Università degli Studi di Genova

Dipartimento di Matematica

Corso di studi in

Matematica
Curriculum Generale

Anno accademico 2023/2024

Tesi di Laurea

Anelli Gorenstein e anelli di Stanley-Reisner

Candidato
Francesco Bisio

Relatore
Prof. Matteo Varbaro

Indice

Introduzione

I moduli sono degli oggetti fondamentali dell'algebra commutativa, per lo studio di essi è particolarmente rilevante la costruzione di risoluzioni iniettive e proiettive; tali risoluzioni possono avere lunghezza finita o infinita. Dato un modulo su un anello, ci si può chiedere se esso ammetta una risoluzione iniettiva o proiettiva finita: gli oggetti di indagine di questa tesi sono i cosiddetti anelli Gorenstein, i quali sono caratterizzati dal fatto di ammettere una risoluzione iniettiva finita come moduli su se stessi.

I moduli iniettivi sono piuttosto complicati e, a maggior ragione, scrivere delle risoluzioni iniettive di un modulo non è per nulla facile. Per questo motivo, ci si occupa per prima cosa di fornire un teorema di caratterizzazione per gli anelli Gorenstein, dopodiché si dimostra che tale classe di anelli si va ad inserire tra altre due classi note: gli anelli regolari e Cohen-Macaulay.

Vengono poi introdotti gli anelli di Stanley-Reisner, i quali si ottengono quozientando $K[x_1, \ldots, x_n]$ con un ideale monomiale squarefree. La loro peculiarità sta nel fatto che esiste una corrispondenza biunivoca tra essi e i complessi simpliciali su $[n]$: sfruttando tale bigezione, si riescono a caratterizzare alcune proprietà algebriche (ad esempio la proprietà Gorenstein) di un anello tramite le proprietà topologiche del complesso simpliciale ad esso associato; tutto ciò permette, tra le altre cose, di provare il fatto che l'anello di Stanley-Reisner di una sfera è Gorenstein.

In ultima istanza, si studiano le serie di Hilbert delle K-algebre graduate standard, in particolare il rapporto tra la proprietà Gorenstein e la simmetria e l'unimodalità dell'h-vettore.

Capitolo 1

Conoscenze preliminari

In questo capitolo vengono introdotte le principali nozioni preliminari per la comprensione degli argomenti trattati nei capitoli successivi. I risultati esposti non vengono dimostrati.

1.1 Notazione

- Quando ci si riferisce ad un anello A, si intende, a meno di differenti precisazioni, un anello commutativo unitario. La lettera K indica invece un qualunque campo.
- Dati A e B due oggetti di una categoria, si scrive $A \cong B$ quando i due oggetti sono isomorfi nella suddetta categoria.
- Dati M, N due A-moduli, $M \hookrightarrow N$ indica una mappa iniettiva di A-moduli e $M \twoheadrightarrow N$ una mappa surgettiva di A-moduli.
- Dato A un anello locale, il suo ideale massimale è denotato con $\mathfrak{m}$ e il suo campo residuo con $\Bbbk \coloneqq A/\mathfrak{m}$.
- Dato $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$, $A_{\mathfrak{p}}$ è un anello locale con ideale massimale $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$. Il campo residuo viene denotato con $\Bbbk(\mathfrak{p}) \coloneqq A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$.
- S denota $K[x_1, \ldots, x_n]$, la K-algebra graduata standard su $\mathbb{N}$ o $\mathbb{N}^n$. Il massimale irrilevante si denota con $\mathfrak{m} \coloneqq (x_1, \ldots, x_n)$.
- Dato M un A-modulo, la sua dimensione di Krull viene denotata con $\dim(M)$.

1.2 Alcune proprietà degli A-moduli

In questa sezione vengono enunciate alcune proprietà importanti legate ai moduli.

Definizione 1.2.1. *Sia M un A-modulo e $I \subseteq A$ un ideale, allora si definiscono:*

- *l'annullatore di M*

$$\mathrm{Ann}_A(M) = 0 :_A M := \{a \in A : \forall_{m \in M}(am = 0)\} \subseteq A;$$

- *l'insieme degli ideali primi minimali di I*

$$\mathrm{Min}(I) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) : I \subseteq \mathfrak{p} \ \wedge \ \nexists_{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A)}(I \subseteq \mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p})\} \subseteq \mathrm{Spec}(A),$$

  ponendo, inoltre, $\mathrm{Min}(A) := \mathrm{Min}((0))$;

- *l'insieme dei primi associati a M*

$$\mathrm{Ass}_A(M) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) : \exists_{m \in M \setminus \{0\}}(\mathfrak{p} = 0 :_A m)\} \subseteq \mathrm{Spec}(A).$$

Osservazione 1.2.2. Sia M un A-modulo. Si dimostra che $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ è un primo associato a M se e solo se esiste una mappa iniettiva di A-moduli $A/\mathfrak{p} \hookrightarrow M$.

Proposizione 1.2.3. *Sia A un anello noetheriano e $M \ncong \{0\}$ un A-modulo finitamente generato, allora $0 < |Ass_A(M)| < +\infty$.*

Proposizione 1.2.4. *Sia A un anello noetheriano, M un A-modulo finitamente generato e $I := \mathrm{Ann}_A(M)$. Allora $\mathrm{Min}(I) \subseteq \mathrm{Ass}_A(M)$.*

In particolare, se $M = A$, si ha che $I = \mathrm{Ann}_A(A) = (0)$ e perciò $\mathrm{Min}(A) = \mathrm{Min}((0)) \subseteq \mathrm{Ass}_A(A)$.

Proposizione 1.2.5. *Sia M un A-modulo finitamente generato e $S \subseteq A$ un sistema moltiplicativo. Allora $M_S \cong \{0\}$ se e solo se $S \cap \mathrm{Ann}_A(M) \neq \emptyset$.*

Proposizione 1.2.6. *Sia A noetheriano e M un A-modulo finitamente generato. Allora è possibile trovare una serie di decomposizione (SD)*

$$\{0\} \cong M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_r \cong M$$

con la condizione che, per ogni $i \in \{1, \ldots, r\}$, esista $\mathfrak{p}_i \in \mathrm{Spec}(A)$ tale che $M_i/M_{i-1} \cong A/\mathfrak{p}_i$; la serie di decomposizione, in questo caso, ha lunghezza r. Vale inoltre che $\mathrm{Ass}_A(M) \subseteq \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r\}$ e che $\mathrm{Min}(\mathrm{Ann}_A(M)) = \min(\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r\})$, dove gli elementi minimali sono presi rispetto alla relazione d'ordine " $\subseteq$ " sugli ideali.

Definizione 1.2.7. *Sia A noetheriano, M un A-modulo finitamente generato e*

$$\{0\} \cong M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_r \cong M$$

una sua SD. La serie di decomposizione si dice a quozienti semplici (SDS) se, per ogni $i \in \{1, \ldots, r\}$, esiste $\mathfrak{m}_i \in \mathrm{Specm}(A)$ tale che $M_i/M_{i-1} \cong A/\mathfrak{m}_i$.

Proposizione 1.2.8. *Sia A noetheriano e M un A-modulo finitamente generato che ammetta una SDS, allora tutte le SDS di A hanno la stessa lunghezza*

Definizione 1.2.9. *Sia A noetheriano e M un A-modulo finitamente generato. Si definisce la lunghezza di M come A-modulo:*

$$l_A(M) := \begin{cases} t & \text{se } M \text{ ammette una SDS di lunghezza } t \\ +\infty & \text{se } M \text{ non ammette una SDS} \end{cases}.$$

Teorema 1.2.10. *Sia M un A-modulo finitamente generato. Allora sono fatti equivalenti:*

(i) $l_A(M) < +\infty$

(ii) M è un A-modulo noetheriano e artiniano

Proposizione 1.2.11. *Sia*

$$0 \to M_n \to \cdots \to M_1 \to M_0 \to 0$$

una successione esatta di A-moduli, i quali hanno tutti lunghezza finita. Allora

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i l_A(M_i) = 0.$$

Lemma 1.2.12 (di Nakayama)**.** *Sia $(A, \mathfrak{m})$ un anello locale e M un A-modulo finitamente generato tale che $M = \mathfrak{m}M$, allora $M \cong \{0\}$.*

1.3 Complessi di A-moduli

In questa sezione verranno introdotte le principali definizioni riguardanti i complessi di A-moduli.
Siano M e N A-moduli e $\alpha : M \to N$ un omomorfismo (o più brevemente mappa) di A-moduli. Si ricordano i seguenti A-moduli:

- il nucleo di α, $\mathrm{Ker}(\alpha) := \{m \in M : \alpha(m) = 0\}$;

- l'immagine di α, $\text{Im}(\alpha) \coloneqq \{n \in N : \exists_{m\in M}(\alpha(m) = n)\}$;
- il conucleo di α, $\text{Coker}(\alpha) \coloneqq N/\text{Im}(\alpha)$.

Definizione 1.3.1. *Un complesso di catene $C_\bullet$ di A-moduli è formato da:*

- *una famiglia di A-moduli $\{C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$;*
- *una famiglia di mappe di A-moduli $\{d_n : C_n \to C_{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tale che*

  $$d_{n-1} \circ d_n : C_n \to C_{n-2}$$

  sia la mappa nulla per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

Per ogni $n \in \mathbb{Z}$ si considerano l'A-modulo degli n-cicli $Z_n(C_\bullet) \coloneqq \text{Ker}(d_n)$ e quello degli n-bordi $B_n(C_\bullet) \coloneqq \text{Im}(d_{n+1})$.
Poiché $C_\bullet$ è un complesso di catene, si ha che $B_n(C_\bullet) \subseteq Z_n(C_\bullet) \subseteq C_n$ e si definisce l'A-modulo

$$H_n(C_\bullet) \coloneqq Z_n(C_\bullet)/B_n(C_\bullet),$$

detto n-esimo modulo di omologia di $C_\bullet$.

Se è più comodo avere gli indici crescenti, si possono dare le seguenti definizioni.

Definizione 1.3.2. *Un complesso di cocatene $C^\bullet$ di A-moduli è formato da:*

- *una famiglia di A-moduli $\{C^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$;*
- *una famiglia di mappe di A-moduli $\{d^n : C^n \to C^{n+1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tale che*

  $$d^{n+1} \circ d^n : C^n \to C^{n+2}$$

  sia la mappa nulla per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

Per ogni $n \in \mathbb{Z}$ si considerano l'A-modulo degli n-cocicli $Z^n(C^\bullet) \coloneqq \text{Ker}(d^n)$ e quello degli n-cobordi $B^n(C^\bullet) \coloneqq \text{Im}(d^{n-1})$.
Poiché $C^\bullet$ è un complesso di cocatene, si ha che $B^n(C^\bullet) \subseteq Z^n(C^\bullet) \subseteq C^n$ e si definisce l'A-modulo

$$H^n(C^\bullet) \coloneqq Z^n(C^\bullet)/B^n(C^\bullet),$$

detto n-esimo modulo di coomologia di $C^\bullet$.

Le definizioni successive che si daranno per i complessi di catene valgono analogamente per complessi di cocatene, ponendo $C^n \coloneqq C_{-n}$ e $d^n \coloneqq d_{-n}$.

Definizione 1.3.3. *Un morfismo fra due complessi (di catene) di A-moduli*

$$f : X_\bullet \to Y_\bullet$$

è una collezione di mappe di A-moduli $\{f_n : X_n \to Y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *tale che il seguente diagramma sia commutativo*

$$\begin{tikzcd} X_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "d_n^X"] & Y_n \arrow[d, "d_n^Y"] \\ X_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"] & Y_{n-1} \end{tikzcd}$$

ovvero, per ogni $n \in \mathbb{Z}$, $f_{n-1} \circ d_n^X = d_n^Y \circ f_n$.

La composizione di due morfismi di complessi (di A-moduli) $f : X_\bullet \to Y_\bullet$ *e* $g : Y_\bullet \to Z_\bullet$ *è*

$$g \circ f : X_\bullet \to Z_\bullet,$$

dove $(g \circ f)_n = g_n \circ f_n$ *e le condizioni di commutatività sono verificate.*

Un morfismo di complessi $f : X_\bullet \to Y_\bullet$ *si dice isomorfismo se* f_n *è un isomorfismo per ogni* $n \in \mathbb{Z}$.

Definizione 1.3.4. *Un complesso di A-moduli* $X_\bullet$ *si dice esatto se, per ogni* $n \in \mathbb{Z}$,

$$H_n(X_\bullet) \cong \{0\}.$$

In tal caso usa dire anche che

$$\cdots \longrightarrow X_{n+1} \longrightarrow X_n \longrightarrow X_{n-1} \longrightarrow \dots$$

è una successione (o sequenza) esatta di A-moduli.

