



Università degli Studi di Genova  
Genoa University



**DISFor** Dipartimento di Scienze della Formazione

## CORSO DI LAUREA IN SCIENZE DELLA FORMAZIONE PRIMARIA

DIDATTICA DELLA MATEMATICA INCLUSIVA:  
UNA PROPOSTA PRATICA DI DIFFERENZIAZIONE DIDATTICA

*Relatore: Marzia Garzetti*

*Correlatore: Francesca Morselli*

*Candidato: Giulia Schiavetta*

**ANNO ACCADEMICO 2023/2024**



*A tutta la mia Famiglia,  
pilastro portante all'interno della mia vita.  
Per sempre grata.*

## Indice

INTRODUZIONE.....	4
1. QUADRO TEORICO.....	8
1.1 L'inclusione posta a confronto con l'integrazione .....	8
1.2 Il percorso che porta all'inclusione nel contesto Europeo:.....	12
1.3 Il percorso che porta all'inclusione nel contesto italiano: .....	15
1.4 Apprendimento in matematica e teoria dell'oggettivazione .....	24
1.4.1 Teoria dell'oggettivazione.....	26
1.5 Motivazioni alla base della scelta della teoria dell'oggettivazione .....	29
1.6 Teoria della differenziazione didattica.....	30
1.6.1 Che cosa si differenzia nella teoria della differenziazione didattica?.....	33
1.6.2 In base a cosa si differenzia la didattica?.....	34
1.6.3 La classe differenziata .....	36
1.6.4 Istruzione differenziata e il processo valutativo .....	38
1.7 La didattica aperta .....	40
1.7.1 Un esempio di didattica aperta: il lavoro a stazioni .....	45
2. LA PROGETTAZIONE E L'INTERVENTO DIDATTICO.....	47
2.1 Motivazione al progetto .....	47
2.2 Osservazione e valutazione iniziale del contesto classe .....	50
2.3 Individuazione dei traguardi, obiettivi, competenze, spazi e tempi .....	54
2.4 Le frazioni e le relative misconcezioni .....	58
2.5 Le postazioni di lavoro con le relative attività.....	62
2.6 Presentazione e analisi a priori delle attività.....	65
Attività 1:.....	65
Attività 2:.....	66
Attività 3:.....	68
Attività 4:.....	69
3. ANALISI E INTERPRETAZIONE DEI DATI.....	76
3.1 Scelte alla base della raccolta dati.....	76
3.2 Interpretazione dei dati .....	77
4. CONCLUSIONI.....	98
Bibliografia .....	103
Ringraziamenti .....	113

## INTRODUZIONE

*Non c'è ingiustizia più grande che  
fare parti uguali tra disuguali (Don Lorenzo Milani).*

Il vero significato di uguaglianza si può sintetizzare in questa “semplice” frase: come ci insegna Don Milani, non consiste nel trattare tutti gli studenti allo stesso modo ma nell’individuare i bisogni e le differenze di ciascuno e valorizzarle.

In ambito educativo e didattico, questo significa abbandonare l'idea di un unico percorso di apprendimento valido per tutti gli studenti per adottare invece una didattica differenziata che tenga conto dei singoli bisogni, potenzialità e ritmi di apprendimento.

La matematica viene considerata una delle discipline fondamentali del percorso scolastico (MIUR, 2012); numerosi studi evidenziano la crescente preoccupazione per le difficoltà legate a quest’ultima, oltre che le disparità osservate tra gli studenti nel loro processo di apprendimento (Atweh et al., 2011).

Sia durante il mio percorso da studentessa alla scuola primaria, ma soprattutto nei gradi scolastici successivi e durante l’esperienza di tirocinante presso le scuole accoglienti, ho osservato e dialogato con bambini che descrivevano la loro esperienza con la matematica come negativa per differenti motivazioni. Inoltre, la letteratura mostra una chiara scarsità di studi specifici a livello nazionale che mettano in relazione l’ambito della pedagogia inclusiva e l’ambito della didattica della matematica (Bellaccio et al., 2022).

Per cercare di contrastare tale problema, all’interno della seguente trattazione vengono coinvolte la ricerca pedagogica, didattica e la normativa scolastica per arrivare poi a sviluppare una progettazione inclusiva di matematica, nello specifico sulle frazioni,

per superare la visione di questa disciplina come rigida e nozionistica a favore di una didattica della matematica aperta.

Parte proprio da qui il mio interesse a sviluppare il mio lavoro di tesi, ispirato dal progetto di ricerca interdisciplinare (OPEN-MATH) finanziato dalla Libera Università di Bolzano e dalla tesi di dottorato della Dottoressa Marzia Garzetti.

Il progetto OPEN-MATH fa riferimento ai due ambiti della pedagogia inclusiva e della didattica della matematica nel tentativo di strutturare un linguaggio comune che permetta la definizione di principi di progettazione e indicatori per una didattica inclusiva della matematica a partire da un posizionamento esplicito relativo all'inclusione scolastica in senso ampio, da declinare nel quadro dell'apprendimento e insegnamento della matematica (Garzetti, 2023).

Ho quindi elaborato una mia proposta pratica che si colloca in un contesto teorico che combina la teoria della differenziazione didattica teorizzata da Carol Ann Tomlinson (1999) e la teoria dell'oggettivazione in matematica elaborata da Radford (2021), integrandole nella progettazione utilizzando il quadro di didattica aperta (Demo, 2016).

Le attività presenti all'interno della progettazione sono state strutturate a partire dal contesto classe nel quale ho agito, seguendo la filosofia della differenziazione didattica, che tende a rispondere alle necessità e ai bisogni della classe eterogenea con la quale ho collaborato, valorizzando le diversità di ciascun studente.

Ho strutturato differenti postazioni di lavoro, ispirandomi ad alcuni principi della didattica a stazioni (Demo, 2016) ma non rispettandoli a pieno tutti in quanto il gruppo classe non era mai stato abituato a lavorare in gruppo. Per queste motivazioni per portare gli studenti verso l'autonomia in modo graduale e avviare il gruppo classe a modalità

future di lavoro a stazioni, ho creato io i gruppi sulla base delle caratteristiche e dei bisogni degli studenti.

A seguito di un'attenta analisi dei bambini e la suddivisione in piccoli gruppi ho attribuito loro diverse postazioni di lavoro che prevedevano differenti attività anch'esse scelte in base alle peculiarità degli alunni. Le attività si basano sul medesimo contenuto: le frazioni. Ciò che si differenzia sono i processi di apprendimento, il prodotto, i canali sensoriali coinvolti e l'ambiente di apprendimento. Gli indicatori che sono stati osservati sono: l'apprendimento in matematica, la partecipazione attiva e il livello di inclusione di ciascun alunno.

In questa tesi presenterò il lavoro svolto, in particolare nel capitolo 1 è introdotto il quadro teorico dove presento la tematica dell'inclusione con un excursus storico europeo e italiano (sezione 1.1, 1.2, 1.3). I successivi due paragrafi sono dedicati alle teorie a cui fa riferimento la progettazione: la teoria dell'oggettivazione (Radford, 2021) e la teoria della differenziazione didattica (Tomlinson 1999).

La prima viene presentata nella sezione 1.4, 1.4.1, 1.5. Si analizza la teoria e si chiarisce la relazione tra il sapere matematico e l'apprendimento. Si definisce il ruolo dell'insegnante in questo processo e si spiega come l'apprendimento della matematica si integri nel più ampio contesto dell'inclusione scolastica (Radford, 2021).

L'altra teoria è quella a differenziazione didattica come prospettiva didattica sull'inclusione, e si fa riferimento al lavoro di Tomlinson (1999; 2014) esposto nella sezione 1.6. Nei successivi sottoparagrafi si analizza più nel dettaglio la teoria, si definiscono successivamente i principi che la caratterizzano e alcune delle strategie proprie della differenziazione didattica volte alla valorizzazione dell'eterogeneità in classe. In particolare, si descrive la didattica aperta come modalità per promuovere la

differenziazione autodeterminata tra gli studenti con un particolare cenno alla didattica a stazioni per i futuri sviluppi di ricerca.

Nel capitolo 2 viene presentato il lavoro di ricerca: è composto da un primo paragrafo dove è presente la motivazione che mi ha spinto a intraprendere questo percorso (sezione 2.1) e seguono dei sottoparagrafi dove vengono presentate più nel dettaglio le singole attività. Si presenta anche, nella sezione 2.6 un'analisi a priori della progettazione.

Il capitolo 3 è dedicato alla raccolta, analisi e interpretazione dei dati emersi: è composto da una prima sezione (3.1) dove si motiva la scelta dei criteri alla base della raccolta dei dati e una seconda (3.2) che presenta un'interpretazione di quest'ultimi.

## 1. QUADRO TEORICO

### 1.1 L'inclusione posta a confronto con l'integrazione

Per arrivare a parlare di inclusione si deve avere ben presente il concetto di integrazione. L'integrazione si concentra principalmente sulla persona con disabilità, cercando di inserire quest'ultima in un contesto già esistente senza apportare significativi cambiamenti a tale contesto. In altre parole, il focus è sulla capacità della persona di adattarsi e di inserirsi in un ambiente che non è stato progettato tenendo conto delle sue esigenze specifiche. Il passaggio dall'integrazione all'inclusione rappresenta un cambiamento di prospettiva fondamentale. L'inclusione si basa sull'idea che è l'ambiente a dover cambiare per accogliere e rispondere ai bisogni di tutti, non solo delle persone con disabilità. La progettazione dell'ambiente è pensata per essere fruibile da tutti, indipendentemente dalle abilità e condizioni individuali. Questo approccio riduce le barriere fisiche, cognitive e sociali e promuove una cultura che riconosce e valorizza le differenze individuali. Il passaggio dall'integrazione all'inclusione comporta un cambiamento profondo nel modo in cui la società concepisce la disabilità e la diversità.

Il termine inclusione ha una storia relativamente recente nel panorama della riflessione pedagogica italiana, che invece discute da molto e in modo molto ricco il concetto di integrazione (de Anna, 2014; Pavone, 2014).

A livello sia internazionale che nazionale, le definizioni del concetto di inclusione sono molte e fanno riferimento a fenomeni diversi (Ainscow e Sandill, 2010; Armstrong, Armstrong e Spandagou, 2011; D'Alessio, 2013; Ianes & Cramerotti 2009).

Si parla di due grandi categorie di definizioni: quelle narrow (*strette*) e quelle broad (*ampie*) (Ainscow e Sandill, 2010; Armstrong, Armstrong e Spandagou, 2011;

D'Alessio, 2013). Ciò che differenzia le due categorie è il gruppo di alunni su cui si basano le riflessioni ed i processi che descrivono.

Le prime fanno riferimento a concettualizzazioni che incentrano il significato di inclusione sull'accoglienza degli alunni con disabilità o con bisogni educativi speciali all'interno della scuola di tutti e si parla prevalentemente di accoglienza all'interno dell'aula scolastica tramite interventi specifici per la persona con bisogno educativo speciale. La questione principale è quella del luogo, speciale o normale, in cui è organizzata la formazione degli alunni con disabilità.

Le seconde invece vedono nell'inclusione un processo di evoluzione e miglioramento continuo intrapreso dalle scuole puntando allo sviluppo di culture, politiche e pratiche che valorizzino le diversità di ciascun alunno al fine di garantire a ognuno apprendimento e partecipazione (Demo, 2016).

In Italia, data la grande importanza conferita alle leggi sull'integrazione scolastica, le diverse posizioni sull'inclusione si confrontano con il concetto di integrazione. Sono stati individuati quattro modi di intendere l'inclusione scolastica (Demo, 2016).

La prima prospettiva considera i concetti integrazione e inclusione come sinonimi. Il passaggio dal termine *integrazione* a *inclusione* è un adattamento lessicale e indica l'accoglienza degli alunni con disabilità nella scuola di tutti. Questo in Italia si verifica da oltre quarant'anni. Un'esemplificazione di utilizzo di questi termini lo possiamo ritrovare per esempio nelle Linee guida del Miur (2009) per l'integrazione di alunni con disabilità: in questo documento i termini *integrazione* e *inclusione* vengono utilizzate in modo interscambiabile per designare le politiche che regolano la presenza nella scuola italiana di alunni con disabilità.

La seconda proposta estende il termine inclusione con il concetto di Bisogno Educativo Speciale (BES) e quindi il riconoscimento di bisogni specifici e misure di individualizzazione e personalizzazione a tutti quegli alunni che, per un qualsiasi motivo, si trovano in una condizione di difficoltà rispetto al proprio percorso di apprendimento e partecipazione e quindi non più solamente agli alunni con disabilità certificata. La locuzione Bisogno Educativo Speciale si può far risalire al testo di Dario Ianes *Bisogni Educativi Speciali e inclusione* (2005). Hanno un bisogno educativo speciale tutti coloro che si trovano in una situazione problematica che, per il completamento positivo del proprio percorso scolastico, rende necessarie individualizzazione e personalizzazione.

“La recente normativa scolastica — prima in fatto di Disturbi Specifici dell’Apprendimento (DSA) e poi di Bisogni Educativi Speciali come macrocategoria che comprende le disabilità, i DSA e altri tipi di disturbi e/o svantaggio — sembra collocarsi su questa scia (legge 170/210 in materia di DSA, circolari e note ministeriali del 2012 e 2013 in materia di BES). L’inclusione rappresenterebbe allora un ampliamento dell’integrazione, espresso da quell’insieme di politiche che tutelano i diritti al riconoscimento e poi all’individualizzazione e personalizzazione per tutti gli alunni/e con BES” (Demo, 2016, pag. 123).

La terza proposta viene da un gruppo di studiosi nell’ambito dei Disability Studies (Fornasa e Medeghini, 2003; Medeghini et al., 2013) che contrappone le politiche dell’integrazione con quelle dell’inclusione. Secondo la loro posizione per sviluppare l’inclusione a scuola occorrono politiche di trasformazione, della sua cultura e della sua organizzazione affinché l’istituzione scolastica diventi capace di accogliere tutti, indipendentemente dalla loro appartenenza a una categoria specifica o dalle loro caratteristiche. La prospettiva dell’inclusione non può essere intesa come eliminazione delle differenze; ha il compito di promuoverle con interventi mirati e qualificati.

L'approccio inclusivo non pone l'accento su ciò che la persona non riesce a fare, ma cerca di valorizzare le peculiarità e le potenzialità di ognuno.

Secondo questo approccio, che ha come riferimento il modello sociale della disabilità di autori come Oliver (1990) e Barton (2006), è importante riconoscere nella scuola — fatta di cultura, politiche e pratiche (Booth e Ainscow, 2014) — le barriere che impediscono l'accesso e la partecipazione di ciascuno alle attività di apprendimento e socializzazione, lavorando a un continuo processo di analisi critica e progettazione di azioni di superamento e miglioramento.

La corrente italiana dei Disability Studies individua nelle politiche di integrazione, che prevedono misure e strumenti specifici per alcuni alunni, elementi critici delle politiche scolastiche.

Tali misure e strumenti specifici sono per esempio: il PEI che rischia di diventare strumento di progettazione individuale anziché individualizzata; l'insegnante di sostegno di singoli alunni con disabilità; il PDP e il referente nel caso di alunni con DSA o BES. Tutto ciò spesso trova applicazioni distorte di attenzione individuale che di fatto producono esclusione anziché inclusione; andrebbero eliminati e superati a favore di una riflessione capace di mettere in discussione i valori, l'organizzazione e le scelte didattiche di una scuola al fine di renderla davvero un luogo di apprendimento di qualità per tutti.

L'integrazione si concentra su un soggetto fuori dalla norma che deve essere integrato. L'inclusione indica alla scuola di organizzarsi per accogliere chiunque: «tutti gli esseri umani sono tra loro differenti, quindi tutti meritevoli di un'attenzione specifica» (Chiesara, 2014, p. 270).

L'Assemblea generale delle Nazioni Unite, il 10 dicembre 1948, approva e proclama la Dichiarazione Universale dei Diritti dell'Uomo. Il 13 dicembre 2006

l'assemblea Generale dell'ONU ha ritenuto necessario ribadire anche delle convenzioni specifiche per alcuni gruppi di persone più vulnerabili di altre. Diversamente dalla proposta dei Disability Studies, questa posizione non vede le politiche di integrazione come contrapposte a quelle dell'inclusione

La quarta ed ultima definizione vede l'integrazione come un processo particolare dell'inclusione: hanno in comune gli obiettivi ma non i soggetti a cui si indirizza. Le finalità comuni sono il massimo apprendimento possibile e la piena partecipazione; la differenza risiede nel fatto che le politiche di integrazione pongono l'attenzione su alcuni gruppi di alunni/e più a rischio di esclusione di altri, mentre l'inclusione fornisce la cornice generale per tutti (Ianes & Cramerotti, 2009).

È bene interrogarsi costantemente in maniera riflessiva e critica sulle modalità più adeguate a rispondere alle pluralità di bisogni del macrosistema società e dei contesti educativi che in quanto microsistemi sono riflessi della società stessa.

## 1.2 Il percorso che porta all'inclusione nel contesto Europeo:

L'Italia per arrivare a parlare di inclusione all'interno dell'istituzione scolastica ha affrontato un lungo percorso legislativo che l'ha portata a porsi un passo avanti sul concetto di inclusione scolastica rispetto alla maggior parte degli altri Paesi europei.

La necessità di garantire a tutti un'istruzione inclusiva è oggi riconosciuta universalmente nei principali trattati e documenti internazionali e risulta confermata da ricerche condotte a livello europeo (Budginaitè et al., 2016; UNESCO, 2017). Tuttavia, il percorso verso l'inclusione nelle scuole presenta disparità notevoli in termini di velocità e approcci adottati. Un'analisi comparativa dei dati (MIUR, 2015) provenienti da quattro importanti Paesi europei evidenzia significative differenze e convergenze (Tabella 1).

Tabella 1: L'inclusione scolastica di alunni con disabilità in 4 Paesi europei. Tabella tratta da Ciambrone (2017) p. 395

<b>NAZIONE</b>	<b>SISTEMA SCOLASTICO</b>	<b>PERIODO DI RIFERIMENTO</b>	<b>ALUNNI CON DISABILITA' / LIVELLO DI INTEGRAZIONE</b>	<b>PERCENTUALE ALUNNI CON DISABILITA'</b>
ITALIA	Sistema Inclusivo	a.s. 2009/2010	200.462 (tutti inseriti nelle classi comuni)	2,20%
		a.s. 2014/2015	234.000 (tutti inseriti nelle classi comuni)	2,65%
SPAGNA	Sistema Misto	a.s. 2009/2010	107.000 (di cui 2.800 inseriti nelle scuole speciali e 89.200 nelle classi comuni)	2,38%
		a.s. 2014/2015	136.705 (di cui 25.369 inseriti nelle scuole speciali, 6.605 in classi differenziali e 104.731 in class comuni)	3,10%
INGHILTERRA [England UK]	Sistema Misto	a.s. 2010/2011	226.000 (di cui 99.500 inseriti nelle scuole speciali, 15.500 nelle classi speciali e 111.000 nelle classi comuni)	2,80%
		a.s. 2014/2015	191.730 (di cui 82.680 inseriti nelle scuole speciali, 7.490 nelle classi differenziali e 112.580 in classi comuni)	2,77%
GERMANIA	Sistema con Distinzione	a.s. 2010/2011	480.000 (di cui 378.000 nelle scuole speciali e 102.000 inseriti nelle classi comuni)	5,51%
		a.s. 2014/2015	408.906 (di cui 258.612 nelle scuole speciali e 150.294 inseriti nelle classi comuni)	5,60%

In Europa si identificano tre tipologie di sistemi scolastici: inclusivo, misto e con distinzione. Attualmente, il modello completamente inclusivo, estendendo il confronto anche a tutti gli altri Stati europei è presente solamente in Italia. Esistono diverse forme di sistemi misti, in cui la presenza di classi e scuole speciali varia approssimativamente dal 20% al 59%. Come indicato nella tabella 1, i sistemi "con distinzione" sono riscontrabili non solo in Germania, ma anche in molti Paesi dell'Europa orientale e settentrionale.

Le differenze diventano più evidenti in relazione alle modalità di attuazione del concetto di classe e/o scuola speciale. In alcuni Paesi, le classi e le scuole speciali accolgono gli studenti con disabilità in maniera piuttosto indiscriminata, come nei Paesi Baltici o Slavi, mentre in altri Paesi dell'Europa centrale, come Germania e Belgio, vi è una distinzione basata sul tipo di disabilità.

In Belgio, ad esempio, esistono diverse categorie di classi speciali, che variano fino a otto tipologie in base alla specifica disabilità degli studenti accolti. Queste categorie includono disabilità intellettiva lieve, moderata o grave, disabilità visiva, uditiva, motoria, patologie croniche, disturbi del comportamento, nonché dislessia e altri disturbi specifici dell'apprendimento.

È importante sottolineare che molti Paesi europei stanno attualmente rivedendo i loro sistemi scolastici per quanto riguarda la presenza di scuole e classi speciali. Si sta verificando una tendenza verso una maggiore apertura degli accessi alle scuole comuni, mentre al contempo si lascia alle famiglie la possibilità di scegliere se iscrivere i propri figli a tali istituzioni. Nel Regno Unito, ad esempio, lo *Special educational needs and disability code of practice del 2015*, stabilisce che le famiglie hanno la libertà di iscrivere gli studenti con disabilità sia *nelle Mainstream Schools* che all'interno delle *Special*

*Schools o nelle Special Classrooms*. Soprattutto in Gran Bretagna, ma anche in altri Paesi, segue un approccio pragmatico che valorizza la libertà di scelta delle famiglie, seguendo le direttive europee sull'Analisi d'Impatto della Regolamentazione (AIR). Queste direttive promuovono il coinvolgimento e il consenso degli stakeholders nelle decisioni relative alle politiche pubbliche.

### 1.3 Il percorso che porta all'inclusione nel contesto italiano:

Per quanto riguarda l'Italia: esclusione, segregazione, integrazione e inclusione sono i quattro passaggi che hanno portato la scuola italiana a parlare di inclusione nella definizione attuale.

Riferendosi al Decreto legislativo n. 96 del 7 agosto 2019 (Decreto Inclusione) che è andato a innovare il decreto legislativo n.66 del 2017 si torna a parlare di inclusione introducendo quattro novità:

- Modifica delle modalità di assegnazione delle ore di sostegno;
- Introduzione del Piano Educativo Individualizzato (PEI);
- Revisione della composizione delle commissioni mediche che si occupano di accertare la disabilità;
- Istituzione dei Gruppi di Inclusione Territoriale (GIT) e dei Gruppi di lavoro operativo per l'inclusione.

Nell'art 1 del DM 66 si afferma che “ *L'inclusione scolastica (...) risponde ai differenti bisogni educativi e si realizza attraverso strategie educative e didattiche finalizzate allo sviluppo delle potenzialità di ciascuno (...) nella prospettiva della migliore qualità di vita; si realizza nell'identità culturale, educativa, progettuale, nell'organizzazione e nel curriculum delle istituzioni scolastiche, nonché attraverso la*

*definizione e la condivisione del progetto individuale fra scuole, famiglie e altri soggetti, pubblici e privati, operanti sul territorio; è impegno fondamentale di tutte le componenti della comunità scolastica le quali, nell'ambito degli specifici ruoli e responsabilità, concorrono ad assicurare il successo formativo delle bambine e dei bambini, delle alunne e degli alunni, delle studentesse e degli studenti.”*

Il concetto di inclusione è relativamente recente e diventa oggetto del dibattito pedagogico italiano dagli anni '90. Il lungo e tortuoso cammino verso l'inclusione vede il susseguirsi di tappe intermedie che portano la scuola a trasformarsi. Come ci ricorda la nostra Costituzione ogni persona ha il diritto e il dovere di andare a scuola, l'articolo 34 non lascia spazio a libere interpretazioni, sancendo nero su bianco che “la scuola è aperta a tutti (...) è obbligatoria e gratuita”.

Purtroppo, se ripercorriamo il passato vediamo che questo diritto è stato per anni ampiamente disatteso. Per arrivare a rendere l'istituzione Scuola *aperta a tutti* era necessario una vera e propria riorganizzazione dei contesti per far sì che quel diritto fosse realmente esperibile a tutti.

