importanti delle funzioni di Bessel (che non dimostreremo in questo elaborato. Le dimostrazioni possono essere recuperate su *The Mathematics of Computerized Tomography, cap. VII.3.3 [9]*):

- Le funzioni di Bessel possono essere utilizzate per descrivere particolari integrali di armoniche sferiche: indicando con  $Y_l$  un'armonica sferica di grado  $l$ , e fissati  $\sigma \in \mathbb{R}$  e  $\theta \in S^{n-1}$ , si ha che vale

$$\int_{S^{n-1}} e^{i\sigma\theta \cdot \omega} Y_l(\omega) d\omega = (2\pi)^{\frac{n}{2}} i^l \sigma^{\frac{2-n}{2}} J_{l+\frac{n-2}{2}}(\sigma) Y_l(\theta). \quad (3.8)$$

- Se  $z \in \mathbb{R}$  vale la seguente formula integrale:

$$\int_0^z t^m J_{m-1}(t) dt = z^m J_m(z). \quad (3.9)$$

Un'ultima informazione che ci tornerà utile è il comportamento asintotico delle funzioni di Bessel del primo tipo. Fissato  $\alpha$ , si ha che

$$J_\alpha(x) = \left(\frac{2}{\pi x} \cos\left(x - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right)^{\frac{1}{2}} + O\left(\frac{1}{x}\right). \quad (3.10)$$

A questo punto possiamo procedere. Come accennato all'inizio della sezione, vogliamo capire in quale spazio di Sobolev collocarci per ricostruire la nostra  $f$ . Come requisito base, vorremmo saper ricostruire immagini rappresentate da funzioni lisce ovunque a meno di discontinuità a salto lungo superfici  $(n - 1)$ -dimensionali. Pensiamo, giusto per farci un'idea, alla funzione caratteristica della

palla unitaria ( $f = \mathbb{1}_{\Omega^n}$ ). Visto che vogliamo analizzarne la sua norma di Sobolev, cerchiamo di capire come scrivere la trasformata di Fourier di  $f$ :

$$\widehat{f}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} f(x) dx = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \mathbb{1}_{\Omega^n}(x) dx = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\Omega^n} e^{ix \cdot \xi} dx.$$

Passiamo a coordinate polari  $x = \sigma\theta$ , ricordando che stiamo integrando sulla palla unitaria (e quindi  $\sigma$  si muoverà tra 0 e  $|\xi|^{-1}$ ), e successivamente utilizziamo (3.8) con  $l = 0$ :

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_0^{|\xi|^{-1}} \sigma^{n-1} \int_{S^{n-1}} e^{i\sigma\theta \cdot \xi} d\theta d\sigma \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_0^{|\xi|^{-1}} \sigma^{n-1} (2\pi)^{\frac{n}{2}} \sigma^{(2-n)/2} J_{\frac{n}{2}-1}(\sigma) d\sigma \\ &= \int_0^{|\xi|^{-1}} \sigma^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(\sigma) d\sigma. \end{aligned}$$

A questo punto utilizziamo (3.9) per concludere e ottenere

$$\widehat{f}(\xi) = |\xi|^{-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}}(|\xi|).$$

Possiamo quindi analizzare la norma di Sobolev di  $f$ :

$$\begin{aligned} \|f\|_{H^\beta(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^\beta |\xi|^{-n} J_{\frac{n}{2}}^2(|\xi|) d\xi \\ &= |S^{n-1}| \int_0^\infty (1 + \sigma^2)^\beta \sigma^{-1} J_{\frac{n}{2}}^2(\sigma) d\sigma. \end{aligned}$$

Siccome per  $\sigma \rightarrow \infty$  abbiamo che  $J_{\frac{n}{2}}(\sigma)$  decade come  $\frac{1}{\sqrt{\sigma}}$  (vedasi (3.10)), l'integrale è finito se e solo se  $\beta < \frac{1}{2}$ .

Ne concludiamo quindi che per le densità di immagini semplici (e.g. la funzione caratteristica della palla unitaria) è necessario considerare spazi di Sobolev  $H_0^\beta(\Omega^n)$  con  $\beta < \frac{1}{2}$ .

Siccome lavoreremo con funzioni lisce assumiamo che la densità dell'immagine sia una funzione  $f \in C_c^\infty(\Omega^n)$  tale che

$$\|f\|_{H_0^\beta(\Omega^n)} \leq \rho, \tag{3.11}$$

con  $\beta < \frac{1}{2}$  e  $\rho$  non troppo grande. In analogia a quanto fatto nella sezione precedente, definiamo ora

$$\begin{aligned} d^{\mathbf{R}}(\varepsilon, \rho) &= \sup \left\{ \|f\|_{L^2(\Omega^n)} : \|\mathbf{R}f\|_{L^2(\mathbf{Z})} \leq \varepsilon, \|f\|_{H_0^\beta(\Omega^n)} \leq \rho \right\} \\ d^{\mathbf{P}}(\varepsilon, \rho) &= \sup \left\{ \|f\|_{L^2(\Omega^n)} : \|\mathbf{P}f\|_{L^2(\mathbf{T})} \leq \varepsilon, \|f\|_{H_0^\beta(\Omega^n)} \leq \rho \right\}. \end{aligned}$$

Ricordiamo che  $d^{\mathbf{R}}(2\varepsilon, 2\rho)$  e  $d^{\mathbf{P}}(2\varepsilon, 2\rho)$  possono essere considerati i massimi errori di ricostruzione con errore sui dati  $\varepsilon$  e supponendo valga (3.11). Grazie a quanto dimostrato prima possiamo trovare una stima sull'errore di ricostruzione della trasformata di Radon e della trasformata a raggi X:

**Teorema 3.2.1.** *Esiste una costante  $c(\beta, n)$  tale che*

$$d^{\mathbf{R}}(\varepsilon, \rho) \leq c(\beta, n) \varepsilon^{\frac{2\beta}{n-1+2\beta}} \rho^{\frac{n-1}{n-1+2\beta}},$$

$$d^{\mathbf{P}}(\varepsilon, \rho) \leq c(\beta, n) \varepsilon^{\frac{2\beta}{1+2\beta}} \rho^{\frac{1}{1+2\beta}}.$$

*Dimostrazione.* Prendiamo il Teorema 2.5.1 e poniamo, rispettivamente,  $\alpha = -\frac{n-1}{2}$  e  $\alpha = -\frac{1}{2}$ . Quello che otteniamo non è altro che la condizione (3.5). A questo punto applichiamo il Teorema 3.1.3 per tali valori e otteniamo la tesi.  $\square$

Come abbiamo già sottolineato,  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{P}$  coincidono se  $n = 2$ . Notiamo infatti che, esattamente come ci aspetteremmo, anche le stime sono le stesse per  $n = 2$ .

All'atto pratico siamo interessati a valori di  $\beta$  vicini a  $\frac{1}{2}$ . Se poniamo per semplicità  $\beta = \frac{1}{2}$ , abbiamo

$$d^{\mathbf{R}}(\varepsilon, \rho) \leq c(n) \varepsilon^{\frac{1}{n}} \rho^{1-\frac{1}{n}},$$

$$d^{\mathbf{P}}(\varepsilon, \rho) \leq c(n) \varepsilon^{\frac{1}{2}} \rho^{\frac{1}{2}}.$$

Seguendo la terminologia della sezione precedente, abbiamo che entrambi i problemi (in dimensione 2 e 3) sono *leggermente mal posti*. Per esempio, in tre dimensioni, abbiamo un errore di  $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$  ricostruendo lungo integrali di linea e di  $\varepsilon^{\frac{1}{3}}$  ricostruendo lungo integrali sugli iperpiani.