Una successione esatta di A-moduli del tipo

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\beta} M \xrightarrow{\alpha} N \longrightarrow 0$$

si dice successione esatta corta.

Una successione di complessi

$$0 \longrightarrow X_\bullet \xrightarrow{f} Y_\bullet \xrightarrow{g} Z_\bullet \longrightarrow 0$$

si dice esatta corta se, per ogni $n \in \mathbb{Z}$, *la successione*

$$0 \longrightarrow X_n \xrightarrow{f_n} Y_n \xrightarrow{g_n} Z_n \longrightarrow 0$$

è esatta corta.

Osservazione 1.3.5. Dato $f : X_\bullet \to Y_\bullet$ morfismo di complessi, esso induce, per ogni $n \in \mathbb{Z}$, un morfismo di A-moduli

$$H_n(f) : H_n(X_\bullet) \to H_n(Y_\bullet)$$
$$\overline{x} \mapsto \overline{f_n(x)} \ .$$

1.4 Funtori di A-moduli

Definizione 1.4.1. *Un funtore covariante F nella categoria degli A-moduli è un'assegnazione:*

- $M \mapsto F(M)$, *per ogni A-modulo M;*
- $(M \xrightarrow{\alpha} N) \mapsto (F(M) \xrightarrow{F(\alpha)} F(N))$, *per ogni mappa di A-moduli α,*

tale che:

- $F(1_M) = 1_{F(M)}$, *per ogni A-modulo M;*
- $F(\beta \circ \alpha) = F(\beta) \circ F(\alpha)$, *per ogni coppia di mappe di A-moduli che f, g che si possano comporre*

Un funtore controvariante F nella categoria degli A-moduli è un'assegnazione:

- $M \mapsto F(M)$, *per ogni A-modulo M;*
- $(M \xrightarrow{\alpha} N) \mapsto (F(N) \xrightarrow{F(\alpha)} F(M)$, *per ogni mappa di A-moduli α,*

tale che:

- $F(1_M) = 1_{F(M)}$, *per ogni A-modulo M;*
- $F(\beta \circ \alpha) = F(\alpha) \circ F(\beta)$, *per ogni coppia di mappe di A-moduli che f, g che si possano comporre*

Le definizioni che verranno date per funtori covarianti valgono anche per funtori controvarianti con le opportune modifiche.

Definizione 1.4.2. *Un funtore covariante F si dice additivo (rispettivamente A-lineare) se, dati M, N due A-moduli,*

$$\operatorname{Hom}_A(M, N) \to \operatorname{Hom}_A(F(M), F(N))$$

è un omomorfismo di gruppi (rispettivamente di A-moduli).

Osservazione 1.4.3.

- I funtori A-lineari sono in particolare additivi;
- un funtore additivo F manda un complesso di A-moduli $C_\bullet$ in un complesso di A-moduli $F(C_\bullet)$.

Definizione 1.4.4. *Sia F un funtore covariante additivo. Se per ogni sequenza esatta corta di A-moduli*

$$0 \to K \to M \to N \to 0$$

vale che ...

- $0 \to F(K) \to F(M) \to F(N) \to 0$ *è esatta, F si dice esatto.*
- $0 \to F(K) \to F(M) \to F(N)$ *è esatta, F si dice esatto a sinistra.*
- $F(K) \to F(M) \to F(N) \to 0$ *è esatta, F si dice esatto a destra.*

Esempio 1.4.5. Per ogni A-modulo M :

- il funtore $\mathrm{Hom}_A(M, -)$ è covariante esatto a sinistra;
- il funtore $\mathrm{Hom}_A(-, M)$ è controvariante esatto a sinistra;
- i funtori $M \otimes_A -$ e $- \otimes_A M$ sono covarianti esatti a destra.

Ora si enuncia un risultato utile sul rapporto tra i funtori Hom e $\otimes$.

Proposizione 1.4.6. *Siano B un anello e un A-modulo, M, P, N dei B-moduli (e quindi anche A-moduli). Allora vale:*

$$\mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_B(P, N)) \cong \mathrm{Hom}_B(M \otimes_A P, N).$$

1.5 Risoluzioni di A-moduli

Definizione 1.5.1. *Un A-modulo P si dice proiettivo se, per ogni mappa surgettiva di A-moduli $f : M \twoheadrightarrow N$ e per ogni mappa di A-moduli $g : P \to N$, esiste una mappa $h : P \to M$ tale che $g = f \circ h$.*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted, "\exists h"'] \arrow[d, "\forall g"] \\ M \arrow[r, two heads, "\forall f"'] & N \end{tikzcd}$$

Un A-modulo E si dice iniettivo se, per ogni mappa iniettiva di A-moduli $f : N \hookrightarrow M$ e per ogni mappa di A-moduli $g : N \to E$, esiste una mappa di A-moduli $h : M \to E$ tale che $g = h \circ f$.

$$\begin{tikzcd} & E \\ M \arrow[ur, dotted, "\exists h"] & N \arrow[l, hook', "\forall f"] \arrow[u, "\forall g"'] \end{tikzcd}$$

Un A-modulo X si dice piatto se il funtore $- \otimes_A X$ (o equivalentemente il funtore $X \otimes_A -$) è esatto.

Lemma 1.5.2. *Sia M un A-modulo, allora:*

- *il funtore* $\mathrm{Hom}_A(M, -)$ *è esatto se e solo se M è proiettivo;*
- *il funtore* $\mathrm{Hom}_A(-, M)$ *è esatto se e solo se M è iniettivo.*

Esempio 1.5.3. Sia $S \subset A$ un sistema moltiplicativo allora A_S è un A-modulo piatto

Proposizione 1.5.4. *Un A-modulo P è proiettivo se e solo se è un addendo diretto di A-modulo libero, ovvero se esistono un A-modulo Q e $n \in \mathbb{N}$ tale che $P \oplus Q \cong A^n$. In particolare ogni ogni A-modulo libero è anche proiettivo.*

Ci sono dei casi particolari nei quali, per A-moduli finitamente generati, le nozioni di proiettivo e libero coincidono. Non è troppo difficile dimostrare che questo fatto vale se A è un anello locale, mentre è molto più complicato (Teorema di Quillen e Suslin) dimostrare che tale risultato vale per gli anelli di polinomi a coefficienti in un campo.

Osservazione 1.5.5. La categoria degli A-moduli ha abbastanza proiettivi, cioè, dato un A-modulo M, esistono un A-modulo proiettivo P e una mappa surgettiva di A-moduli $f : P \twoheadrightarrow M$.
Dato $\{m_i\}_{i \in I}$ un insieme di generatori di M, basta infatti considerare $P = A^I$ (che è libero, quindi proiettivo) e f la mappa A-lineare definita da $f(e_i) = m_i$.

Definizione 1.5.6. *Dato un A-modulo M, una risoluzione proiettiva di M è un complesso di A-moduli $P_\bullet$ tale che:*

- $P_i = 0$ *per ogni* $i < 0$;
- P_i *è proiettivo per ogni* $i \in \mathbb{N}$;

- *esiste* $f_0 : P_0 \twoheadrightarrow M$ *tale che* $P_\bullet \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0$ *è un complesso esatto.*

Per ogni A-modulo M è possibile costruire una risoluzione libera (quindi proiettiva) di M nel seguente modo:

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & P_2 \arrow[rr, "d_2"] \arrow[dr, two heads, "f_2"'] & & P_1 \arrow[rr, "d_1"] \arrow[dr, two heads, "f_1"'] & & P_0 \arrow[r, two heads, "f_0"] & M \\
& & \mathrm{Ker}(f_1) \arrow[ur, hook, "\iota_0"'] & & \mathrm{Ker}(f_0) \arrow[ur, hook, "\iota_1"'] & &
\end{tikzcd}$$

dove, per ogni i, f_i è la mappa surgettiva costruita nell'Osservazione 1.5.5, ι_i è l'immersione e $d_i \coloneqq \iota_{i-1} \circ f_i$. Si verifica immediatamente che $P_\bullet$ è un complesso esatto.

Teorema 1.5.7 (Criterio di Baer)**.** *Un A-modulo E è iniettivo se e solo se, per ogni ideale $I \subseteq A$, ogni mappa di A-moduli $f : I \to E$ si estende ad una mappa $h : A \to E$.*

$$\begin{tikzcd}
& E \\
A \arrow[ur, dotted, "\exists h"] & I \arrow[l, hook', "\iota"] \arrow[u, "\forall f"']
\end{tikzcd}$$

Proposizione 1.5.8. *La categoria degli A-moduli ha abbastanza iniettivi, cioè, dato un A-modulo M, esistono un A-modulo iniettivo E e una mappa iniettiva di A-moduli $f : M \hookrightarrow E$.*

Definizione 1.5.9. *Dato un A-modulo M, una risoluzione iniettiva di M è un complesso di A-moduli $E^\bullet$ tale che:*

- $E^i = 0$ *per ogni* $i < 0$;
- E^i *è iniettivo per ogni* $i \in \mathbb{N}$;
- *esiste* $e : M \hookrightarrow E^0$ *tale che* $0 \longrightarrow M \xrightarrow{e} E^\bullet$ *è un complesso esatto.*

Per ogni A-modulo M è possibile costruire una risoluzione iniettiva di M nel seguente modo:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, hook, "e"] & E^0 \arrow[rr, "d^0"] \arrow[dr, two heads, "\pi^0"'] & & E^1 \arrow[rr, "d^1"] \arrow[dr, two heads, "\pi^1"'] & & E^2 \arrow[r] & \dots \\
& & Coker(e) \arrow[ur, hook, "\iota^1"'] & & Coker(d^0) \arrow[ur, hook, "\iota^2"'] & &
\end{tikzcd}$$

dove, per ogni i, ι^i è la mappa iniettiva data dal Teorema 1.5.8, π^i è la proiezione al quoziente e $d^i := \iota^{i+1} \circ \pi^i$. Si verifica immediatamente che $E^\bullet$ è un complesso esatto.

1.6 Funtori derivati

Sia F un funtore covariante additivo esatto a destra e M un A-modulo. Sia $P_\bullet$ una risoluzione proiettiva di M e si consideri il complesso $F(P_\bullet)$

$$\cdots \longrightarrow F(P_2) \xrightarrow{F(d_2^P)} F(P_1) \xrightarrow{F(d_1^P)} F(P_0) \longrightarrow 0.$$

In generale $F(P_\bullet)$ non è esatto in alcuna posizione omologica; inoltre, dal fatto che F è esatto a destra, segue che

$$H_0(F(P_\bullet)) \cong F(M).$$

Si dimostra inoltre che, se si considera un'altra risoluzione proiettiva $Q_\bullet$ di M, vale per ogni $i \in \mathbb{N}$

$$H_i(F(P_\bullet)) \cong H_i(F(Q_\bullet)).$$

Quest'ultimo fatto permette di definire, per ogni $i \in \mathbb{N}$, l'i-esimo funtore derivato sinistro di F, denotato con L_iF e definito da:

$$L_iF(M) := H_i(F(P_\bullet)).$$

Nella prossima definizione si estende questo ragionamento e si introduce l'analoga nozione di funtore derivato destro.

Definizione 1.6.1. *Sia F un funtore additivo esatto a destra.*

- *Se F è covariante, per ogni A-modulo M si sceglie una risoluzione proiettiva $P_\bullet$ di M e si definisce, per ogni $i \in \mathbb{N}$, l'i-esimo funtore derivato sinistro di F:*
$$L_iF(M) := H_i(F(P_\bullet)).$$
- *Se F è controvariante, per ogni A-modulo M si sceglie una risoluzione iniettiva $E^\bullet$ di M e si definisce, per ogni $i \in \mathbb{N}$, l'i-esimo funtore derivato sinistro di F:*
$$L_iF(M) := H_i(F(E^\bullet)).$$

Sia F un funtore additivo esatto a sinistra.