Come sopra detto, prima di arrivare a parlare di inclusione, si sono susseguiti una serie di periodi precedenti che di seguito illustrerò. Il periodo dell'esclusione, che termina subito prima della riforma Gentile del 1927, è quel periodo dove non si ha una vera legislazione che stabilisca il ruolo della scuola nei confronti della persona con disabilità. Non sono ancora nate le scuole speciali: tutte le persone ritenute “normali” possono stare insieme, chi ha caratteristiche diverse viene escluso.

Il periodo successivo all'esclusione è quello della segregazione, che coincide con la Riforma Gentile: arriviamo alle scuole speciali. È un passo avanti, perché si iniziamo a considerare all'interno dei contesti scolastici anche le persone con disabilità. Vengono

separati gli studenti a funzionamento tipico da quelli a funzionamento atipico: la scuola speciale affianca la scuola comune, ma non dialoga con essa. Si parla di obbligo scolastico, ma solo per determinate categorie di disabilità, quelle sensoriali. Per tutti gli altri casi in cui ci troviamo davanti ad una difficoltà intellettuale, e quindi non necessariamente visibile, o che si manifesta tramite comportamenti atipici, non si prevede l'obbligo scolastico. In questa fase i bambini con disturbi comportamentali, senza alcun ritardo mentale vengono mandati in classi differenziali. Sempre in questo periodo nascono le *scuole di metodo* per gli insegnanti: nascono degli istituti che iniziano a formare le insegnanti perché possano andare a lavorare con bambini con disabilità sensoriali. Purtroppo però all'interno di queste scuole viene data una formazione prevalentemente medica. Sebbene l'apertura delle scuole speciali e delle classi differenziali sia stata utile per avviare un lungo processo che poi ha portato la scuola all'emancipazione da logiche separatiste e medicalizzanti; tale processo di inserimento delle persone disabili è però avvenuto in un momento in cui la scuola non era ancora pronta ad accogliere e offrire le risposte formative ed educative adatte.

Si giunge quindi ad un periodo che viene definito "inserimento selvaggio" che ha preceduto il processo di integrazione vero e proprio. In questo periodo le persone disabili entrano a far parte della scuola di tutti e inizia un percorso di inserimento. Nonostante si avvii a tutti gli effetti un percorso di apertura dell'istituzione scolastica a diversità umane che fino a quel momento sembravano non esistere o seguivano un percorso differenziato, non c'era personale specializzato in grado di rispondere ai bisogni di questi studenti e studentesse (Bochiccio F. (a cura di), 2017).

Qui di seguito riporto una serie di leggi fondamentali che caratterizzano questo periodo di transizione che precede quello dell'integrazione:

- Legge 118 del 1971: l'istruzione dell'obbligo deve avvenire nelle classi normali della scuola pubblica, salvo i casi in cui i soggetti siano affetti da gravi deficienze intellettive o da menomazioni fisiche di tale gravità da impedire o rendere molto difficoltoso l'apprendimento o l'inserimento nelle predette classi normali (Art.18)
- Decreti Delegati del 1973: la scelta di aprire la scuola ai fanciulli handicappati e di predisporre dunque strutture e mezzi per rendere effettivo il processo di inserimento (Art. 6)
- Documenti Falcucci del 1974: presenta alcuni cambiamenti radicali da attuarsi nella strutturazione e organizzazione didattica, nei rapporti col territorio e con la società, nella concezione culturale relativa all'idea di norma e normalità.

Questo documento sottoscrive alcuni aspetti fondamentali per arrivare al nostro modello di inclusione odierno: promozione di una programmazione di tipo curricolare a misura dell'alunno; la necessaria specializzazione dei docenti; il superamento del rapporto unidirezionale insegnante/classe; la possibilità di organizzare il lavoro non più solo limitatamente al contesto classe; la proposta del tempo pieno; il numero degli alunni in presenza di un alunno con disabilità.

- Circolare 227 del 1975: Il testo discute delle misure proposte per favorire l'integrazione scolastica e sociale degli studenti handicappati nelle scuole comuni. Si sottolinea che l'obiettivo di integrazione non esclude l'importanza degli istituti speciali, ma punta a trasformare e rinnovare le scuole comuni per accogliere gli

studenti con difficoltà di apprendimento e adattamento. Si riconosce la complessità dei problemi strutturali e organizzativi da affrontare, ma si invita a studiare tempi e modalità concrete di intervento, coinvolgendo gli organi collegiali delle istituzioni scolastiche per l'importanza democratica dell'integrazione. Si sottolinea la necessità di un nuovo modo di concepire la scuola e di decisioni gradualmente e coerenti sul piano amministrativo. Si suggerisce che il Distretto scolastico possa facilitare il superamento delle difficoltà, considerando la dimensione territoriale fin da subito per valutare l'efficacia del programma proposto.

- Legge 517 del 1977: l'istruzione dell'obbligo deve avvenire nelle classi normali della scuola pubblica, salvo i casi in cui i soggetti siano affetti da gravi deficienze intellettive o da menomazioni fisiche di tale gravità da impedire o rendere molto difficoltoso l'apprendimento o l'inserimento nelle predette classi normali (Art.18). L'ultimo comma dell'Art. 7 parla di *abolizione delle classi differenziali e delle classi di aggiornamento* realizzata attraverso una programmazione educativa collegiale, comprendente anche le attività scolastiche integrative, nonché le attività di sostegno e le attività svolte da insegnanti specializzati. La legge 517 inoltre propone la modifica del sistema di valutazione nella scuola dell'obbligo e formalizza l'assegnazione di un insegnante specializzato presso le Scuole Ortofreniche riformate, nei programmi e nella struttura dei corsi del 1975, per sostenere l'integrazione degli alunni con disabilità nel rapporto di un docente ogni quattro studenti.

La legge 517 inoltre traduce nella prescrittività della norma le importanti indicazioni del documento Falcucci: il superamento del vecchio piano di lavoro individuale e l'adozione della programmazione di tipo curricolare, che comporta una negoziazione sociale dei fini e degli obiettivi e una loro maggiore trasparenza e

comunicabilità; l'apertura a modalità organizzative flessibili e funzionali e a una varietà di esigenze e di scopi, avendo come punto di riferimento la centralità dello studente e il suo diritto alla piena educazione; la possibilità di un ampliamento del tempo scolastico e di una sua più ricca articolazione; l'adozione di nuove modalità e nuovi strumenti di valutazione, per comprendere, accompagnare, sostenere l'alunno piuttosto che definirlo nella rigidità di un voto.

Si arriva al periodo dell'integrazione, segnato dalla Legge Quadro sull'Handicap, del 1992, che regola tutto il discorso sulla disabilità. Nello specifico gli articoli 12, 13, 14, 15, 16 della Legge 104 del 1992 sanciscono non solo il diritto all'istruzione e all'integrazione scolastica, ma definiscono chiaramente il ruolo degli insegnanti di sostegno e istituiscono gruppi di lavoro all'interno degli uffici scolastici provinciali. Questi gruppi sono incaricati di pianificare e promuovere l'integrazione scolastica degli studenti con disabilità e di regolamentare i processi di valutazione e le prove d'esame.

La Legge identifica inoltre alcuni strumenti fondamentali per garantire l'integrazione scolastica degli alunni con disabilità:

- Diagnosi funzionale: Descrive i punti di forza e di debolezza dell'alunno.
- Profilo dinamico funzionale: Redatto dagli insegnanti, dalla famiglia e dagli operatori sociosanitari sulla base della diagnosi funzionale.
- Piano educativo individualizzato (PEI): Stabilisce gli obiettivi di apprendimento e socializzazione per l'alunno durante l'anno scolastico, delineando le strategie didattiche necessarie per il loro raggiungimento, nonché le risorse materiali e finanziarie richieste.

È una legge ancora attuale, ma con un linguaggio antico e che rimane invariato (vediamo ad esempio il termine handicap, oggi non più utilizzato).

L'articolo 8 della Legge 104 parla di *inserimento e integrazione sociale*:  
“l’inserimento e l’integrazione sociale della persona handicappata si realizzano mediante (... ) c) interventi diretti ad assicurare l’accesso agli edifici pubblici e privati e ad eliminare o superare le barriere fisiche e architettoniche che ostacolano i movimenti nei luoghi pubblici o aperti al pubblico; d) provvedimenti che rendano effettivi il diritto all’informazione e il diritto allo studio della persona handicappata, con particolare riferimento alle dotazioni didattiche e tecniche, ai programmi, a linguaggi specializzati, alle prove di valutazione e alla disponibilità di personale appositamente qualificato, docente e non docente”.

L’integrazione scolastica ha come obiettivo lo sviluppo delle potenzialità della persona handicappata: nell’apprendimento, nella comunicazione, nelle relazioni nella socializzazione

Gli insegnanti di sostegno assumono la *contitolarità* delle sezioni e delle classi in cui operano, partecipano alla programmazione educativa e didattica e alla elaborazione e verifica delle attività di competenza dei consigli di interclasse, dei consigli di classe e dei collegi dei docenti.

Articoli relativi all’educazione nella Legge Quadro sull’Handicap n. 104 del 1992:

- Art. 12 Diritto all’educazione e all’istruzione:

Definisce gli obiettivi dell’integrazione scolastica

Definisce le modalità di individuazione dell’handicap e regola le procedure di progettazione conseguenti: profilo dinamico-funzionale (PDF) e piano educativo individualizzato (PEI)

- Art. 13 Integrazione scolastica:

Definisce gli strumenti e le strategie per la realizzazione dell'integrazione scolastica: programmazione collegiale e coordinata fra servizi diversi, dotazione di attrezzature tecniche e sussidi didattici (compresi incarichi di interpretariato).

Definisce il ruolo e la determinazione degli insegnanti di sostegno o Definisce strumenti e modalità per la frequenza universitaria di studenti disabili.

Con la legge 18 del 2009, l'Italia ratifica la Convenzione ONU sui diritti delle persone con disabilità e adotta la Classificazione Internazionale del Funzionamento, della Disabilità e della Salute (ICF). La Legge introduce il concetto di inclusione, sebbene non specificamente nel contesto scolastico, e riconosce la responsabilità educativa di tutto il personale scolastico nei confronti degli studenti con disabilità.

Un passaggio fondamentale che caratterizza il periodo dell'inclusione è costituito dalla Legge 170/2010. Tratta dei disturbi specifici dell'apprendimento (DSA) al cui interno rientra la dislessia, disgrafia, disortografia e discalculia. Agli studenti con DSA viene garantito un particolare supporto per favorire loro il successo scolastico come: introduzione di misure compensative (es: mappe concettuali, tempo aggiuntivo) e misure dispensative, forme di verifica e valutazione adeguate ai loro bisogni formativi. Grazie alla direttiva ministeriale del 27 dicembre del 2012 la legge 170 del 2010 si estende anche a studenti con svantaggi culturali, ambientali, affettivo-relazionali, e agli stranieri che non parlino la lingua d'insegnamento. In questo contesto si introduce il concetto di studenti con bisogni educativi speciali (BES), che include non solo gli studenti con disabilità, ma anche quelli con disturbi specifici dell'apprendimento (DSA) e coloro che affrontano svantaggi socioeconomici, linguistici o culturali. La direttiva parla di una "presa in carico" dell'alunno con BES

da parte di ciascun docente. Questa norma segna in Italia il passaggio da una visione della disabilità come problema individuale a una concezione della disabilità come risultato dell'interazione con un contesto sociale, come promosso dall'ICF.

Ianes e colleghi (2020) evidenziano che l'estensione del gruppo degli studenti con bisogni educativi speciali oltre gli studenti con disabilità e DSA ha suscitato forti critiche, anche all'interno della ricerca pedagogica. Da un lato, sembra promuovere l'equità fornendo a ciascun studente ciò che è necessario per raggiungere i propri obiettivi educativi. Dall'altro, riservare una differenziazione a una specifica categoria di studenti può portare a una stigmatizzazione, evidente sin dai primi anni di applicazione della legge. Questo si inserisce nel dilemma della differenza, ora affrontato anche a livello normativo. Il dilemma della differenza (Terzi, 2005) mette in evidenza, all'interno di contesti educativi, la difficoltà di trovare un equilibrio tra due poli: da un lato la necessità di offrire supporti e interventi che rispondano ai bisogni specifici del singolo studente per promuovere l'equità (Ianes, 2006); dall'altro, il rischio di etichettare e danneggiare determinate categorie o gruppi di studenti, stigmatizzandoli (Algraigray & Boyle 2017).

Gli autori dimostrano che le politiche di integrazione prima, e di inclusione poi, adottate in Italia, sono correlate a un miglioramento del sistema scolastico. Queste politiche non solo mirano a garantire un'educazione accessibile per tutti, senza la necessità di scuole speciali, ma, come evidenziano alcuni studi (Ianes, Demo & Zambotti 2014; Agrillo, Zappalà & Aiello, 2020; Vago, 2014), la presenza di studenti con bisogni educativi speciali in classe sembra promuovere l'adozione di metodologie didattiche più varie e diversificate. Questo arricchisce l'esperienza scolastica di tutti gli studenti. In particolare, gli strumenti e le metodologie sviluppati per supportare studenti con bisogni educativi speciali si rivelano efficaci anche per altri studenti, nonostante siano stati originariamente progettati per un gruppo specifico.

#### 1.4 Apprendimento in matematica e teoria dell'oggettivazione

Nei paragrafi precedenti ho illustrato la tematica dell'inclusione portando alla luce le differenze con il concetto di integrazione (1.1), ho mostrato il percorso che è stato fatto nel contesto europeo (1.2) e italiano (1.3) per arrivare a poter parlare di inclusione.

In questo paragrafo viene trattato l'apprendimento in matematica, dimensione anch'essa fondamentale del concetto di inclusione.

La ricerca dello specialista Mel Ainscow suggerisce che è utile adottare una definizione di educazione inclusiva che comprenda un processo volto all'identificazione e alla rimozione delle barriere; alla presenza, partecipazione e successo di tutti gli studenti (Ainscow, 2020). Allo stesso tempo, è importante porre particolare attenzione ai gruppi di studenti a rischio di emarginazione, esclusione o insuccesso.

I dati mostrano che un dibattito ben orchestrato su questi elementi può portare a una comprensione più ampia del principio di inclusione. Sebbene per sua natura questo dibattito possa essere lento e, probabilmente, senza fine, esso può influenzare positivamente le condizioni necessarie affinché le scuole si sentano incoraggiate a muoversi verso una maggiore inclusività (Ainscow, 2020). Questi dibattiti devono coinvolgere tutti i portatori di interesse nelle comunità, comprese famiglie, leader politici e religiosi, e i media.

Una scuola inclusiva è una scuola che cerca di migliorarsi ogni giorno, che trasforma le proprie pratiche affinché tutti gli alunni che la frequentano possano sentirsi accolti e protagonisti, oltre che godere di processi di apprendimento della massima qualità possibile. Ogni bambino è differente, e la diversità all'interno di una scuola inclusiva è vista come ricchezza e risorsa che arricchisce i processi di apprendimento e partecipazione di ciascuno. La prospettiva dell'inclusione che segue questo progetto è

quella della differenziazione didattica e fa riferimento al lavoro di Carol Ann Tomlinson (1999) in *“The differentiated classroom. Responding to the needs of all learners. ASCD”*. Nei successivi capitoli sulla teoria della differenziazione didattica (1.6) e sulla didattica aperta (1.7) si metterà ulteriormente in evidenza il tema dell’inclusione nella sua definizione più ampia.

In questa sezione, introdurrò alcuni costrutti e prospettive che saranno utili per il percorso di ricerca, considerando i lavori svolti da Radford (2021) in *“Theory of objectification: a cultural-historical theory of learning, knowing, and becoming in mathematics teaching and learning”* e altri studi di M. Asenova, B. D’Amore, M. I. Fandiño Pinilla, M. Iori e G. Santi (2020) in *“The theory of objectification and the theory of didactical situations: An example of comparison between theories in mathematics education”* sulla teoria dell’oggettivazione.

Se la differenziazione didattica struttura l’approccio al dilemma della differenza (Terzi, 2005) e la prospettiva inclusiva in termini trasversali e fornisce alcuni strumenti per progettazione e rilevazione di ambienti inclusivi, la teoria dell’oggettivazione va a chiarire cosa si intenda per apprendimento della matematica. Ciò significa chiarire la relazione tra sapere matematico e apprendimento, stabilire il ruolo dell’insegnante in questo processo, chiarire come l’apprendimento della matematica si inserisca nel più generale contesto dell’inclusione scolastica e che conseguenze tali scelte abbiano sulla progettazione di attività in matematica, e sulla loro valutazione (Garzetti, 2023).

Per chiarificare cosa si intende per apprendimento della matematica è bene illustrare la relazione tra sapere matematico e apprendimento, chiarire come l’apprendimento della matematica si inserisca nel più generale contesto dell’inclusione scolastica e che conseguenze tali scelte abbiano sulla progettazione di attività in

matematica, e sulla loro valutazione oltre che andare a stabilire il ruolo dell'insegnante all'interno di questo processo. La teoria dell'oggettivazione si presta ad essere utilizzata per definire l'apprendimento in ottica inclusiva perché riconosce al processo di insegnamento e apprendimento un carattere fortemente etico: obiettivo esplicito del processo di insegnamento e apprendimento nella teoria dell'oggettivazione è quello di creare soggetti riflessivi ed etici, che si posizionano criticamente rispetto a pratiche matematiche socialmente costituite (Radford, 2021). Lavorare in ottica inclusiva porta alla necessità di scardinare alcuni assunti impliciti legati all'idea di un apprendimento individualista e standardizzato, per favorire un apprendimento, in questo caso della matematica, che miri alla consapevolezza individuale del carattere storico e sociale del sapere matematico, nell'idea che ciascuno e ciascuna abbiano il diritto di posizionarsi rispetto ad esso, prendendo coscienza delle forme che esso assume.

#### 1.4.1 Teoria dell'oggettivazione

In un recente testo, Radford (2021) definisce la teoria dell'oggettivazione come una prospettiva Vygotskiana sul conoscere e il divenire nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica. Questa teoria socioculturale dell'apprendimento e dell'insegnamento sottolinea l'importanza di considerare nel processo di apprendimento sia il sapere, ovvero l'incontro tra la materia e la conoscenza, sia il divenire, definito come la trasformazione a cui va incontro l'individuo che apprende. I processi di apprendimento, che comprendono sia il sapere che il divenire, avvengono all'interno dell'attività umana, considerata l'unità fondamentale dell'analisi nella teoria dell'oggettivazione in tutte le sue componenti. Radford definisce la teoria dell'oggettivazione con l'obiettivo di comprendere ciò che può rendere l'attività di insegnamento-apprendimento un intellettuale e materiale che porta alla comprensione della matematica e a un arricchimento sociale e culturale collettivo, sia per l'insegnante

che per lo studente (Radford, 2020). La domanda principale posta da Radford "Come può essere concepita una tale attività? Un'attività che non è alienante permette un incontro critico con la storia e la cultura, ed è, allo stesso tempo, una realizzazione del sé e dell'altro?" (Radford, 2020, p.16 traduzione propria) Questo capitolo sarà costruito intorno a rispondere a questa domanda, permettendo una comprensione della teoria dell'oggettivazione e dei suoi obiettivi principali. Per inquadrare la teoria dell'oggettivazione, ci riferiremo principalmente a due testi di Radford (2021; 2020b). In primo luogo, la teoria definisce le azioni del soggetto come profondamente radicate in un contesto culturale e sociale, in linea con i principi delle teorie socioculturali in campo educativo. Secondo la teoria, il soggetto non è ridotto a meri processi cognitivi (Valero, 2004) o alla sola interazione verbale, ma questi aspetti sono considerati all'interno e in relazione al contesto sociale in cui l'individuo è incorporato e che l'individuo modifica attraverso le loro azioni (Radford, 2021). Di conseguenza, lo studio dell'apprendimento non può essere ridotto solo allo studio delle sue componenti psicologiche, ma deve tenere conto dei processi collettivi che strutturano e definiscono la conoscenza e permettono all'individuo di posizionarsi rispetto ad essa. L'attenzione si concentra sui due assi che definiscono i processi di insegnamento e apprendimento nella teoria dell'oggettivazione: il legame tra conoscenza e conoscenza e il legame tra essere e divenire (Radford, 2021). Attorno a questi assi si sviluppano tutti i concetti chiave della teoria. L'attività umana modella la dialettica tra soggetto e oggetto, e tra individuo e conoscenza, costituendosi attraverso l'uso collettivo di segni e artefatti culturali (Radford, 2020). Quando l'attività umana ha uno scopo o è collegata al bisogno di un individuo, è definita come lavoro. In questo contesto, l'attività di insegnamento e apprendimento diventa un lavoro che studenti e insegnanti svolgono collettivamente.

Questo aspetto, e quelli successivi, saranno approfonditi in questo capitolo; qui una breve introduzione è data. Radford parla di conoscenza come un sistema di archetipi di pensiero, azione e riflessione storicamente costituito dal lavoro collettivo degli individui, lavoro che è incarnato e culturale. (Radford, 2021, pag. 41). L'apprendimento è quindi un processo sociale, ideale e materiale in cui il soggetto diventa consapevole, incontra l'oggetto del sapere, modificandosi esso stesso (Radford, 2020b). Il legame tra sapere e conoscere e il legame tra essere e divenire sono i due assi che definiscono i processi di insegnamento e apprendimento nella teoria dell'oggettivazione. Si parla di apprendimento quando gli studenti e gli insegnanti collaborano insieme un processo collettivo che permette agli studenti di incontrare una forma di conoscenza culturalmente e storicamente costruita. Docente e allievo, in una situazione di apprendimento e insegnamento, condividono una pratica che li lega, che li modifica, con ruoli e attività non sempre distinguibili. L'azione del docente e dell'allievo non sono "due azioni" ma "la stessa azione": il lavoro che si produce, la persona che lo produce, i vari agenti sono tutte componenti all'unisono di un'unica attività che possiamo chiamare lavoro.

All'interno di questa teoria insegnare e apprendere sono indistinguibili, il docente trasforma sé stesso nella pratica da insegnare, così come l'allievo si trasforma nell'apprendere proprio perché il lavoro è visto in ottica sociale, nel contesto scuola, nell'evoluzione della pratica d'aula che è un'azione sociale, non individuale, posta in atto da tutti quelli che partecipano ad essa. L'intervento dell'insegnante, infatti, non è visto come una diminuzione dell'autonomia dello studente ma è visto come necessario per aiutare lo studente ad andare verso la conoscenza nel momento in cui quest'ultimo si blocca per un qualche motivo. Una delle caratteristiche fondamentali del processo di oggettivazione è la materialità: l'utilizzo di artefatti ha un'influenza e va a strutturare il sapere che lo studente va a costruire (Radford, 2021). Radford parla di "*artefactual*

*semiotic activity*” (2021, p.78): sottolineando che l'attività matematica, associata al raggiungimento di un fine è intrinsecamente legata all'uso di segni e artefatti. Radford definisce tali artefatti come *mezzi semiotici di oggettivazione*. “object, tools, linguistic devices, and signs that individuals intentionally use in social meaning-making processes to achieve a stable form of awareness, to make apparent their intentions, and to carry out their actions to attain the goal of their activities, are called semiotic means of objectification.” (Radford, 2021, p. 100). I segni e artefatti che l'uomo utilizza produce sono portatori del sapere della propria cultura, della storia di una comunità e del lavoro collettivo che ha permesso di produrli. L'analisi dell'uso di tali mezzi semiotici di oggettivazione durante l'attività di insegnamento e apprendimento matematico offre un accesso fondamentale allo studio dell'apprendimento matematico e alla comprensione del processo di oggettivazione in corso. In questo elaborato di tesi, mirato a indagare l'apprendimento matematico in una prospettiva inclusiva, i mezzi semiotici di oggettivazione costituiscono uno degli elementi chiave di analisi. In particolare, l'analisi dei mezzi semiotici di oggettivazione viene condotta in momenti specifici dell'attività didattica e di apprendimento noti come "nodi semiotici". “A semiotic node refers to segments of activity where students and teachers bring forward possible mathematical interpretations and courses of action against the backdrop of culturally and historically constituted forms of thinking and doing” (Radford, Demers, Guzmán & Cerulli, 2003; Radford & Sabena, 2015; citati in Radford 2021, p. 102).