Un'ultima osservazione interessante da fare è che l'ordine di condizionamento del problema è dipendente dalla dimensione per  $\mathbf{R}$  ma non per  $\mathbf{P}$ . Anche questo risultato si sposa con la nostra intuizione: la trasformata di Radon integra su iperpiani, la cui dimensione cambia in base allo spazio ambiente in cui siamo. La trasformata a raggi X, invece, integra lungo rette, indipendentemente dalla dimensione dello spazio ambiente.

Per concludere questa sezione, citiamo un ultimo risultato sugli errori di misura per la trasformata di Radon (la dimostrazione verrà omessa, poiché richiede conoscenze sull'interpolazione di spazi di Sobolev che non vengono affrontate nel corso di questo elaborato).

Abbiamo visto poco sopra come possono influire gli errori di misura sulla ricostruzione dell'immagine. Un'altra possibile fonte di errore è il campionamento discreto.

Supponiamo che  $\mathbf{R}f$  sia nota solo per un numero finito di direzioni  $\theta_1, \dots, \theta_p$  e numeri reali  $s_1, \dots, s_q$ . Assumiamo anche che  $(\theta_j, s_l)$  ricoprano  $S^{n-1} \times [-1, 1]$

uniformemente, nel senso che

$$\begin{aligned} \sup_{-1 \leq s \leq 1} \inf_{l=1, \dots, q} |s_l - s| &\leq h, \\ \sup_{\theta \in S^{n-1}} \inf_{j=1, \dots, p} |\theta_j - \theta| &\leq h, \end{aligned} \tag{3.12}$$

con  $h \in \mathbb{R}$ . Analogamente alla definizione di  $d^{\mathbf{R}}(\varepsilon, \rho)$ , poniamo

$$\begin{aligned} d^{\mathbf{R}}(h, \rho) = \sup \{ \|f\|_{L^2(\Omega^n)} : \mathbf{R}f(\theta_j, s_l) = 0, \\ j = 1, \dots, p, l = 1, \dots, q, \|f\|_{H_0^\beta(\Omega^n)} \leq \rho \}. \end{aligned}$$

Allora,  $d^{\mathbf{R}}(h, 2\rho)$  può essere considerato come l'errore massimo di ricostruzione di  $f$  conoscendo  $\mathbf{R}f$  nei punti  $(\theta_j, s_l)$  che soddisfano (3.12) e l'informazione a priori (3.11). Si può a questo punto dimostrare che

**Teorema 3.2.2.** *Sia  $\beta > \frac{1}{2}$ . Allora esiste una costante  $c(\beta, n)$  tale che*

$$d^{\mathbf{R}}(h, \rho) \leq c(\beta, n)h^\beta \rho.$$

È interessante mettere a confronto quest'ultimo teorema col Teorema 2.3.6. Il teorema del terzo capitolo, tradotto in parole povere, dice che una funzione  $f$  è essenzialmente indeterminata se si prendono un numero finito di proiezioni. Il Teorema 3.2.2 afferma che questa indeterminazione sparisce non appena la variazione della funzione (misurata dalla sua norma di Sobolev  $H_0^\beta(\Omega^n)$ ) viene controllata.



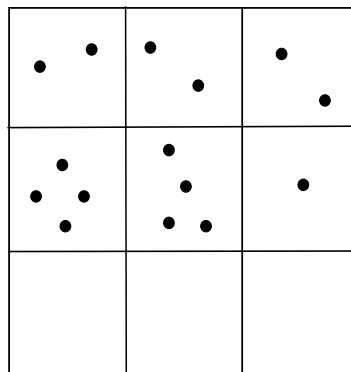
# Capitolo 4

## Filtered Backprojection

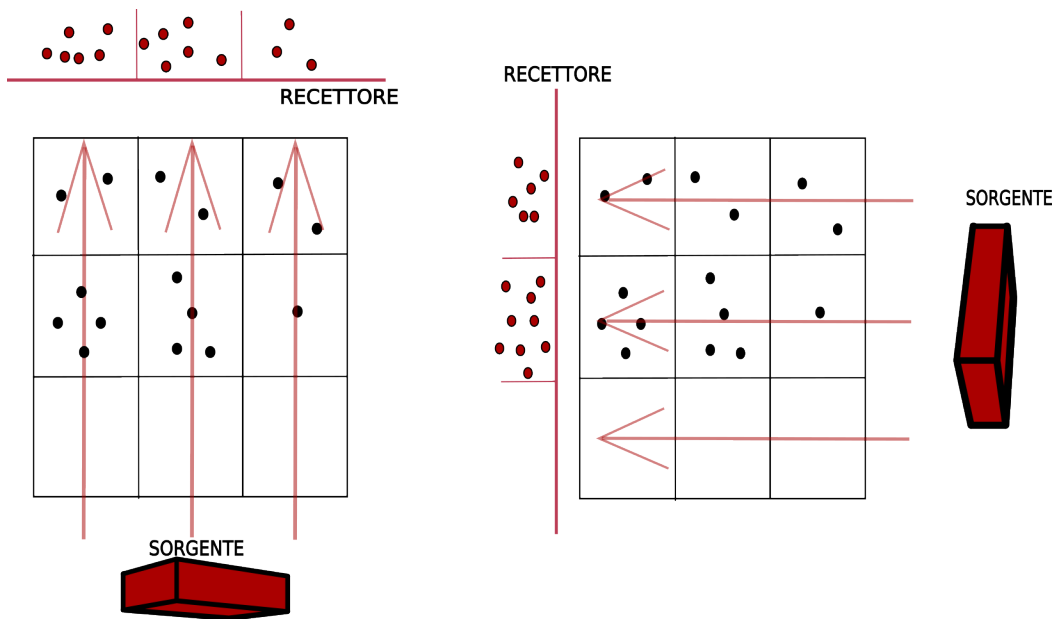
### 4.1 Cos'è la retroproiezione filtrata?

Abbiamo già intravisto, nel corso dell'introduzione di questo elaborato, come funziona il processo di scansione tomografica: per analizzare l'interno di un oggetto "bombardiamo" l'oggetto di raggi X, e vediamo quanto questi ultimi vengono attenuati. Conoscendo a questo punto i valori delle proiezioni (i.e. quanto vengono attenuati i raggi X lungo una certa linea), bisogna trovare un modo per ricostruire l'interno dell'oggetto. Uno dei metodi più utilizzati è la ricostruzione tramite *retroproiezione filtrata*. Cerchiamo di capirne il funzionamento con una discretizzazione essenziale in due dimensioni.

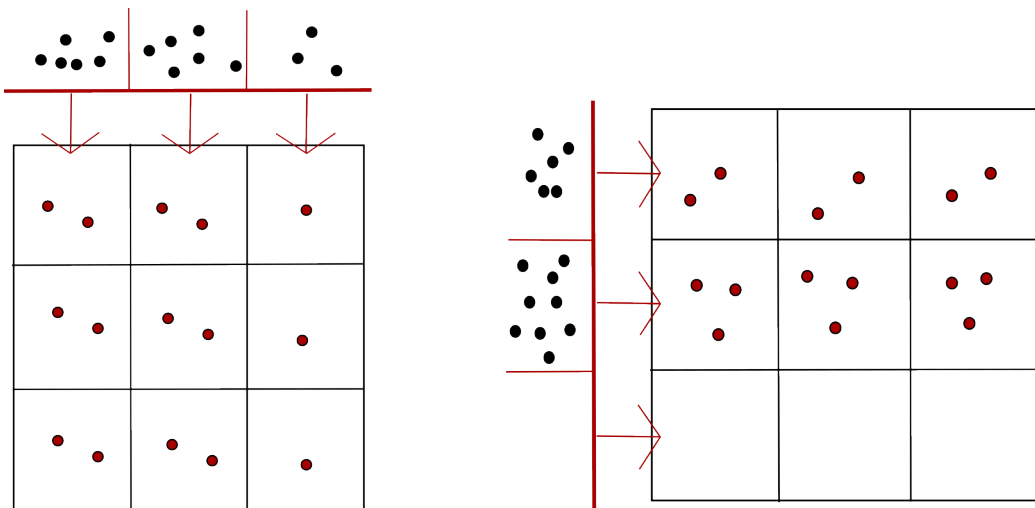
Schematizziamo il nostro oggetto come la matrice nella seguente figura:



Immaginiamo di non conoscere a priori la disposizione dei punti all'interno della matrice. Per cercare di ottenere informazioni sulla disposizione dei punti interni, possiamo procedere in modo analogo a quanto succede nella TC, utilizzando una "proiezione in avanti": emettiamo i raggi X lungo una certa direzione e analizziamo quanto vengono attenuati. In questo modello utilizziamo due direzioni (quella verticale e quella orizzontale), mentre il fenomeno di attenuazione sarà rappresentato dalla somma dei punti lungo colonne o righe. Otteniamo quindi:



La ricostruzione tramite retroproiezione parte dalle proiezioni (i puntini rossi nell'immagine sopra) e le ridistribuisce in modo uniforme lungo le linee da cui sono state calcolate. Il risultato si può osservare di seguito:



Possiamo subito notare che la retroproiezione orizzontale (a destra) ci da un'informazione importante, cioè che nella prima riga partendo dal basso non sono presenti attenuazioni. Quindi, sicuramente, la prima retroproiezione (a sinistra) non può essere una ricostruzione fedele.

Utilizzando proiezioni in sole due direzioni siamo già riusciti a ricavare informazioni importanti. È altrettanto vero che abbiamo lavorato su un esempio costruito ad hoc e discretizzato in maniera radicale, all'atto pratico il processo

di retroproiezione risulta molto più complesso di quanto mostrato. Tuttavia, tale breve esempio illustra eccezionalmente il meccanismo alla base dell'algoritmo.

Applicare la sola retroproiezione, purtroppo, non produce risultati abbastanza soddisfacenti: le immagini ricostruite risultano infatti affette da artefatti di sfocatura, proprio perché nel processo di retroproiezione distribuiamo tutte le proiezioni senza tenere conto della loro contribuzione spaziale corretta. È qui che entra in gioco il meccanismo di *filtrazione*: prima di procedere con la retroproiezione possiamo applicare un filtro per migliorare la qualità dell'immagine. I filtri si dividono in due macro-categorie:

- **Filtri passa-alto:** consentono il passaggio delle frequenze superiori a una certa soglia e attenuano quelle inferiori. Le frequenze più alte corrispondono ai dettagli più fini dell'immagine, quindi favorire il passaggio delle alte frequenze si traduce in una maggiore nitidezza dell'immagine, con contorni chiari e ben definiti. D'altro canto, se è presente del rumore, i filtri passa-alto tendono ad aumentarlo. In campo medico, solitamente, si preferiscono filtri passa-alto per la ricostruzione di immagini di ossa e calcificazioni, in cui è necessario ottenere dei contorni precisi per identificare fratture, sporgenze ossee e altre anomalie scheletriche.
- **Filtri passa-basso:** consentono il passaggio delle frequenze inferiori ad una certa soglia e attenuano quelle superiori. Poiché il rumore spesso è rappresentato da frequenze alte, un filtro passa-basso può ridurre il rumore, producendo un'immagine più liscia. Attenuando però le alte frequenze, si perde anche parte dei dettagli fini e dei bordi nell'immagine, risultando in un'immagine più sfocata. In campo medico, solitamente, i filtri passa-basso sono utilizzati per ricostruire tessuti molli come muscoli, grasso e organi interni, perché in questi campi è essenziale distinguere sottili variazioni di densità.

La combinazione del processo di filtrazione e, a seguire, del processo di retroproiezione da vita alla *retroproiezione filtrata*. Prima di andare a studiarne le fondamentali matematiche, facciamo un breve detour.

## 4.2 Richiami di nozioni fondamentali

In questa sezione ci preoccupiamo di richiamare brevemente alcuni concetti essenziali per comprendere il seguito. Le dimostrazioni che verranno omesse possono essere recuperate su *The Mathematics of Computerized Tomography*, Natterer [9].

### 4.2.1 Funzioni a banda limitata e teorema di campionamento

I seguenti risultati utilizzano il concetto di funzione a banda limitata: una funzione  $f$  è detta a banda limitata con banda di frequenze  $b$  (per brevità, diremo “a  $b$ -banda limitata”) se la sua trasformata di Fourier  $\widehat{f}$  è localmente integrabile e si annulla quasi ovunque al di fuori di una palla di raggio  $b$ . L'esempio più semplice di funzione a banda limitata su  $\mathbb{R}$  è la funzione seno cardinale:

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{ix\xi} d\xi = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}.$$

Infatti la funzione sinc è l'antitrasformata di una funzione che si annulla al di fuori dell'intervallo  $[-1, 1]$ :

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{ix\xi} d\xi = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \mathbb{1}_{[-1,1]}(\xi) d\xi = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} (\mathbb{1}_{[-1,1]})^\sim(x).$$

Prima di procedere col primo risultato fondamentale, ricordiamo brevemente alcune nozioni sulle espansioni in serie di Fourier.

Sia  $a > 0$  e  $f \in L^2([-a, a]^n)$ . Le funzioni

$$u_k(x) = (2a)^{-\frac{n}{2}} e^{i\pi x \cdot k/a}, \quad k \in \mathbb{Z}^n,$$

costituiscono un sistema ortogonale completo in  $L^2([-a, a]^n)$ , quindi utilizzando il prodotto interno abbiamo che

$$f = \sum_k (f, u_k) u_k$$

converge in  $L^2([-a, a]^n)$ . Scrivendolo in serie di Fourier, otteniamo

$$f(x) = \sum_k \widehat{f}_k e^{i\pi x \cdot k/a}, \quad \widehat{f}_k = (2a)^{-n} \int_{[-a, a]^n} f(x) e^{-i\pi x \cdot k/a} dx,$$

dove gli  $\widehat{f}_k$  sono i coefficienti di Fourier di  $f$ . Se  $f = 0$  al di fuori dell'ipercubo  $[-a, a]^n$ , possiamo riscriverci  $f$  come

$$f(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n}{2}} a^{-n} \sum_k \widehat{f}\left(\frac{\pi}{a}k\right) e^{i\pi x \cdot k/a}. \quad (4.1)$$

Infatti, utilizzando che  $f = 0$  al di fuori di  $[-a, a]^n$ , si ha

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_k \widehat{f}_k e^{i\pi x \cdot k/a} = \sum_k (2a)^{-n} \left( \int_{[-a, a]^n} f(y) e^{-i\pi y \cdot k/a} dy \right) e^{i\pi x \cdot k/a} \\
&= (2a)^{-n} \sum_k \left( \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-iy \cdot \frac{\pi}{a} k} dy \right) e^{i\pi x \cdot k/a} \\
&= (2a)^{-n} \sum_k (2\pi)^{n/2} \widehat{f} \left( \frac{\pi}{a} k \right) e^{i\pi x \cdot k/a} \\
&= \left( \frac{\pi}{2} \right)^{n/2} a^{-n} \sum_k \widehat{f} \left( \frac{\pi}{a} k \right) e^{i\pi x \cdot k/a}.
\end{aligned}$$

Siamo pronti ora a proseguire. Uno dei risultati più importanti riguardanti le funzioni a banda limitata è il teorema di campionamento di Nyquist-Shannon:

**Teorema 4.2.1.** *Sia  $f$  una funzione a  $b$ -banda limitata, e sia  $h \leq \frac{\pi}{b}$ . Allora,  $f$  è unicamente determinata dai valori  $f(hk)$ ,  $k \in \mathbb{Z}^n$  e, in  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , abbiamo*

$$f(x) = \sum_k f(hk) \operatorname{sinc} \left( \frac{\pi}{h} (x - hk) \right). \quad (4.2)$$

Inoltre, si ha che

$$\widehat{f}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} h^n \sum_k f(hk) e^{-ih\xi \cdot k} \quad (4.3)$$

in  $L^2([-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]^n)$ . Se  $g$  è un'altra funzione a  $b$ -banda limitata, abbiamo

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{g}(x) dx = h^n \sum_k f(hk) \overline{g}(hk). \quad (4.4)$$

*Dimostrazione.* Siccome  $f$  è a  $b$ -banda limitata,  $\widehat{f}$  si annulla al di fuori di  $[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]^n$ , quindi utilizzando (4.1) si ha che (4.3) non è altro che l'espansione di Fourier in  $[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]^n$ . Per quanto riguarda (4.4), questa è semplicemente la formula di moltiplicazione (**R5**). Infatti, utilizzando (4.3), si ha

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{g}(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x) (\overline{g})^\sim(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} h^n \sum_k f(hk) e^{-ihx \cdot k} (\overline{g})^\sim(x) dx \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} h^n \sum_k f(hk) \int_{\mathbb{R}^n} (\overline{g})^\sim(x) e^{-ix \cdot hk} dx \\
&= h^n \sum_k f(hk) \overline{g}(hk).
\end{aligned}$$

Procediamo ora a dimostrare (4.2). Prendiamo (4.3) e moltiplichiamo per la funzione caratteristica  $\mathbb{1}_{\pi/h}$  dell'intervallo  $[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]^n$ , e otteniamo che

$$\widehat{f}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} h^n \sum_k f(hk) \mathbb{1}_{\pi/h}(\xi) e^{-ih\xi \cdot k}$$

su tutto  $\mathbb{R}^n$ . A questo punto basta applicare l'anti-trasformata di Fourier termine a termine (operazione possibile visto che la serie converge in  $L^2(\mathbb{R}^n)$ ) su entrambi i membri dell'equazione per ottenere (4.2).  $\square$

La condizione  $h \leq \frac{\pi}{b}$  è detta *condizione di Nyquist*, e richiede che il campionamento di  $f$  avvenga con una distanza di campionamento che sia al massimo la metà del più piccolo dettaglio contenuto in  $f$ . Se tale condizione è soddisfatta,  $f$  può essere ricostruita dal campionamento utilizzando la serie (4.2), e questo processo è stabile nel senso che

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \left( h^n \sum_k |f(hk)|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

che è (4.4) con  $f = g$ .

Se la condizione di Nyquist è stretta, i.e.  $h < \frac{\pi}{b}$ ,  $f$  viene detta *sovracampionata*. Il prossimo teorema si occupa di questa casistica.

**Teorema 4.2.2.** *Sia  $f$  una funzione a  $b$ -banda limitata, e sia  $h < \frac{\pi}{b}$ . Sia  $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  tale che si annulli in  $|x| > 1$  e tale che*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \gamma(x) dx = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}.$$

Allora, abbiamo che

$$f(x) = \sum_k f(hk) \gamma \left[ \left( \frac{\pi}{h} - b \right) (x - hk) \right] \operatorname{sinc} \left( \frac{\pi}{h} (x - hk) \right). \quad (4.5)$$

*Dimostrazione.* Vedasi *The Mathematics of Computerized Tomography* III.1.2 [9].  $\square$

## 4.2.2 Convoluzione discreta

Un altro concetto che risulterà molto utile è la discretizzazione della convoluzione. Di seguito ne enunciamo un'importante proprietà.

**Proposizione 4.2.1.** *Siano  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Definiamo allora la convoluzione discreta di passo  $h$  come*

$$f \overset{h}{*} g := h^n \sum_l f(x - hl) g(hl).$$

Abbiamo allora che

$$(f \overset{h}{*} g)\widehat{(\xi)} - (f * g)\widehat{(\xi)} = (2\pi)^{n/2}\widehat{f}(\xi) \sum_{l \neq 0} \widehat{g}\left(\xi - \frac{2\pi}{h}l\right). \quad (4.6)$$

*Dimostrazione.* Prima di dimostrare (4.6), abbiamo bisogno di dimostrare un'uguaglianza. Definiamo la funzione periodica

$$\gamma(\xi) = \sum_l \widehat{f}\left(\xi - \frac{2\pi}{h}l\right),$$

ed espandiamola in serie di Fourier sull'intervallo  $[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]^n$ . Scriviamo quindi

$$\begin{aligned} \gamma(\xi) &= \sum_l \widehat{\gamma}_k e^{-ih\xi \cdot k}, \\ \widehat{\gamma}_k &= \left(\frac{2\pi}{h}\right)^{-n} \int_{[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]^n} \gamma(\xi) e^{ih\xi \cdot k} d\xi \\ &= \left(\frac{2\pi}{h}\right)^{-n} \sum_l \int_{[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]^n} \widehat{f}\left(\xi - \frac{2\pi}{h}l\right) e^{ih\xi \cdot k} d\xi \\ &= \left(\frac{2\pi}{h}\right)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\eta) e^{ih\eta \cdot k} e^{-i2\pi l \cdot k} d\eta \\ &= \left(\frac{2\pi}{h}\right)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\eta) e^{ih\eta \cdot k} d\eta \\ &= (2\pi)^{-n/2} h^n f(hk), \end{aligned}$$

dove nel penultimo passaggio abbiamo effettuato la sostituzione  $\eta = \xi - \frac{2\pi}{h}l$ . Comparando le due espressioni di  $\gamma$ , otteniamo che

$$\sum_l \widehat{f}\left(\xi - \frac{2\pi}{h}l\right) = (2\pi)^{-n/2} h^n \sum_k f(hk) e^{-ih\xi \cdot k}.$$

Utilizziamo ora questo fatto sulla  $g$  nella convoluzione discreta:

$$\begin{aligned} (f \overset{h}{*} g)\widehat{(\xi)} &= h^n \sum_l e^{-ihl \cdot \xi} \widehat{f}(\xi) g(hl) \\ &= (2\pi)^{n/2} \widehat{f}(\xi) \sum_l \widehat{g}\left(\xi - \frac{2\pi}{h}l\right), \end{aligned}$$

dove nel primo passaggio abbiamo usato **(R2)**. Otteniamo così

$$(f \overset{h}{*} g)\widehat{(\xi)} - (2\pi)^{n/2} \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi) = (2\pi)^{n/2} \widehat{f}(\xi) \sum_{l \neq 0} \widehat{g}\left(\xi - \frac{2\pi}{h}l\right).$$

Ricordando ora che, grazie a **(R4)**, abbiamo

$$(2\pi)^{n/2} \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi) = (f * g)^\wedge(\xi),$$

otteniamo la tesi. □

### 4.2.3 Funzioni B-spline e funzioni $\eta$

Le *funzioni spline* sono funzioni costituite da un insieme di polinomi, che tipicamente vengono adoperate per argomenti di interpolazione. In particolare, in questo elaborato verranno utilizzate le funzioni B-spline: una *funzione B-spline di grado  $k$*  è una collezione di funzioni polinomiali a tratti di grado  $k - 1$ . I valori in cui i polinomi si raccordano sono detti *nod*i. Un classico esempio che utilizzeremo in seguito può essere costruito a partire dalla funzione caratteristica dell'intervallo  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ , definendo

$$B = \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} * \cdots * \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} \quad (\text{k volte}).$$

Tale  $B$  si verifica essere  $(k - 2)$  volte differenziabile con continuità e si annulla al di fuori di  $[-\frac{k}{2}, \frac{k}{2}]$ . Possiamo utilizzare questa funzione per costruire una funzione interpolatrice: sia  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  e  $h > 0$ . Adottando la notazione  $B_{1/h} = B(\frac{\cdot}{h})$ , possiamo definire

$$I_h g(s) = \sum_l g(hl) B_{1/h}(s - hl),$$

e considerare  $I_h g$  come un'approssimazione di  $g$  (per ulteriori dettagli vedasi *The Mathematics of Computerized Tomography* [9]).