- *Se F è controvariante, per ogni A-modulo M si sceglie una risoluzione proiettiva $P_\bullet$ di M e si definisce, per ogni $i \in \mathbb{N}$, l'i-esimo funtore derivato destro di F :*
$$R^iF(M) \coloneqq H^i(F(P_\bullet)).$$
- *Se F è covariante, per ogni A-modulo M si sceglie una risoluzione iniettiva $E^\bullet$ di M e si definisce, per ogni $i \in \mathbb{N}$, l'i-esimo funtore derivato destro di F :*
$$R^iF(M) \coloneqq H^i(F(E^\bullet)).$$

Teorema 1.6.2. *Sia $0 \to K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ una successione esatta corta di A-moduli e sia F un funtore covariante esatto a destra. Allora, per ogni $n \in \mathbb{N}^*$, esiste una mappa di A-moduli $L_nF(N) \xrightarrow{\partial_n} L_{n-1}F(K)$ tale che la seguente successione è esatta:*

$$\cdots \to L_nF(N) \xrightarrow{\partial_n} L_{n-1}F(K) \to L_{n-1}F(M) \to L_{n-1}F(N) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots$$
$$\cdots \to L_1F(N) \xrightarrow{\partial_1} L_0F(K) \to L_0F(M) \to L_0F(N) \to 0.$$

Analogamente il teorema vale, con le opportune modifiche, per funtori controvarianti e/o esatti a sinistra.

L'esistenza di tale successione esatta lunga, con l'aggiunta di ulteriori ipotesi, caratterizza i funtori derivati.

Proposizione 1.6.3. *Sia F un funtore di A-moduli covariante esatto a destra e sia una successione di funtori $\{T_iF\}_{i\in\mathbb{N}}$ che soddisfi le seguenti proprietà:*

(i) $T_0F \cong F$;

(ii) per ogni A-modulo proiettivo M e per ogni $i \in \mathbb{N}^*$, si ha che $T_iF(M) \cong \{0\}$;

(iii) data una successione esatta corta di A-moduli
$$0 \to K \to M \to N \to 0,$$
esiste una successione esatta lunga come nel teorema precedente
$$\cdots \to T_iF(N) \xrightarrow{\partial_i} T_{i-1}F(K) \to T_{i-1}F(M) \to T_{i-1}F(N) \xrightarrow{\partial_{i-1}} \dots$$
$$\cdots \to T_1F(N) \xrightarrow{\partial_1} F(K) \to F(M) \to F(N) \to 0.$$

Allora, per ogni $i \in \mathbb{N}$, $T_iF \cong L_iF$ è l'i-esimo funtore derivato sinistro di F.

La proposizione vale, analogamente, se F è controvariante e/o esatto a sinistra con le seguenti modifiche. Se F è esatto a sinistra, T_iF sarà l'i-esimo funtore derivato destro di F. Se F è controvariante esatto a sinistra, la proprietà (ii) deve valere sempre per gli A-moduli proiettivi, mentre negli altri due casi deve valere per gli A-moduli iniettivi.

Teorema 1.6.4. *Siano M, N due A-moduli. Allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$:*

- $(L_n(- \otimes_A M))(N) \cong (L_n(N \otimes_A -))(M) =: \mathrm{Tor}_n^A(M, N)$;
- $(R^n(\mathrm{Hom}_A(M, -)))(N) \cong (R^n(\mathrm{Hom}_A(-, N)))(M) =: \mathrm{Ext}_A^n(M, N)$.

In particolare $\mathrm{Tor}_0^A(M, N) \cong M \otimes_A N$ *e* $\mathrm{Ext}_A^0(M, N) \cong \mathrm{Hom}_A(M, N)$.

Inoltre, per ogni $n \in \mathbb{N}$, vale $\mathrm{Tor}_n^A(M, N) \cong \mathrm{Tor}_n^A(N, M)$.

1.7 Sequenze regolari

Definizione 1.7.1. *Sia A un anello locale noetheriano tale che* $\dim(A) = d$. *Si dimostra che esistono $x_1, \dots, x_d \in \mathfrak{m}$ tali che $\mathfrak{m} = \sqrt{(x_1, \dots, x_d)}$. In tal caso vale che, per ogni $i \in \{1, \dots, d\}$,* $\dim(A/(x_1, \dots, x_i)) = d - i$.

Elementi $x_1, \dots, x_d \in \mathfrak{m}$ con le caratteristiche sopra citate, formano un sistema di parametri per A.

Definizione 1.7.2. *Sia M un A-modulo e $a \in A$. L'elemento a si dice M-regolare se:*

$$\{m \in M : am = 0\} = \{0\}.$$

Una sequenza "$a_1, \dots, a_n$" $\in A$ si dice sequenza M-regolare (o anche solo M-sequenza) se:

- *per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$, a_i è $\frac{M}{(a_1, \dots, a_{i-1})M}$-regolare;*
- $\frac{M}{(a_1, \dots, a_n)M} \ncong \{0\}$.

Esempio 1.7.3. Siano $a_1, \dots, a_r \in S$ dei monomi di grado positivo. Allora "$a_1, \dots, a_r$" è una S-sequenza se e solo se, per ogni $i, j \in \{1, \dots, r\}$ con $i \neq j$, $\mathrm{MCD}(a_i, a_j) = 1$.

Osservazione 1.7.4. In generale non è vero che una permutazione di una M-sequenza è ancora una M-sequenza. Una condizione sufficiente affinché questo fatto valga è che per A e M valga il lemma di Nakayama (ad esempio se A è locale e noetheriano e M è finitamente generato).

Lemma 1.7.5. *Sia A noetheriano, $I \subseteq A$ un ideale e $M \ncong \{0\}$ un A-modulo. Allora I contiene un elemento M-regolare se e solo se* $\operatorname{Hom}_A(A/I, M) \cong \{0\}$.

Lemma 1.7.6. *Sia $I \subseteq A$ un ideale, M un A-modulo e "$a_1, \ldots, a_n$" una M-sequenza contenuta in I. Allora:*

$$\operatorname{Hom}_A\left(A/I, \frac{M}{(a_1, \ldots, a_n)M}\right) \cong \operatorname{Ext}^n_A(A/I, M).$$

Teorema 1.7.7 (di Rees)**.** *Sia A noetheriano, $I \subseteq A$ un ideale e M un A-modulo tale che $M \neq IM$. Allora tutte le M-sequenze massimali contenute in I hanno la stessa lunghezza data da:*

$$\min\{n \in \mathbb{N} : \operatorname{Ext}^n_A(A/I, M) \ncong \{0\}\}.$$

Osservazione 1.7.8. Siano M, N degli A-moduli e $a \in \operatorname{Ann}_A(N)$. Si dimostra che, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$a \cdot \operatorname{Ext}^n_A(N, M) \cong a \cdot \operatorname{Ext}^n_A(M, N) \cong a \cdot \operatorname{Tor}^A_n(N, M) \cong a \cdot \operatorname{Tor}^A_n(M, N) \cong \{0\}.$$

Inoltre, se M, N sono finitamente generati come A-moduli, allora $\operatorname{Ext}^n_A(M, N)$ e $\operatorname{Tor}^A_n(M, N)$ sono finitamente generati come A-moduli.

Definizione 1.7.9. *Sia $(A, \mathfrak{m})$ locale e noetheriano e sia M un A-modulo finitamente generato. Si definisce profondità di M come:*

$$\operatorname{depth}(M) \coloneqq \min\{n \in \mathbb{N} : \operatorname{Ext}^n_A(\Bbbk, M) \ncong \{0\}\}.$$

Proposizione 1.7.10. *Sia A locale noetheriano e M un A-modulo finitamente generato, allora*

$$\operatorname{depth}(M) \leq \dim(M).$$

Definizione 1.7.11. *Sia A locale e noetheriano e sia $M \ncong \{0\}$ un A-modulo finitamente generato. M si dice Cohen-Macaulay (CM) se* $\operatorname{depth}(M) = \dim(M)$.

Proposizione 1.7.12. *Sia M un A-modulo Cohen-Macaulay, allora M è puro, ovvero, per ogni $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_A(M)$, vale che*

$$\dim(A/\mathfrak{p}) = \dim(M).$$

Proposizione 1.7.13. *Sia A locale noetheriano e $M \ncong \{0\}$ un A-modulo finitamente generato. Se "$a_1, \dots, a_n$" è una M-sequenza, allora valgono:*

- $\operatorname{depth}(M/(a_1, \dots, a_n)M) = \operatorname{depth}(M) - n$;
- $\dim(M/(a_1, \dots, a_n)M) = \dim(M) - n$.

Ne segue che M è Cohen-Macaulay se e solo se lo è $M/(a_1, \dots, a_n)M$.

Definizione 1.7.14. *Un anello locale e noetheriano A si dice Cohen-Macaulay se A è un A-modulo Cohen-Macaulay.*

Proposizione 1.7.15. *Se $(A, \mathfrak{m})$ è Cohen-Macaulay e $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$, allora $A_\mathfrak{p}$ è ancora un anello Cohen-Macaulay.*

Quest'ultima proposizione permette di definire in modo consistente gli anelli Cohen-Macaulay anche in ambito non locale, nel seguente modo.

Definizione 1.7.16. *Sia A noetheriano. A si dice Cohen-Macaulay se, per ogni $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$, accade che $A_\mathfrak{p}$ è Cohen-Macaulay. Per la proposizione precedente, è sufficiente verificare tale proprietà per ogni $\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm}(A)$.*

1.8 Il complesso di Koszul

Definizione 1.8.1. *Sia M un A-modulo.*

- *L'algebra tensoriale associata a M è l'anello graduato (non commutativo in generale):*
  $$T(M) := \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} M^{\otimes^i},$$
  dove $M^{\otimes^i} := M \otimes \cdots \otimes M$ (i volte).
- *L'algebra esterna associata a M è l'anello graduato:*
  $$\bigwedge M := T(M)/J,$$
  dove $J = (m \otimes m : m \in M)$. La classe di un elemento $m_1 \otimes \cdots \otimes m_i \in T(M)$ è denotata con $m_1 \wedge \cdots \wedge m_i$.

Osservazione 1.8.2. Sia $F \cong A^n$ un A-modulo libero con base $\{e_1, \dots, e_n\}$ e $k \in \{0, \dots, n\}$, allora $\bigwedge^k F := (\bigwedge F)_k$ ha come base

$$\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} : 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\},$$

dunque $\bigwedge F = \bigoplus_{i=0}^{n} \left(\bigwedge^{i} F \right) \cong \bigoplus_{i=0}^{n} A^{\binom{n}{i}}$.

La struttura moltiplicativa di $\bigwedge F$ è data da:

$$(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}) \wedge (e_{i_{k+1}} \wedge \cdots \wedge e_{i_{k+h}}) =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } \{i_1, \ldots, i_k\} \bigcap \{i_{k+1}, \ldots, i_{k+h}\} \neq \emptyset \\ (-1)^{sgn(\sigma)} e_{i_{\sigma(1)}} \wedge \cdots \wedge e_{i_{\sigma(k+h)}} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove σ è l'unica permutazione di $k+h$ elementi tale che

$$i_{\sigma(1)} < \cdots < i_{\sigma(k+h)}.$$

Definizione 1.8.3. *Un anello A si dice graduato su $\mathbb{Z}$ se*

$$A = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} A_k \quad e \quad \textit{per ogni } h, k \in \mathbb{Z},\ A_h A_k \subseteq A_{h+k}.$$

Se per ogni $k < 0$ vale che $A_k \cong \{0\}$, allora si dice che A è graduato su $\mathbb{N}$. Si osservi che A è una A_0-algebra: se vale che $A = A_0[A_1]$, allora si dice che A è una A_0-algebra graduata standard.

Definizione 1.8.4. *Un'algebra graduata $C = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} C_i$ si dice grado-commutativa se, per ogni $u \in C_i$ e per ogni $v \in C_j$, valgono:*

- *$uv = (-1)^{ij} vu$;*
- *$u^2 = 0$ se i è dispari.*

Un'algebra grado-commutativa si dice DG-algebra se esiste un omomorfismo di gruppi abeliani $\partial : C \to C$ tale che:

1. *per ogni $i \in \mathbb{N}$, $\partial(C_i) \subseteq C_{i-1}$;*
2. *$\partial^2 = 0$;*
3. *per ogni $u \in C_i$ e per ogni $v \in C$, $\partial(uv) = \partial(u)v + (-1)^i u \partial(v)$.*

Osservazione 1.8.5. Sia $C = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} C_i$ una DG-algebra. Poiché, per ogni $i \in \mathbb{N}$, C_i è un C_0-modulo, l'ultima condizione di DG-algebra rende ∂ una mappa di C_0-moduli, che può essere vista come somma diretta delle seguenti mappe di C_0-moduli:

$$\partial = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \partial_i, \text{ con } \partial_i := \partial_{|C_i} : C_i \to C_{i-1}.$$

In virtù di tutto ciò e delle condizioni (i) e (ii) di DG-algebra, si ha il seguente complesso di C_0-moduli

$$\dots \xrightarrow{\partial_{i+2}} C_{i+1} \xrightarrow{\partial_{i+1}} C_i \xrightarrow{\partial_i} C_{i-1} \xrightarrow{\partial_{i-1}} \dots \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0,$$

il quale viene denotato con $C_\bullet$.