### 1.5 Motivazioni alla base della scelta della teoria dell'oggettivazione

La scelta della teoria dell'oggettivazione si basa su due ragioni principali, oltre alla crescente importanza che questa teoria ha acquisito negli ultimi anni nel campo dell'educazione matematica. Il primo motivo è che Radford (2021), strutturando la teoria dell'oggettivazione in matematica, definisce sistematicamente ciascuno degli elementi

coinvolti nell'apprendimento e il concetto di apprendimento stesso. Questo rigore è fondamentale per definire l'inclusione come apprendimento, come discusso nel capitolo precedente. Senza tale rigore, c'è il rischio di avere definizioni vuote e inutilizzabili nel contesto specifico dell'educazione matematica. La seconda ragione sta nella natura trasformativa della teoria dell'oggettivazione. L'obiettivo esplicito del processo di insegnamento e apprendimento, secondo questa teoria, è quello di creare soggetti riflessivi ed etici che si posizionano criticamente rispetto alle pratiche matematiche socialmente costituite (Radford, 2021). Ciò implica un riconoscimento della forte natura etica del processo di insegnamento e apprendimento: un aspetto non nuovo nel campo dell'educazione matematica (Ernest, 2012), ma qui sistematicamente integrato nelle definizioni degli elementi del processo (Radford, 2008; 2021).

Lavorare in una prospettiva inclusiva richiede sfidare alcune ipotesi implicite relative all'idea di apprendimento individualistico e standardizzato. Si deve promuovere un tipo di apprendimento della matematica che mira alla consapevolezza individuale della natura storica e sociale della conoscenza matematica, nella convinzione che ognuno ha il diritto di posizionarsi rispetto ad essa, diventando consapevole delle sue forme. Questo è l'obiettivo principale della teoria dell'oggettivazione secondo Radford, e uno dei motivi principali per cui essa è stata scelta in questo progetto.

### 1.6 Teoria della differenziazione didattica

La differenziazione didattica (Tomlinson, 1999) è l'approccio scelto per la progettazione che illustrerò nel capitolo 2, in quanto rispecchia efficacemente le definizioni recenti di inclusione nel campo educativo già precedentemente esposte nella sezione 1.1. Carol Ann Tomlinson ha teorizzato questo approccio, descrivendolo come una filosofia educativa che affronta le esigenze di classi eterogenee, considerando la

diversità come una risorsa e come tale si deve valorizzare e non vedere come un ostacolo da superare. Tomlinson (1999) si riferisce ad esso come una filosofia di apprendimento, piuttosto che un semplice insieme di strategie di insegnamento. Sebbene i suoi testi (Tomlinson & Imbeau, 2012; Sousa & Tomlinson, 2011) suggeriscano metodi e strategie per implementare la differenziazione in classe, il nucleo di questo approccio consiste in una serie di principi che guidano la flessibilità e l'adattamento delle strategie stesse. Le caratteristiche distintive di questo approccio vedono come gli studenti imparano in modi diversi, hanno diverse passioni, interessi e culture, a volte parlano lingue diverse e possiedono diversi livelli di fiducia in sé stessi e consapevolezza del proprio potenziale e dei propri limiti. Queste differenze richiedono diversi strumenti e risorse, nonché vari tipi di ambienti e attività di apprendimento. È responsabilità degli insegnanti garantire che ogni studente padroneggi il contenuto essenziale di una materia. La pianificazione della classe deve essere flessibile e adattarsi agli studenti, non stabilire uno standard uniforme per tutti da seguire. Insegnanti e studenti devono comprendere la natura della materia studiata e la loro natura per un lavoro in classe efficace: nel presente lavoro per questo motivo abbiamo fatto riferimento alla teoria dell'oggettivazione (Radford, 2021). La flessibilità è essenziale per consentire a ogni studente di trovare il proprio posto in classe. (Tomlinson & Imbeau, 2012). Nel contesto della differenziazione didattica, si pone l'accento, sia a livello disciplinare sia di apprendimento, sull'importanza di un curriculum di qualità. Questo curriculum deve rispettare le linee guida e i traguardi per l'apprendimento definiti dal MIUR (2012; 2018), e fissare obiettivi specifici e chiari per la classe, associandoli a attività consapevoli, specifiche e coerenti con tali obiettivi. Il rispetto per lo studente si manifesta quando le attività proposte sono adeguate alla sua zona di sviluppo prossimale (Vygotskij, 1986), non sminuendo ciò che già conosce né limitando le sue potenzialità di apprendimento.

I principi della differenziazione didattica (Tomlinson, 1999) sono i seguenti:

- La flessibilità: è una delle parole chiave della didattica differenziata. La metafora dell'insegnamento-apprendimento come un concerto jazz ne esprime bene il valore: non si tratta di una flessibilità data dalla mancanza di struttura, ma di una capacità di adattamento al contesto e alle sue esigenze. Questo tipo di flessibilità è intrinsecamente legato alla professionalità del docente, alle sue competenze tecniche, sociali e personali.
- La valutazione formativa: negli ultimi anni ha acquisito un ruolo centrale nella ricerca didattica e mantiene questa centralità anche nella differenziazione didattica. Valutazione e progettazione didattica sono inseparabili: non si tratta solo di assegnare un voto, ma di utilizzare le informazioni e i feedback degli studenti per pianificare il percorso della classe, aggiustare le traiettorie di insegnamento e apprendimento, valorizzare le abilità di ciascuno e creare spazi per l'aiuto reciproco e la responsabilizzazione individuale (Sousa & Tomlinson, 2011). Coinvolgere lo studente nel processo di valutazione lo rende responsabile del proprio apprendimento (Black & Wiliam, 2009), favorendo l'autodeterminazione.
- La costruzione di una comunità di apprendimento: si basa sulla condivisione di una visione comune e di un sistema di valori che permetta a ciascuno di comprendere i principi fondamentali del percorso educativo, di sentirsi parte della classe e di assumersi responsabilità verso sé stesso e gli altri nel processo di apprendimento.

### 1.6.1 Che cosa si differenzia nella teoria della differenziazione didattica?

La differenziazione didattica (Tomlinson, 1999), svolta da parte dell'insegnante verso la comunità classe si delinea rispetto a quattro componenti: contenuti, processi, prodotti e ambiente di apprendimento.

Il progetto OPEN-MATH (Demo, Garzetti, Santi & Tarini, 2021), dal quale ho preso ispirazione per iniziare questo lavoro di tesi, ha puntato ad una differenziazione dei processi di apprendimento, offrendo diverse modalità per affrontare lo stesso contenuto.

All'interno della mia progettazione il contenuto è comune, le frazioni, mentre i processi, i prodotti e l'ambiente di apprendimento cambiano a seconda delle diverse attività che ho differenziato e adattato per gli alunni alle quali era destinata.

Come sottolineato da Tomlinson e Imbeau (2012) nel volume "Condurre e gestire una classe eterogenea", se è fattibile è preferibile agire sui prodotti per la differenziazione e sui processi di apprendimento piuttosto che sui contenuti che rappresentano le conoscenze e abilità definite dai curriculum nazionali. L'insegnante deve identificare gli elementi fondamentali del curriculum e progettare in base a essi, riconoscendo le diverse esigenze degli studenti.

Differenziare i *contenuti* in base ai bisogni degli studenti non significa trascurare alcuni aspetti del curriculum, ma adattare l'insegnamento a seconda delle necessità individuali degli studenti. Differenziare può essere una fonte di ricchezza per la comunità classe in quanto l'insegnante può offrire il giusto sostegno se individua che uno studente necessita di rivedere i prerequisiti, o un argomento in particolare sul quale ha maggiori difficoltà e al tempo stesso può offrire un altro tipo di sostegno a uno studente che invece è sufficientemente pronto ad affrontare una nuova tematica.

La normativa scolastica prevede l'obbligo di differenziazione dei contenuti in presenza di studenti con diritto ad un Piano Educativo Individualizzato (PEI).

I *processi di apprendimento* si riferiscono alle attività tramite cui gli studenti danno senso e comprendono i contenuti. Il *prodotto* è la valutazione finale di un percorso di apprendimento, in cui gli studenti dimostrano le loro conoscenze e abilità attraverso la risoluzione di problemi complessi o la rielaborazione di idee chiave.

Infine, l'ultima componente sulla quale si può agire differenziando è l'*ambiente di apprendimento*: include sia l'organizzazione fisica degli spazi sia il contesto emotivo. Sono proprio le Indicazioni nazionali ad attribuire una grande importanza al clima emotivo inserendolo all'interno del curriculum stesso. Un contesto fisico ben organizzato prevede aree diverse per attività specifiche, mentre un clima emotivo positivo favorisce l'apprendimento e lo sviluppo del senso di efficacia degli studenti. I principi fondamentali di un ambiente di apprendimento differenziato includono: la sensibilità dell'insegnante alle esigenze degli studenti, la sicurezza fisica e affettiva, il rispetto delle potenzialità individuali, l'accettazione delle differenze, il sostegno reciproco tra studenti, la condivisione del processo decisionale, la proposizione di lavori impegnativi, la flessibilità nella disposizione della classe e l'accesso a varie risorse e modalità di apprendimento.

#### 1.6.2 In base a cosa si differenzia la didattica?

La differenziazione agita sui contenuti, processi e prodotti dell'apprendimento offrono direzioni per modificare l'azione didattica in base alle caratteristiche degli studenti, utilizzando criteri specifici come Readiness, interessi e profilo di apprendimento per osservare e valorizzare l'eterogeneità individuale.

Readiness rappresenta la distanza tra ciò che uno studente è chiamato a fare e ciò che sa già fare. È essenziale per evitare che le sfide educative siano troppo facili o troppo

difficili. Questo concetto enfatizza l'importanza della valutazione formativa continua, che permette di adattare le attività alle capacità variabili degli studenti, promuovendo un miglioramento costante delle loro competenze (Tomlinson & Imbeau, 2012). È bene presentare attività che permettono di lavorare su più livelli e che contemplino una pluralità di strategie. Un esempio pratico, che segue tale pensiero è il lavoro a stazioni (sez. 1.6.2), oppure il piano di lavoro settimanale (Demo, 2016).

Gli interessi sono ciò che cattura l'attenzione degli studenti e sono strettamente legati alla loro emotività e motivazione. Lavorare sugli interessi degli studenti favorisce il loro coinvolgimento nell'apprendimento, poiché attiva aree del cervello legate all'attenzione e alla memoria, rendendo i concetti disciplinari più rilevanti e stimolanti (Sousa, Tomlinson, 2011). Infine, il profilo di apprendimento comprende quattro aspetti che indicano come gli individui apprendono e processano le informazioni (Tomlinson 2012).

All'interno del volume “Condurre e gestire una classe eterogenea” scritto da Tomlinson e Imbeau si sintetizzano le componenti del profilo di apprendimento:

- **Stile di apprendimento:** è la modalità che facilita l'alunno durante il processo di apprendimento. Dunn e Dunn (1993) individuano diverse categorie in cui le persone differiscono per stile di apprendimento: caratteristiche ambientali, sociali, emotive, fisiologiche e psicologiche. Mariani (2015), nel suo volume “differenziare gli apprendimenti” educa a come gestire l'eterogeneità della classe e individua alcune aree associate a questa componente: preferenze fisico-ambientali, preferenze rispetto all'utilizzo dei canali sensoriali, preferenze circa la modalità di memorizzazione ed elaborazione delle informazioni.

- **Preferenza di intelligenza:** ogni persona ha una modalità preferita di elaborare le informazioni. Vari studi circa tale ambito sono stati compiuti da Gardner (1999) e Sternberg (1985). Le intelligenze multiple individuate da Gardner (1999) sono le seguenti: logico-matematica, linguistica, corporeo-cinestetica, musicale, interpersonale, intrapersonale, visuo-spaziale, naturalistica ed esistenziale.
- **Genere:** influisce sull'apprendimento sia geneticamente sia socialmente, con stereotipi di genere che possono condizionare il percorso educativo.
- **Cultura:** come il genere, anche la cultura influenza l'apprendimento. Fa riferimento alle diverse lingue che gli alunni parlano, ai valori e atteggiamenti verso il mondo scolastico.

Queste dimensioni sono fondamentali da conoscere per un insegnante affinché strutturi una progettazione efficace e inclusiva per la comunità classe.

All'interno del mio lavoro le varie attività hanno lo scopo di lavorare sui diversi canali sensoriali per differenziare la progettazione in ottica inclusiva (sezione 2.5): i concetti matematici sono stati veicolati tramite diversi canali di accesso alle informazioni (visivo-verbale, visivo non-verbale, uditivo e cinestetico).

### 1.6.3 La classe differenziata

I bambini della stessa età non sono tutti uguali quando si tratta di apprendimento, proprio come non sono identici per dimensioni, hobby, personalità o preferenze. Condividono molte cose perché sono umani e bambini, ma hanno anche differenze importanti. Ciò che abbiamo in comune ci rende umani; le nostre differenze ci rendono individui. In una classe con poca o nessuna istruzione differenziata, emergono solo le somiglianze tra gli studenti. In una classe differenziata, tuttavia, sia i punti in comune che le differenze sono riconosciuti e valutati, diventando elementi essenziali

dell'insegnamento e dell'apprendimento. Al livello più elementare, differenziare l'istruzione significa "mescolare" ciò che accade in classe in modo che gli studenti abbiano più opzioni per prendere informazioni, capire idee ed esprimere ciò che imparano. In altre parole, una classe differenziata offre diversi modi per acquisire contenuti, elaborare o comprendere idee e sviluppare prodotti in modo che ogni studente possa imparare in modo efficace (Tomlinson 2014).

In molte aule, l'approccio all'insegnamento è più uniforme che differenziato. Ad esempio, gli studenti di prima elementare potrebbero ascoltare una storia e poi disegnare un quadro di ciò che hanno imparato. Mentre possono scegliere di disegnare diversi aspetti della storia, tutti hanno sperimentato lo stesso contenuto e fatto la stessa attività di comprensione. Una classe asilo potrebbe avere quattro centri dove tutti gli studenti completano le stesse attività durante la settimana. I bambini di quinta elementare potrebbero ascoltare la stessa spiegazione sulle frazioni e completare gli stessi compiti. Gli studenti delle scuole medie o superiori potrebbero frequentare una lezione e guardare un video per capire un argomento di scienza o di storia, leggere lo stesso capitolo, prendere gli stessi appunti, completare lo stesso laboratorio o rispondere alle stesse domande di fine capitolo e fare lo stesso quiz. Queste aule sono familiari, tipiche e in gran parte indifferenziate. La maggior parte degli insegnanti, così come gli studenti e i genitori, hanno immagini mentali chiare di tali aule. Dopo aver sperimentato l'istruzione indifferenziata per molti anni, è spesso difficile immaginare come sarebbe una classe differenziata. Gli educatori si chiedono come possiamo passare da un'istruzione "one-size-fits-all" a una differenziata per soddisfare meglio le diverse esigenze dei nostri studenti. Rispondere a questa domanda richiede prima di eliminare alcuni equivoci. (Tomlinson 2014). Carol Ann Tomlinson, descrive questo approccio come una strategia per adattare l'insegnamento alle diverse esigenze degli studenti. L'istruzione differenziata

si basa sul riconoscimento delle differenze individuali nelle capacità, negli interessi e negli stili di apprendimento degli studenti e mira a fornire esperienze educative che rispondono a queste diversità (Tomlinson 2014).

#### 1.6.4 Istruzione differenziata e il processo valutativo

Un insegnante consapevole dell'importanza di un'educazione personalizzata per gli studenti coglie ogni occasione per conoscerli meglio. Utilizza conversazioni individuali, discussioni in classe, lavori degli studenti, osservazioni e valutazioni formali per raccogliere informazioni su cosa funziona per ciascuno di loro. Ciò che apprende diventa un catalizzatore per sviluppare metodi didattici che aiutano ogni studente a valorizzare al massimo il proprio potenziale e talento. La valutazione non è più prevalentemente qualcosa che accade alla fine di un'unità per determinare "chi l'ha ottenuta", la valutazione avviene regolarmente all'inizio di un'unità per determinare le particolari esigenze degli individui in relazione agli obiettivi dell'unità. In tutta l'unità, in vari modi, gli insegnanti valutano i livelli di preparazione degli studenti, gli interessi e le modalità di apprendimento. Quindi progettano esperienze di apprendimento basate sulla loro migliore comprensione. I prodotti finali, o altre forme di "valutazione culminante", assumono molte forme, con l'obiettivo di trovare un modo per ogni studente di condividere in modo più efficace ciò che hanno imparato nel corso dell'unità. (Tomlinson 2014).

L'istruzione differenziata fornisce approcci multipli al contenuto, al processo e al prodotto. In tutte le aule, gli insegnanti si occupano di almeno tre elementi curriculari: contenuto (ciò che gli studenti imparano), processo (come hanno senso delle idee e delle informazioni) e prodotto (come dimostrano ciò che hanno imparato). Differenziando questi tre elementi, gli insegnanti offrono approcci diversi a ciò che gli studenti imparano,

come lo imparano e come dimostrano ciò che hanno imparato. Questi diversi approcci sono progettati per incoraggiare una crescita sostanziale in tutti gli studenti. (Tomlinson 2014). L'istruzione differenziata è centrata sullo studente. Le aule differenziate operano sulla premessa che le esperienze di apprendimento sono più efficaci quando sono coinvolgenti, pertinenti e interessanti. Un corollario di questa premessa è che tutti gli studenti non sempre troveranno gli stessi percorsi di apprendimento ugualmente coinvolgenti, pertinenti e interessanti. Inoltre, l'istruzione differenziata riconosce che le intese successive devono essere costruite su intese precedenti e che non tutti gli studenti possiedono le stesse comprensioni all'inizio di un dato studio. Gli insegnanti che differenziano l'istruzione in classi a capacità mista cercano di fornire esperienze di apprendimento adeguatamente stimolanti per tutti i loro studenti. Questi insegnanti si rendono conto che a volte un compito che manca sfida per alcuni studenti è frustrante complesso per gli altri. Inoltre, gli insegnanti in classi differenziate capire la necessità di aiutare gli studenti ad assumersi una crescente responsabilità per la propria crescita. (Tomlinson 2014).

A volte è più facile nelle grandi classi per un insegnante fornire tutte le indicazioni o direttamente la soluzione piuttosto che guidarli a pensare in modo indipendente, e assumersi una responsabilità significativa circa la costruzione degli apprendimenti degli studenti. In una classe differenziata, è necessario che gli studenti siano attivi nel prendere e valutare decisioni. Insegnare agli studenti a condividere la responsabilità consente a un insegnante di lavorare con vari gruppi o individui per porzioni della giornata. Inoltre, prepara meglio gli studenti alla vita. Infine, tale insegnante non vede la differenziazione come una strategia o qualcosa da fare quando c'è tempo extra, piuttosto, è un modo di vivere in classe. Non cercano o seguono una ricetta per la differenziazione, ma invece combinano ciò che possono imparare sulla differenziazione da una serie di fonti con i

propri istinti professionali e la base di conoscenze per fare tutto il necessario per raggiungere ogni studente (Tomlinson 2014).

### 1.7 La didattica aperta

La proposta metodologica della didattica aperta rappresenta una possibilità di innovazione rilevante per un'idea di classe inclusiva. In particolare, favorisce la differenziazione didattica (Tomlinson, 1999) che punta a rispettare e valorizzare la specificità di ciascun alunno.

Con il termine «aperta» si fa riferimento all'ascolto e l'accoglienza verso le proposte degli alunni, le loro scelte, i loro interessi, i loro bisogni, il loro grado di autonomia.

Gli studenti non sono solo i fruitori dell'offerta formativa bensì soggetti protagonisti, hanno la possibilità di autodeterminare diversi elementi del percorso di apprendimento: tempo da dedicare alle attività, modalità di svolgimento, richiesta di aiuto da parte dell'insegnante o dei compagni. Si parla di bambino che si "auto-organizza, si autoregola, si autodetermina e partecipa pienamente" (Demo, 2016, p. 16).

La didattica aperta nasce in Germania circa 40 anni fa ma non si è ancora trovata una definizione universale.

Alcuni autori, ad esempio, mettono l'accento sul suo apparato metodologico volto a dare centralità alla decisionalità e all'autonomia degli alunni/e (Vaupel, 1996; Krieger, 1994), altri la considerano una raccolta di approcci (Wallrabenstein, 1991) o addirittura una filosofia educativa (Peschel, 2006), mettendo quindi in evidenza la dimensione valoriale e prettamente pedagogica, che va oltre quindi a una sola visione tecnico-metodologica (Demo, 2016, p. 17).

Uno dei testi classici della tradizione tedesca è quello di Eiko Jürgens (2009). Definisce la didattica aperta come un movimento che raccoglie concettualizzazioni e pratiche didattiche eterogenee che hanno in comune il fatto di mettere in discussione più o meno radicalmente le tradizionali pratiche di insegnamento-apprendimento (Jürgens, 2009, p. 24). L'autore individua elementi comuni alle differenti definizioni che sono state date di didattica aperta:

- Caratteristiche del comportamento dell'alunno/a: autonomia nella progettazione e nello svolgimento delle attività. Autodeterminazione/partecipazione alla scelta dei contenuti e delle metodologie per affrontare le attività.
- Caratteristiche del comportamento dell'insegnante: Sostegno alle iniziative degli alunni, valorizzazione dei differenti bisogni, attitudini, interessi, capacità. Limitazione del ruolo di unico progettista dei processi di apprendimento e insegnamento.
- Caratteristiche del processo di apprendimento-insegnamento: l'apprendimento è ancorato alla pratica e basato sulla scoperta e sul problem solving. Si tratta di un apprendimento responsabile in quanto ogni alunno è responsabile del proprio percorso di apprendimento.
- Metodologie didattiche: Lavoro libero con piena apertura, agenda settimanale, didattica per progetti.

Jürgens ritiene che sia centrale per la didattica aperta la nuova concezione di relazione tra insegnante e alunno a seguito del cambiamento dei due ruoli. Questo ricade anche su un nuovo modo di concepire l'apprendimento-insegnamento e sull'apparato metodologico utilizzato per realizzarlo.

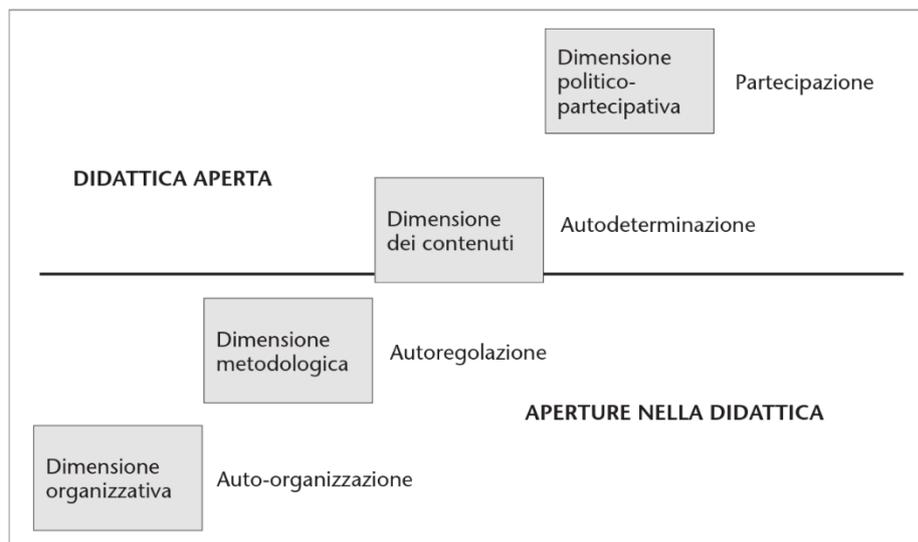
Falko Peschel (2006) uno dei più radicali sostenitori della didattica aperta ritiene che quest'ultima permetta di individualizzare e autodefinire l'apprendimento nella libertà di scelta di tempi, luoghi ed eventuali partner di apprendimento. Nell'idea di Paschel è quindi l'alunno a definire cosa imparare, con quali metodi e strumenti, dove, quando e con chi costruire il proprio percorso di apprendimento. La classe è da lui intesa come una comunità che definisce al suo interno regole che nascono, si modificano, evolvono attraverso la partecipazione e la negoziazione di tutti. La gestione della comunità classe è compito di tutti coloro che la frequentano quindi non solo dell'insegnante.