Nel seguente teorema (che non dimostreremo), vedremo come l'approssimazione di una funzione  $g$  a banda limitata tramite la sua interpolazione  $I_h g$  ha lo stesso effetto dell'applicazione di un filtro passa-basso sommato a una funzione ad alta frequenza.

**Teorema 4.2.3.** *Sia  $g$  una funzione a banda limitata con banda di frequenze  $\frac{\pi}{h}$ , e sia  $k$  l'ordine del B-spline utilizzato per l'interpolazione. Allora si ha che*

$$I_h g = F_h * g + a_h, \quad \widehat{F}_h(\sigma) = \begin{cases} (2\pi)^{-1/2} \left( \text{sinc} \left( \frac{\sigma h}{2} \right) \right), & |\sigma| \leq \frac{\pi}{h} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

dove  $\widehat{a}_h(\sigma) = 0$  per  $|\sigma| \leq \frac{\pi}{h}$ . Inoltre per  $\alpha, \beta \geq 0$  si ha

$$|a_h|_{H^{-\beta}(\mathbb{R})} \leq \left( \frac{2}{\pi} \right)^{k-1} \left( \frac{h}{\pi} \right)^{\beta-\alpha} |g|_{H^{-\alpha}(\mathbb{R})},$$

dove la seminorma  $|\cdot|_{H^\alpha(\mathbb{R})}$  è definita da

$$|g|_{H^\alpha(\mathbb{R})}^2 = \int_{\mathbb{R}} |\sigma|^{2\alpha} |\widehat{g}(\sigma)|^2 d\sigma.$$



*Dimostrazione.* Vedasi *The Mathematics of Computerized Tomography* III.1.4 [9].  $\square$

Prima di concludere la sezione, introduciamo un'ultima notazione: per  $0 < \vartheta < 1$  e  $b \geq 0$ , denotiamo con  $\eta(\vartheta, b)$  qualsiasi quantità che ammetta una stima della forma

$$0 \leq \eta(\vartheta, b) \leq C(\vartheta)e^{-\lambda(\vartheta)b},$$

con  $C(\vartheta), \lambda(\vartheta) > 0$ . Quindi, fissato  $\vartheta < 1$ , abbiamo che  $\eta(\vartheta, b)$  decade esponenzialmente se  $b \rightarrow \infty$ . Particolari esempi di questa classe di funzioni sono le funzioni  $\eta_1$ , che verranno utilizzate in seguito:

$$\eta_1(\vartheta, m) := \sup_{|r| \leq 1} \int_{\vartheta m}^{\vartheta m} |J_m(r\sigma)| d\sigma.$$

Queste sono funzioni  $\eta$  poiché sappiamo che vale

$$0 \leq J_m(\vartheta m) \leq (2\pi m)^{-1/2}(1 - \vartheta^2)^{-1/4} e^{-\frac{m}{3}(1-\vartheta^2)^{3/2}},$$

vedasi *The Mathematics of Computerized Tomography* VII.3.20 [9].

Abbiamo inoltre che le seguenti funzioni

$$\begin{aligned} \eta_2(\vartheta, b) &= \sum_{m \geq b} \eta_1(\vartheta, m), \\ \eta_3(\vartheta, b) &= \sum_{m \geq b} \eta_2(\vartheta, m) \end{aligned} \tag{4.7}$$

sono funzioni  $\eta$ .

### 4.3 L'algoritmo di retroproiezione filtrata

L'algoritmo di ricostruzione tramite la retroproiezione filtrata è forse uno dei più importanti algoritmi di ricostruzione in campo medico. È basato sulla formula di inversione del Teorema 2.2.1, che ricordiamo essere

$$f = \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n} \mathbf{R}^\# \mathbf{H}^{n-1}(\mathbf{R}f)^{(n-1)}.$$

Tuttavia, è anche possibile adottare un diverso punto di vista, incentrato sulla formula

$$W_b * f = \mathbf{R}^\#(w_b * \mathbf{R}f), \quad W_b = \mathbf{R}^\# w_b \tag{4.8}$$

del Teorema 2.1.3. L'idea è quella di scegliere  $w_b$  tale che  $W_b$  approssimi la distribuzione  $\delta$  di Dirac. Assumiamo che  $W_b$  sia un filtro passa-basso con frequenza di taglio  $b$ , che scriviamo come

$$\widehat{W}_b(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \widehat{\Phi} \left( \frac{|\xi|}{b} \right), \tag{4.9}$$

dove  $0 \leq \widehat{\Phi} \leq 1$  e  $\widehat{\Phi}(\sigma) = 0$  per  $\sigma \geq 1$ . Un esempio è la funzione passa-basso  $\widehat{\Phi}(\sigma) = 1$  per  $\sigma \leq 1$ : scegliendo tale filtro, otteniamo che

$$W_b(x) = (2\pi)^{-n/2} b^n \frac{J_{n/2}(b|x|)}{(b|x|)^{n/2}},$$

e abbiamo che, effettivamente,  $W_b \rightarrow \delta$  per  $b \rightarrow \infty$ .

Infatti, abbiamo che  $\widehat{\Phi}$  è la funzione caratteristica della palla di raggio  $b$  (che denotiamo  $B_b$ ), quindi

$$\widehat{W}_b(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \mathbb{1}_{B_b}(\xi).$$

Applicando l'anti trasformata di Fourier, abbiamo che

$$\begin{aligned} W_b(x) &= (2\pi)^{-n/2} (\mathbb{1}_{B_b}(\xi))^{\sim}(x) \\ &= (2\pi)^{-n/2} \left( (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iy \cdot x} \mathbb{1}_{B_b}(y) dy \right) \\ &= (2\pi)^{-n} \left( \int_{|y| < b} e^{iy \cdot x} dy \right) \\ &= \delta^b(x), \end{aligned}$$

con  $\delta^b$  definita in (2.2). Avendo già dimostrato che  $\delta^b \rightarrow \delta$ , abbiamo che  $W_b \rightarrow \delta$  come volevamo. Inoltre, utilizzando le coordinate polari  $\xi = \sigma\theta$  e le proprietà (3.8) e (3.9) delle funzioni di Bessel del primo tipo, si ha che

$$\begin{aligned} \delta^b(x) &= (2\pi)^{-n} \int_0^b \sigma^{n-1} \int_{S^{n-1}} e^{i\sigma y \cdot \theta} d\theta d\sigma \\ &= (2\pi)^{-n} |x|^{(2-n)/2} \int_0^b \sigma^{n/2} J_{n/2-1}(\sigma|x|) d\sigma \\ &= (2\pi)^{-n/2} b^n \frac{J_{n/2}(b|x|)}{(b|x|)^{n/2}}, \end{aligned}$$

proprio come volevasi.