Si possono distinguere i seguenti C_0-moduli:

- i cicli di $C_\bullet$, $Z(C_\bullet) \coloneqq \mathrm{Ker}(\partial) = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{Ker}(\partial_i) = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} Z_i(C_\bullet) \subseteq C$;
- i bordi di $C_\bullet$, $B(C_\bullet) \coloneqq \mathrm{Im}(\partial) = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{Im}(\partial_i) = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} B_i(C_\bullet) \subseteq C$;
- l'omologia di $C_\bullet$, $H(C_\bullet) \coloneqq Z(C_\bullet)/B(C_\bullet) = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} H_i(C_\bullet)$.

Definizione 1.8.6. *Siano $a_1, \dots, a_n \in A$. Il complesso di Koszul associato a $a_1, \dots, a_n$ è la DG-algebra:*

$$K(a_1, \dots, a_n; A) \coloneqq \bigwedge A^n, \ \text{con } \partial(e_i) = a_i,$$

dove $\{e_1, \dots, e_n\}$ è una base di A^n come A-modulo.

Osservazione 1.8.7. La mappa ∂ è univocamente determinata dalla sua azione su $K(a_1, \dots, a_n; A)_1$. Infatti quest'ultimo genera $K(a_1, \dots, a_n; A)$ come A-modulo e la proprietà (iii) delle DG-algebre implica che ∂ agisce nel modo seguente: sia $s \in \{1, \dots, n\}$ e $u = e_{k_1} \wedge \dots \wedge e_{k_s} \in K(a_1, \dots, a_n; A)_s$, allora

$$\partial(u) = \sum_{i=1}^{s} a_{k_i} e_{k_1} \wedge \dots \wedge \widehat{e_{k_i}} \wedge \dots \wedge e_{k_s}.$$

Definizione 1.8.8. *Sia M un A-modulo e $a_1, \dots, a_n \in A$. Il complesso di Koszul associato a $a_1, \dots, a_n$ a coefficienti in M è:*

$$K(a_1, \dots, a_n; M) \coloneqq K(a_1, \dots, a_n; A) \otimes_A M.$$

Osservazione 1.8.9. Come A-modulo vale la decomposizione:

$$K(a_1, \dots, a_n; M) = K(a_1, \dots, a_n; A) \otimes_A M \cong \bigoplus_{i=0}^{n} (K(a_1, \dots, a_n; A)_i \otimes_A M) \cong$$

$$\cong \bigoplus_{i=0}^{n} \left(\bigwedge^{i} A^n \otimes_A M \right),$$

$$\text{con } \bigwedge^{i} A^n \otimes_A M \cong A^{\binom{n}{i}} \otimes_A M \cong M^{\binom{n}{i}}.$$

Osservazione 1.8.10. Dato M un A-modulo, si denotano:

- $Z(a_1, \ldots, a_n; M) \coloneqq \mathrm{Ker}(\partial \otimes id_M)$;
- $B(a_1, \ldots, a_n; M) \coloneqq \mathrm{Im}(\partial \otimes id_M)$;
- $H(a_1, \ldots, a_n; M) \coloneqq Z(a_1, \ldots, a_n; M)/B(a_1, \ldots, a_n; M)$.

Essi indicano, rispettivamente, i cicli, i bordi e l'omologia di Koszul associati a $a_1, \ldots, a_n$ a coefficienti in M.

Come già visto in precedenza per una qualsiasi DG-algebra, il complesso di Koszul può essere visto come un complesso di catene di A-moduli, che viene denotato con $\mathbb{K}_\bullet$ (qui si omettono l'A-modulo M e gli elementi $a_1, \ldots, a_n$).

Con questa notazione si ha che l'omologia di Koszul è isomorfa alla somma diretta delle omologie del complesso $\mathbb{K}_\bullet$. Per questo motivo si utilizza la notazione

$$H_i(a_1, \ldots, a_n; M) \coloneqq H(a_1, \ldots, a_n; M)_i.$$

Lemma 1.8.11. *Sia $I = (a_1, \ldots, a_n) \subseteq A$ un ideale e M un A-modulo. Allora*

$$H_0(a_1, \ldots, a_n; M) \cong M/IM \qquad e \qquad H_n(a_1, \ldots, a_n; M) \cong \mathrm{Ann}_M(I).$$

Tutta questa costruzione permette di ottenere il seguente, importantissimo, risultato per il quale, a partire da una sequenza A-regolare $a_1, \ldots, a_n$, si ottiene una risoluzione libera dell'A-modulo $A/(a_1, \ldots, a_n)$.

Teorema 1.8.12. *Sia $a_1, \ldots, a_n$ una sequenza A-regolare, allora $A/(a_1, \ldots, a_n)$ ammette la seguente risoluzione libera come A-modulo:*

$$0 \to A \to A^n \to \cdots \to A^{\binom{n}{i}} \to \cdots \to A^n \to A \to A/(a_1, \ldots, a_n) \to 0.$$

La risoluzione è ottenuta utilizzando il complesso di Koszul associato ad $a_1, \ldots, a_n$ a coefficienti in A e si può quindi riscrivere come:

$$0 \to \mathbb{K}_\bullet \xrightarrow{\pi} A/(a_1, \ldots, a_n) \to 0.$$

1.9 Anelli regolari e risoluzioni libere minimali

Sia $(A, \mathfrak{m})$ locale noetheriano e $I \subseteq A$ un ideale. Una conseguenza del lemma di Nakayama è il fatto che qualsiasi sistema minimale di generatori per I abbia la stessa cardinalità

$$\mu(I) = \dim_{\Bbbk}(I/\mathfrak{m}I).$$

Poiché A è locale, si ha che $\mathrm{ht}_A(\mathfrak{m}) = \dim(A)$ e, grazie al teorema dell'altezza di Krull, $\mathrm{ht}_A(\mathfrak{m}) \leq \mu(\mathfrak{m})$. Allora valgono le disuguaglianze:

$$\mathrm{depth}(A) \leq \dim(A) \leq \mu(\mathfrak{m}).$$

Come visto in precedenza, quando la prima disuguaglianza è un uguaglianza si dice che A è Cohen-Macaulay.

Definizione 1.9.1. *Un anello locale noetheriano* $(A, \mathfrak{m})$ *si dice regolare se*

$$\dim(A) = \mu(\mathfrak{m}).$$

Esempio 1.9.2. Due importanti classi di anelli che sono regolari sono i campi ($\mathfrak{m} = (0)$ e $\dim(K) = 0$) e gli anelli delle serie formali a coefficienti in un campo $K[\![x_1, \ldots, x_n]\!]$ ($\dim(K[\![x_1, \ldots, x_n]\!]) = n = \mu((x_1, \ldots, x_n))$).

La classe degli anelli regolari è contenuta in un'altra classe di anelli molto importante, infatti vale il seguente teorema.

Teorema 1.9.3. *Gli anelli regolari sono domini.*

Esempio 1.9.4. Nel teorema precedente non vale il viceversa. Per trovare un controesempio basterebbe prendere un dominio che non è un anello locale, ma, dato che successivamente verrà data la definizione di anello regolare anche nel caso non locale, si vuole costruire un dominio locale che non sia regolare.

Sia $R \coloneqq K[\![x, y]\!]/(y^3 - x^2)$, il quale è un dominio locale. Si può mostrare che l'unico ideale massimale $\mathfrak{m} = (x, y)/(y^3 - x^2)$ ha altezza $\mathrm{ht}_R(\mathfrak{m}) = 1$, tuttavia non è principale. Dunque vale

$$\mathrm{ht}_R(\mathfrak{m}) = 1 \neq 2 = \mu(\mathfrak{m}).$$

Si conclude che R non è un anello regolare.

Vi è un'altra classe di anelli che contiene quella degli anelli regolari, infatti, ricordando le disuguaglianze

$$\mathrm{depth}(A) \leq \dim(A) \leq \mu(\mathfrak{m}),$$

si dimostra che, sorprendentemente, se la seconda disuguaglianza è un'uguaglianza allora vale lo stesso per la prima, ovvero vale il seguente teorema.

Teorema 1.9.5. *Gli anelli regolari sono Cohen-Macaulay.*

Esempio 1.9.6. Il viceversa del teorema precedente è falso. Si consideri infatti l'anello $R \coloneqq K[\![x]\!]/(x^2)$: l'unico ideale primo di R è $\mathfrak{p} = (x)/(x^2)$ e ciò ha le seguenti conseguenze:

- $\mathfrak{p}$ è anche l'unico ideale massimale (ed essendo l'unico primo ha altezza 0), quindi $(R, \mathfrak{p})$ è un anello locale di dimensione 0, in particolare è Cohen-Macaulay poiché la profondità non può assumere valore negativo;
- R non è un dominio, quindi, per il Teorema 1.9.3, non è regolare.

Ora si introduce la definizione di una proprietà molto importante, la quale "misura" la complessità di un modulo

Definizione 1.9.7. *Sia M un A-modulo e $P_\bullet$ una sua risoluzione proiettiva. La lunghezza di $P_\bullet$ è definita come:*

$$l(P_\bullet) \coloneqq \inf\{n \in \mathbb{N} : \forall_{k>n}(P_k \cong \{0\})\}.$$

Si definisce poi la dimensione proiettiva di M come:

$$\operatorname{projdim}_A(M) \coloneqq \min\{l(P_\bullet) : P_\bullet \textit{ risoluzione proiettiva di } M\}.$$

Osservazione 1.9.8. Se $(A, \mathfrak{m})$ è regolare, allora $\operatorname{projdim}_A(\mathbb{k}) \leq \dim(A)$. Per vedere questo fatto basta osservare che, poiché A è in particolare Cohen-Macaulay, prendendo una qualunque sequenza A-regolare "$a_1, \ldots, a_n$" massimale in $\mathfrak{m}$, (qui $\dim(A) = n$) vale che $\mathfrak{m} = (a_1, \ldots, a_n)$. Come già visto, sotto tali ipotesi si ha che $K(a_1, \ldots, a_n; A)$ (il quale ha lunghezza n) è una risoluzione libera di $\mathbb{k}$ per il Teorema 1.8.12.

Per calcolare la dimensione proiettiva di un A-modulo M non basta trovare una risoluzione proiettiva di M, ma essa deve avere lunghezza minima possibile. Ora si cercano di caratterizzare, nel caso locale, queste risoluzioni proiettive (quindi libere), che vengono chiamate minimali.

Notazione 1.9.9. Fino alla fine di questa sezione, gli anelli che si prendono sono sempre locali noetheriani e tutti gli A-moduli sono finitamente generati.

Definizione 1.9.10. *Una risoluzione libera di un A-modulo M*

$$\cdots \to F_i \xrightarrow{d_i} F_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} \ldots \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{f} M \to 0$$

è detta minimale (e viene abbreviata con RLM) se, per ogni $i \in \mathbb{N}^*$,

$$\operatorname{Im}(d_i) \subseteq \mathfrak{m}F_{i-1}.$$

Osservazione 1.9.11. Poiché i moduli della risoluzione sono liberi, ammettono una base e, grazie a ciò, è possibile rappresentare le mappe tramite delle matrici. Si osserva che una risoluzione libera è minimale se e solo se tutte le matrici associate alle mappe hanno entrate in $\mathfrak{m}$.

Esempio 1.9.12. Se "$a_1, \dots, a_n$" è una sequenza A-regolare, allora $K(a_1, \dots, a_n; A)$ è una RLM di $A/(a_1, \dots, a_n)$ come A-modulo, infatti le matrici associate alle mappe del complesso di Koszul hanno entrate in $(a_1, \dots, a_n) \subseteq \mathfrak{m}$.

Per chiarificare, ecco $K(a, b, c; A)$:

$$0 \to A \xrightarrow{\begin{bmatrix} c \\ -b \\ a \end{bmatrix}} A^3 \xrightarrow{\begin{bmatrix} -b & -c & 0 \\ a & 0 & -c \\ 0 & a & b \end{bmatrix}} A^3 \xrightarrow{\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}} A \to 0.$$

Si osserva che, in generale, le matrici associate alle mappe di $K(a_1, \dots, a_n; M)$ non dipendono dall'A-modulo M, ma solo da $a_1, \dots, a_n$.