Peschel individua quattro categorie che permettono di riflettere sul concetto di apertura didattica:

- Apertura dell'organizzazione: riguarda scelte legate alla cornice organizzativa dell'insegnamento-apprendimento. Rientrano la scelta dei tempi e dei luoghi dove svolgere un'attività oltre che la scelta di eventuali partner di lavoro.
- Apertura delle metodologie: riguarda i processi di apprendimento, di autoregolazione del singolo e la scelta delle strategie e metodologie da adottare
- Apertura delle finalità e degli obiettivi: riguarda la scelta rispetto ai contenuti dei processi di apprendimento e insegnamento, nel rispetto di un curriculum a maglie larghe in linea con le Indicazioni nazionali per il curriculum.
- Apertura delle relazioni e delle regole: riguarda le scelte che influenzano la comunità scolastica come, per esempio, la partecipazione attiva e democratica alla definizione di regole, la gestione dei tempi e degli spazi comuni e le modalità di gestione delle relazioni fra pari e con gli insegnanti.

Secondo Peschel la vera didattica aperta si realizza solo con il massimo grado di apertura in classe di tutte e quattro le categorie.

Bohl e Kucharz (2010) mettono in discussione la visione così radicale che Peschel ha della didattica aperta riprendendo la sua categorizzazione. I due autori propongono un modello (figura 2) che riconosce anche il valore di aperture meno radicali nella didattica, pur distinguendole dalla vera e propria didattica aperta.



*Figura 1: Distinzione fra didattica aperta e aperture didattiche (tratta da un adattamento di Demo (2016, p.20) del lavoro di Bohl e Kucharz (2010, p.19)).*

Come si può notare ciò che contraddistingue la didattica aperta è la relazione dei principi di autodeterminazione e di piena partecipazione. Gli alunni hanno la possibilità di decidere in base ai propri interessi i contenuti del proprio percorso formativo e di contribuire democraticamente e con una partecipazione attiva alla costruzione delle norme che regoleranno la comunità classe. (Demo, 2016, p. 21)

La didattica aperta è sostenuta da argomenti teorici provenienti da due differenti categorie: una legata a riflessioni pedagogiche e l'altra fa riferimento a teorie dell'apprendimento di matrice psicologica.

Le prime considerano il soggetto che apprende come soggetto attivo sul piano dell'educazione e della didattica. La seconda si fonda sull'idea di apprendimento legata al costruttivismo. I processi di apprendimento, utilizzando la didattica aperta, si basano su una costruzione soggettiva di significati, negoziata all'interno del proprio contesto culturale e relazionale, valorizzando anche processi di apprendimento impliciti e informali. (Demo, 2016, p.27).

La riflessione pedagogica tedesca racchiude sotto il movimento della Reformpädagogik (pedagogia della riforma) tutti quegli approcci pedagogici che, a cavallo fra il XIX e il XX secolo, hanno evidenziato la centralità del bambino nei processi di apprendimento, pensandolo quindi non più come un adulto in potenza e ancora da formare, ma come un individuo pienamente capace di operare scelte, diverse da quelle degli adulti ma parimenti legittime, e così influenzare o addirittura determinare il proprio percorso di apprendimento. In queste riflessioni molti hanno individuato le radici più antiche della didattica aperta (Bohl e Kucharz, 2010; Peschel, 2006; Wallrabenstein, 1991).

Nella tradizione pedagogica italiana la concettualizzazione che meglio può avvicinarsi all'idea della Reformpädagogik è quella della pedagogia attiva. «La didattica della scuola attiva rovescia l'impostazione fatta valere dalla didattica tradizionale ponendo al centro del processo formativo l'allievo, considerato della sua struttura biopsicologica, socioculturale ed esistenziale» (Frabboni, 2007, p. 121).

Alcuni degli autori e delle relative esperienze di riferimento in questo senso sono Maria Montessori, con la capacità di scelta che la pedagoga riconosce ai bambini/e, Célestin Freinet, con la sua esperienza delle cooperative dei ragazzi/e, e John Dewey con il learning by doing e la missione democratica della scuola. (Demo, 2016, pag.27-28).

La proposta metodologica della didattica aperta è quindi orientata ai principi dell'inclusione: da un lato l'equità che punta a garantire a ciascun alunno un percorso di apprendimento che valorizzi la sua unicità e irripetibilità, e dall'altro la partecipazione attiva di ognuno a un gruppo e a una comunità.

Questa visione dell'apprendimento è pienamente coerente con un'idea di scuola inclusiva, laddove l'inclusione è intesa nel suo senso più ampio di valorizzazione di tutte le differenze, superando l'attenzione specifica verso alunni/e con disabilità o con Bisogni Educativi Speciali.

### 1.7.1 Un esempio di didattica aperta: il lavoro a stazioni

Una possibile declinazione metodologica della didattica aperta è il lavoro a stazioni.

Consiste nell'allestimento di diverse postazioni (chiamate stazioni), ciascuna dedicata a un'attività diversa, ma tutte collegate a uno stesso obiettivo o argomento.

Questa metodologia permette di lavorare su una stessa tematica o competenza, differenziando i processi di apprendimento attraverso l'uso di materiali diversi, linguaggi differenti, o privilegiando un particolare canale sensoriale.

Ogni stazione deve essere dotata di spiegazioni chiare sull'attività da svolgere e di tutto il materiale necessario. Gli studenti possono essere liberi di scegliere quali stazioni frequentare, oppure l'insegnante può stabilire alcune stazioni obbligatorie o personalizzare il percorso per ogni studente, decidendo quali stazioni ciascuno dovrà completare (Demo, 2021). Questa scelta influisce sul grado di apertura didattica, in entrambe le modalità di svolgimento vi è la possibilità di costruire percorsi individualizzati e personalizzati.

Niggli (2000) evidenzia i diversi momenti in cui un insegnante può inserire il lavoro a stazione all'interno di un'unità didattica, a seconda degli obiettivi formativi. Può essere introdotto all'inizio dell'unità per fornire una panoramica generale o per introdurre una nuova tematica. Nel mezzo dell'unità, il lavoro a stazioni può servire come intervallo tra fasi più lunghe e trasmissive, offrendo l'opportunità di consolidare le conoscenze e competenze acquisite. Alla fine dell'unità, questo approccio può essere utilizzato per esercitare le conoscenze e competenze sviluppate nelle fasi precedenti, oppure per applicarle a compiti più complessi, favorendo un apprendimento più approfondito e integrato (Demo, 2016, p.64).

Il modello di apprendimento per stazioni si focalizza su due principi fondamentali: l'autonomia e la varietà metodologica. L'autonomia viene assicurata poiché ogni stazione deve essere progettata dall'insegnante in modo che il bambino possa comprendere autonomamente il compito assegnato e risolverlo utilizzando i materiali e gli input disponibili. La varietà metodologica, invece, deriva dall'idea che sia vantaggioso affrontare un tema o sviluppare una competenza attraverso diversi approcci didattici, coinvolgendo vari linguaggi, sensi e modalità di apprendimento (Demo, 2021, p. 79).

## 2. LA PROGETTAZIONE E L'INTERVENTO DIDATTICO

### 2.1 Motivazione al progetto

Questa progettazione vuole essere un esempio di una possibile proposta per presentare la matematica in ottica inclusiva alla scuola primaria. Gli obiettivi delle attività che ho strutturato, studiate sulla base dei bisogni dei bambini, sono quelli di sviluppare il pensiero matematico, attivando il pensiero e processi matematici. Il mio interesse verso questa tematica nasce all'inizio del percorso di studi presso questa Università; seguendo i diversi corsi e laboratori incentrati sulla matematica ho avuto la fortuna di vedere che è possibile trattare tale disciplina in modo inclusivo e motivante, discostandosi quindi dalle tradizionali tipologie di lezioni trasmissive o di esercizi e problemi standardizzati. Anche le esperienze vissute nei quattro anni di tirocinio diretto alla scuola dell'infanzia e primaria mi hanno permesso di raccogliere moltissime informazioni grazie all'osservazione di gruppi classe differenti. Nonostante si trattasse di classi differenti alcuni elementi si ripresentavano in presenza di altri: ho potuto notare ripetutamente che l'interesse e la partecipazione verso la matematica durante attività cooperative e laboratoriali aumentava e di conseguenza spesso anche la motivazione degli studenti verso tale disciplina tendeva in quel momento a incrementarsi. Parallelamente ho incontrato un cospicuo numero di studenti che dice di non capire e di conseguenza odiare la matematica; questa è forse la motivazione che più mi ha spinto ad elaborare questa progettazione. Le difficoltà nell'apprendimento della matematica emergono fin dalle prime classi della scuola primaria, forse perché per ciò che ho avuto modo di osservare la matematica viene affrontata in modo prevalentemente nozionistico, concettuale e unidirezionale; limitando il pensiero critico e la costruzione in modo autonomo dei nuclei affrontati. Capita quindi che molti bambini manifestino difficoltà nell'assimilare il simbolismo matematico spesso astratto e non correlato alla realtà quotidiana. I problemi

proposti frequentemente sono slegati dalla realtà, non presentano situazioni problema stimolanti e alcuni di questi prevedono un'unica soluzione; tutto questo non favorisce l'elaborazione di diverse strategie e il confronto di quest'ultime con i compagni. Come evidenziano le Indicazioni nazionali, la scuola ha il compito di differenziare i contenuti didattici a favore dell'eterogeneità dei bisogni e delle inclinazioni personali degli studenti; con l'obiettivo di valorizzare i tratti unici della personalità di ciascuno. Il "fare scuola" oggi significa mettere in relazione la complessità di modi radicalmente nuovi di apprendimento con un'opera quotidiana di guida, attenta al metodo, e i nuovi media e alla ricerca multidimensionale (MIUR, 2012). Ritengo che la figura del docente copra un ruolo fondamentale per l'autodeterminazione dei propri studenti; è fondamentale che ogni giorno a scuola coltivi la curiosità degli studenti per far sì che l'apprendimento diventi motivante e che aiuti a mantenere quella spinta interiore, quella tensione verso il sapere, che il bambino possiede fin dalla nascita. Già dalla scuola dell'infanzia assecondare la curiosità, gli interessi ed il bisogno di conoscenza, del bambino, incrementa la sua motivazione all'apprendimento. A questo proposito le Indicazioni Nazionali affermano che la presenza di insegnanti motivati, preparati attenti alle specificità dei bambini e dei gruppi di cui si prendono cura, è un indispensabile fattore di qualità per la costruzione di un ambiente educativo accogliente, sicuro, ben organizzato, capace di suscitare la fiducia dei genitori e della comunità. Si afferma anche che lo stile educativo dei docenti deve essere ispirato a criteri di ascolto, accompagnamento, interazione partecipata, mediazione comunicativa con una continua capacità di osservazione del bambino, di presa in carico del suo "mondo", di lettura delle sue scoperte, di sostegno e incoraggiamento all'evoluzione dei suoi apprendimenti verso forme di conoscenza sempre più autonome e consapevoli (MIUR, 2012).

Dato il mio interesse verso la didattica inclusiva della matematica ho cercato se ci fossero studi precedenti circa questa tematica; la letteratura a livello nazionale evidenzia una mancanza di studi specifici che pongano in relazione la didattica della matematica con la pedagogia inclusiva (Bellacicco e dell'Anna, 2019). Ciò che è emerso a livello internazionale è la scarsità di studi sulla partecipazione accademica disciplinare (Van Mieghem et al., 2020). Questa progettazione prova collocarsi all'interno del quadro relativo all'inclusione in senso *ampio* (descritto nella sezione 1.1) si è visto come in generale si associ l'inclusione scolastica a un processo che promuova partecipazione e apprendimento di ciascuno e ciascuna (Ainscow, 2020; UNESCO, 2005; Demo, 2016).

Ho scelto come oggetto matematico le frazioni in quanto sono da sempre, e non solo in Italia, una parte fondamentale del curriculum di matematica della scuola primaria. Nonostante ciò, rappresentano per gli studenti uno degli oggetti matematici più complessi e rispettivamente è vissuto dagli insegnanti come difficile da costruire (Robotti, 2016). Questa complessità deriva dal fatto che la definizione di frazione racchiude in sé diversi significati Kieren (1980; 1988; 1992): parte/tutto, rapporto, operatore, quoziente e misura. Nonostante ciò, le ricerche dimostrano che l'approccio al significato di frazione nella scuola primaria dei diversi Paesi sembra limitarsi alla richiesta di dividere un'unità concreta in parti uguali.

Storicamente, l'insegnamento e l'apprendimento frazioni hanno presentato ostacoli significativi anche a livelli scolari superiori.

Queste attività sono state progettate partendo dal contesto, sulla base della teoria della differenziazione didattica di Tomlinson (1999) e facendo riferimento al lavoro di Demo (2016), descritti nelle sezioni 1.6 e 1.7 rispettivamente in cui la didattica aperta viene inserita in modo esplicito tra le proposte metodologiche per la classe inclusiva.

In un'ottica inclusiva si propone una co-costruzione di significati matematici che parte dai bambini che sono i costruttori dei loro apprendimenti.

Nelle varie postazioni, vengono stimolati canali differenti per l'accesso e la produzione di informazioni, coerentemente con quanto descritto nella sezione 1.6.2 permettendo così a un numero maggiore di bambini di partecipare e ragionare attivamente. Le proposte di attività presentate all'interno delle postazioni di lavoro sono state pensate per permettere ai bambini di esprimere i loro ragionamenti anche se ci sono difficoltà lessicali o linguistiche nell'obiettivo di abbattere barriere e includere ciascun bambino offrendo diversi canali per l'elaborazione e la restituzione del contenuto. In ogni postazione viene chiesto loro di argomentare in forma orale o scritta prima individualmente e poi condividendo al piccolo gruppo. In ogni gruppo viene scelto un portavoce che fa le veci durante la discussione finale tutti insieme.

Ai fini della costruzione di una progettazione inclusiva ho fatto in modo di fornire molteplici modalità di rappresentazione permettendo la fruizione di contenuti didattici attraverso molteplici canali e utilizzando codici diversi, poiché nessun media sembra essere ottimale per tutti.

Infine, ho prestato molta attenzione al linguaggio, a presentare le consegne in modo chiaro perché a seguito delle diverse esperienze di tirocinio a scuola ho potuto notare quanto solamente la consegna possa rappresentare o un limite o una fonte di aiuto per il bambino a seconda di come la si elabora. Nelle sezioni successive (sezione 2.3 e 2.4) la progettazione sarà descritta più nel dettaglio.

## 2.2 Osservazione e valutazione iniziale del contesto classe

La classe coinvolta è situata nella provincia di Genova.

Analizzando il Piano Triennale Offerta Formativa della scuola emerge in modo chiaro l'attenzione verso lo studente e i suoi bisogni. Si pone particolare attenzione anche allo sviluppo delle competenze trasversali, ai valori di cittadinanza attiva, di inclusione sociale e alla valorizzazione dei differenti stili di apprendimento. La tematica dell'inclusione è centrale all'interno del PTOF, vi è una sezione specifica dedicata alle azioni della scuola per favorire l'inclusione e promuovere l'apprendimento e la partecipazione di ciascun alunno.

La classe coinvolta è una quarta composta da 24 alunni, e dalla mia Tutor nonché insegnante di matematica. Nella fase del progetto ho condiviso con la maestra la mia bozza di progettazione, le finalità e la motivazione che stava dietro a tale iniziativa che a quel tempo era in fase di costruzione sulla base dei feedback che avrei raccolto nei mesi a seguire; inoltre ho ascoltato le informazioni da Lei fornite circa la classe ed i singoli studenti che la compongono. Il gruppo classe mi viene presentato come vivace e curioso, con un cospicuo livello di eterogeneità per quanto concerne il rendimento in matematica e la partecipazione attiva alle varie attività proposte. Mi vengono segnalati anche frequenti casi di disattenzione durante lo svolgimento di alcune tipologie di lezioni e la scarsa partecipazione di alcuni studenti. L'insegnante di matematica evidenzia la presenza di alcuni studenti con buone capacità matematiche e di tanti altri con svariate difficoltà non dovute a disturbi specifici dell'apprendimento o altre diagnosi. Il clima di classe è positivo e le relazioni instaurate sono buone.

Per conoscere in modo approfondito la classe, oltre ad aver ascoltato le informazioni che mi sono state fornite inizialmente dall'insegnante, ho cercato di osservare i singoli studenti sia come tali che come membri di un gruppo classe e quindi di una più ampia comunità in quanto alla base della progettazione vi è l'idea proposta

dalla differenziazione didattica per cui la progettazione vada studiata a partire dallo specifico contesto classe in esame e dai singoli studenti coinvolti.

Ho iniziato il percorso di tirocinio inerente al quinto anno, anno accademico 2023/2024 nel mese di novembre e dal primo giorno è iniziata l'osservazione ai fini dell'elaborazione del mio progetto di tesi. L'idea iniziale era quella di strutturare un lavoro a stazioni. Siccome tale metodologia è caratterizzata da un elevato grado di autonomia del bambino, a seguito di diversi mesi di attenta osservazione ho valutato più efficace e utile per i bambini siccome non avevano mai familiarizzato con queste modalità di lavoro, proporre un lavoro di avvio a tale metodologia per dare loro gli strumenti e portarli ad acquisire maggiori competenze per arrivare in futuro a poter sperimentare quotidianamente tale metodologia attiva. Assieme alla mia relatrice abbiamo deciso di focalizzare l'attenzione su alcuni aspetti come, per esempio, la possibilità di azione del soggetto coinvolto, il grado di autonomia raggiunto dagli studenti e il livello di partecipazione degli studenti. La mia osservazione preliminare si è concentrata particolarmente su questi aspetti che mi sono stati poi utili per strutturare una progettazione che si fonda sulla differenziazione didattica (Tomlinson 1999, 2014) come prospettiva didattica sull'inclusione e come esperienza propedeutica all'avvio del lavoro a stazioni.

Dopo diversi mesi di attenta osservazione e analisi dei bisogni dei bambini riesco a raccogliere dati sufficienti per elaborare una valutazione iniziale: la classe si presenta in quasi tutte le situazioni didattiche e a-didattiche curiosa e propositiva, trovo confermata un'eterogeneità circa la partecipazione alle attività, la motivazione all'apprendimento e il rendimento in matematica.

Partecipando alle lezioni di matematica riscontro alcuni studenti con buone capacità, discrete abilità di problem solving e un buon livello di abilità logico-matematiche; rispettivamente noto molti studenti con diverse difficoltà di vario genere oltre che un'avversità e una bassa motivazione nei confronti della matematica, non dovute alla presenza di un disturbo dell'apprendimento diagnosticato o di altre certificazioni. Per riportare un esempio: E. mostra una notevole destrezza nel campo della matematica ma ha difficoltà a mantenere l'attenzione per un tempo prolungato in attività statiche e prettamente nozionistiche; parallelamente quando sporadicamente le maestre proponevano attività manipolative ed esperienziali si mostrava molto propositivo e incuriosito.

Ho notato che il livello di attenzione per alcuni bambini era minimo soprattutto in presenza di lezioni frontali nozionistiche dove l'apporto attivo dello studente era fortemente limitato. Per analizzare meglio questo fattore ho preso parte a lezioni tenute da insegnanti diverse e ho osservato i momenti di ricreazione in classe e in giardino per studiare come fosse il clima di classe e le relazioni.

Come sopra detto, per cercare di comprendere quale fosse il livello di motivazione all'apprendimento e partecipazione attiva e se tali indicatori si modificassero rispetto alle metodologie utilizzate, agli stimoli con i quali sollecitavano i bambini e alle tipologie di attività proposte, ho preso parte a lezioni appartenenti a materie diverse e tenute da insegnanti diverse. In quei quattro mesi di osservazione ho potuto rilevare un aumento di motivazione e partecipazione attive di tutti gli studenti in lezioni e attività che prediligevano metodologie didattiche attive come l'apprendimento collaborativo in piccoli gruppi, l'apprendimento esperienziale tramite una didattica laboratoriale e infine nei momenti di "insegnamento capovolto".

Addentrandomi più nello specifico per quanto concerne la matematica e il mio oggetto di interesse, le frazioni, ho messo in atto nel periodo iniziale un'osservazione sistematica degli studenti circa le conoscenze dell'oggetto matematico "frazioni", se fossero presenti misconcezioni, l'abilità di problem solving, la capacità di lavorare in team e quale valenza avesse per gli alunni l'errore.

Ho inoltre partecipato alla presentazione da parte della docente dell'oggetto matematico "frazioni" agli alunni. Ho assistito a tutto il percorso condotto dalla maestra sulle frazioni, si trattava di lezioni prettamente frontali composte da una prima parte teorica e seguiva una parte più pratica dove i bambini svolgevano esercizi "standard" dove le frazioni venivano presentati con rappresentazioni convenzionali (torta o pizza) solitamente svolti individualmente e sporadicamente in coppia e al termine dello svolgimento venivano corretti tutti insieme. Il livello di motivazione e partecipazione da parte degli alunni oscillava e dipendeva dalla metodologia scelta per la spiegazione dei contenuti teorici e dalla tipologia di esercizio proposto.

### 2.3 Individuazione dei traguardi, obiettivi, competenze, spazi e tempi

La mia progettazione, come indicato nella sezione 2.1, vuole essere un esempio di proposta di didattica inclusiva della matematica che combina gli elementi principali della teoria della differenziazione didattica (Tomlinson, 1999) con la teoria dell'oggettivazione in matematica (Radford, 2021). L'inclusione scolastica viene vista come un processo che promuove partecipazione e apprendimento di ciascuno e ciascuna (Ainscow, 2020; UNESCO, 2005; Demo, 2016).

Questo lavoro nutre la speranza di avvicinare gli studenti alla bellezza del mondo matematico.

Come spiegato in modo chiaro nelle *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione*, il sistema scolastico italiano assume come orizzonte di riferimento il Quadro delle competenze chiave per l'apprendimento permanente definite dal Parlamento europeo e dal Consiglio dell'Unione europea (Raccomandazioni del 18 dicembre 2006). Tale quadro prevede otto competenze fondamentali che sottendono trasversalmente tutta la formazione scolastica del primo ciclo (Trincherò, 2017, p. 8). L'adozione della competenza come criterio regolativo implica un cambiamento sostanziale nel sistema scolastico. La finalità della formazione scolastica tradizionale è fornire allo studente un insieme di conoscenze e abilità che poi avrebbe saputo applicare automaticamente per la risoluzione di problemi della vita quotidiana. Dagli anni '80 è emersa la necessità di un'educazione che sviluppi l'autonomia e la responsabilità degli studenti, permettendo loro di affrontare situazioni mutevoli e complesse con competenza e adattabilità (Trincherò, 2017).

All'interno delle postazioni di lavoro vengono proposte attività dove si chiede di utilizzare e riflettere sulle loro conoscenze, abilità e capacità per affrontare esercizi che provano a discostarsi dalle tipologie standard di esercizi sulle frazioni che si trovano all'interno della maggior parte dei libri di testo. La ricerca evidenzia come l'approccio al significato di frazione nella scuola primaria richiede di dividere un'unità concreta in parti uguali; parallelamente ha anche mostrato come questo modello possa rappresentare un potenziale ostacolo didattico per la costruzione del significato dell'oggetto frazione (Robotti, 2016). I diversi studi mettono in evidenza che il motivo della scelta degli insegnanti va verso degli "oggetti concreti di riferimento" perché questi ultimi risultano familiari e in parte anche motivanti per gli alunni (Fandiño Pinilla, 2007).

La progettazione didattica coinvolge contenuti, processi, prodotti e ambiente di apprendimento, e li connette alle caratteristiche degli studenti, coerentemente con quanto

descritto nella sezione 1.6.1. Il primo passo della progettazione proposta consiste nel determinare gli obiettivi didattici in termini specifici ed espliciti. Il rischio di una progettazione che non si sviluppi a partire da tale prerogativa lo evidenzia in modo chiaro Tomlinson (1999): è quello di creare lezioni che, seguendo obiettivi differenti in modo disordinato, diventano confuse per gli studenti, i quali hanno bisogno di una chiara comprensione del percorso educativo che stanno seguendo.