Cerchiamo di capire che relazione intercorre tra  $W_b$  e  $w_b$ . Utilizzando il Teorema 2.1.4, abbiamo che

$$\widehat{W}_b(\xi) = (2\pi)^{(n-1)/2} |\xi|^{1-n} \left( \widehat{w}_b \left( \frac{\xi}{|\xi|}, |\xi| \right) + \widehat{w}_b \left( -\frac{\xi}{|\xi|}, -|\xi| \right) \right).$$

Per definizione,  $\widehat{W}_b$  è una funzione radiale (vedasi (4.9)), quindi possiamo ignorare il primo argomento in  $\widehat{w}_b$ . Per  $\widehat{w}_b$  pari otteniamo

$$\widehat{w}_b(\sigma) = \frac{1}{2} (2\pi)^{1/2-n} |\sigma|^{n-1} \widehat{\Phi} \left( \frac{|\sigma|}{b} \right).$$

Ricordando le nostre ipotesi su  $\widehat{\Phi}$ , otteniamo una stima per la nostra funzione  $\widehat{w}_b$ :

$$0 \leq \widehat{w}_b(\sigma) \leq \frac{1}{2}(2\pi)^{1/2-n}|\sigma^{n-1}|. \quad (4.10)$$

Possiamo ora concentrarci sulla formula (4.8). Valutare tale espressione richiede una convoluzione monodimensionale  $w_b * \mathbf{R}f$  per ogni direzione in  $S^{n-1}$  (la filtrazione), seguita dall'applicazione dell'operatore  $\mathbf{R}^\#$  (la retroproiezione). Da ciò deriva il nome dell'algoritmo. Ovviamente, in casi realistici, non possiamo analizzare infinite direzioni e infiniti parametri. Si cerca quindi un modo per discretizzare (4.8).

Supponiamo quindi  $f \in C_c^\infty(\Omega^n)$ , e sia  $g = \mathbf{R}f$  campionata nei punti  $(\theta_j, s_l)$ , con  $j = 1, \dots, p$ ,  $l = -q, \dots, q$ , dove  $\theta_j \in S^{n-1}$  e  $s_l = hl$ ,  $h = 1/q$ . Allora, la convoluzione  $w_b * g$  può essere rimpiazzata dalla sua controparte discreta:

$$w_b \overset{h}{*} g(\theta_j, s) = h \sum_{l=-q}^q w_b(s - s_l)g(\theta_j, s_l). \quad (4.11)$$

Per valutare la retroproiezione, invece, abbiamo bisogno di una quadratura numerica su  $S^{n-1}$  basata sui nodi  $\theta_1, \dots, \theta_p$  tramite pesi positivi  $\alpha_{pj}$ . Ci tornerà utile lavorare con armoniche sferiche, quindi denotiamo l'insieme delle armoniche sferiche pari di grado  $2m$  con  $H'_{2m}$ , e assumiamo che la regola di quadratura sopraccitata sia esatta su  $H'_{2m}$  per qualche  $m$ , i.e.

$$\int_{S^{n-1}} \nu(\theta) d\theta = \sum_{j=1}^p \alpha_{pj} \nu(\theta_j), \quad \nu \in H'_{2m}. \quad (4.12)$$

La retroproiezione in (4.8) può essere ora sostituita dalla sua versione discretizzata:

$$\mathbf{R}_p^\# \nu(x) = \sum_{j=1}^p \alpha_{pj} \nu(\theta_j, x \cdot \theta_j).$$

L'algoritmo completo di retroproiezione filtrata, quindi, si legge ora come

$$f_{RF} = \mathbf{R}_p^\#(w_b \overset{h}{*} g). \quad (4.13)$$

Possiamo ora studiare gli effetti di questa discretizzazione.

**Teorema 4.3.1.** *Sia  $f \in C_c^\infty(\Omega^n)$ . Assumiamo che (4.12) sia esatta su  $H'_{2m}$  e che, per un certo  $\vartheta$  con  $0 < \vartheta < 1$ , si abbia*

$$b \leq \vartheta m, \quad b \leq \frac{\pi}{h}. \quad (4.14)$$

Allora abbiamo che

$$\begin{aligned} f_{RF} &= W_b * f + e_1 + e_2, \\ |e_1| &\leq \frac{1}{2}(2\pi)^{-n/2} \varepsilon_0^*(f, b), \quad \varepsilon_0^*(f, b) = |S^{n-1}| \sup_{\theta \in S^{n-1}} \int_{|\sigma| \geq b} |\sigma|^{n-1} |\widehat{f}(\sigma\theta)| d\sigma, \\ |e_2| &\leq \|f\|_{L^\infty(\Omega^n)} \eta(\vartheta, m). \end{aligned}$$

*Dimostrazione.* Per dimostrare l'uguaglianza della tesi, basta aggiungere e togliere da  $f_{RF}$  determinati addendi:

$$\begin{aligned} f_{RF} &= \mathbf{R}_p^\# w_b \overset{h}{*} g + \mathbf{R}^\# w_b * g - \mathbf{R}^\# w_b * g + \mathbf{R}_p^\# w_b * g - \mathbf{R}_p^\# w_b * g \\ &= \mathbf{R}^\# w_b * g + \mathbf{R}_p^\# (w_b \overset{h}{*} g - w_b * g) + (\mathbf{R}_p^\# - \mathbf{R}^\#)(w_b * g). \end{aligned}$$

Chiamando il secondo addendo  $e_1$ , il terzo addendo  $e_2$ , e utilizzando il Teorema 2.1.3 sul primo addendo, otteniamo la scrittura

$$f_{RF} = W_b * f + e_1 + e_2.$$

Utilizzando la Proposizione 4.6, otteniamo

$$(w_b \overset{h}{*} g - w_b * g)(\theta, \sigma) = (2\pi)^{1/2} \widehat{w_b}(\sigma) \sum_{l \neq 0} \widehat{g} \left( \sigma - \frac{2\pi}{h} l \right).$$

Applicando ora l'anti-trasformata di Fourier e analizzandone il modulo, otteniamo

$$\begin{aligned} |w_b \overset{h}{*} g - w_b * g|(\theta, s) &= \left| (2\pi)^{1/2} \left( (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{is\sigma} \widehat{w_b}(\sigma) \sum_{l \neq 0} \widehat{g} \left( \sigma - \frac{2\pi}{h} l \right) d\sigma \right) \right| \\ &= \left| \int_{-b}^b e^{is\sigma} \widehat{w_b}(\sigma) \sum_{l \neq 0} \widehat{g} \left( \sigma - \frac{2\pi}{h} l \right) d\sigma \right| \\ &\leq \int_{-b}^b |\widehat{w_b}(\sigma)| \sum_{l \neq 0} \left| \widehat{g} \left( \sigma - \frac{2\pi}{h} l \right) \right| d\sigma. \end{aligned}$$

Siccome  $b \leq \frac{\pi}{h}$ , grazie a (4.10) abbiamo che

$$\begin{aligned} |w_b \overset{h}{*} g - w_b * g|(\theta, s) &\leq \frac{1}{2} (2\pi)^{1/2-n} \int_{|\sigma| \geq b} |\sigma|^{n-1} |\widehat{g(\theta, \sigma)}| d\sigma \\ &= \frac{1}{2} (2\pi)^{-n/2} \int_{|\sigma| \geq b} |\sigma|^{n-1} |\widehat{f}(\sigma\theta)| d\sigma, \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato il Fourier Slice Theorem 2.1.1. Appliciamo ora l'operatore  $\mathbf{R}_p^\#$  e osserviamo che, utilizzando (4.12) con  $\nu = 1$  e il fatto che  $\alpha_{pj} > 0$ , abbiamo

$$\sum_{j=1}^p \alpha_{pj} = |S^{n-1}|. \quad (4.15)$$

A questo punto passando al sup su  $\theta$  otteniamo la stima su  $e_1$ .