Osservazione 1.9.13. Dato un A-modulo $M \ncong \{0\}$, nell'applicare il processo descritto nella Definizione 1.5.6 si può utilizzare il seguente accorgimento che permette di ottenere una RLM. Quando si considera un sistema di generatori per M o per $\mathrm{Ker}(f_i)$, se si sceglie minimale si può dimostrare che la condizione di minimalità della Definizione 1.9.10 è verificata.

Teorema 1.9.14. *Sia $F_\bullet$ una RLM di un A-modulo M con $F_i \cong A^{\beta_i}$ per ogni $i \in \mathbb{N}$. Allora*

$$\beta_i = \dim_{\Bbbk}(\mathrm{Tor}_i^A(M, \Bbbk)).$$

Questo risultato giustifica l'aggettivo minimale: infatti, poiché i Tor_i^A non dipendono dalla risoluzione libera scelta, allora segue che una RLM di un A-modulo M ha la lunghezza minimale tra tutte le possibili risoluzioni libere di M (e segue anche che tutte le RLM hanno la stessa lunghezza).
Un'altra conseguenza di questo teorema è il fatto che i β_i sono invarianti per M. Perciò si può dare la seguente definizione.

Definizione 1.9.15. *Sia M un A-modulo e sia*

$$\cdots \to A^{\beta_i} \to A^{\beta_{i-1}} \to \cdots \to A^{\beta_0} \to M \to 0$$

una sua RLM. I numeri $\beta_i(M) = \beta_i$ si chiamano numeri di Betti di M.

Segue immediatamente la seguente proposizione.

Proposizione 1.9.16. *Sia $M \ncong \{0\}$ un A-modulo, allora*

$$\mathrm{projdim}_A(M) = \sup\{i \in \mathbb{N} : \beta_i(M) \neq 0\}.$$

Corollario 1.9.17. *Sia $M \ncong \{0\}$ un A-modulo, allora*

$$\operatorname{projdim}_A(M) \leq \operatorname{projdim}_A(\Bbbk).$$

Corollario 1.9.18. *Sia A regolare di dimensione n. Allora*

$$\operatorname{projdim}_A(\Bbbk) = n.$$

Per mostrare questo fatto si utilizza il complesso di Koszul analogamente a quanto visto nell'Esempio 1.9.12.

La dimensione proiettiva e la profondità di un modulo sono legate dal seguente teorema.

Teorema 1.9.19 (di Auslander-Buchsbaum)**.** *Sia M un A-modulo di dimensione proiettiva finita, allora*

$$\operatorname{projdim}_A(M) + \operatorname{depth}(M) = \operatorname{depth}(A).$$

Si è finalmente pronti per dare un teorema di caratterizzazione per gli anelli regolari.

Teorema 1.9.20 (di Auslander-Buchsbaum-Serre)**.** *Sia A un anello locale noetheriano. Sono fatti equivalenti:*

1. *A è regolare;*
2. *per ogni A-modulo M,* $\operatorname{projdim}_A(M) < +\infty$;
3. *per ogni A-modulo M,* $\operatorname{projdim}_A(M) \leq \dim(A)$;
4. $\operatorname{projdim}_A(\Bbbk) < +\infty$;
5. $\operatorname{projdim}_A(\Bbbk) = \dim(A)$.

Questo teorema di caratterizzazione permette di estendere la definizione di anello regolare ad anelli non locali, analogamente a quanto fatto per gli anelli Cohen-Macaulay.

Corollario 1.9.21. *Sia A un anello regolare. Allora, per ogni* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$, *si ha che $A_{\mathfrak{p}}$ è regolare.*

Il corollario precedente non si riesce a dimostrare direttamente con la definizione: l'utilizzo di Teorema 1.9.20 è cruciale.

Definizione 1.9.22. *Un anello (anche non locale) noetheriano A si dice regolare se, per ogni $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, $A_{\mathfrak{p}}$ è un anello regolare. Per la proposizione precedente, è sufficiente verificare tale proprietà per ogni $\mathfrak{m} \in \mathrm{Specm}(A)$.*

Un esempio di anello regolare non locale è dato dal seguente teorema.

Teorema 1.9.23. *$S = K[x_1, \ldots, x_n]$ è un anello regolare. Inoltre è l'unica K-algebra graduata standard ad avere questa proprietà.*

1.10 Caso graduato

Invece degli anelli locali si può considerare il caso in cui A sia una K-algebra noetheriana graduata standard su $\mathbb{N}$. Queste ultime non sono in generale degli anelli locali, ma hanno comunque un ideale massimale che, pur essendo non l'unico, è "speciale" rispetto agli altri massimali. Ci si riferisce al massimale irrilevante, ovvero all'ideale che contiene tutti gli elementi omogenei di grado positivo: esso è l'unico ideale massimale omogeneo!

Notazione 1.10.1. Quando un modulo graduato su $\mathbb{Z}$ non ha elementi di grado negativo, si dice che è graduato su $\mathbb{N}$. Si ricorda che S denota la K-algebra di polinomi $K[x_1, \ldots, x_n]$ graduata standard su $\mathbb{N}$ (gradazione grezza).

In questa sezione un S-modulo M sarà sempre graduato.

Osservazione 1.10.2. Si può dimostrare ogni K-algebra noetheriana graduata standard è isomorfa a S/I, per qualche $I \subseteq S$ ideale omogeneo.

Definizione 1.10.3. *Sia A un anello graduato tale che $\dim(A) = d$. Allora esistono degli elementi omogenei $x_1, \ldots, x_d \in A$ tali che, per ogni $i \in \{1, \ldots, d\}$,*

$$\dim(A/(x_1, \ldots, x_i)) = d - i.$$

Elementi $x_1, \ldots, x_d \in \mathfrak{m}$ con le caratteristiche sopra citate, formano un sistema di parametri omogenei per A.

Quando si considerano i moduli graduati, un oggetto fondamentale per il loro studio è la sua funzione di Hilbert.

Definizione 1.10.4. *Sia M un S-modulo finitamente generato. La funzione di Hilbert di M è la mappa:*

$$\mathrm{HF}_M : k \in \mathbb{Z} \longmapsto \dim_K(M_k) \in \mathbb{N}.$$

La serie di Hilbert di M è la serie formale:

$$\mathrm{HS}_M(t) \coloneqq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathrm{HF}_M(k) t^k \in \mathbb{Z}[\![t]\!].$$

Teorema 1.10.5. *Sia M un S-modulo finitamente generato con $\dim(M) = d$. Allora esiste un polinomio $h_M(t) \in \mathbb{Z}[t]$ tale che $h_M(1) \neq 0$ e*

$$\mathrm{HS}_M(t) = \frac{h_M(t)}{(1-t)^d}.$$

h_M si chiama h-polinomio di M. Se $h_M(t) = h_0 + h_1 t + \cdots + h_s t^s$, il vettore $(h_0, \ldots, h_s)$ è detto h-vettore di M.

Lemma 1.10.6. *Sia M un S-modulo finitamente generato e $l \in S_1$ un elemento S-regolare, allora*

$$h_M(t) = h_{M/(l)M}(t).$$

Ora si riformulano alcune definizioni e alcuni risultati che valgono nel caso locale con le dovute modifiche. Per prima cosa è molto utile avere il lemma di Nakayama.

Lemma 1.10.7 (di Nakayama, caso graduato)**.** *Sia M un S-modulo graduato finitamente generato tale che $M = \mathfrak{m}M$, allora $M \cong \{0\}$.*

Definizione 1.10.8. *Un omomorfismo di S-moduli $f : M \to N$ si dice omogeneo se, per ogni $i \in \mathbb{N}$, $f(M_i) \subseteq N_i$.*

Definizione 1.10.9. *Sia M un S-modulo. Una risoluzione libera graduata di M è una risoluzione libera in cui tutte le mappe sono omogenee.*

Se $f \in S$ un polinomio omogeneo non nullo di grado $d \in \mathbb{N}$, allora $S/(f)$ è un S-modulo graduato finitamente generato. Se si prova a costruire una risoluzione libera nel consueto modo:

$$0 \to S \xrightarrow{\partial_1} S \xrightarrow{\pi} S/(f) \to 0,$$

dove $\partial_1(1) = f$ e $\pi(1) = \bar{1}$. Si vede subito che, se $d \neq 0$, la mappa ∂_1 non è omogenea. Questo problema si risolve modificando il grado degli elementi di quanto serve.

Definizione 1.10.10. *Sia M un S-modulo, il suo sfasato di $k \in \mathbb{Z}$ è l'S-modulo graduato $M(k)$ isomorfo a M come S-modulo e tale che, per ogni $i \in \mathbb{Z}$,*

$$M(k)_i = M_{k+i}.$$

Con questo metodo, si ha che una risoluzione libera graduata di $S/(f)$ come S-modulo è:

$$0 \to S(-d) \xrightarrow{\partial_1} S \xrightarrow{\pi} S/(f) \to 0,$$

dove $\partial_1(1) = f$ e $\pi(1) = \bar{1}$.

Osservazione 1.10.11. In generale, dato S-modulo graduato (anche non fintamente generato) M è sempre possibile costruire una sua risoluzione libera graduata nel seguente modo.

Sia $\{m_{0,j} : j \in I_0\}$ un insieme di generatori omogenei di M e si consideri

$$F_0 \coloneqq \bigoplus_{j \in I_0} S(-d_{0,j}), \text{ con } d_{0,j} = \deg(m_{0,}).$$

In questo modo, l'unica mappa S-lineare che estende

$$f_0 : e_j \in F_0 \longmapsto m_{0,j} \in M$$

è una mappa di S-moduli surgettiva e omogenea. Poiché f_0 è omogenea, si ha che $\mathrm{Ker}(f_0)$ è un S-modulo graduato e quindi è possibile ripetere il processo fino ad ottenere la seguente risoluzione libera graduata $F_\bullet$:

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & F_2 \arrow[rr, "\partial_2"] \arrow[dr, two heads, "f_2"] & & F_1 \arrow[rr, "\partial_1"] \arrow[dr, two heads, "f_1"] & & F_0 \arrow[r, two heads, "f_0"] & M \\
& & \mathrm{Ker}(f_1) \arrow[ur, hook, "\iota_0"] & & \mathrm{Ker}(f_0) \arrow[ur, hook, "\iota_1"] & &
\end{tikzcd}$$

In questo caso si ha che, per ogni $i \in \mathbb{N}$, un insieme di generatori di $\mathrm{Ker}(f_i)$ è $\{m_{i,j} : j \in I_i\}$ e si costruisce

$$F_{i+1} \coloneqq \bigoplus_{j \in I_i} S(-d_{i,j}), \text{ con } d_{i,j} = \deg(m_{i,j}).$$

Se M è finitamente generato, allora nei passi appena descritti è possibile scegliere ogni volta un sistema di generatori finito e si può scrivere una risoluzione graduata di M come:

$$\dots \xrightarrow{\partial_2} \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} S(-j)^{\beta_{1,j}} \xrightarrow{\partial_1} \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} S(-j)^{\beta_{0,j}} \xrightarrow{f_0} M \to 0,$$

dove $\beta_{i,j}$ è il numero di generatori di grado j di M (se $i = 0$) o di $\mathrm{Ker}(\partial_{i-1})$ (se $i \geq 1$).

Se ci si restringe ai moduli finitamente generati, è possibile avere una nozione di minimalità per le risoluzioni libere graduate analoga a quella del caso locale.

Definizione 1.10.12. *Sia M un S-modulo finitamente generato, allora una risoluzione libera graduata*

$$\dots \xrightarrow{\partial_2} \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} S(-j)^{\beta_{1,j}} \xrightarrow{\partial_1} \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} S(-j)^{\beta_{0,j}} \xrightarrow{f_0} M \to 0$$

si dice minimale (RLGM) se, detto $F_i := \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} S(-j)^{\beta_{i,j}}$, si ha che, per ogni $i \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Im}(\partial_{i+1}) \subseteq \mathfrak{m}F_i$.

Come nel caso locale, una risoluzione libera graduata è minimale se e solo se tutte le matrici associate alle mappe hanno tutti i coefficienti nel massimale irrilevante $\mathfrak{m}$.

Sempre in analogia con il caso locale, per ottenere una RLGM basta scegliere nel processo descritto nell'Osservazione 1.10.11 ogni volta un sistema minimale di generatori.

Proposizione 1.10.13. *Sia M un S-modulo finitamente generato e sia data una sua RLGM*

$$\dots \xrightarrow{\partial_2} \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} S(-j)^{\beta_{1,j}} \xrightarrow{\partial_1} \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} S(-j)^{\beta_{0,j}} \xrightarrow{f_0} M \to 0,$$

allora $\beta_{i,j} = \dim_K(\operatorname{Tor}_i^S(M, K)_j)$.