Per progettare percorsi che siano adattabili a una varietà di studenti e che includano momenti di differenziazione esplicita, è essenziale avere una chiara definizione dei risultati di apprendimento attesi e degli obiettivi didattici stabiliti. Per questo motivo nel seguito presentiamo i traguardi e gli obiettivi da cui la progettazione ha preso avvio.

I traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola primaria sono stati individuati all'interno delle Indicazioni nazionali (MIUR, 2012, p. 49) e sono i seguenti:

- Riesce a risolvere problemi in diversi ambiti di contenuto, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati. Descrive il procedimento seguito e riconosce strategie di soluzione diverse dalla propria.
- Descrive il procedimento seguito e riconosce strategie diverse dalla propria
- Costruisce ragionamenti formulando ipotesi, sostenendo le proprie idee e confrontandosi con il punto di vista degli altri.
- Riconosce e utilizza rappresentazioni diverse di oggetti matematici.
- Sviluppa un atteggiamento positivo rispetto alla matematica, attraverso esperienze significative che gli hanno fatto intuire come gli strumenti matematici che ha imparato a utilizzare siano utili per operare nella realtà.

Per quanto concerne l'elaborazione degli obiettivi generali e quelli specifici ho fatto riferimento alle Indicazioni Nazionali per poi calarli in modo più fine al contesto classe:

Obiettivi generali:

- Saper individuare la frazione come parte-tutto in un intero dato.
- Saper individuare la frazione come operatore.
- Saper individuare la frazione come misura.

Obiettivi specifici:

- Comprendere le proprietà che definiscono le frazioni.
- Individuare l'intero di riferimento.
- Comprendere la scrittura simbolica delle frazioni.
- Costruire strategie e saperle giustificare.

In questa sezione ho analizzato i traguardi e gli obiettivi. I contenuti, processi e i prodotti di ogni postazione di lavoro ho provato a metterli in relazione alle caratteristiche e ai bisogni individuali degli studenti: descrivo questo aspetto nella sezione 2.5, in cui sono presentate le singole attività. Prima di analizzarle una per una, dedico la sezione seguente, 2.4, a descrivere l'oggetto didattico intorno a cui esse sono strutturate: le frazioni.

Lo spazio utilizzato per l'esperienza di progettazione è lo spazio aula. Ho riorganizzato lo spazio, passando dall'assetto tradizionale della loro aula con i banchi uniti con gli studenti rivolti verso la cattedra a un'aula con i banchi divisi a isole. Ho creato delle postazioni di lavoro sfruttando l'intero spazio che offre l'aula in quanto la

cattedra per quel giorno è stata tolta. In questo modo gli studenti erano liberi di muoversi intorno all'isola e sperimentare avendo modo di guardarsi negli occhi favorendo così la collaborazione.

Per quanto riguarda i tempi, la progettazione è durata due ore circa: la prima ora è stata dedicata alla sperimentazione da parte degli studenti divisi in gruppi. All'interno di quest'ora erano liberi di organizzarsi loro i tempi in base ai propri bisogni, avevano una scheda da me creata con la consegna dell'attività e alcune domande che stimolavano la riflessione metacognitiva da svolgere individualmente per poi confrontarsi e discutere in grande gruppo. Al termine dell'ora si è aperta una discussione in grande gruppo dove si sono condivise le attività delle quattro postazioni, si sono analizzate le difficoltà e i punti di forza emersi. I tempi sono stati dilatati e accoglienti verso le necessità degli studenti.

#### 2.4 Le frazioni e le relative misconcezioni

Le frazioni sono presenti nella vita quotidiana e nel linguaggio comune di ogni bambino, basti pensare alla lettura dell'orologio, ai passaggi da seguire quando si legge una ricetta culinaria o ai dosaggi dei farmaci quando si fa una cura... insomma le frazioni accompagnano la vita dei bambini molto prima rispetto a quando questi ultimi si trovano ad affrontarle a scuola formalizzando la scrittura e istituzionalizzando il significato.

Diverse ricerche hanno però dimostrato che, quando viene introdotto il concetto di frazione, generalmente durante il terzo anno di scuola primaria, spesso non si tiene conto dell'altissima frequenza con cui esse sono utilizzate nel quotidiano dai bambini. Sono da sempre, e non solo in Italia, parte essenziale del curriculum di matematica della scuola primaria ma, nonostante ciò, è emerso che il significato di frazione è vissuto dall'insegnante come complesso da costruire e percepito dagli alunni come difficoltoso e astratto anche a livelli di scuola superiori (Robotti, 2016).

La percentuale di alunni che incontrano difficoltà nell'affrontare tale oggetto matematico è elevata e sembra persistere anche alla scuola secondaria di primo grado; lo documentano i risultati delle prove nazionali INVALSI.

Inoltre, è emerso che le convinzioni errate o limitate degli insegnanti possono generare fra gli studenti misconcezioni e che uno dei principali problemi nell'insegnamento delle frazioni è la mancanza di una trasposizione didattica adeguata e consapevole. Una misconcezione rappresenta un concetto errato e per quanto viene generalmente considerato un aspetto da evitare. Non va però sempre data una accezione negativa in quanto per poter arrivare alla costruzione di un concetto spesso è necessario passare attraverso delle misconcezioni momentanee, che andranno successivamente sistemate una volta acquisito il reale significato del concetto (D'Amore, 2003). Le immagini deboli e instabili che uno studente si fa di un concetto possono essere in certi casi delle vere e proprie misconcezioni, cioè interpretazioni errate delle informazioni ricevute. Tali immagini-misconcezioni, essendo in continua evoluzione nella complessa scalata verso la costruzione di un concetto (D'Amore, 2001), non sempre risultano di ostacolo all'apprendimento futuro degli allievi, a meno che esse non diventino forti e stabili modelli erronei di un concetto. Per spiegare meglio la distinzione tra immagine e modello D'Amore (1999) afferma che: «Farsi un modello di un concetto, dunque, significa rielaborare successivamente immagini (deboli, instabili) per giungere ad una di esse definitiva (forte, stabile)».

La parola inglese *misconception* è interpretata solitamente come “giudizio erroneo”, “idea sbagliata”, ma anche “equivoco” o “malinteso”; si trova intesa anche nel senso più esteso di “concezione fallace”. Una delle prime apparizioni documentate del termine “*misconception*” in Matematica avviene in USA nel 1981, ad opera di Wagner

(1981), in un lavoro che tratta dell'apprendimento di equazioni e funzioni (D'Amore & Sbaragli, 2005).

Rosetta Zan (2002) afferma che «Se i comportamenti fallimentari causano errori, l'individuazione dei comportamenti fallimentari riconduce al classico filone di ricerca – trasversale – che è dato dall'interpretazione di errori. Appaiono interessanti in questo senso tutti i contributi che avanzano ipotesi interpretative sull'origine degli errori sistematici: in particolare quelli sui “misconcetti”». Il termine “misconcezione” è stato posto tra virgolette in quanto l'autrice decide di abbandonarlo e sostituirlo con *conceptions* o *implicit theories*, per discostarsi dalla accezione negativa che gli viene attribuita a causa del prefisso “mis” e per evidenziare la pluralità di interpretazioni spesso citata in modo ingenuo senza essere adeguatamente inquadrata all'interno degli ambiti scientifici specifici.

Brown e Burton (1978) definiscono gli errori sistematici come bugs a seguito di ricerche riguardanti la sottrazione. Secondo i due autori il comportamento generale descritto deriva dal bisogno del bambino di controllare situazioni percepite come nuove: egli comincia con i casi che già conosce, facendone modifiche plausibili. In questo senso il bambino si comporta come uno scienziato, anche se, a differenza dello scienziato, egli non è consapevole di generalizzare, ma, soprattutto, generalizza in base a caratteristiche superficiali e non ai significati» (Zan, 2002).

Da queste parole si evince la valenza non del tutto negativa del comportamento del bambino in quanto commette un errore sistematico che deriva da una conoscenza che in precedenza si è però rivelata efficace.

L'approccio al significato di frazione alla scuola primaria, in diversi Paesi, sembra avere la caratteristica comune è quello di “dividere un'unità concreta in parti uguali”. Le

ricerche dimostrano che si predilige questa modalità di presentazione delle frazioni in quanto intuitiva e facilmente replicabile nel contesto di vita quotidiana. I bambini hanno ben presente cosa significa ripartire una pizza o una barretta di cioccolato fra amici, in generale quindi si è convinti che la pizza o la torta divisa in fette “uguali” sia un’immagine efficace in quanto “fa capire bene il rapporto tra l’intero e le sue parti, si fissa subito nella mente degli allievi e si può passare subito alla definizione che cristallizza il “concetto” di frazione” (Campulucci, Maori, Fandiño Pinilla & Sbaragli, 2006).

L’approccio più o meno condiviso in tutti i Paesi è quello di considerare un “oggetto concreto di riferimento” da assumere come unità e che abbia i seguenti requisiti: deve essere percepito come familiare e dunque motivante e rassicurante, deve essere visibilmente unitario e quindi non deve aver bisogno di ulteriori spiegazioni o definizioni (Fandiño Pinilla, 2007).

La ricerca ha chiaramente dimostrato come questo modello possa rappresentare un potenziale ostacolo didattico per la costruzione del significato di frazione che porta al suo interno una complessità concettuale e cognitiva relativa all’insegnamento-apprendimento che può sfuggire agli insegnanti (Robotti, 2016).

Martha Isabel Fandiño Pinilla (2011) all’interno del suo volume “Curricolo e valutazione in matematica”, fa la seguente asserzione: “I numeri frazionari non esistono nel sapere accademico, al loro posto esistono i numeri razionali, definiti come classe di equivalenza. Nel sapere scolastico le frazioni “riempiono i libri di testo”, ma cosa sono le “frazioni?”

Kieren (1980; 1988; 1992) ha individuato i seguenti significati di frazione: parte/tutto, rapporto, operatore, quoziente, misura.

L'insegnamento e l'apprendimento delle frazioni dovrebbe passare per tutti questi significati; spesso però porta alla creazione di misconcezioni o se vogliamo utilizzare le parole di Rosetta Zan, di conceptions. Le difficoltà legate alle frazioni, come riportano diversi studi (Fandiño Pinilla, 2007) sono molte e persistono nella scuola secondaria di primo grado. Un possibile ostacolo riguarda l'ordinare frazioni dove varia il denominatore di un'unità in quanto possono essere ordinate applicando le regole di ordinamento dei numeri naturali frazioni aventi lo stesso denominatore, mentre ciò non è più valido per quelle il cui denominatore non è uguale. Un altro limite per gli studenti spesso riguarda il completamento all'unità in quanto è difficile definire una frazione che sia maggiore di un'unità di misura. Infine, anche i risultati delle prove nazionali INVALSI, ci confermano difficoltà nel gestire il significato di "uguale", nel passare da una frazione all'unità che l'ha generata, a gestire frazioni equivalenti o a ordinare frazioni su una retta senza passare ai numeri decimali.

È bene quindi prestare attenzione all'insegnamento-apprendimento delle frazioni.

All'interno della mia progettazione (capitolo 2, in particolare sezione 2.6) tento di presentare le attività che ho pensato a partire dal contesto classe, mostrando diversi significati di frazioni e cercando di far emergere con i bambini gli aspetti di connessione, sollecitando l'attivazione di processi e del pensiero matematico.

### 2.5 Le postazioni di lavoro con le relative attività

In questa sezione viene presentata la progettazione, illustrando le attività esplicitando le specifiche caratteristiche e necessità per le quali sono state appositamente strutturate. Le postazioni di lavoro che descriverò in seguito (sezione 2.6) sono quattro e per una più facile comprensione le nominerò "attività 1", "attività 2", "attività 3", "attività 4". Riagganciandomi al quadro di riferimento di Tomlinson e Imbeau (2012), hanno tutte

in comune lo stesso contenuto disciplinare, le frazioni, ciò che si differenzia sono i processi implicati, i prodotti e l'ambiente di apprendimento (sezione 1.6.1 e 1.6.2). A proposito di quest'ultimo aspetto come ho già anticipato nell'introduzione ho predisposto delle postazioni di lavoro differenti per favorire l'incremento dell'autonomia e permettere lo sviluppo di un lavoro differenziato. L'importanza e la cura dedicata all'ambiente di apprendimento credo sia di fondamentale importanza in quanto il clima emotivo (Sousa & Tomlinson, 2011) è profondamente legato all'apprendimento dello studente e in base a esso sviluppa anche il proprio senso di efficacia verso la disciplina, la propria capacità di affrontare un compito e la gestione dell'ansia ad esso associata.

In riferimento ai processi di apprendimento, all'interno delle differenti postazioni sono state offerte modalità differenti per affrontare lo stesso oggetto matematico grazie all'utilizzo di differenti canali sensoriali di accesso alle informazioni, in particolare il canale visivo non verbale, cinestesico, visivo verbale. Un altro aspetto che ha accompagnato questo percorso è quello della multimodalità: non sempre, nell'insegnamento, sono considerati i fattori di condizionamento e le varianti che regolano l'azione educativa. La pedagogia moderna, d'altra parte, va proprio in questa direzione quando parla dell'insegnamento personalizzato e degli ambienti educativi cooperativi. Inoltre, l'apprendimento personalizzato e creativo può portare ogni studente ad un'elaborazione originale e critica della conoscenza.

All'interno di tale progettazione hanno un ruolo determinante gli artefatti messi a disposizione degli studenti. In una didattica laboratoriale, in accordo con la prospettiva della differenziazione didattica (Tomlinson, 1999) e della teoria dell'oggettivazione in matematica (Radford, 2021) si fa uso di artefatti per la costruzione di conoscenze matematiche.

Ho osservato il profilo di apprendimento degli studenti, cercando di cogliere le modalità in cui l'individuo è facilitato ad apprendere e sulla base dei risultati emersi ho creato dei gruppi omogenei rispetto allo stile di apprendimento e al percorso di apprendimento. I gruppi sono stati accuratamente pensati in modo tale che tutti trovassero al proprio intero piena possibilità di agire e che nessuno sovrastasse l'altro nella costruzione degli apprendimenti.

Ai fini della costruzione di una progettazione inclusiva ho fornito molteplici modalità di rappresentazione permettendo la fruizione di contenuti didattici attraverso l'accesso a canali e utilizzando codici diversi, poiché nessun media sembra essere ottimale per tutti; fornire molteplici modalità di azione ed espressione attraverso cui permettere la navigazione autonoma e la produzione di contenuti, favorendo una differenziazione degli output e infine fornire molteplici modalità di coinvolgimento che possono variare in termini di modalità di lavoro infatti in ogni postazione si alternavano momenti di lavoro in gruppo e altri individuali. Il lavoro di gruppo è un elemento cardine nella teoria dell'oggettivazione (Radford, 2021; Radford & Sabena, 2015) ed è stato altamente formativo per gli studenti che tramite un processo di oggettivazione hanno modificato la percezione rendendola culturalmente e storicamente strutturata, trasformando la conoscenza in sé, del sapere culturale, alla conoscenza per sé, ovvero ad oggetto di coscienza.

Il contenuto delle postazioni di lavoro, come già precedentemente affermato, sono le frazioni. Come oggetto matematico ha in sé una polisemanticità di significati: con questa espressione s'intende che la frazione non ha un significato univoco ossia non rappresenta qualcosa di unicamente determinato. Questa progettazione, per mezzo della attività assegnate, si tenta di veicolare i seguenti significati:

- Parte/tutto: il significato fa riferimento alla partizione di un intero. Quest'ultimo può essere sia continuo che discreto.

- Rapporto: fa riferimento alla relazione fra due quantità.
- Operatore: la frazione viene vista come una funzione applicata a una quantità.

Nella sezione successiva, 2.6, presenterò le attività e l'analisi a priori relativa a ciascuna.

## 2.6 Presentazione e analisi a priori delle attività

In questo paragrafo riporterò la presentazione e l'analisi delle varie attività progettate come sopra detto partendo dal contesto classe e dalle loro caratteristiche.

L'analisi è stata svolta precedentemente rispetto alla somministrazione del progetto per esplicitare i risultati attesi, i possibili errori, le strategie che potrebbero essere pensate, i punti di forza e debolezza dell'attività analizzata. Tale lavoro mi ha inoltre permesso di avere chiari gli obiettivi e mi ha permesso di focalizzare maggiore attenzione sulle potenziali difficoltà e sugli ostacoli che gli studenti potrebbero incontrare.

Nel seguito vengono presentate e analizzate singolarmente le attività proposte: ad ogni gruppo è stata proposta una sola di queste attività.

Attività 1: Trova  $\frac{1}{3}$  del foglio in almeno due modi diversi. Successivamente spiega come hai fatto e come fai ad essere proprio sicuro di aver trovato  $\frac{1}{3}$ .

Il materiale predisposto per la postazione di lavoro è il seguente: fogli A4, forbici, righello.

Per quanto riguarda lo strumento righello è bene precisare che non c'è l'obbligo di utilizzarlo in quanto la consegna richiede di dividere in parti uguali senza specificare che vada utilizzato. Ho ritenuto opportuno metterlo a disposizione del gruppo in quanto se nella fase di verifica dell'equivalenza delle parti vogliono utilizzarlo possono farlo.

I traguardi per lo sviluppo delle competenze sono stati individuati all'interno delle Indicazioni nazionali (MIUR, 2012) e sono i seguenti:

- Costruisce ragionamenti formulando ipotesi, sostenendo le proprie idee e confrontandosi con il punto di vista di altri.
- Descrive i procedimenti seguiti e riconosce strategie di soluzione diverse dalla propria.
- Sviluppa un atteggiamento positivo rispetto alla matematica

Per quanto riguarda invece gli obiettivi specifici, pensati a partire dall'attività e prendendo come riferimento le Indicazioni nazionali, sono i seguenti:

- capire la proprietà che definisce la frazione
- individuare l'intero di riferimento della frazione
- comprensione della scrittura simbolica delle frazioni
- saper spiegare e giustificare la strategia seguita

Il significato che intende veicolare con questa attività è quello di frazione come parte-tutto attraverso uno stimolo che è prevalentemente cinestetico e visivo non verbale

Passo ora a descrivere la seconda attività:

Attività 2: Ciao bambini, vi lanciao una sfida! Avete a disposizione questo nastro, provate a tagliarlo per ricavare  $\frac{1}{5}$  del nastro. Successivamente provate a rispondere a

queste domande: Che strategie avete utilizzato per ricavare  $\frac{1}{5}$  di nastro? Avete avuto delle difficoltà? Avete proposto strategie diverse all'interno del gruppo?

I materiali che ho messo a disposizione degli alunni per questa postazione di lavoro sono: due nastri, forbici, metro da sarto. Per quanto riguarda quest'ultimo strumento è bene precisare che non c'è l'obbligo di utilizzarlo in quanto la consegna richiede di dividere in parti uguali senza specificare che vada utilizzato alcuno strumento. Ho ritenuto opportuno mettere a disposizione del gruppo il metro da sarto in modo tale che se l'utilizzo rientra in qualche strategia scelta per la risoluzione del compito possono in autonomia decidere di utilizzarlo. Il canale sensoriale che si è scelto di privilegiare per questa postazione è quello cinestetico.

I traguardi presi dalle Indicazioni nazionali (MIUR, 2012), sono i seguenti:

- Costruisce ragionamenti formulando ipotesi, sostenendo le proprie idee e confrontandosi con il punto di vista di altri
- Descrive i procedimenti seguiti e riconosce strategie di soluzione diverse dalla propria
- Sviluppa un atteggiamento positivo verso la matematica

Per quanto riguarda gli obiettivi specifici di questa attività sono stati stabiliti i seguenti:

- Introdurre le frazioni attraverso le lunghezze
- Determinare misure e unità di misura manipolando artefatti
- Stimolare la comprensione e l'uso del linguaggio matematico riguardante le frazioni
- Stimolare la riflessione sul significato di unità frazionaria

- Stimolare la produzione delle prime espressioni in linguaggio matematico che coinvolgano le frazioni

- Frazioni (di lunghezze) come risultato della partizione di lunghezze

La terza attività viene descritta qui di seguito:

Attività 3: Marco e Luca stanno litigando: prova ad aiutarli! Marco: “Le parti del rettangolo corrispondono ciascuna a  $\frac{1}{5}$  della figura. Luca: “Le parti del rettangolo non possono rappresentare la stessa frazione in quanto hanno forma diversa”.

Il canale sensoriale prevalente in questa postazione è quello visivo-non verbale e i traguardi scelti dalle Indicazioni nazionali (MIUR, 2012) sono i seguenti:

- Costruisce ragionamenti formulando ipotesi, sostenendo le proprie idee e confrontandosi con il punto di vista di altri
- Descrive i procedimenti seguiti e riconosce strategie di soluzione diverse dalla propria
- Sviluppa un atteggiamento positivo rispetto alla matematica

Gli obiettivi specifici che si tenta di raggiungere con questa attività sono:

- Comprendere il concetto di divisione in parti uguali
- Comprendere il concetto di frazioni come parte di un intero
- Stimolare la comprensione e l’uso del linguaggio matematico riguardante le frazioni
- Stimolare la riflessione sul significato di unità frazionaria
- Comprendere il concetto di frazione come quantità misurabile

Infine, presento l'ultima attività inerente a questa progettazione.

Attività 4: Mario ha organizzato una sfida di cucina con i suoi amici! Hanno a disposizione mezzo chilo di riso e per iniziare la sfida ognuno deve avere  $\frac{1}{5}$  del riso totale. Aiuta Mario a capire a quanto riso corrisponde questa quantità.

Che strategie hai utilizzato per trovare  $\frac{1}{5}$  del riso? Come fai ad essere sicuro che sia  $\frac{1}{5}$ ?

I materiali che ho predisposto per questa attività sono: un sacchetto con 500 grammi di riso, cinque piatti di plastica, un bicchiere, una bilancia elettronica. All'interno di questa postazione il canale sensoriale privilegiato per l'apprendimento è quello manipolativo.

I traguardi delle Indicazioni nazionali (MIUR 2012) sono i seguenti:

- Costruisce ragionamenti formulando ipotesi, sostenendo le proprie idee e confrontandosi con il punto di vista di altri
- Descrive i procedimenti seguiti e riconosce strategie di soluzione diverse dalla propria
- Sviluppa un atteggiamento positivo rispetto alla matematica

Per quanto riguarda invece gli obiettivi specifici sono stati scelti i seguenti:

- Riconoscere unità di misura diverse
- Attivare processi di stima
- Gestire aspetti discreti e continui dei numeri
- Stimolare la capacità di fare ipotesi e di verificarle
- Introduzione al peso come grandezze continua e misurabile
- Determinare misure e unità di misura manipolando artefatti

- Stimolare la capacità di pianificare strategie
- Frazioni come quantità misurabili

A conclusione di questa sezione, riporto le considerazioni fatte a priori circa le quattro attività. Eseguire un'analisi a priori permette di assicurarsi che le attività siano in linea con gli obiettivi didattici e curricolari, indentificare le esigenze specifiche degli studenti per garantire a tutti una partecipazione attiva. Inoltre, ho provato a fare una previsione delle possibili difficoltà che potrebbero incontrare gli studenti, pensando a differenti possibili strategie per superarle.