Consideriamo ora l'errore  $e_2$ , ottenuto discretizzando l'operatore di retroproiezione. Espandiamo  $w_b * g$  in armoniche sferiche:

$$(w_b * g)(\theta, x \cdot \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{c(n, l)} \sum_k Y_{2l, k}(\theta) v_{l, k}(x),$$

$$v_{l, k}(x) = \int_{S^{n-1}} Y_{2l, k}(\theta) (w_b * g)(\theta, x \cdot \theta) d\theta.$$

Notiamo che utilizziamo solo armoniche sferiche pari, visto che assumiamo  $w_b$  pari (e quindi  $(w_b * g)(\theta, x \cdot \theta)$  è pari rispetto a  $\theta$ ). La somma su  $k$  varia su tutte le  $N(n, l)$  armoniche sferiche, e le  $Y_{2l, k}$  sono normalizzate in modo tale che

$$\int_{S^{n-1}} |Y_{2l, k}(\theta)|^2 d\theta = c(n, l),$$

con  $c(n, l)$  come in (2.4). Usando ora in ordine la trasformata di Fourier per  $w_b * g$ , la proprietà **(R4)**, il Fourier Slice Theorem 2.1.1, il teorema di Fubini e la trasformata di Fourier di  $f$ , abbiamo

$$\begin{aligned} v_{l, k} &= \int_{S^{n-1}} Y_{2l, k}(\theta) (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{i\sigma x \cdot \theta} \widehat{w_b * g}(\theta, \sigma) d\sigma d\theta \\ &= \int_{S^{n-1}} Y_{2l, k}(\theta) \int_{-b}^b e^{i\sigma x \cdot \theta} \widehat{w_b}(\sigma) \widehat{g}(\theta, \sigma) d\sigma d\theta \\ &= (2\pi)^{(n-1)/2} \int_{S^{n-1}} Y_{2l, k}(\theta) \int_{-b}^b e^{i\sigma x \cdot \theta} \widehat{w_b}(\sigma) \widehat{f}(\sigma\theta) d\sigma d\theta \\ &= (2\pi)^{-1/2} \int_{\Omega^n} f(y) \int_{-b}^b \widehat{w_b}(\sigma) \int_{S^{n-1}} Y_{2l, k}(\theta) e^{i\sigma(x-y) \cdot \theta} d\theta d\sigma dy. \end{aligned}$$

L'integrale interno su  $S^{n-1}$  può essere valutato utilizzando la proprietà delle funzioni di Bessel (3.8):

$$(2\pi)^{n/2} i^{2l} (\sigma|x-y|)^{(2-n)/2} J_{2l+(n-2)/2}(\sigma|x-y|) Y_{2l, k} \left( \frac{x-y}{|y-x|} \right).$$

Combinando ciò con la stima (4.10) e ricordando che  $|Y_{2l, k}| \leq 1$ , abbiamo che

$$|v_{l, k}(x)| \leq \frac{1}{2} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\Omega^n} |f(y)| |x-y|^{\frac{2-n}{2}} \int_{-b}^b \sigma^{\frac{n}{2}} J_{2l+\frac{n-2}{2}}(\sigma|x-y|) d\sigma dy.$$

Ora sia  $l > m$ . Siccome  $b \leq \vartheta m < \vartheta l$  e  $|x-y| \leq 2$ , possiamo ottenere per l'integrale interno una stima superiore del tipo

$$\frac{1}{2} l^{n/2} \eta_1(\vartheta, 2l).$$

Quindi per una certa costante  $c(n)$  abbiamo che

$$|v_{l,k}(x)| \leq c(n) \|f\|_{L^\infty(\Omega^n)} l^{n/2} \eta_1(\vartheta, 2l).$$

Denotando ora con  $(w_b * g)_m$  la serie di  $w_b * g$  troncata all' $m$ -esimo termine, abbiamo

$$\|w_b * g - (w_b * g)_m\|_{L^\infty(\mathbf{Z})} \leq \sum_{l>m} \frac{1}{c(n, 2l)} \sum_k \|v_{l,k}\|_{L^\infty(\Omega^n)} \quad (4.16)$$

$$\leq c(n) \|f\|_{L^\infty(\Omega^n)} \sum_{l>m} \frac{N(n, 2l)}{c(n, 2l)} l^{n/2} \eta_1(\vartheta, 2l) \quad (4.17)$$

$$\leq \|f\|_{L^\infty(\Omega^n)} \eta(\vartheta, m), \quad (4.18)$$

dove abbiamo usato (2.4), la definizione di  $N(n, l)$  e il fatto che la somma di funzioni  $\eta$  è una funzione  $\eta$ .

Siccome (4.12) è esatta su  $H'_{2m}$ , e ricordando (4.15), otteniamo per  $e_2$  che

$$\begin{aligned} |e_2| &= |(\mathbf{R}_p^\# - \mathbf{R}^\#)(w_b * g - (w_b * g)_m)| \\ &\leq 2|S^{n-1}| \|w_b * g - (w_b * g)_m\|_{L^\infty(\mathbf{Z})} \\ &\leq 2|S^{n-1}| \|f\|_{L^\infty(\Omega^n)} \eta(\vartheta, m), \end{aligned}$$

cioè la stima in tesi. □

Possiamo ora soffermarci su qualche osservazione:

- Il parametro cruciale nell'algoritmo di retroproiezione filtrata è  $b$ , l'ampiezza di banda. Se  $f$  è a banda limitata in modo tale che  $\varepsilon_0^*(f, b)$  sia trascurabile, allora  $f_{RF}$  è una ricostruzione affidabile di  $f$ , a patto che  $b$  soddisfi (4.14) e sia sufficientemente largo;
- La frequenza di taglio è soggetta alle restrizioni (4.14): la prima ( $b \leq \pi/h$ ) garantisce che la convoluzione sia discretizzata in modo adeguato, mentre la seconda ( $b \leq \vartheta m$ ) esclude le frequenze più alte in  $w_b * g$  che non possono essere integrate accuratamente tramite la regola di quadratura;
- Valutare  $f_{RF}(x)$  richiede il calcolo di  $w_b \overset{h}{*} g(\theta_j, x \cdot \theta_j)$  per  $j = 1, \dots, p$ . La complessità di tale calcoli è  $O(pq)$ . Se vogliamo ridurre il numero di operazioni a  $O(p)$ , possiamo calcolare (4.11) per  $s = s_l$ ,  $l = -q, \dots, q$  e inserire un'interpolazione  $I_h$  in (4.13), e cioè calcolare

$$f_{RFI} = \mathbf{R}_p^\# I_h(w_b \overset{h}{*} g). \quad (4.19)$$

Come  $I_h$ , prendiamo l'approssimazione  $B$ -spline di ordine  $k$  citata a inizio capitolo, i.e.

$$I_h g(s) = \sum_l g(s_l) B_{1/h}(s - s_l).$$

Fino ad ora, ci siamo concentrati sugli errori che la discretizzazione può causare nell'algoritmo di retroproiezione. Concludiamo il nostro lavoro analizzando gli effetti del passo di interpolazione sopra menzionato, indipendentemente dagli altri errori di discretizzazione.