Definizione 1.10.14. *Sia M un S-modulo finitamente generato. Si chiamano numeri Betti graduati di M i numeri $\beta_{i,j}(M) := \beta_{i,j}$; la loro somma $\beta_i := \sum_{j \in \mathbb{N}} \beta_{i,j}$ è l'i-esimo numero di Betti totale di M. Ovviamente $\beta_i = \dim_K(\operatorname{Tor}_i^S(M, K))$.*

Corollario 1.10.15. *Sia M un S-modulo finitamente generato. Allora*

$$\operatorname{projdim}_S(M) = \max\{i \in \mathbb{N} : \beta_i(M) \neq 0\}.$$

Come nel caso locale vale che

$$\operatorname{projdim}_S(M) \leq \operatorname{projdim}_S(K).$$

Definizione 1.10.16. *Per un S-modulo graduato M si definisce, similmente al caso locale, la profondità*

$$\operatorname{depth}(M) \coloneqq \min\{i \in \mathbb{N} : \operatorname{Ext}^i_S(K, M) \ncong \{0\}\}.$$

M si dice Cohen-Macaulay se

$$\operatorname{depth}(M) = \dim(M).$$

Osservazione 1.10.17. La Definizione 1.10.16 è coerente con quella data nel caso locale. Infatti si può vedere che un S-modulo graduato M è Cohen-Macaulay se e solo se $M_{\mathfrak{p}}$ e Cohen-Macaulay per ogni $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(S)$ tale che $M_{\mathfrak{p}} \ncong \{0\}$.

Teorema 1.10.18 (di Auslander-Buchsbaum, caso graduato)**.** *Sia M un S-modulo finitamente generato. Allora*

$$\operatorname{depth}(M) + \operatorname{projdim}_S(M) = n.$$

1.11 Risoluzioni iniettive

In questa sezione vengono studiate le risoluzioni iniettive. I moduli iniettivi sono in generale più complicati di quelli proiettivi, ma le risoluzioni iniettive minimali possono essere definite per un anello qualunque e per un modulo qualunque.

Definizione 1.11.1. *Sia $\iota : M \hookrightarrow N$ un'inclusione di A-moduli. ι si dice estensione essenziale di M se, per ogni $L \subseteq N$ A-sottomodulo non nullo, si ha che $\iota(M) \cap L \neq \{0\}$.*

Osservazione 1.11.2. Ovviamente, se $\iota : M \hookrightarrow N$ è un'estensione essenziale di M, allora, per ogni N-sottomodulo K tale che $\iota(M) \subseteq K$, si ha che $\iota : M \hookrightarrow K$ è un'estensione essenziale.

Proposizione 1.11.3. *Sia $\iota : M \hookrightarrow N$ un'inclusione di A-moduli. Allora esiste $K \subseteq N$ A-sottomodulo tale che $M \hookrightarrow K$ è massimale tra le estensioni essenziali di M contenute in N.*

Definizione 1.11.4. *Un'estensione essenziale $M \hookrightarrow N$ è detta estensione essenziale massimale di M se ogni estensione essenziale $N \hookrightarrow N'$ è banale (ovvero è un isomorfismo).*

Proposizione 1.11.5.

(i) *Un A-modulo è iniettivo se e solo se non ha estensioni essenziali non banali;*

(ii) *sia $M \hookrightarrow E$ un'inclusione di A-moduli, con E iniettivo. Se $M \hookrightarrow N$ è un'estensione essenziale massimale di M in E, allora è un'estensione massimale di M (in particolare, N è iniettivo grazie a (i));*

(iii) *L'estensione essenziale massimale di un A-modulo è unica a meno di isomorfismo (non canonico).*

La proposizione precedente permette di dare la seguente definizione.

Definizione 1.11.6. *Sia M un A-modulo. L'involucro iniettivo di M è la sua estensione massimale, che si denota con $E_A(M)$. Esso è il più piccolo A-modulo iniettivo che contiene M.*

Definizione 1.11.7. *Dato un A-modulo M, una risoluzione iniettiva di M*

$$0 \to M \xrightarrow{e} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} \dots$$

si dice minimale se: $E^0 \cong E_A(M)$, $E^1 \cong E_A(Coker(e))$ e, per ogni $i \in \mathbb{N}$, $E^{i+2} \cong E_A(Coker(d^i))$.

Osservazione 1.11.8. La risoluzione della definizione precedente si dice minimale perché quando si costruisce una risoluzione iniettiva di M (come nella Definizione 1.5.9)

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, hook, "e"] & E^0 \arrow[rr, "d^0"] \arrow[dr, two heads, "\pi^0"'] & & E^1 \arrow[rr, "d^1"] \arrow[dr, two heads, "\pi^1"'] & & E^2 \arrow[r] & \dots \\
& & Coker(e) \arrow[ur, hook, "\iota^1"'] & & Coker(d^0) \arrow[ur, hook, "\iota^2"'] & &
\end{tikzcd}$$

si scelgono gli E^i in modo che siano i più piccoli A-moduli iniettivi possibili che rendono la successione esatta.

Analogamente a quanto avviene per le risoluzioni proiettive, è possibile definire la nozione di dimensione iniettiva.

Definizione 1.11.9. *Sia M un A-modulo e $E^\bullet$ una sua risoluzione iniettiva. La lunghezza di $E^\bullet$ è definita come:*

$$l(E^\bullet) \coloneqq \inf\{n \in \mathbb{N} : \forall_{k>n}(E^k \cong \{0\})\}.$$

Si definisce poi la dimensione iniettiva di M come:

$$\operatorname{injdim}_A(M) \coloneqq \inf\{l(E^\bullet) : E^\bullet \text{ risoluzione iniettiva di } M\}.$$

Si dimostra, come nel caso proiettivo, che una risoluzione iniettiva minimale (RIM) di un A-modulo M ha la lunghezza minima rispetto a tutte le altre risoluzioni iniettive di M.

Capitolo 2

Anelli Gorenstein e teorema di caratterizzazione

Nel capitolo precedente sono stati introdotti gli anelli Cohen-Macaulay e gli anelli regolari e si è visto che ogni anello regolare è Cohen-Macaulay. Questa tesi si concentra sullo studio dei cosiddetti anelli Gorenstein.

In questo capitolo viene data la definizione di anello Gorenstein e viene dimostrato un teorema che caratterizza tali anelli in vari modi. Successivamente verrà mostrato che il fatto di essere Gorenstein è una proprietà intermedia tra la regolarità e la proprietà Cohen-Macaulay.

Definizione 2.0.1. *Sia A un anello locale noetheriano. A si dice Gorenstein se* $\mathrm{injdim}_A(A) < +\infty$.

Lemma 2.0.2. *Sia M un A-modulo e $n \in \mathbb{N}$. Allora* $\mathrm{injdim}_A(M) \leq n$ *se e solo se, per ogni ideale $I \subseteq A$,* $\mathrm{Ext}_A^{n+1}(A/I, M) \cong \{0\}$.

Osservazione 2.0.3. Si dimostra che, se A è noetheriano, basta controllare la seconda implicazione per ogni ideale primo.

Dimostrazione.

($\Rightarrow$) Sia $I \subseteq A$ un ideale qualsiasi. Per calcolare $\mathrm{Ext}_A^{n+1}(A/I, M)$ si prende una risoluzione iniettiva $E^\bullet$ di M, poi si applica il funtore covariante $\mathrm{Hom}_A(A/I, -)$ e si prende la coomologia $(n+1)$-esima. Se si considera $E^\bullet$ una risoluzione iniettiva minimale di M, per ipotesi è lunga al più n. Allora:

$$E^{n+1} \cong \{0\} \implies \mathrm{Hom}_A(A/I, E^{n+1}) \cong \{0\} \implies \mathrm{Ext}_A^{n+1}(A/I, M) \cong \{0\}.$$

($\Leftarrow$) Caso $n = 0$. Si considera la successione esatta corta

$$0 \to I \to A \to A/I \to 0,$$

la quale induce, per il Teorema 1.6.2, la successione esatta lunga che inizia con

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(A/I, M) \to \mathrm{Hom}_A(A, M) \to \mathrm{Hom}_A(I, M) \to \mathrm{Ext}^1_A(A/I, M).$$

Poiché per ipotesi $\mathrm{Ext}^1_A(A/I, M) \cong \{0\}$, la mappa

$$\mathrm{Hom}_A(A, M) \to \mathrm{Hom}_A(I, M)$$

è surgettiva. Allora, per ogni $f \in \mathrm{Hom}_A(I, M)$, esiste $g \in \mathrm{Hom}_A(A, M)$ tale che $f = g \circ \iota$ (dove $\iota : I \hookrightarrow A$ è l'inclusione). Quest'ultimo fatto implica, per il Teorema 1.5.7, che M è iniettivo e quindi che $\mathrm{injdim}_A(M) = 0$.

Caso $n > 0$. Sia

$$0 \to M \to E^\bullet$$

una risoluzione iniettiva di M, allora si puo' ottenere la successione esatta

$$0 \to M \to E^1 \to \cdots \to E^{n-2} \xrightarrow{d^{n-2}} E^{n-1} \to \mathrm{Coker}(d^{n-2}) \to 0.$$

Osservando il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & E^{n-2} \arrow[r, "d^{n-2}"] & E^{n-1} \arrow[rr, "d^{n-1}"] \arrow[dr, two heads, "\pi^{n-1}"] & & E^n \arrow[r, "d^n"] & \dots \\
& & & \mathrm{Coker}(d^{n-2}) \arrow[ur, hook, "\iota^n"'] & &
\end{tikzcd}$$

si nota che una risoluzione iniettiva di $C := \mathrm{Coker}(d^{n-2})$ è data da una parte della risoluzione iniettiva di M :

$$0 \to C \overset{\iota^n}{\hookrightarrow} E^n \xrightarrow{d^n} E^{n+1} \to \dots$$

Allora è chiaro che, calcolando il funtore Ext per M e per C, si ottiene che

$$\mathrm{Ext}^{n+1}_A(A/I, M) \cong \mathrm{Ext}^1_A(A/I, C).$$

Utilizzando lo stesso ragionamento del caso $n = 0$, si ottiene che C è iniettivo e quindi $\mathrm{injdim}_A(M) \leq n$.

$\square$

Proposizione 2.0.4. *Siano* $(A, \mathfrak{m})$ *un anello locale noetheriano,* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ *e* M *un* A*-modulo finitamente generato. Allora, per ogni* $n \in \mathbb{N}$,

$$(\mathrm{Ext}^n_A(M, A))_{\mathfrak{p}} \cong \mathrm{Ext}^n_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}, A_{\mathfrak{p}}).$$

Dimostrazione. Si ricorda che $\mathrm{Ext}^n_A(-, A)$, è l'n-esimo funtore derivato destro del funtore controvariante esatto a sinistra $\mathrm{Hom}_A(-, A)$. Allora, per calcolare $\mathrm{Ext}^n_A(M, A)$, si prende $F_\bullet = (F_n, d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una risoluzione libera (A è locale) di M come A-modulo

$$\cdots \to F_2 \xrightarrow{d_2} F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{d_0} M \to 0,$$

si applica il funtore $\mathrm{Hom}_A(-, A)$

$$\cdots \leftarrow \mathrm{Hom}_A(F_2, A) \xleftarrow{d_2^*} \mathrm{Hom}_A(F_1, A) \xleftarrow{d_1^*} \mathrm{Hom}_A(F_0, A)$$

e si calcola, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$H^n(\mathrm{Hom}_A(F_\bullet, A)) \cong \frac{\mathrm{Ker}(d^*_{n+1})}{\mathrm{Im}(d^*_n)}.$$

Sia, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $F_n = A^{\gamma_n}$. Si osserva che, poiché $A_{\mathfrak{p}}$ è un A-modulo piatto, la successione

$$\cdots \to A^{\gamma_2} \otimes_A A_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{d_2 \otimes \mathrm{id}_{A_{\mathfrak{p}}}} A^{\gamma_1} \otimes_A A_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{d_1 \otimes \mathrm{id}_{A_{\mathfrak{p}}}} A^{\gamma_0} \otimes_A A_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{d_0 \otimes \mathrm{id}_{A_{\mathfrak{p}}}} M \otimes_A A_{\mathfrak{p}} \to 0,$$

la quale corrisponde a

$$\cdots \to A_{\mathfrak{p}}^{\gamma_2} \xrightarrow{(d_2)_{\mathfrak{p}}} A_{\mathfrak{p}}^{\gamma_1} \xrightarrow{(d_1)_{\mathfrak{p}}} A_{\mathfrak{p}}^{\gamma_0} \xrightarrow{(d_0)_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} \to 0,$$