### *Attività 1*

#### *Considerazioni a priori:*

Dividere il foglio A4 in parti uguali permette di costruire il significato di intero, unità frazionaria e unità di misura. Il foglio rappresenta l'intero di riferimento, la suddivisione interna in parti rappresenta l'unità frazionaria scelta che corrisponde anche all'unità di misura in quanto le parti in cui viene suddiviso l'intero di riferimento devono essere equivalenti ma possono essere anche di diversa forma. Per verificare se le unità frazionarie sono equivalenti, alcuni bambini possono misurare i lati delle "parti" (unità frazionarie) che si sono formate dividendo il foglio, mentre altri possono proporre la sovrapposizione dei pezzi. Per dimostrare l'equivalenza delle stesse unità frazionarie ottenute attraverso diverse divisioni del foglio, le figure che rappresentano le unità frazionarie possono essere scomposte in parti più piccole e quindi ricomposte per confermare la loro equivalenza. È fondamentale per i bambini cimentarsi in attività pratiche come tagliare o usare un righello o piegare il foglio per convalidare l'equivalenza delle unità frazionarie. Questa attività sollecita lo stimolo cinestetico e tattile che

supportano e facilitano la costruzione di immagini mentali, da associare al concetto di unità frazionaria, anche per gli studenti con disturbi specifici dell'apprendimento e bisogni educativi speciali. Come sottolineano Stella e Grandi (2012) i soggetti con DSA sembrano non accedere facilmente alle informazioni tramite il canale visivo-verbale; facendo un attento lavoro di osservazione ho riscontrato che tale difficoltà non era circoscritta ai bambini con disturbi specifici dell'apprendimento. È fondamentale che l'insegnante consideri la possibilità di porsi del porsi di una problematica: a seconda di come il bambino sceglie di dividere il foglio può ottenere delle parti che, pur non essendo congruenti corrispondono alla stessa frazione di superficie del foglio, tale concetto deve essere interiorizzato dal bambino al fine della comprensione del reale significato matematico.

Dalla manipolazione del foglio possono nascere diverse tipologie di errori:

- Ripartizione errata del foglio in quanto le parti non sono equivalenti.
- Qualora alcuni bambini avessero scelto il righello per definire l'equivalenza delle parti, può essere che vi sia un errore di misura in quanto può esserci un errore di posizionamento dello zero sul punto dal quale si vuole iniziare a misurare e di conseguenza le unità frazionarie che formano l'intero non sono equivalenti.

Mancato utilizzo di tutto il foglio, avendo come risultato parti disuguali:

- Alcuni bambini potrebbero commettere l'errore di non utilizzare tutto l'intero di riferimento (in questo caso il foglio) avanzando una parte. Tale errore è significativo in quanto le parti in cui hanno suddiviso l'intero non possono essere associate alla stessa frazione/unità frazionaria.

- Parti non equivalenti in quanto si è utilizzata una tecnica poco efficace, per esempio, alcuni bambini per suddividere l'intero potrebbero adottare la strategia di piegare il foglio su se stesso molte volte e una volta riaperto il foglio aver trovato le loro unità frazionarie. Talvolta come strategia può essere valida ma va calcolato lo spessore del foglio causato da un'eccessiva piegatura su se stesso che potrebbe inficiare sull'equivalenza delle parti.

### *Attività 2*

#### *Considerazioni a priori:*

In questa postazione di lavoro vengono messi a disposizione due nastri. Un nastro viene usato dal gruppo come campione che rappresenta l'intero di riferimento e l'altro nastro di uguale lunghezza viene manipolato per arrivare a ricavarne  $1/5$ . Questo artefatto è pensato per cominciare a muoversi dal foglio, dove è la dimensione della larghezza è prevalente, in direzione della linea dei numeri utilizzando il nastro dove la lunghezza è la dimensione predominante.

Si inizia a lavorare, quindi, sul passaggio dal significato di frazione come parte/tutto a quello di frazione come misura, legato a sua volta a quello di frazione come operatore. Un aspetto centrale che caratterizza questa fase del percorso è lo sviluppo della consapevolezza che la lunghezza di una determinata unità frazionaria dipende dall'unità di misura scelta ma che l'unità frazionaria intesa come operatore è invece invariante.

I bambini hanno a disposizione il nastro e possono applicare la strategia che vogliono per ricavarne  $1/5$ . Una volta terminata la fase di esplorazione e manipolazione dell'artefatto si passa ad una fase metacognitiva dove si riflette sul processo e il risultato ottenuto.

In questa tipologia di attività potrebbero emergere alcune difficoltà come quella del mancato riconoscimento dell'intero di riferimento, in questo caso il nastro, avanzando una parte. Tale errore, se commesso è da ritenere significativo in quanto le parti in cui si suddivide l'intero non possono essere associate alla stessa frazione/unità frazionaria. Un altro errore potrebbe essere quello di una mancata individuazione di  $\frac{1}{5}$  di nastro per differenti motivazioni, tra cui un errore durante il processo di manipolazione fine dell'artefatto.

### *Attività 3*

#### *Considerazioni a priori:*

Nei libri di testo utilizzato dalla classe vengono quasi sempre presentate agli studenti una gamma ristretta di rappresentazioni e questo potrebbe essere un potenziale limite che può portare gli studenti a compiere degli errori. Normalmente si considerano come unità modelli continui o discreti.

Dall'osservazione precedente le rappresentazioni più famigliari per il gruppo classe erano le seguenti:

- Rettangoli o quadrati frazionati in parti uguali: Tenzionalmente divise in parti multiple di 2 che risulta più semplice per gli alunni in quanto si rischia di trovarsi di fronte a casi in cui per esempio la divisione non "standard" di un quadrato in 5 parti "uguali" potrebbe venire rappresentata dai bambini in modo errato, per esempio dividendo il quadrato in quattro parti "uguali" ottenendo quindi 4 quadrati e procedendo poi dividendo tramite la diagonale uno dei quattro quadrati. In questo modo si ottengono 5 parti ma disuguali.

- Pizze o torte: Presentando sempre le stesse rappresentazioni e proponendo attività di frazionamenti in contesti continui si rischia di generare la convinzione che non si possano trovare frazioni di tutte le altre figure piane e solide.

Il passaggio dal “Sapere” accademico al “sapere appreso” dall’allievo è il risultato di un lungo e delicatissimo percorso che porta dapprima al sapere da insegnare, poi al sapere

insegnato, per giungere appunto al sapere appreso (Fandiño Pinilla, 2005).

La ricerca ha dimostrato in modo evidente come tale approccio “semplicistico” possa rappresentare un potenziale ostacolo didattico per la costruzione dei significati insiti all’oggetto matematico frazioni. È necessaria un’azione di *trasposizione didattica* (Fandiño Pinilla, 2005) dall’insegnante all’allievo, che non significa “semplificazione”; basti pensare ai differenti ostacoli che si presentano.

#### *Attività 4*

##### *Considerazioni a priori:*

I bambini vengono lasciati liberi di sperimentare, non gli viene data alcuna indicazione circa l’utilizzo di strumenti per la suddivisione del riso. Gli viene messa a disposizione una bilancia elettronica e un bicchiere vuoto, entrambi questi strumenti possono essere utilizzati per dividere il riso in porzioni uguali.

Per arrivare alla soluzione di questa attività è possibile seguire diverse strategie: ci saranno bambini che utilizzano la bilancia elettronica e altri studenti che preferiscono procedere con una stima riempiendo cinque bicchieri con la stessa quantità per poi considerarne 1 per ottenere  $1/5$  di riso. Oppure infine ci possono essere alunni che procedono con una delle due strategie, quella della stima utilizzando i bicchieri o tramite

la bilancia pesando la quantità di  $1/5$  di riso e poi verificano la correttezza del procedimento tramite uno dei due strumenti che non si è utilizzato precedentemente.

### 3. ANALISI E INTERPRETAZIONE DEI DATI

#### 3.1 Scelte alla base della raccolta dati

In questa sezione si cerca di rendere esplicite le motivazioni che hanno portato alla decisione di analizzare alcuni momenti rispetto ad altri, la scelta di tali dati e le limitazioni tecniche.

Innanzitutto, il momento di lavoro a gruppi è stato registrato a tre gruppi ai quali sono state assegnate attività differenti; il lavoro in gruppo sulla quarta attività è rimasta esente dalla registrazione in quanto avevo a disposizione tre registratori. Purtroppo le registrazioni ottenute non sono di ottima qualità in quanto l'audio in alcuni punti risulta confusionario inficiando sulla chiarezza dei dialoghi degli studenti. Il rumore di fondo che necessariamente si è venuto a creare, siccome ciascun gruppo discuteva e si confrontava per arrivare alla risoluzione del compito assegnato, ha compromesso l'efficacia dell'uso della registrazione come strumento di raccolta dati e successiva analisi. Per sopperire alla mancanza della registrazione del lavoro di gruppo della quarta attività ho compensato osservando io direttamente e appuntandomi le difficoltà, le interazioni, la partecipazione, il grado di aiuto, gli apprendimenti ecc...

I protocolli degli studenti sono stato oggetto documentazione e anche grazie a essi è stata possibile un'attenta analisi e interpretazione dei dati.

Sono stati osservati i protocolli di tutti i membri dei gruppi riguardanti le differenti attività tenendo presente che le lenti con le quali si interpretano le informazioni sono: il grado di *partecipazione* degli alunni (all'interno del quale rientrano le difficoltà, il grado di aiuto, la collaborazione, i livelli di interazione...) e *l'apprendimento della matematica* (dove rientrano gli ostacoli, l'analisi dei processi, le strategie utilizzate per superare gli ostacoli, le misconcezioni...).

Infine è stata registrata la discussione finale in plenaria dove ciascun gruppo condivideva con gli altri il proprio lavoro, le strategie utilizzate, le difficoltà riscontrate e sulla base di queste informazioni io che in questa fase ho assunto il ruolo di moderatore della discussione, ho posto loro diverse domande stimolo indirizzate sulla base degli interventi dei singoli studenti con lo scopo di portare gli studenti a esplicitare la conoscenza emersa e apprendimenti individualmente e collettivamente costruiti. L'audio di questa parte finale della progettazione è molto chiaro, i dialoghi si comprendono siccome i bambini parlavano uno alla volta senza sovrastarsi e rispettando i turni di parola.

### 3.2 Interpretazione dei dati

Tutti i membri della classe hanno partecipato positivamente alle attività proposte mostrando interesse ed entusiasmo. Si percepiva è percepita la curiosità degli studenti, desiderosi di collaborare con i compagni per l'elaborazione di differenti strategie.

L'impegno è stato costante per l'intera durata delle attività, sono state presentate diverse strategie da parte degli studenti dalle quali sono nati confronti tra i membri del gruppo per sostenere o confutare le proposte risolutive.

Anche gli alunni che a seguito del lungo periodo di osservazione e dalle testimonianze dei loro insegnanti risultano più timidi e hanno talvolta timore a parlare all'intero gruppo classe, durante le attività in piccolo gruppo si sono sentiti liberi di esprimere le proprie idee e opinioni collaborando con i compagni per la risoluzione dell'attività.

Gli studenti sia nella parte di lavoro in piccolo gruppo che durante la discussione finale si sono sostenuti a vicenda nell'apprendimento e nella comprensione dei concetti matematici, offrendo supporto e incoraggiamento quando necessario e proponendosi di rispiegare con altre parole nel momento in cui qualche compagno non ha compreso la

strategia proposta. All'interno dei piccoli gruppi, che, come ho precedentemente spiegato, sono stati da me appositamente pensati e strutturati (sezione 2.5) è percepito un clima sereno; ogni membro si è impegnato a collaborare in quanto era cosciente dell'importanza del proprio ruolo all'interno del gruppo per la costruzione di apprendimenti matematici.

Il gruppo ha ricoperto un ruolo positivo per ciascuno di loro in quanto rappresentava un vero e proprio sistema di comunicazione che pone il gruppo in una posizione di superiorità rispetto alla semplice somma del numero di alunni (Pollo, 2004).

Gli studenti più sicuri di sé stessi durante i momenti di dialogo in gruppo hanno incoraggiato quelli che in un primo momento hanno deciso di rimanere più in secondo piano sostenendoli e incoraggiandoli a esprimere la loro riflessione critica e dei feedback costruttivi per favorire il miglioramento individuale e collettivo. Gli studenti hanno creato un ambiente inclusivo, basato su collaborazione, aiuto e ascolto; dove ciascuno di loro si è sentito importante e determinante aumentando così anche la motivazione e l'efficacia del gruppo nel raggiungere gli obiettivi prefissati dalle attività. Si sono verificati anche momenti di autocorrezione e autovalutazione da parte di studenti verso sé stessi e verso l'intero gruppo di riferimento.

Hanno valutato criticamente i successi e gli errori, espresso i punti di forza e di debolezza e identificato le aree di miglioramento condividendo tali riflessioni sia nella discussione finale che nei protocolli raccolti. Terminata questa premessa, nei seguenti paragrafi analizzerò nel dettaglio ogni attività sulla base dei protocolli esaminati e del materiale registrato andando ad osservare il livello di inclusione. È doveroso precisare nuovamente che nel momento dell'analisi dei dati, il lavoro di interpretazione si basa sul fattore della partecipazione e su quello dell'apprendimento.

*Analisi attività 1:*

Consegna: Trova  $\frac{1}{5}$  del foglio in almeno due modi diversi. Successivamente spiega come hai fatto e come fai ad essere proprio sicuro di aver trovato  $\frac{1}{5}$ .

*Trascrizione dei dati:*

(1) T: “abbiamo preso il foglio, abbiamo misurato il perimetro (e mi indica in realtà la lunghezza della base del foglio) e misura 30 centimetri e lo abbiamo diviso per il denominatore quindi 5. Il risultato della divisione è 6 centimetri che è la larghezza di ogni rettangolo”.

(2) Io: “Tomas mi indichi sul foglio cosa misura 30 centimetri?”

(3) T: (mi indica la base del foglio, la lunghezza)

(4) Io: (domanda rivolta anche alla classe) “mi hai parlato di perimetro in riferimento a quei 30 centimetri, sei d’accordo? Siete tutti d’accordo?”

(5) L: “non è il perimetro, è il lato, è la base”

(6) T: “vero il perimetro è la somma di tutti i lati, 30 centimetri è la base”

(7) T: “abbiamo diviso i 30 centimetri per il denominatore ovvero 5 e fa 6, 6 sono i centimetri che vanno calcolati per ogni parte. Abbiamo diviso il foglio in 5 parti da 6 centimetri”

(8) Io: “come avete fatto ad essere sicuri di aver trovato proprio  $\frac{1}{5}$ ?”

(9) A: (membro interno del gruppo) “abbiamo misurato molte volte i pezzi ed erano tutti 6 centimetri quindi la parte che abbiamo colorato è  $\frac{1}{5}$ ”

(10) Io: “vi vengono in mente altri modi per essere sicuri per verificare se è  $\frac{1}{5}$ ?”

(11) T: (membro esterno al gruppo): “si può fare anche dall’altro lato del foglio, dividendolo in 5 parli uguali in orizzontale”

(12) Io: “come faresti? Me lo mostri sul foglio?”

(13) io: (dispone il foglio in orizzontale mi indica l’altezza e dice...) “

(12) Io: “okay, e come verifichi se hai trovato  $1/5$  del foglio?”

(13) T: (membro esterno al gruppo): “le misuro con il righello e guardo se misurano uguali”

(14) Io: (domanda rivolta alla classe) “vi vengono in mente altre strategie?”

(15) P (membro esterno al gruppo): “lo piego”

(16) V: “io piegherei il foglio”

(17) Io: (do un altro foglio bianco) “fai vedere ai tuoi compagni come piegheresti il foglio per trovare  $1/5$ ”

(18) V: “divido il foglio piegandolo in 5 parti uguali partendo da questo lato corto” (indicando l’altezza del foglio)

(19) M (membro esterno al gruppo): “è vero questa può essere un altro modo”

(20) Io: “avete avuto difficoltà?”

(21) A: “io all’inizio sì perché non avevo capito che dovevo considerare tutto il foglio quindi ho disegnato sopra un rettangolo l’ho diviso in cinque parti uguali e ne ho colorata 1 perché mi chiedeva  $1/5$ ”

(22) Io: “come mai hai fatto in quel modo?”

(23) A: “perché abbiamo sempre fatto così, di solito si colorano delle parti o si scrive la frazione”

(24) Io: “Come hai fatto a capire che invece stavi procedendo in modo errato?”

(25) A: “i miei compagni mi hanno aiutato a capire che dovevo guardare tutto il foglio e poi ho riletto la consegna e ho capito”

### *Interpretazione dei dati:*

Questa attività è stata proposta ad un gruppo di quattro bambini.

Tre di loro hanno deciso di procedere misurando l'area per poi suddividerla in cinque parti uguali e infine considerarne una. Sono arrivati a compiere tale operazione calcolando inizialmente la base e dividendo tale misura in cinque parti come indica il denominatore della frazione, la stessa procedura è stata eseguita sulla base parallela e infine hanno unito i segmenti creati come punto di riferimento da una base all'altra del rettangolo considerato (7).

Una studentessa invece non ha individuato l'intero di riferimento corretto, utilizzando il foglio come contorno e non come intero di riferimento (21). È stata lei stessa ad accorgersi di tale errore e ad autocorreggersi, anche grazie all'aiuto dei compagni (25).

Probabilmente questo è dovuto al fatto che quel gruppo classe è stato abituato ad affrontare le frazioni tramite delle rappresentazioni standard di rettangoli disegnati sul foglio, di conseguenza la studentessa si è ricondotta ad una situazione nota (23).

È stato interessante anche vedere come si è autocorretto un partecipante del gruppo, grazie nuovamente alla riflessione e al confronto nato con i compagni (6).

T. nel momento di esplicitazione della strategia adottata, utilizza il termine “perimetro” in modo errato perché nella discussione mostra anche fisicamente. indicando il foglio, il processo di misura e quando parlava di perimetro era evidente che stava intendendo in realtà la base (1-2-3). Probabilmente il gruppo classe è poco abituato a collegare i concetti matematici studiati al reale e ad esperienze vissute nel quotidiano. Durante le lezioni di geometria a cui ho partecipato si sentiva parlare di perimetro all'interno di problemi che si trovano sul libero di testo e non c'è mai stata un'elaborazione profonda dei concetti di base della geometria. Durante la discussione si vedeva che lui aveva presente che cosa fosse la base e cosa fosse il perimetro e che questi due concetti sono differenti ma siccome probabilmente manca una rielaborazione critica dei concetti, spesso capita che durante scambi comunicativi orali tali termini vengano interscambiati con leggerezza.

A seguito di mie domande stimolo sono nate anche proposte di strategie differenti da parte di studenti che non hanno lavorato su questa attività: T. ha proposto di dividere il foglio in cinque parti collegando le due altezze, girando quindi il foglio in orizzontale (11). È una proposta interessante in quanto è stato l'unico studente che ha individuato una strategia per suddividere il rettangolo che non fosse quella standard alla quale sono sempre stati abituati. Nel gruppo classe, quando sono state presentate le frazioni, erano infatti stati utilizzati come esempi i classici interi di riferimento per la definizione delle frazioni, come la pizza o i rettangoli e le classiche divisioni: in fette per quanto riguarda la pizza e le suddivisioni verticali per quanto riguarda i rettangoli.

P. un altro studente che non lavorato su questa attività propone di dividere il foglio piegandolo (15). Anche questo è stato un intervento interessante in quanto entra in gioco la dimensione manipolativa. Come ho precedentemente detto, il gruppo classe non è abituato a manipolare strumenti e oggetti per la costruzione di apprendimenti,

probabilmente è per questo motivo che tale strategia non è stata proposta da nessun membro del piccolo gruppo.

*Analisi attività 2:*

Consegna: Mario ha organizzato una sfida di cucina con i suoi amici! Hanno a disposizione mezzo chilo di riso e per iniziare la sfida ognuno deve avere  $\frac{1}{5}$  del riso totale. Aiuta Mario a capire a quanto riso corrisponde questa quantità. Che strategie hai utilizzato per trovare  $\frac{1}{5}$  del riso? Come fai ad essere sicuro che sia  $\frac{1}{5}$ ?

*Trascrizione dei dati:*

- (1) Io: “Ricorda ai tuoi compagni quale era l’attività per la vostra postazione”
- (2) E: “dovevamo dividere in 5 parti uguali mezzo chilo di riso”
- (3) Io: “questo Enea siete arrivati a dirlo voi che fate parte del gruppo, quale era la consegna?”
- (4) E: (legge la consegna al gruppo classe) “Mario ha organizzato una sfida di cucina con i suoi amici. Hanno a disposizione mezzo chilo di riso e per iniziare la sfida ognuno deve avere  $\frac{1}{5}$  del riso totale. Aiuta Mario a capire a quanto riso corrisponde questa quantità”.
- (5) Io: “quale strategia avete utilizzato, racconta cosa avete fatto”
- (6) E: “dovevamo dividere il riso in parti uguali, in 5 parti uguali che contengono lo stesso riso”
- (7) Io: “come avete fatto?”
- (8) E: “per prima cosa abbiamo fatto la tara, li abbiamo appoggiati sulla bilancia uno per volta e abbiamo messo 100 grammi di riso... almeno credevamo... poi

ad un certo punto non c'era rimasto più riso e avevamo riempito solo 4 bicchieri, li abbiamo pesati e pesavano dai 130 ai 160 grammi. Avevamo sbagliato e ce ne siamo accorti anche perché i bicchieri erano uguali ma il riso arrivava in punti diversi allora li abbiamo un po' regolati.

(9) Io: “come avete fatto a regolarli?”

(10) E: “abbiamo utilizzato la bilancia. Sapevamo che un bicchiere doveva essere 100 grammi e quindi abbiamo regolato i cinque bicchieri. Li abbiamo di nuovo pesati altre volte, li abbiamo pesati 15 volte perché, se calcoliamo 5 bicchieri pesati 3 volte fa 15 volte.

(11) M: “poi alla fine mi è venuta un'idea vulcanica, proprio vulcanica!”

(12) Io: “spiegaci questa idea vulcanica!”

(13) M: “ho detto: i bicchieri hanno lo stesso livello di riso e visto che ognuno pesa 100 e il riso arrivava ad una certa altezza li abbiamo prima messi vicini e abbiamo cercato più o meno di allinearli e vedere il livello del riso. Era tutto uguale quindi ce l'abbiamo fatta!”

(14) E: “abbiamo trovato un po' di difficoltà però alla fine ce l'abbiamo fatta. E centra anche con l'argomento che abbiamo fatto di matematica: abbiamo fatto  $1/5$  di 500,  $500:5$  fa 100,  $100 \times 1$  (e mostra un bicchiere) uguale 100”

(15) Io: “Mi dicevi che avete avuto un po' di difficoltà all'inizio, quali?”

(16) E: “la difficoltà era con la bilancia, non vorrei autosvalutarci come gruppo ma all'inizio è stato così”

(17) Io: (domanda rivolta alla classe) “siete d’accordo con le strategie che hanno adottato per trovare  $\frac{1}{5}$  di riso? Avreste fatto così? Vi vengono in mente altre strategie?”

(18) Classe: sì siamo d’accordo sono strategie che funzionano

(19) B: “a me è piaciuta di più la strategia di regolare tutti i bicchieri al pari livello dividendo il riso in parti uguali così raggiunge la stessa altezza nel bicchiere ed è la stessa quantità”

*Interpretazione dei dati:*

Questa attività è stata proposta a un gruppo formato da quattro studenti. Tutti i partecipanti erano concordi nell’utilizzare la proprietà peso per procedere alla suddivisione del riso, hanno quindi introdotto la stessa quantità di riso all’interno di cinque bicchieri (6). I membri del gruppo discutendo sono arrivati all’accordo di utilizzare una strategia che parte dal tarare il bicchiere prima di riempirlo con cento grammi di riso, per poi ripetere tale operazione con i restanti quattro bicchieri (8). Tramite il confronto, l’argomentazione e la successiva esperienza pratica, gli studenti hanno interiorizzato anche il concetto di tara e cosa significa calcolarla in quanto hanno prima pesato il contenitore, nel loro caso il bicchiere, e poi hanno introdotto cento grammi di riso per non incorrere nel possibile errore di ottenere un peso lordo di cento grammi per i cinque bicchieri e una rimanenza di riso generale non riuscendo quindi ad ottenere  $\frac{1}{5}$  di riso come richiesto dalla consegna. A livello teorico la strategia funziona, nel pratico però, durante l’esperienza il gruppo si accorge di aver commesso comunque degli errori: non hanno ripartito equamente il riso all’interno dei cinque bicchieri. L’errore anche in questo caso è stato formativo, ha contribuito a costruire l’apprendimento e all’elaborazione di

un'altra strategia nuova per provare a risolvere il problema: osservare il livello del riso all'interno del bicchiere. Tramite un'attenta osservazione hanno notato che il livello del riso dentro ai bicchieri, che hanno uguale volume, non era lo stesso e questo poteva essere un possibile errore, così hanno deciso di regolarli in modo che tutti e cinque i bicchieri abbiano la stessa altezza (8). Si sono auto-corretti, non c'è voluto il mio intervento. Ho chiesto loro di argomentarmi la strategia utilizzata per regolare i bicchieri, hanno giustificato le loro procedure dicendo di essersi affidati alla bilancia, hanno riempito un bicchiere con cento grammi di riso e hanno tenuto quello poi come modello, riempiendo i restanti quattro bicchieri con la stessa quantità di riso (10-11). Inoltre, per accertarsi il gruppo di studenti ha attuato diverse verifiche pesando i bicchieri numerose volte e osservando il livello del riso all'interno dei cinque bicchieri (10-11).