**Teorema 4.3.2.** *Se  $b \leq \pi/h$ , abbiamo*

$$\mathbf{R}^\# I_h(w_b * g) = G_h * W_b * f + e_3,$$

dove  $G_h$  è un filtro definito da

$$\widehat{G}_h(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \begin{cases} (\text{sinc}(\frac{h}{2}|\xi|)), & |\xi| \leq \pi/h \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases},$$

e l'errore  $e_3$  soddisfa  $\widehat{e}_3(\xi) = 0$  se  $|\xi| \leq \pi/h$  e

$$\|e_3\|_{L^2(\Omega^n)} \leq \left(\frac{2}{\pi}\right)^{k-1} h^\alpha \|f\|_{H_0^\alpha(\Omega^n)}.$$

*Dimostrazione.* Utilizzando il Teorema 4.2.3 abbiamo che, per  $b \leq \pi/h$  e  $\alpha \geq 0$ , si ha

$$I_h(w_b * g) = F_h * w_b * g + a_h, \quad (4.20)$$

con  $a_h$  che rispetta la stima

$$\begin{aligned} |a_h|_{H^{(1-n)/2}(\mathbb{R})} &\leq \left(\frac{2}{\pi}\right)^{k-1} h^{(1-n)/2-\alpha} |w_b * g|_{H^{-\alpha}(\mathbb{R})} \\ &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{k-1} h^{(1-n)/2-\alpha} \left( \int_{\mathbb{R}} |\sigma|^{-2\alpha} |\widehat{w_b * g}(\sigma)|^2 d\sigma \right)^{1/2} \\ &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{k-1} h^{(1-n)/2-\alpha} \left( \int_{\mathbb{R}} |\sigma|^{-2\alpha} (2\pi) |\widehat{w_b}(\sigma)|^2 |\widehat{g}(\sigma)|^2 d\sigma \right)^{1/2} \\ &\leq (2\pi)^{1/2} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{k-1} h^{(1-n)/2-\alpha} \left( \int_{\mathbb{R}} |\sigma|^{-2\alpha} \frac{1}{2} (2\pi)^{1-2n} |\sigma|^{2n-2} |\widehat{g}(\sigma)|^2 d\sigma \right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{2} (2\pi)^{1-n} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{k-1} h^{(1-n)/2-\alpha} |g|_{H^{n-1-\alpha}(\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

dove nel terzo passaggio abbiamo usato **(R4)**, e nel penultimo (4.10). Se consideriamo  $a$  una funzione pari su  $\mathbf{Z}$ , grazie al Teorema 2.1.4 abbiamo

$$\begin{aligned} \|\mathbf{R}^\# a\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 &= \|\widehat{\mathbf{R}^\# a}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = 4(2\pi)^{n-1} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2(1-n)} \left| \widehat{a}\left(\frac{\xi}{|\xi|}, |\xi|\right) \right|^2 d\xi \\ &= 2(2\pi)^{n-1} \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} |\sigma|^{1-n} |\widehat{a}(\theta, \sigma)|^2 d\sigma d\theta \\ &= 2(2\pi)^{n-1} |a|_{H^{(1-n)/2}(\mathbf{Z})}^2. \end{aligned}$$

Usiamo questo fatto per  $a = a_h$ . Abbiamo allora, sfruttando il Fourier Slice Theorem 2.1.1, che

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{R}^\# a_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &\leq (2\pi)^{(1-n)/2} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{k-1} h^{(n-1)/2-\alpha} \|g\|_{H^{n-1-\alpha}(\mathbf{Z})} \\
&= (2\pi)^{(1-n)/2} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{k-1} h^{(n-1)/2-\alpha} \left( \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} |\sigma|^{2(n-1-\alpha)} |\widehat{\mathbf{R}f}(\theta, \sigma)|^2 d\theta d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{k-1} h^{(n-1)/2-\alpha} \left( \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} |\sigma|^{2(n-1-\alpha)} |\widehat{f}(\sigma\theta)|^2 d\theta d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{k-1} h^{(n-1)/2-\alpha} \left( \int_{\Omega^n} |\xi|^{2(n-1-\alpha)} \|\xi\|^{1-n} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\frac{2}{\pi}\right)^{k-1} h^{(n-1)/2-\alpha} \left( \int_{\Omega^n} (1 + |\xi|^2)^{(n-1)/2-\alpha} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{k-1} h^{(n-1)/2-\alpha} \|f\|_{H_0^{(n-1)/2-\alpha}(\Omega^n)}.
\end{aligned}$$

Siamo quasi giunti alla nostra tesi: applichiamo ora  $\mathbf{R}^\#$  a (4.20), per ottenere

$$\mathbf{R}^\# I_h(w_b * g) = \mathbf{R}^\#(F_h * w_b * g) + e_3, \quad e_3 = \mathbf{R}^\# a_h.$$

Siccome  $\widehat{a}_h(\sigma) = 0$  per  $|\sigma| \leq \pi/h$  abbiamo grazie al Teorema 2.1.4 che  $\widehat{e}_3(\xi) = 0$  se  $|\xi| \leq \pi/h$ , e la stima su  $e_3$  segue dall'ultima catena di disuguaglianze, rimpiazzando  $(n-1)/2 - \alpha$  con  $\alpha$ .

Con  $F_h = \mathbf{R}G_h$ , abbiamo grazie al Fourier Slice Theorem 2.1.1 che

$$\widehat{G}_h(\xi) = (2\pi)^{(1-n)/2} \widehat{F}_h(|\xi|),$$

e dal Teorema 2.1.2 abbiamo

$$F_h * g = \mathbf{R}G_h * \mathbf{R}f = \mathbf{R}(G_h * f).$$

Per concludere, sfruttando (4.8) applicata a  $G_h * f$ , abbiamo che

$$\mathbf{R}^\#(F_h * w_b * g) = \mathbf{R}^\#(w_b * \mathbf{R}(G_h * f)) = W_b * G_h * f,$$

cioè la nostra tesi. □

Grazie a questo risultato possiamo osservare che, a meno dell'errore additivo ad alta oscillazione  $e_3$ , l'interpolazione ha lo stesso effetto dell'applicazione del filtro  $G_h$ . L'errore  $e_3$ , inoltre, ha la stesso ordine di grandezza dell'errore ottenuto discretizzando i dati nel Teorema 3.2.2 ( $h^\alpha \|f\|_{H^\alpha(\Omega^n)}$ ), purchè valga  $\alpha \leq (n-1)/2$ . Notiamo, in conclusione, che l'ordine  $k$  del  $B$ -spline non ha un ruolo eccessivamente influente. Nella pratica, è stato osservato (*A Comparative Study of the Use of Linear and Modified Cubic Spline Interpolation for Image Reconstruction, 1979* [5]) che  $k = 2$  ("broken line interpolation") è un buon ordine, mentre  $k = 1$  ("nearest neighbour interpolation") non lo è.



# Bibliografia

- [1] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext. Springer New York, 2010.
- [2] L.C. Evans. *Partial Differential Equations*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 1998.
- [3] S. Helgason. *The Radon Transform*. Progress in Mathematics - Birkhäuser. Birkhäuser, 1980.
- [4] Gabor T. Herman and Abraham Naparstek. Fast image reconstruction based on a Radon inversion formula appropriate for rapidly collected data. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 33(3):511–533, 1977.
- [5] Gabor T. Herman, Stuart W. Rowland, and Mann-may Yau. A comparative study of the use of linear and modified cubic spline interpolation for image reconstruction. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 26(2):2879–2894, 1979.
- [6] D. P. Hewett and A. Moiola. On the maximal Sobolev regularity of distributions supported by subsets of euclidean space. *Analysis and Applications*, 15(05):731–770, December 2016.
- [7] M. Kavila J. M. Mwanzia and J. M. Khalagai. Moore-Penrose inverse of linear operators in Hilbert space. *African Journal of Mathematics and Computer Science Research*, 2022.
- [8] Juha Kinnunen. Sobolev spaces. *Department of Mathematics and Systems Analysis, Aalto University*, 2017.
- [9] Frank Natterer. *The Mathematics of Computerized Tomography*. SIAM, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2nd edition, 2001.
- [10] J. Radon. Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten. *Akad. Wiss.*, 69:262–277, 1917.

- [11] J. Stoer, R. Bartels, W. Gautschi, R. Bulirsch, and C. Witzgall. *Introduction to Numerical Analysis*. Texts in Applied Mathematics. Springer New York, 2002.
- [12] Peter Aundal Toft. *The Radon Transform - Theory and Implementation*. PhD thesis, Technical University of Denmark, November 1996.