è ancora esatta e, perciò, $F_\bullet \otimes_A A_{\mathfrak{p}}$ è una risoluzione libera di $M_{\mathfrak{p}}$ come $A_{\mathfrak{p}}$-modulo. Applicando il funtore $\mathrm{Hom}_{A_{\mathfrak{p}}}(-, A_{\mathfrak{p}})$ si ottiene:

$$\cdots \leftarrow \mathrm{Hom}_{A_{\mathfrak{p}}}(A_{\mathfrak{p}}^{\gamma_2}, A_{\mathfrak{p}}) \xleftarrow{(d_2)^*_{\mathfrak{p}}} \mathrm{Hom}_{A_{\mathfrak{p}}}(A_{\mathfrak{p}}^{\gamma_1}, A_{\mathfrak{p}}) \xleftarrow{(d_1)^*_{\mathfrak{p}}} \mathrm{Hom}_{A_{\mathfrak{p}}}(A_{\mathfrak{p}}^{\gamma_0}, A_{\mathfrak{p}}).$$

Allora si ha che, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{Ext}^n_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}, A_{\mathfrak{p}}) \cong H^n(\mathrm{Hom}_{A_{\mathfrak{p}}}(F_\bullet \otimes_A A_{\mathfrak{p}}, A_{\mathfrak{p}})) \cong \frac{\mathrm{Ker}((d_{n+1})^*_{\mathfrak{p}})}{\mathrm{Im}((d_n)^*_{\mathfrak{p}})} \cong \frac{\mathrm{Ker}(d^*_{n+1})_{\mathfrak{p}}}{\mathrm{Im}(d^*_n)_{\mathfrak{p}}} \cong$$

$$\cong \left(\frac{\mathrm{Ker}(d^*_{n+1})}{\mathrm{Im}(d^*_n)}\right)_{\mathfrak{p}} \cong (H^n(\mathrm{Hom}_A(F_\bullet, A)))_{\mathfrak{p}} \cong (\mathrm{Ext}^n_A(M, A))_{\mathfrak{p}}.$$

$\square$

Lemma 2.0.5. *Siano M, N due A-moduli e $x \in A$ un elemento A-regolare e M-regolare tale che $x \in \operatorname{Ann}_A(N)$. Sia $B := A/(x)$ e $\overline{M} := M/(x)M$, allora:*

(i) $\operatorname{Hom}_A(N, M) \cong \{0\}$ *e, per ogni $n \in \mathbb{N}$,* $\operatorname{Ext}_A^{n+1}(N, M) \cong \operatorname{Ext}_B^n(N, \overline{M})$;

(ii) $\operatorname{Ext}_A^n(M, N) \cong \operatorname{Ext}_B^n(\overline{M}, N)$ *per ogni $n \in \mathbb{N}$;*

(iii) $\operatorname{Tor}_n^A(M, N) \cong \operatorname{Tor}_n^B(\overline{M}, N)$ *per ogni $n \in \mathbb{N}$.*

Dimostrazione.

(i) Per la prima parte, sia $f \in \operatorname{Hom}_A(N, M)$ e si osserva che, per le ipotesi su $x \in A$,

$$xf(1) = f(x \cdot 1) = f(0) = 0 \xRightarrow{x \text{ è } M\text{-regolare}} f(1) = 0 \implies f = 0.$$

Si dimostra ora la seconda parte dell'enunciato. Si definisce il funtore controvariante esatto a sinistra $T^n := \operatorname{Ext}_A^{n+1}(-, M)$. Poiché $x \in \operatorname{Ann}_A(N)$ ed è M-regolare, il Lemma 1.7.6 garantisce che

$$T^0(N) \cong \operatorname{Hom}_A(N, \overline{M})$$

e, nuovamente poiché $x \in \operatorname{Ann}_A(N)$, gli A-omomorfismi sono anche B-omomorfismi (il viceversa vale sempre), dunque

$$\operatorname{Hom}_A(N, \overline{M}) \cong \operatorname{Hom}_B(N, \overline{M}).$$

Dal momento che x è A-regolare, si ha che la seguente successione esatta

$$0 \to A \xrightarrow{\cdot x} A \to B \to 0$$

è una risoluzione libera minimale di B, dunque vale che $\operatorname{projdim}_A(B) = 1$. Si osserva ora che, per calcolare $T^n(B)$, si deve iniziare prendendo una risoluzione proiettiva di B : allora, per $n \neq 0$, $T^n(B) \cong \{0\}$.

Sia ora L un B-modulo proiettivo. Per il Teorema 1.5.4, esistono $k \in \mathbb{N}$ e L' un B-modulo tale che $L \oplus L' \cong B^k$ e, per l'additività di T^n,

$$\text{per ogni } n \neq 0, \quad T^n(L) \oplus T^n(L') \cong (T^n(B))^k \cong \{0\}.$$

Quindi, per ogni $n \neq 0$, $T^n(L) \cong \{0\}$. Dalla Proposizione 1.6.3, segue che T^n è l'n-esimo funtore derivato destro del funtore controvariante esatto a sinistra $\operatorname{Hom}_B(-, \overline{M})$, dunque $T^n(N) \cong \operatorname{Ext}_B^n(N, \overline{M})$.

(ii) Si prova per prima cosa che, per $n \neq 0$, $\mathrm{Tor}_n^A(M,B) \cong \{0\}$. Se $n > 1$, segue dal fatto che $\mathrm{projdim}_A(B) = 1$. Se $n = 1$, si considera la successione esatta corta

$$0 \to A \xrightarrow{\cdot x} A \to B \to 0,$$

dalla quale ho una successione esatta lunga

$$\cdots \to \mathrm{Tor}_1^A(M,A) \to \mathrm{Tor}_1^A(M,B) \to M \otimes_A A \xrightarrow{\cdot x \otimes id_A} M \otimes_A A \to M \otimes_A B \to 0.$$

Poiché A è un A-modulo libero, $\mathrm{Tor}_1^A(M,A) \cong \{0\}$. Quindi la successione diventa:

$$0 \to \mathrm{Tor}_1^A(M,B) \to M \xrightarrow{\cdot x} M \to \overline{M} \to 0$$

e, poiché x è A-regolare, la mappa $\cdot x$ è iniettiva. Da tutto ciò segue che $\mathrm{Tor}_1^A(M,B) \cong \{0\}$.

Sia ora una risoluzione libera di M come A-modulo

$$L_\bullet \to M \to 0,$$

si applica il funtore $- \otimes_A B$ e si ottiene il complesso

$$L_\bullet \otimes_A B \to M \otimes_A B \cong \overline{M} \to 0,$$

che è esatto in posizione omologica 0 perché $- \otimes_A B$ è esatto a destra e nelle altre posizioni omologiche per quanto appena visto. Allora $L_\bullet \otimes_A B$ è una risoluzione libera di $\overline{M}$ come B-modulo. Si conclude che, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}_A^n(M,N) &\cong H^n(\mathrm{Hom}_A(L_\bullet, N)) \cong H^n(\mathrm{Hom}_B(L_\bullet \otimes_A B, N)) \cong \\ &\cong \mathrm{Ext}_B^n(\overline{M}, N), \end{aligned}$$

dove il secondo isomorfismo segue dalla Proposizione 1.4.6 e dal fatto che

$$\mathrm{Hom}_B(B,N) \cong N.$$

(iii) Utilizzando la stessa costruzione di prima, si ha che, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{Tor}_n^A(M,N) \cong H_n(L_\bullet \otimes_A N) \cong H_n((L_\bullet \otimes_A B) \otimes_B N) \cong \mathrm{Tor}_n^B(\overline{M}, N).$$

$\square$

Lemma 2.0.6. *Sia* $(A, \mathfrak{m})$ *un anello locale noetheriano,* M *un* A*-modulo finitamente generato e* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ *tale che* $\operatorname{ht}_{A/\mathfrak{p}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{p}) = 1$*. Allora, per ogni* $n \in \mathbb{N}$,

$$\operatorname{Ext}_A^{n+1}(\mathbb{k}, M) \cong \{0\} \implies \operatorname{Ext}_A^n(A/\mathfrak{p}, M) \cong \{0\}.$$

Dimostrazione. Sia $x \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{p}$, allora si ha la successione esatta corta

$$0 \to A/\mathfrak{p} \xrightarrow{\cdot x} A/\mathfrak{p} \to A/(\mathfrak{p} + (x)) \to 0.$$

Essa induce la successione esatta lunga

$$\begin{aligned} 0 &\to \operatorname{Hom}_A(A/(\mathfrak{p}+(x)), M) \to \operatorname{Hom}_A(A/\mathfrak{p}, M) \xrightarrow{\cdot x} \operatorname{Hom}_A(A/\mathfrak{p}, M) \to \dots \\ \dots &\to \operatorname{Ext}_A^n(A/(\mathfrak{p}+(x)), M) \to \operatorname{Ext}_A^n(A/\mathfrak{p}, M) \xrightarrow{\cdot x} \operatorname{Ext}_A^n(A/\mathfrak{p}, M) \to \dots \end{aligned} \tag{2.1}$$

Dal fatto che $\operatorname{ht}_{A/\mathfrak{p}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{p}) = 1$, segue che l'unico ideale primo di A che contiene $\mathfrak{p} + (x)$ è $\mathfrak{m}$. Allora $\sqrt{\mathfrak{p} + (x)} = \mathfrak{m}$, quindi $\mathfrak{p} + (x)$ è $\mathfrak{m}$-primario.

Ponendo $N \coloneqq A/(\mathfrak{p} + (x))$, il quale è finitamente generato come A-modulo, si può costruire una sua serie di decomposizione

$$\{0\} \cong N_0 \subset N_1 \subset \dots \subset N_r \cong N,$$

tale che, per ogni $k \in \{1, \dots, r\}$, $N_k/N_{k-1} \cong A/\mathfrak{p}_k$, con $\mathfrak{p}+(x) \subseteq \mathfrak{p}_k \in \operatorname{Spec}(A)$. Per quanto osservato prima, in questo caso si ha che, per ogni $k \in \{1, \dots, r\}$, $\mathfrak{p}_k = \mathfrak{m}$.

Si possono considerare allora, per quanto appena visto, le seguenti successioni esatte corte al variare di $k \in \{1, \dots, r\}$:

$$0 \to N_{k-1} \to N_k \to \mathbb{k} \to 0.$$

Esse inducono le solite successioni esatte lunghe, dalle quali è possibile estrapolare le seguenti successioni esatte:

$$\operatorname{Ext}_A^{n+1}(\mathbb{k}, M) \to \operatorname{Ext}_A^{n+1}(N_k, M) \to \operatorname{Ext}_A^{n+1}(N_{k-1}, M).$$

Poiché $N_0 \cong \{0\}$ e, per ipotesi, $\operatorname{Ext}_A^{n+1}(\mathbb{k}, M) \cong \{0\}$, la precedente successione esatta garantisce che $\operatorname{Ext}_A^{n+1}(N_1, M) \cong \{0\}$; procedendo con una facile induzione, si trova che $\operatorname{Ext}_A^{n+1}(N, M) \cong \{0\}$. Sostituendo in 2.1, si ottiene

$$\operatorname{Ext}_A^n(A/\mathfrak{p}, M) \xrightarrow{\cdot x} \operatorname{Ext}_A^n(A/\mathfrak{p}, M) \to 0.$$

Per Nakayama, segue che $\operatorname{Ext}_A^n(A/\mathfrak{p}, M) \cong \{0\}$. $\square$

Lemma 2.0.7. *Sia $(A, \mathfrak{m})$ un anello locale noetheriano, M un A-modulo finitamente generato e $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ tale che $\operatorname{ht}_{A/\mathfrak{p}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{p}) = d$. Allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$,*

$$\operatorname{Ext}_A^{n+d}(\Bbbk, M) \cong \{0\} \implies \operatorname{Ext}_{A_\mathfrak{p}}^n(\Bbbk(\mathfrak{p}), M_\mathfrak{p}) \cong \{0\}.$$

Dimostrazione. Sia $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_d = \mathfrak{m}$ una catena di primi distinti di A. Per il Lemma 2.0.6, $\operatorname{Ext}_A^{n+d-1}(A/\mathfrak{p}_{d-1}, M) \cong \{0\}$ e, localizzando a $\mathfrak{p}_{d-1}$, si ottiene che $\operatorname{Ext}_{A_{\mathfrak{p}_{d-1}}}^{n+d-1}(\Bbbk(\mathfrak{p}_{d-1}), M_{\mathfrak{p}_{d-1}}) \cong \{0\}$.