La raccolta dei dati emersi durante la discussione in gruppo sostiene lo sviluppo di un apprendimento matematico profondo: in modo autonomo gli studenti si sono accorti che la bilancia creava alcune difficoltà per arrivare a capire quale fosse il peso del riso, insieme hanno cercato un'altra strategia e hanno deciso di modificare la proprietà. (13-15-16). Questo passaggio non è per nulla scontato in quanto hanno compreso che per arrivare a trovare  $1/5$  del riso non era essenziale pesarlo o, meglio, non era l'unica via percorribile, la questione basilare era trovare una proprietà che rimanesse costante e associata al peso ma che poteva essere misurata anche in altre modalità oltre alla bilancia.

Si denota quindi una comprensione fine del problema. In questa postazione di lavoro gli studenti si sono impegnati a sviluppare nuove capacità, abilità e competenze e a rafforzarne altre già precedentemente apprese come il pensiero critico, il ragionamento matematico, il problem solving, l'utilizzo di strumenti per misurare e la capacità di autovalutazione.

*Analisi attività 3:*

Consegna: Ciao bambini, vi lancio una sfida! Avete a disposizione questo nastro, provate a tagliarlo per ricavare  $\frac{1}{5}$  del nastro. Successivamente provate a rispondere a queste domande: Che strategie avete utilizzato per ricavare  $\frac{1}{5}$  di nastro? Avete avuto delle difficoltà? Avete proposto strategie diverse all'interno del gruppo?

Questa attività è stata proposta a due gruppi differenti: ho chiesto ad ogni gruppo di accordarsi per scegliere un portavoce. Ogni membro del gruppo era libero di intervenire per aggiungere informazioni, chiarire dubbi o rispiegare qualche passaggio.

*Trascrizione dei dati:*

## Gruppo 1:

(1) V: “Prima abbiamo misurato il nastro con il righello e misurava 100 centimetri che vuol dire anche 1 metro però non capivamo tanto bene. Abbiamo provato di tutto ma non capivamo”

(2) Io: “prova a spiegare cosa non capivi”

(3) V: “non capivo come dividere in cinque parti uguali”. Un nostro compagno ha detto di piagare il nastro e abbiamo cominciato a piegare 20 centimetri e da lì abbiamo capito”

(4) Io: “come siete arrivati a capire che le parti di nastro dovevano misurare 20 centimetri?”

(5) E: “perché 100 centimetri diviso 5 che sono le parti che dovevamo avere fa 20 centimetri”

(6) Io: “tutti i componenti del gruppo hanno utilizzato questa strategia?”

- (7) G: “Sì, abbiamo parlato in gruppo e siamo arrivati tutti a questa strategia”
- (8) Io (domanda rivolta alla classe): avete capito tutti cosa hanno fatto?
- (9) Classe: sì!
- (10) Io (domanda rivolta alla classe): siete d'accordo con la strategia utilizzata dal gruppo?
- (11) G (membro esterno alla postazione di lavoro): “io non ho ben capito”
- (12) Io (rivolta ai membri interni della postazione di lavoro): “provate rispiegare la vostra strategia”
- (13) V: “non riuscivamo a dividerlo con il righello in 5 parti uguali”
- (14) Io: “cosa dovevate trovare? Quale era la consegna? “
- (15) V: “dovevamo trovare  $1/5$  del nastro”
- (16) V: “abbiamo incominciato a piegare (e fa vedere ai compagni il processo, piega il nastro in 5 parti uguali) sovrapponendo le parti da 20 centimetri
- (17) Io: “è stato casuale 20 centimetri?”
- (18) V: “no, ci siamo arrivate facendo  $100:5$  che fa 20”
- (19) Io: “cos'è 100 centimetri? Spiegalo ai tuoi compagni”
- (20) V: “era la lunghezza del nastro che è un metro cioè 100 centimetri. 100 diviso 5 che sono le parti che dovevamo dividere in parti uguali e fa 20 centimetri”
- (21) Io: “avete avuto delle difficoltà?”
- (22) V: “sì. All'inizio sì perché non capivamo come dividerlo in 5 parti uguali però poi quando abbiamo piagato il nastro abbiamo cominciato a capire”

(23) Io: (domanda rivolta alla classe) “vi vengono in mente altre strategie per arrivare a trovare  $1/5$  del nastro?”

(24) T (membro esterno al gruppo): “potevano prendere tutti i righelli metterli vicini e segnare dove è il numero la divisione in 5 parti”

(25) Io: (domanda rivolta alla classe) “vi vengono in mente altre strategie?”

(26) Classe: “no, siamo d'accordo con quelle loro”

*Interpretazione dei dati emersi dal primo gruppo:*

Il gruppo ha individuato l'intero di riferimento corretto, ovvero l'intero nastro che misura un metro (1), ma riscontra delle difficoltà a suddividerlo in cinque parti uguali (3). Uno studente, B. propone di utilizzare una strategia manipolativa: piagare il nastro. I membri del gruppo dimostrano di aver acquisito un alto livello di competenza in quanto utilizzano il nastro come un artefatto manipolandolo per arrivare a trovare la soluzione al problema. Come ulteriore verifica hanno capito che ogni parte di nastro deve misurare venti centimetri (3-5) quindi oltre a piegare il nastro per formare cinque parte di nastro uguali, verificano anche che quest'ultime misurino venti centimetri per poi considerarne una in quanto la consegna chiede di trovare  $1/5$  di nastro. I membri del gruppo dimostrano di aver compreso qual è l'intero di riferimento, la relazione tra una parte e l'intero di riferimento, e qual è la proprietà sulla quale agire in questo caso ovvero la lunghezza del nastro.

Gruppo 2:

(1) Io: “ci raccontate se avete avuto difficoltà e quale strategia avete utilizzato?”

(2) M: “all’inizio abbiamo avuto molta difficoltà perché non riuscivamo a dividere il nastro in 5 parti uguali. Abbiamo provato tante volte con lunghezze diverse dei pezzi ma in ogni modo ci venivano 5 pezzi uguali e uno diverso”

(3) Io: “cosa intendi con pezzi uguali?”

(4) Matilde: “dello stesso numero di centimetri. Prima con 17 centimetri ogni pezzo poi con 18...”

(5) Io: “su che base siete arrivati a trovare quella misura di lunghezza da assegnare ad ogni parte?”

(6) M: “abbiamo ragionato per tentativi, abbiamo fatto tante prove piegandolo per riuscire a dividerlo in 5 parti uguali”

(7) Io: “quindi voi siete riusciti a trovare  $1/5$  del nastro?”

(8) M: “no, non siamo riusciti perché ci è avanzato un pezzo”

(9) Io: “siete tutti sicuri che loro non siano riusciti a trovare  $1/5$ ?”

(10) Classe: “siii, siamo sicuri”

(11) L: “non sono riusciti perché ci sono 6 parti diverse o 5 parti uguali e una diversa quindi no”

(12) Io: (domanda rivolta alla classe) “come possiamo aiutarle a trovare  $1/5$ ? Quali errori hanno commesso”

(13) L (membro esterno al gruppo): “magari gli è avanzato un pezzo perché non hanno diviso il nastro in parti uguali, si sono sbagliati a misurare”

(14) V (membro esterno al gruppo): “magari non tengono bene fermo il nastro e si sono sbagliati a segnare i punti per dividere le parti”

(15) Io: “come possiamo aiutare a non fare avanzare quel pezzettino e a trovare  $\frac{1}{5}$  del nastro?”

(16) S (membro esterno al gruppo): “potevano aggiungere 1 centimetro della parte avanzata ai cinque pezzi uguali e provare a vedere se venivano 5 pezzi uguali”

(17) T (membro esterno al gruppo): “potevano provare a rividero togliendo piano piano un pochino dal pezzetto avanzato e aggiungerlo agli altri fino a quando si misuravano i 5 pezzi uguali e ne consideravano 1 quindi  $\frac{1}{5}$ ”

*Interpretazione dei dati emersi dal secondo gruppo:*

Dalle conversazioni emerse tra i membri del gruppo si può evidenziare un riconoscimento della proprietà significativa che è la lunghezza (2) e l'idea di divisione in parti uguali (2) ma è presente un problema con l'intero di riferimento. Questi studenti mettono in luce la loro difficoltà nel dividere il nastro in parti uguali. Un'altra mancanza emerge dal fatto che per trovare la soluzione al problema hanno proceduto tentativi senza individuare prima l'intero di riferimento con la misura della lunghezza che in questo caso era un elemento fondamentale da sapere (4-6). Questa carenza può essere portata da un problema nell'individuare quale fosse la proprietà dell'intero significativa, in questo caso è la lunghezza del cordino che misura cento centimetri o da una difficoltà a livello manuale durante il processo di misurazione per esempio portata da un errato utilizzo del righello per misurare o un errato conteggio dei centimetri durante l'atto di misura (8-11-13-14). Una studentessa di quel gruppo dice di dover dividere il nastro in cinque parti uguali non citando però la proprietà della lunghezza come discriminante da dover dividere in cinque parti uguali (2), questo può rappresentare un grande limite.

A differenza del gruppo precedente, a questi studenti non è chiara la connessione di significato tra l'operazione di dividere il nastro in cinque parti uguali e l'atto di dividere i cento centimetri di lunghezza del nastro in cinque parti. In questo gruppo c'è una dissociazione tra l'attività manuale che loro capiscono di dover fare (6) ovvero di dividere il nastro in cinque parti uguali, e le proprietà numeriche che stanno considerando quindi la lunghezza e la necessità di utilizzare l'operazione divisione tra numeri per trovare  $\frac{1}{5}$  del cordino come richiesto dall'attività.

Le ipotesi per rispondere a tale mancanza sono diverse: può essere causata dalle carenze matematiche, dato che è un gruppo formato da tre studentesse che presentano differenti difficoltà e lo conferma la problematicità nella manipolazione dei numeri del mancato svolgimento dell'operazione  $100:5$ ; un'altra ipotesi può essere portata dalla difficoltà nella manipolazione del cordino (13-14) in quanto rappresenta una situazione non nota per gli studenti della classe; infine un'ultima spiegazione può essere causata da una difficoltà di astrazione.

S. e T., due studenti hanno cercato due possibili strategie (16-17) per sopperire al problema che si è creato (15). Per arrivare a comprendere che è possibile trovare cinque pezzi uguali di nastro togliendo una parte al pezzo che avanza e aggiungendola alle cinque parti uguali, necessita di un'ottima conoscenza di ciò che significa dividere.

#### *Analisi attività 4:*

Consegna: Marco e Luca stanno litigando: prova ad aiutarli! Marco: "Le parti del rettangolo corrispondono ciascuna a  $\frac{1}{5}$  della figura. Luca: "Le parti del rettangolo non possono rappresentare la stessa frazione in quanto hanno forma diversa"

*Trascrizione dei dati:*

Io: “raccontate ai vostri compagni cosa avete fatto, quali strategie avete utilizzato e se avete avuto delle difficoltà”

(1) A: “noi abbiamo detto che secondo noi ha ragione Marco perché anche se la forma delle parti è diversa non importa, abbiamo contato i quadretti e sono uguali, la quantità quindi è uguale.

(2) Io: “a che quadretti ti riferisci?”

(3) M: “i quadretti delle parti”

(4) Io: “come siete arrivati a dire che i quadretti delle varie parti sono uguali in entrambe le figure?”

(5) A: “li abbiamo contati”

(6) Io (domanda rivolta alla classe): “siete tutti d’accordo con la strategia che hanno utilizzato per capire se le parti del rettangolo corrispondono ciascuna a  $\frac{1}{5}$  della figura?”

(7) Classe: “siamo molto d’accordo con loro ha ragione Marco”

(8) S: “abbiamo tutti contato i quadretti di tutti i pezzi delle figure tranne Gianluca”

(9) G: “io ho contato i quadretti che sono 4 e questi che sono 16 (indicandomi la base e l’altezza dei cinque rettangoli in cui è suddiviso il primo rettangolo) e ho fatto  $4 \times 16$  che fa 64. Ho calcolato la superficie del rettangolo. Poi ho fatto  $64 \times 5$  perché sono cinque rettangoli uguali che fa 320 che sono tutti i quadretti del rettangolo grande.”

(10) Io: “quale strategia hai usato per l’altro rettangolo?”

(11) G: “ho misurato i centimetri, quanto era l’altezza e la base e ho guardato se era la stessa di quello sopra, ed era la stessa. Poi però non potevo contare i quadratini di una parte e fare la moltiplicazione perché le varie parti non erano rettangoli ma erano tutte figure diverse allora ho dovuto contare i quadretti e ho visto che erano sempre 64 per ogni pezzo.  $64 \times 5$  fa 320 quadretti come quelli del rettangolo sopra”

*Interpretazione dei dati:*

Tutti i bambini di hanno utilizzato la medesima strategia per risolvere il problema: procedere verificando il numero di quadretti presenti in ogni parte che compone il rettangolo per capire se le parti hanno all’interno lo stesso numero di quadretti (5-9). Nessun bambino ha dato di default ragione a Luca limitandosi ad osservare la forma diversa delle parti in cui erano suddivisi i due rettangoli, questo è già un grande traguardo perché significa che gli studenti hanno ben presente che la forma non è un discriminante valido per stabilire se le parti sono  $1/5$  ma piuttosto che bisogna andare a verificare la proprietà superficie interna. Sono riusciti a comprendere l’uguaglianza tra le parti, capendo che l’uguaglianza non necessita un’uguaglianza di forma (1).

Tutti i bambini, tranne uno, hanno deciso di osservare in un certo modo il rettangolo e hanno notato che è composto da quadratini, li hanno contati e successivamente confrontavano il risultato con le altre parti della figura. Terminato il conteggio procedono nello stesso modo anche con l’altro rettangolo (5-6-8).

Anche G., uno studente facente parte del gruppo ritiene necessario dover contare i quadratini interni alle varie parti in quanto da un lato è anche lui consapevole che la forma non è una prerogativa, ma dall’altra parte solamente a livello percettivo e visivo nessun studente riesce a verificare l’uguaglianza tra le parti. A questo punto allora hanno

applicato differenti strategie, appoggiandosi a strumenti matematici: la maggior parte utilizza il conteggio di tutti i quadratini interni alle parti (1-5-8), mentre G. riconosce visivamente che il primo rettangolo era suddiviso in cinque rettangoli più piccoli di uguale forma ed estensione e quindi si limita a calcolare i quadretti del primo rettangolo, riconducendosi alla formula per calcolare l'area di un rettangolo e poi moltiplica il risultato dei quadretti per cinque; in quanto i rettangoli sono cinque (9). Come emerge dalla conversazione, per verificare il numero di quadretti delle parti in cui è suddiviso il secondo rettangolo ha contato tutti i quadretti interni ad ogni parte perché il rettangolo non era suddiviso in cinque rettangoli più piccoli di uguale forma e dimensione ma era suddiviso in cinque figure non convenzionali formate sempre da sessantaquattro quadretti ciascuna (11).

Infine, riporto il momento della discussione finale e di debriefing.

È stato altamente formativo, ha permesso agli studenti di riflettere sui processi di apprendimento e sui concetti matematici che sono stati costruiti individualmente e in gruppo durante le varie attività (4, 7, 11, 13, 16, 17, 18).

Inoltre, oltre ad aver consentito di consolidare i pensieri matematici emersi, questo momento ha permesso di condividere le strategie risolutive, i punti di forza e le debolezze emerse che grazie al potere della condivisione e dall'aiuto di tutti i compagni hanno trovato nuove strategie per superare gli ostacoli che sono affiorati.

Gli studenti hanno partecipato attivamente e hanno dimostrato di aver sviluppato e incrementato il loro pensiero matematico riuscendo a fare emergere gli aspetti comuni che caratterizzano ciascuna attività nonostante fossero una diversa dall'altra e l'unico aspetto in comune fosse appunto il contenuto accademico (6, 9, 18).

*Trascrizione dei dati:*

(1) Io: “riassumendo il tutto: ognuno di voi aveva un’attività differente da fare e tutti voi avete trovato  $1/5$ ;  $1/5$  di nastro,  $1/5$  di foglio,  $1/5$  di riso o chi doveva verificare se le parti in cui era suddiviso il rettangolo rappresentavano la frazione  $1/5$ . Cosa hanno in comune queste attività?”

(2) E: “in tutte le attività dobbiamo individuare  $1/5$ ”

(3) Io: “cos’è  $1/5$ ?”

(4) A: “è il foglio diviso in cinque parti e questa che ho colorato è  $1/5$ ”

(5) V: “per esempio noi abbiamo trovato  $1/5$  del nastro e l’abbiamo tagliato mentre l’altro pezzo grande sono  $4/5$  rimanenti”.

(6) G: “tutte le attività volevano che trovavamo  $1/5$  quindi 1 parte dell’intero che lo abbiamo diviso in cinque parti”

(7) E: “noi avevamo 1 metro di nastro e abbiamo trovato  $1/5$  di nastro”

(8) Io: “Rispetto anche alle altre attività, cosa hanno in comune tutti gli  $1/5$  trovati?”

(9) G: “sono una delle parti dell’intero”.

(10) Io: “quali erano gli interi nelle varie attività?”

(11) G: “Per il mio gruppo l’intero era il rettangolo”

(12) Io: “e quale è il vostro  $1/5$  trovato?”

(13) G: “i due rettangoli erano già divisi in 5 parti che abbiamo capito che erano tutti dello stesso numero di quadretti quindi una parte è  $1/5$  del rettangolo”

(14) A: “per il mio gruppo l’intero era il foglio bianco”

(15) Io: “quindi avete trovato  $1/5$  rispetto a cosa?”

(16) A: “ $1/5$  rispetto all’intero che è la superficie del foglio”

(17) M: “invece per il mio gruppo l’intero era il mezzo chilo di riso”

(18) E: “quindi abbiamo trovato  $1/5$  che è 100 grammi dell’intero che è mezzo chilo quindi 500 grammi”

(18) G: “sì esatto, per noi invece era  $1/5$  rispetto alla lunghezza del nastro”

#### 4. CONCLUSIONI

Nel primo capitolo ho sviluppato il quadro teorico a cui fa riferimento questo lavoro di tesi: nella sezione 1.1 definisco il concetto di inclusione e nei successivi 1.2 e 1.3 narro l'exkursus che porta all'inclusione rispettivamente nel contesto europeo e italiano. Inoltre, presento le due teorie sulle quali si regge il lavoro di progettazione ovvero la Teoria dell'oggettivazione (Radford, 2021) sezione 1.4 e la Teoria della differenziazione didattica (Tomlinson, 1999; 2014) sezione 1.6.

La prima teoria è stata scelta soprattutto per il suo carattere trasformativo: obiettivo esplicito del processo di insegnamento e apprendimento nella teoria dell'oggettivazione è quello di creare soggetti riflessivi ed etici, che si posizionano criticamente rispetto a pratiche matematiche socialmente costituite (Radford, 2021). La finalità è quella di lavorare in un'ottica inclusiva, superando quindi alcuni presupposti impliciti legati a un apprendimento individualista e standardizzato. In particolare, nell'insegnamento della matematica, è importante promuovere un apprendimento che sviluppi la consapevolezza individuale del carattere storico e sociale del sapere matematico. Si tratta di una teoria socioculturale dell'apprendimento e insegnamento dove si ritiene fondamentale lo studio delle sue componenti psicologiche, ma debba tenere conto dei processi collettivi che strutturano e definiscono il sapere e che permettono all'individuo di posizionarsi rispetto ad esso. La teoria della differenziazione didattica (Tomlinson, 1999) è stata scelta in quanto tale lavoro tenta di rispondere alle necessità di una classe eterogenea. L'idea di base è che la classe sia di per sé eterogenea e che questo aspetto sia una risorsa non un ostacolo da superare.

Ogni studente apprende in modo differente, ha interessi e passioni diverse, un'autostima e una consapevolezza rispetto ai propri punti di forza e debolezza che

cambia da studente a studente. In accordo in questa prospettiva ho strutturato delle postazioni di lavoro con delle attività differenti, adattandole agli studenti alle quali sono state assegnate. Nel capitolo seguente si entra nel vivo della questione analizzando la progettazione esperita durante il tirocinio. La prima sezione, 2.1 è dedicata alla motivazione che mi ha spinto a strutturare questo lavoro. Le difficoltà nell'apprendimento della matematica emergono già dalle prime classi della scuola primaria, spesso a causa di un approccio nozionistico e unidirezionale che limita il pensiero critico e la costruzione in modo autonomo degli oggetti matematici da parte degli studenti. Molti bambini faticano ad assimilare il simbolismo astratto della matematica, spesso slegato dalla realtà quotidiana e presentato tramite problemi risolvibili tramite un'unica soluzione, senza stimolare al ragionamento logico, alla costruzione di diverse strategie o al confronto tra compagni. Le Indicazioni Nazionali sottolineano l'importanza di differenziare i contenuti didattici per valorizzare le inclinazioni personali degli studenti e creare un ambiente educativo accogliente. Tuttavia, la letteratura nazionale e internazionale evidenzia una mancanza di studi specifici sulla didattica inclusiva della matematica. Segue una sezione, 2.2, di osservazione del contesto classe per individuare alcune caratteristiche e necessità determinanti per la mia progettazione per poter differenziare i processi di apprendimento, il prodotto e l'ambiente e presentare alla classe un esempio di progettazione inclusiva, come esperienza propedeutica all'avvio del lavoro a stazioni. Quest'ultimo rappresenta una declinazione metodologia della didattica aperta (Demo, 2016) che prevede l'allestimento di diverse postazioni, ciascuna dedicata a un'attività diversa ma tutte collegate a uno stesso obiettivo o argomento. Questa metodologia consente di affrontare una tematica o competenza attraverso vari processi di apprendimento, utilizzando materiali diversi e privilegiando differenti canali sensoriali. Questo modello si basa su due principi fondamentali: l'autonomia, poiché ogni stazione deve essere progettata

affinché gli studenti possano svolgere i compiti in autonomia, e la varietà metodologica, affrontando un tema attraverso diversi approcci didattici e coinvolgendo vari linguaggi e modalità di apprendimento.

Il paragrafo successivo, il 2.4, presenta il contenuto delle diverse attività, l'oggetto matematico frazione. Le frazioni, una parte fondamentale del curriculum, sono particolarmente complesse da insegnare e comprendere, poiché racchiudono diversi significati come parte/tutto, rapporto, operatore, quoziente e misura, ma spesso vengono introdotte solo come divisione di un'unità concreta in parti uguali. L'approccio comune all'insegnamento nella scuola primaria, in vari Paesi, consiste nel "dividere un'unità concreta in parti uguali", poiché è intuitivo e facilmente replicabile nella vita quotidiana (Robotti, 2016). Questo metodo utilizza un "oggetto concreto di riferimento" che deve essere familiare, motivante, rassicurante e visibilmente unitario, senza necessitare ulteriori spiegazioni (Fandiño Pinilla, 2007). Tuttavia, la ricerca di didattica della matematica hanno dimostrato che questo modello può rappresentare un ostacolo e portare a misconcezioni, poiché non affronta adeguatamente la complessità concettuale e cognitiva di diversi significati di frazioni (Kieren 1980; 1988; 1992). Segue il paragrafo 2.5 e 2.6 che presentano rispettivamente nel dettaglio le attività circoscrivendo traguardi, obiettivi, spazi e tempi e un'analisi a priori. Gli artefatti che ho messo a disposizione degli studenti hanno ricoperto un ruolo fondamentale per la costruzione delle conoscenze matematiche. Osservando il profilo di apprendimento degli studenti, sono stati creati gruppi omogenei per stile e percorso di apprendimento, assicurandosi che tutti i membri potessero contribuire equamente e partecipare attivamente. L'alternanza tra lavoro di gruppo e individuale ha favorito la differenziazione degli output. Il lavoro di gruppo, essenziale nella teoria dell'oggettivazione, ha trasformato la percezione degli studenti, portando dalla conoscenza culturale alla consapevolezza personale. Le attività delle

postazioni di lavoro si sono concentrate sulle frazioni. Al termine di questo paragrafo viene fornita un'analisi a priori delle attività facendo emergere i punti di forza, le possibili difficoltà che possono riscontrare gli studenti e le strategie di risoluzione del problema.

Nello specifico l'inclusione scolastica viene vista come un processo che promuove partecipazione e apprendimento di ciascuno e ciascuna (Ainscow, 2020; UNESCO, 2005; Demo, 2016). Questi sono infatti gli indicatori che sono stati scelti per l'interpretazione dei dati presentata nel capitolo 3.

Quest'ultimo tratta della raccolta e dell'analisi dei dati emersi: il primo paragrafo (3.1) motiva i criteri di scelta per l'analisi dei dati: l'apprendimento matematico e il livello di partecipazione alle attività e alla comunità classe; rappresentano due aspetti fondamentali per poter parlare di inclusione. Il paragrafo seguente (3.2) riporta una trattazione basata sull'interpretazione critica dei dati emersi sulla base delle due categorie scelte per valutare l'efficacia della proposta inclusiva, apprendimento e partecipazione.

Mi ritengo soddisfatta dei risultati emersi, tutti gli studenti hanno partecipato attivamente apportando il loro contributo costruttivo sia nella fase di gruppo che in quella individuale. Anche i bambini più timidi, come T., E., M. e B., che durante l'osservazione preliminare risultavano spesso passivi alla lezione e poco motivati, hanno collaborato attivamente con il gruppo elaborando strategie e mostrandosi interessati al processo di risoluzione dell'attività. Tre di loro, T., E. hanno volontariamente scelto di intervenire anche nella discussione con tutti i restanti gruppi facendo i portavoce del proprio gruppo dimostrandosi sicuri e tranquilli nel condividere i loro ragionamenti matematici.

Concludo dicendo che questo lavoro di ricerca nutre la speranza di avvicinare sempre più studenti verso il piacere per la matematica, partendo dalle necessità di alunni

che faranno parte di classi sempre più eterogenee e promuovendo auspicabilmente il loro sviluppo continuo e la loro conoscenza.

## Bibliografia

Agrillo, F., Zappalà, E., & Aiello, P. (2020). Il Group-based Early Start Denver Model nel contesto educativo italiano: Uno studio di caso. In Sezione SIPeS (Eds.), *Ricerca, scenari, emergenze sull'inclusione*. Tomo 2. *Atti del Convegno Internazionale SIRD* (pp. 19-26). Pensa Multimedia Editore.

Ainscow, M., & Sandill A. (2010). Developing inclusive education systems: The role of organisational cultures and leadership. *International Journal of Inclusive Education*, 14 (4), 401-416.

Ainscow, M. (2020). Inclusion and equity in education: making sense of global challenges. *Prospects*, 49, 123-134.

Algraigray, H., & Boyle, C. (2017). The SEN Label and its Effect on Special Education. *Educational and Child Psychology*, 34(4), 1-20.

Armstrong, D., Armstrong, A.C., & Spandagou, I. (2011). Inclusion: By choice or by chance?, *International Journal of Inclusive Education*, 15 (1), 29-39.

Asenova, M., D'Amore, B., Pinilla, M. I. F., Iori, M., & Santi, G. R. P. (2020). *La teoria dell'oggettivazione e la teoria delle situazioni didattiche: Un esempio di confronto tra teorie in didattica della matematica. La matematica e la sua didattica*, 28(1), 7-61.

Atweh, B., Mellony, G., Secada, W., & Valero, P. (2011). *Mapping Equity and Quality in Mathematics Education*. Berlino: Springer.

Barton, L. (2006). *Overcoming disability barriers: 18 years of disability and society*. Routledge.

Bellacicco R. e Dell'Anna, S. (2019), Trend e gap nella ricerca sull'inclusione scolastica in Italia: *una Mapping*, «*Le Società per la società: ricerca, scenari, emergenze*», Atti del Convegno Internazionale SIRD, pp. 45-53.

Bellacicco, R., Dell'Anna, S., & Marsili, F. (2022). School inclusion in Italy. A Mapping Review of empirical research. *L'integrazione scolastica e sociale*.

Black, P., & Wiliam, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. Educational Assessment. *Evaluation and Accountability (formerly: Journal of Personnel Evaluation in Education)*, 21(1), 5-31.

Bohicchio F. (a cura di). *L'agire inclusivo nella scuola. Logiche, metodologie e tecnologie per insegnanti ed educatori*, Libellula, Tricase (Le), 2017.

Bohl, T., & Kucharz, D. (2010). Offener Unterricht heute: konzeptionelle und didaktische Weiterentwicklung. Beltz.

Booth, T., & Ainscow, M. (2014). *Il Nuovo Index per l'inclusione*. Carrocci.

Budginaitė I., Siarova H., Sternadel D., Mackonytė G. e Spurga S. (2016), *Policies and practices for more equality and inclusion in and through education: Evidence and policy guidance from European research projects funded under FP6 and FP7. NESET II report*, Luxembourg, Publications Office of the European Union.

Campulucci L., Maori D., Fandiño Pinilla M.I., Sbaragli S. (2006). *Cambi di convinzione sulla pratica didattica concernente le frazioni. La matematica e la sua didattica*. 3, 353-400.

Ciambrone, R. (2017, novembre 4). Evoluzione dell'inclusione scolastica in Italia e in Europa a 40 anni dalla legge 517. Problemi e prospettive. *Monografia*, 16(4), 390-402.

D'Alessio, S. (2013). Inclusive education in Italy. *Life Span and Disability*, 16(1), 95-120.

D'Amore B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora. [Edizione in lingua spagnola, 2006: Bogotá: Magisterio; edizione in lingua portoghese, 2006: in corso di stampa].

D'Amore, B. (2001). Concettualizzazione, registri di rappresentazioni semiotiche e noetica: interazioni costruttivistiche nell'apprendimento. *La matematica e la sua didattica*, 2, 150-173.

D'Amore B. (2003). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della didattica della matematica*. Bologna: Pitagora. [Edizione in lingua spagnola, 2005: México DF: Reverté-Cinvestav; edizione in lingua portoghese, 2005: Sao Paolo: Escrituras].

D'Amore B., Sbaragli S. (2005). Analisi semantica e didattica dell'idea di "misconcezione". *La matematica e la sua didattica*. 2, 139-163.

D'Amore B. (2006). *Basi epistemologiche della Didattica della Matematica*.

D'Amore B. (editor) (2006). *Matematica: l'emergere della didattica nella formazione*. Rassegna. XIV, 29, 8-14.

de Anna L. (2014), *Pedagogia speciale: Integrazione e inclusione*, Roma, Carocci.

Demo, H. (2015). *Didattica delle differenze. Proposte metodologiche per una classe inclusiva*. Trento: Erickson.

Demo, H. (2016) *Didattica aperta e inclusione*. Trento, Erickson.

Demo, H., Garzetti, M., Santi, G., & Tarini, G. (2021). Learning mathematics in an inclusive and open environment: An interdisciplinary approach. *Education Sciences*, 11(5), 1-22.

Dunn, R., & Dunn, K. (1993). *Teaching secondary students through their individual learning styles: Practical approaches for grades 7-12*. Allyn & Bacon.

Ernest, P. (2012). What is our first philosophy in mathematics education?. *For the learning of mathematics*, 32(3), 8-14.

Eurybase- Banca Dati sui Sistemi Educativi Europei(2009/10) – Rete Eurydice di informazione sull'istruzione in Europa.

Fandiño Pinilla, M. I., & Pedagogica–Locarno, A. A. S. (2005). *Le frazioni: aspetti concettuali e didattici*. Pitagora.

Fandiño Pinilla M.I. (2007), *Fractions. Conceptual and didactic aspects*, «Acta Didactica Universitatis Comenianae», vol. 7, pp. 23-45.

Fandiño Pinilla M.I (2011) *Curricolo e valutazione in matematica*.

Frabboni F. (2007), *Manuale di didattica generale*, Roma-Bari, Laterza.

Gardner, H. (1999). *Intelligence Reframed: Multiple Intelligences for the 21st Century*. Basic Books.

Garzetti, M. (2023) *Caratterizzare l'inclusione nella classe di matematica: progettazione e valutazione di interventi didattici inclusivi* (Doctoral dissertation, Free University of Bozen-Bolzano).

Ianes, D. (2005). *Bisogni educativi speciali e inclusione: valutare le reali necessità e attivare tutte le risorse*. Edizioni Erickson.

Ianes, D. (2006), *La speciale normalità*. Erickson.

Ianes, D., & Cramerotti, S. (2009). *Il piano educativo individualizzato. Progetto di vita* (Vol. 1). Edizioni Erickson.

Ianes, D., Demo, H., & Zambotti, F. (2014). Integration in Italian schools: teachers' perceptions regarding day-to-day practice and its effectiveness. *International Journal of Inclusive Education*, 18(6), 626–653.

Ianes, D., Demo, H., & Dell'Anna, S. (2020). Inclusive education in Italy: Historical steps, positive developments, and challenges. *Prospects*, 49(3), 249-263.

Jürgens, E. (2009). *Die "neue" Reformpädagogik und die Bewegung Offener Unterricht. Theorie, Praxis und Forschungslage*. Verlag.

Kieren T.E. (1980), *The rational number construct, its elements and mechanisms*. In Id. (a cura di), *Recent research on number learning*, Columbus, OH, ERIC/ SMEAC, pp. 125-150.

Kieren T.E. (1988), *Personal knowledge of rational numbers. Its intuitive and formal development*. In J. Hiebert e M. Behr (a cura di), *Number concepts and operations in the middle grades*, Reston, VA, National Council of Teacher Mathematics-Lawrence Erlbaum Ass., pp. 162-181.

Kieren T.E. (1992), *Rational and fractional numbers as mathematical and personal knowledge. Implications for curriculum and instruction*. In R. Leinhardt, R. Putnam e R.A. Hatrup (a cura di), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching*, Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum, pp. 323-371.

Krieger C.G. (1994), *Mut zur Freiarbeit*, Baltmannsweiler, Schneider Verlag Hohengehren.

Mariani, L. (2015). *Differenziare gli apprendimenti*. Lulu Press.

Medeghini R., D'Alessio S., Marra A., Vadalà G. & Valtellina E. (2013). *Disability Studies*. Erickson.

Medeghini, R., & Fornasa, W. (Eds.). (2011). *L'educazione inclusiva. Culture e pratiche nei contesti educativi e scolastici: una prospettiva psicopedagogica: Culture e pratiche nei contesti educativi e scolastici: una prospettiva psicopedagogica*. FrancoAngeli.

MIUR (2009). Linee guida per l'integrazione scolastica degli alunni con disabilità, [www.istruzione.it](http://www.istruzione.it).

MIUR (2012) *Indicazioni Nazionali per il Curricolo Della Scuola Dell'Infanzia e del Primo Ciclo d'Istruzione*; MIUR: Le Monnier Firenze, Italia.

MIUR (2015) *L'integrazione scolastica degli alunni con disabilità a.s. 2014/2015*

MIUR (2018). *Indicazioni Nazionali e Nuovi Scenari*. DG Ordinamenti.

Morganti A., Bocci F. (2017). *Didattica inclusiva nella scuola primaria*, Giunti, Milano.

Niggli A. (2000), *Lernarrangements erfolgreich planen*, Aarau, Sauerländer

Pavone M. (2014), *L'inclusione educativa*, Milano, Mondadori.

Pennazio, V. (2017). *Formarsi a una cultura inclusiva. Un'indagine dei bisogni formativi degli insegnanti nel corso di specializzazione per le attività di sostegno*. Milano: Franco Angeli.

Peschel, F. (2006). *Offener Unterricht. Idee, Realität, Perspektive und ein praxiserprobtes Konzept zur Diskussion*. Schneider Verlag Hohengehren.

Pollo, M. (2004). *Manuale di pedagogia sociale* (Vol. 8). FrancoAngeli.

Radford, L. (2021). *The theory of objectification: A Vygotskian perspective on knowing and becoming in mathematics teaching and learning*. Brill.

Radford, L. (2020). ¿Cómo sería una actividad de enseñanza-aprendizaje que busca ser emancipadora?. *RECME-Revista Colombiana de Matemática Educativa*, 5(2), 15-31.

Radford, L. (2020a). Le concept de travail conjoint dans la théorie de l'objectivation. *Cahier du Laboratoire de Didactique André Revuz, Paris: IREM de Paris*.

Radford, L. (2020b). Play and the production of subjectivities in preschool. In *Mathematics Education in the Early Years* (pp. 43-60). Springer.

Radford, L. (2008). *The ethics of being and knowing: Towards a cultural theory of learning. Semiotics in mathematics education: Epistemology, history, classroom, and culture*, 215-234.

Radford, L., Demers, S., Guzmán, J., & Cerulli, M. (2003). Calculators, graphs, gestures, and the production meaning. In P. Pateman, B. Dougherty, & J. Zilliox (Eds.), *Proceeding of the 27th conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education (PME27-PMENA25)* (Vol. 4, pp. 55–62). University of Hawaii.

Radford, L., & Sabena, C. (2015). The question of method in a Vygotskian semiotic approach. In *Approaches to qualitative research in mathematics education* (pp. 157-182). Springer.

Robotti, E. (2016, aprile). Frazioni sul filo. Proposte e strategie per la scuola primaria. *Difficoltà di Apprendimento e Didattica Inclusiva*, 3(4), 449-467.

Robotti E, Censi A, Segor I, Peraillon L. (2020) Frazioni sul filo. *Strumenti e strategie per la scuola primaria*. Trento, Erickson.

Sousa, D. A., & Tomlinson, C. A. (2011). *Differentiation and the brain: How neuroscience supports the learner-friendly classroom*. Solution Tree Press.

Special Needs Education Country Data (European Agency for Development in Special Needs Education) – 2008.

Special Needs Education Country Data (European Agency for Development in Special Needs Education) – 2012.

Stella G., Grandi, L., (2012). *Come leggere la dislessia e I DSA*. Giunti scuola.

Sternberg, R. J. (1985). *Beyond IQ: A triarchic theory of human intelligence*. New York: Cambridge University Press.

Terzi, L. (2005). Beyond the dilemma of difference: The capability approach to disability and special educational needs. *Journal of philosophy of education*, 39(3), 443-459.

Tomlinson, C. A. (2014). *The differentiated classroom: Responding to the needs of all learners*. Ascd.

Tomlinson, C. A. *La classe differenziata: rispondere alle esigenze di tutti gli studenti*; ASCD: Alexandria, Virginia, Stati Uniti, 1999.

Tomlinson, C. A., & Imbeau, M.B. (2012). *Condurre e gestire una classe eterogenea*. LAS.

Tomlinson, C. A., & McTighe, J. (2006). *Integrating differentiated instruction & understanding by design: Connecting content and kids*. ASCD.

Trincherò, R. (2017), *Costruire e certificare competenze nel primo ciclo*, Fabbri editori, Milano.

UNESCO (2005). *Guidelines for inclusion: ensuring access to education for all*, UNESCO, Paris.

UNESCO (2017), *A Guide for Ensuring Inclusion and Equity in Education*, Paris, UNESCO/IBE.

Unione Europea (2006). *Raccomandazione del Parlamento Europeo e del Consiglio del 18 dicembre 2006 relativa a competenze chiave per l'apprendimento permanente (2006/962/CE)*. Gazzetta ufficiale dell'Unione europea, 30(2006), 10-18.

Vago, V. (2014). *Studio prospettico sugli effetti della lettura degli IN-Book sulla produzione lessicale di bambini in età prescolare*. Unpublished thesis. University of Milan.

Valero, P. (2004). Postmodernism as an attitude of critique to dominant mathematics education research. In P. Walshaw (Ed.), *Mathematics education within the postmodern* (pp. 35-54). Information Age Publishing.

Van Mieghem, Aster, et al. "An analysis of research on inclusive education: a systematic search and meta review." *International Journal of Inclusive Education* 24.6 (2020): 675-689.

Vaupel D. (1996), *Das Wochenplanbuch für die Sekundarstufe: Schritte zum selbstständigen Lernen*, Weinheim und Basel, Beltz.

Vygotskij, L. (1986). *Thought and Language (revised and edited by Alex Kozulin)*. Mit Press.

Wagner S. (1981). *Conservation of equation and function under transformations of variable*. Journal for research in mathematics education. 12, 107-118.

Wallrabenstein W. (1991), *Offene Schule – offener Unterricht*, Reinbek bei Hamburg, Rowohlt.

Zan R. (2002). *Verso una teoria per le difficoltà in matematica. Contributo al dibattito sulla formazione del ricercatore in didattica*. Materiale del Seminario Nazionale 2002. <http://www.dm.unito.it/semdidattica/index.html>.

## Ringraziamenti

Desidero ringraziare in primis la Professoressa Marzia Garzetti, nonché mia relatrice. Il suo supporto e la sua disponibilità sono stati fondamentali per la realizzazione di questo lavoro di tesi. Grazie alla sua competenza e collaborazione, ho potuto affrontare e superare le sfide del percorso di ricerca, sviluppando una comprensione più profonda e articolata dell'argomento trattato.

Un ringraziamento speciale va alle mie Amiche: quelle storiche con le quali sono cresciuta e ho condiviso tanti momenti importanti, ma anche quelle arrivate lungo il percorso della mia vita. Con la loro amicizia, il loro sostegno e il loro inestimabile affetto hanno reso questi anni universitari più leggeri e gioiosi. Grazie per il tempo passato insieme, fonte di grande ricchezza per la mia sanità mentale che mi ha permesso di distrarmi e svagarmi, alleviando le ansie e le preoccupazioni con momenti di allegria e spensieratezza.

Ringrazio in particolare due delle mie amiche storiche, Martina e Rebecca. La fortuna di aver condiviso con voi oltre che la quotidianità da quando eravamo piccole anche l'intero percorso universitario, la ritengo una grande fortuna e un privilegio raro. Grazie per essere state al mio fianco in ogni momento, dal giorno zero... anzi direi dal giorno -1 per preparare quel fatidico test di ingresso che ci ha permesso oggi di essere qui, ormai maestre a tutti gli effetti. La vostra presenza costante e il vostro sostegno hanno reso ogni lavoro di gruppo, ogni ora passata a lezione e ogni giornata trascorsa a ripassare in vista di un esame più piacevole e tranquilla. Grazie Martina per aver reso più dolce la vita all'interno della nostra seconda casa, il Disfor, viziandoci con biscotti o crostate, grazie per i tuoi preziosissimi proverbi (gran parte inventanti sul momento) che risolvevano ogni momento di gossip o ansia. Grazie Rebecca, unica ed inimitabile, colei che riesce a ridurre ai minimi termini anche la più grande questione universitaria

alleggerendomi talvolta le giornate. Grazie per i momenti di svago e le serate spensierate che ti fanno dimenticare tutti i momenti di sconforto che sono state fondamentali per arrivare qui oggi.

Desidero ringraziare Elisa, per me Armi, da sempre al mio fianco; una delle mie più grandi sostenitrici. Grazie per avermi supportata e sopportata, grazie per avermi ascoltata e incoraggiata quando ne avevo bisogno, grazie esserti vissuta questi cinque anni con me un po' come fossi il mio diario di bordo a cui raccontavo tutto. Grazie per il legame profondo che ci lega, per ciò che abbiamo condiviso insieme e per essere la socia migliore del mondo di concerti che potessi desiderare. I viaggi in macchina a cantare a squarciagola Ultimo e i concerti in giro per l'Italia per cantare io te e lui (perché il resto delle persone non si avvicina minimamente alle nostre performance), sono stati la miglior spinta motivazionale per affrontare e superare i pomeriggi di studio e i momenti di crisi. Insomma grazie Armi, ora ai prossimi concerti verrò in veste da maestra e continueremo a dare spettacolo insieme.

Un gigantesco ringraziamento va alla mia Famiglia, con la F maiuscola, a mia mamma, mio papà, mio fratello, a Aida ed Ettore, sempre al mio fianco in ogni situazione. Coloro che credono in me più di quanto lo faccia io. Grazie per avermi ascoltata e sostenuta in questi cinque lunghi anni standomi accanto, quasi in modo impercettibile, vivendo a pieno con me gioie e dispiaceri.

Siete i miei più grandi sostenitori, sempre pronti ad esultare con me per ogni vittoria, anche la più piccola, e a consolarmi nei momenti di sconforto insegnandomi che anche dai momenti più negativi qualcosa di positivo si ricava sempre, basta saperlo guardare dalla giusta prospettiva.

Ringrazio i miei zii Paolo e Fernanda e mia nonna Franca per il loro sostegno incondizionato durante tutto il mio percorso di studi. La vostra presenza discreta ma

costante prima di ogni esame è stata per me una fonte di incoraggiamento e serenità. Grazie di cuore per aver creduto in me e per essere stati un punto di riferimento fondamentale in questo importante cammino.

Grazie a mio zio Marco, colui che fin dall'inizio, ancor prima della fine del liceo ha sempre creduto che questa fosse la facoltà giusta per me. Grazie per essere stato disponibile ad accogliere i momenti di sconforto, rassicurandomi ogni volta e aver gioito con me ad ogni vittoria.

Un riconoscimento speciale lo voglio fare al Disfor per avermi donato una delle cose a cui sono più grata a questi cinque anni di università: la fortuna di aver incontrato Alessandra e Susanna, due persone speciali, uniche e di cui non potrei fare a meno oggi. Grazie per i momenti condivisi insieme, grazie per essere state sempre presenti, grazie per essere state un incontro impagabile ed essere oggi un porto sicuro.

Ale Tippi, ti ringrazio per essere semplicemente come sei, per i momenti di terapia al telefono, per le tue multiple personalità che variano dal riuscire a portare la leggerezza in ogni situazione a creare ansie inutili laddove tutto era ancora sereno. Grazie per esserti preoccupata ogni volta che mi vedevi un pochino giù di morale stando a fianco a me, grazie per i momenti di svago indispensabili, grazie per il tuo cuore grande e altruista che ha sempre fatto in modo di aiutare tutti e grazie per rendere straordinariamente intrecciata la vita di ogni weekend facendocela vivere come fosse una serie tv.

Grazie Susanna, ti sono profondamente grata per essere stata la mia spalla in questo percorso. La vita mi ha fatto uno di quei regali impagabili facendomi incontrare te, con tua dolcezza e gentilezza conquisterai il mondo te l'ho sempre detto e sono certa che sarà così.

In questo percorso hai rappresentato per me un nido dove poter condividere i miei momenti di debolezza, quelli più intimi che raramente mostro e mi hai sempre teso la

mano facendo il possibile per fare tornare il sereno in ogni situazione. Sei sempre pronta ad aiutarmi incoraggiandomi a credere in me; grazie per essermi stata accanto in ogni momento, per ogni giornata e serata passata a ripassare, per essere stata il mio Aranzulla della situazione venendo in mio soccorso ogni volta che combinavo un paciugo o non sapevo come risolvere un problema. Con profonda gratitudine ti voglio dire che questo mio traguardo in parte è anche tuo.

Un grazie generale alle mie sorelle/amiche/compagne/future colleghe Winx, la mia famiglia al Disfor, la mia comfort zone preferita, le mie complici in questi cinque anni. Il sostegno reciproco ci ha dato la spinta per superare le sfide di ogni giorno e non vedo l'ora di continuare questo straordinario percorso insieme non da studentesse ma da Maestre.

Desidero ringraziare anche una persona che non è qui con noi presente ma è come se lo fosse, mia nonna Fio. Purtroppo non ti sei potuta vivere questo giorno tanto importante insieme a me, ma seppur non più fisicamente, la tua presenza continua a vivere quotidianamente nei miei pensieri e nel mio cuore. Purtroppo la vita non sempre va come vorremmo, ci pone di fronte a sfide a volte difficili da superare e questa è una di quelle. Grazie per avermi insegnato il valore dell'amore incondizionato. Sono certa che da lassù mi starai guardando, spero di averti resa fiera di me.