Si ricorda che, dati $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$ due ideali primi di A, vale $(A_\mathfrak{p})_\mathfrak{q} \cong A_\mathfrak{q}$. Allora è possibile iterare il ragionamento appena fatto per ottenere la tesi. $\square$

Definizione 2.0.8. *Un ideale $I \subsetneq A$ si dice irriducibile se, dati $J, K \subseteq A$ due ideali tali che $I = J \cap K$, si ha che $I = J$ oppure $I = K$.*

Per la dimostrazione del teorema, è utile mostrare un fatto riguardante gli anelli locali artiniani.

Proposizione 2.0.9. *Sia A un anello locale e artiniano. Sono fatti equivalenti:*

(i) *$I \subseteq A$ è un ideale minimale non nullo;*

(ii) *esiste $f \in \operatorname{Hom}_A(\Bbbk, A)$ non nulla tale che* $\operatorname{Im}(f) = I$.

Dimostrazione.

($(i) \Rightarrow (ii)$) Sia $I \subseteq A$ un ideale minimale non nullo. Poiché gli A-sottomoduli di A sono esattamente gli ideali di A, I è un A-sottomodulo minimale non nullo. Considerando A come A-modulo, esso è artiniano e noetheriano: allora A ammette una SDS di ideali che si può far partire da I :

$$(0) \cong A_0 \subset A_1 \cong I \subset A_2 \subset \cdots \subset A_c \cong A.$$

Allora, poiché $\dim(A) = 0$ (A è artiniano), $\operatorname{Spec}(A) = \{\mathfrak{m}\}$ e

$$I \cong A_1 \cong A_1/A_0 \cong A/\mathfrak{m} = \Bbbk.$$

Essendo I un ideale minimale, esso è forzato ad essere principale, ovvero, per qualche $a \in A \smallsetminus \{0\}$, si ha che $I = (a)$. Allora si può prendere la mappa A-lineare $f : \overline{1} \in \Bbbk \mapsto a \in A$ e si ha che f è non nulla ($a \neq 0$) e che $\operatorname{Im}(f) = I$.

((ii) $\Rightarrow$ (i)) Sia $f \in \mathrm{Hom}_A(\Bbbk, A)$ non nulla: si deve provare che $\mathrm{Im}(f)$ è un ideale minimale non nullo di A. Sia, per assurdo, J un ideale di A tale che

$$(0) \subsetneq J \subsetneq \mathrm{Im}(f).$$

Allora esiste un elemento $x \in J$ non nullo e sia $a \in A$ tale che $f(\overline{a}) = x$; sia poi un generico $y \in \mathrm{Im}(f)$ e sia $b \in A$ tale che $f(\bar{b}) = y$. Poiché $\Bbbk$ è un campo, esiste $c \in A$ tale che $\overline{ca} = \overline{1}$. Allora

$$y = f(\bar{b}) = bf(\overline{1}) = bf(\overline{ca}) = bcf(\overline{a}) = bcx,$$

ovvero $y \in J$. Dall'arbitrarietà di $y \in \mathrm{Im}(f)$, si ottiene che $\mathrm{Im}(f) \subseteq J$, che è una contraddizione.

$\square$

Teorema 2.0.10 (Caratterizzazione Gorenstein)**.** *Sia $(A, \mathfrak{m})$ un anello locale noetheriano di dimensione n. Sono fatti equivalenti:*

(i) *A è Gorenstein;*

(ii) $\mathrm{injdim}_A(A) = n$;

(iii) $\mathrm{Ext}^i_A(\Bbbk, A) \cong \begin{cases} \Bbbk & \text{se } i = n \\ \{0\} & \text{se } i \neq n \end{cases}$;

(iv) *esiste $i > n$ tale che* $\mathrm{Ext}^i_A(\Bbbk, A) \cong \{0\}$;

(v) $\mathrm{Ext}^i_A(\Bbbk, A) \cong \begin{cases} \Bbbk & \text{se } i = n \\ \{0\} & \text{se } i < n \end{cases}$;

(vi) *A è un anello Cohen-Macaulay e* $\mathrm{Ext}^n_A(\Bbbk, A) \cong \Bbbk$;

(vii) *A è un anello Cohen-Macaulay e ogni ideale di A generato da un sistema di parametri per A è irriducibile;*

(viii) *A è un anello Cohen-Macaulay ed esiste un ideale di A generato da un sistema di parametri per A che sia irriducibile.*

Dimostrazione. Per la dimostrazione si segue la seguente strada:

$$[(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (i)] \text{ e } [(iii) \Rightarrow (v) \Rightarrow (vi) \Rightarrow (vii) \Rightarrow (viii) \Rightarrow (iii)].$$

$((i) \Rightarrow (ii))$ Sia $r \coloneqq \operatorname{injdim}_A(A)$. Sia $\mathfrak{p} \in \operatorname{Min}(A)$ tale che $\operatorname{ht}_{A/\mathfrak{p}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{p}) = n = \dim(A)$, allora $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p} \in \operatorname{Min}(A_\mathfrak{p})$. La Proposizione 1.2.4 garantisce che $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_{A_\mathfrak{p}}(A_\mathfrak{p})$ e, per l'Osservazione 1.2.2, $\operatorname{Hom}_{A_\mathfrak{p}}(\Bbbk(\mathfrak{p}), A_\mathfrak{p}) \ncong \{0\}$. Per il Lemma 2.0.7 si ha che $\operatorname{Ext}^n_A(\Bbbk, A) \ncong \{0\}$, perciò $r \geq n$.

Resta da provare che $r \leq n$: si procede per induzione su r.

Caso $r = 0$. Poiché $n \in \mathbb{N}$, la tesi è sempre verificata.

Caso $r > 0$. Si consideri $T \coloneqq \operatorname{Ext}^r_A(-, A)$, il quale è un funtore controvariante esatto a destra: ciò segue dalla successione esatta lunga indotta dal funtore $\operatorname{Hom}_A(-, A)$ e dal fatto che, per ogni A-modulo M, $\operatorname{Ext}^{r+1}_A(M, A) \cong \{0\}$. Dunque, per il Lemma 2.0.2, esiste $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ tale che $T(A/\mathfrak{p}) \ncong \{0\}$.
Se $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$, si considera $x \in \mathfrak{m} \smallsetminus \mathfrak{p}$, allora dalla successione esatta

$$0 \to A/\mathfrak{p} \xrightarrow{\cdot x} A/\mathfrak{p}$$

si ottiene la successione esatta

$$T(A/\mathfrak{p}) \xrightarrow{\cdot x} T(A/\mathfrak{p}) \to 0$$

e per il lemma di Nakayama $T(A/\mathfrak{p}) \cong \{0\}$, che è una contraddizione.

Resta solo la possibilità che $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$, quindi $T(\Bbbk) \ncong \{0\}$. Deve accadere che $\mathfrak{m} \notin \operatorname{Ass}(A)$, altrimenti dalla successione esatta $0 \to \Bbbk \to A$ si otterrebbe la successione esatta $T(A) \cong \{0\} \to T(\Bbbk) \to 0$, che sarebbe una contraddizione.
Allora $\mathfrak{m}$ contiene un elemento A-regolare x. Si consideri $B \coloneqq A/(x)$, allora, per il Lemma 2.0.5, per ogni $i \in \mathbb{N}$ e ogni B-modulo N, si ha che $\operatorname{Ext}^i_B(N, B) \cong \operatorname{Ext}^{i+1}_A(N, A)$, allora $\operatorname{injdim}_B(B) = r - 1$. Per ipotesi induttiva, $r - 1 = \dim(B) = n - 1$, quindi $n = r$.

$((ii) \Rightarrow (iii))$ Si procede per induzione su n.

Caso $n = 0$. Poiché $\dim(A) = n = 0$, si ha che $\mathfrak{m} \in \operatorname{Min}(A)$, allora, per la Proposizione 1.2.4, $\mathfrak{m} \in \operatorname{Ass}_A(A)$. Dunque $\operatorname{Hom}_A(\Bbbk, A) \ncong \{0\}$, ovvero esiste $f \in \operatorname{Hom}_A(\Bbbk, A)$ non nulla e, poiché $\Bbbk$ è un campo, essa è anche iniettiva.

La seguente successione esatta

$$0 \to \Bbbk \to A$$

induce la successione esatta

$$A \cong \operatorname{Hom}_A(A, A) \to \operatorname{Hom}_A(\Bbbk, A) \to 0,$$

la quale implica che $\operatorname{Hom}_A(\Bbbk, A)$ è generato (come A-modulo) da un elemento. Siano inoltre $m \in \mathfrak{m}$ e $f \in \operatorname{Hom}_A(\Bbbk, A)$, allora

$$mf(\overline{1}) = f(\overline{m}) = f(\overline{0}) = 0;$$

quindi $\mathfrak{m} \subseteq \operatorname{Ann}_A(\operatorname{Hom}_A(\Bbbk, A))$. Allora $\operatorname{Hom}_A(\Bbbk, A)$ è anche un $\Bbbk$-modulo, ovvero un $\Bbbk$-spazio vettoriale e, poiché non è nullo ed è generato da un elemento, si ha che $\operatorname{Hom}_A(\Bbbk, A) \cong \Bbbk$. Poiché A è iniettivo, per $i \neq 0$, $\operatorname{Ext}^i_A(\Bbbk, A) \cong \{0\}$.

Caso $n > 0$. In questo caso, $\mathfrak{m}$ contiene un elemento A-regolare x (come visto nell'implicazione $(i) \Rightarrow (ii)$) e, per il Lemma 1.7.5, $\operatorname{Hom}_A(\Bbbk, A) \cong \{0\}$. Detto $B := A/(x)$, per il Lemma 2.0.2 e il Lemma 2.0.5, si ha che $\operatorname{injdim}_B(B) = n - 1 = \dim(B)$ e, sempre per il Lemma 2.0.5 e per ipotesi induttiva vale:

$$\operatorname{Ext}^i_A(\Bbbk, A) \cong \operatorname{Ext}^{i-1}_B(\Bbbk, B) \cong \begin{cases} \{0\} & \text{se } 0 < i < n \\ \Bbbk & \text{se } i = n \end{cases};$$

$((iii) \Rightarrow (iv))$ La dimostrazione è banale.

$((iv) \Rightarrow (i))$ Si dimostra per induzione su n.

Caso $n = 0$. Poiché $\dim(A) = n = 0$, si ha che $\operatorname{Spec}(A) = \{\mathfrak{m}\}$, quindi dal Lemma 2.0.2, si ha che $\operatorname{injdim}_A(A) < i < +\infty$, ovvero A è Gorenstein.

Caso $n > 0$. Sia $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$ un ideale primo di A e si pongano $d := \operatorname{ht}_{A/\mathfrak{p}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{p})$ e $B := A_\mathfrak{p}$. Dal Lemma 2.0.7 segue che $\operatorname{Ext}^{i-d}_B(\Bbbk(\mathfrak{p}), B) \cong \{0\}$. Osservando che $\dim(B) \leq \dim(A) - \dim(A/\mathfrak{p}) = n - d < n$, si ha, per ipotesi induttiva, che B è Gorenstein.

Sfruttando il fatto che $(i) \implies (ii)$, si trova che

$$\operatorname{injdim}_B(B) = \dim(B) < n < i;$$

dunque, per ogni A-modulo finitamente generato M,

$$(\mathrm{Ext}^i_A(M,A))_{\mathfrak{p}} \cong \mathrm{Ext}^i_B(M_{\mathfrak{p}},B) \cong \{0\}.$$

Il primo isomorfismo segue dalla Proposizione 2.0.4.

Se si pone $T(M) \coloneqq \mathrm{Ext}^i_A(M,A)$, si ottiene che

$$\mathrm{Supp}(T(M)) \coloneqq \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) : T(M)_{\mathfrak{p}} \ncong \{0\}\} \subset \{\mathfrak{m}\};$$

infatti, per ogni ideale primo $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$, si è verificato precedentemente che vale

$$T(M)_{\mathfrak{p}} \cong \mathrm{Ext}^i_B(M_{\mathfrak{p}},B) \cong \{0\}.$$

Per la Proposizione 1.2.5, dato $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ si ha che $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(T(M))$ se e solo se $A \smallsetminus \mathfrak{p} \cap \mathrm{Ann}_A(T(M)) \neq \emptyset$ (ovvero, $\mathrm{Ann}_A(T(M)) \nsubseteq \mathfrak{p}$). Per quanto visto in precedenza, ciò implica che $\mathrm{Ann}_A(T(M)) = A$ (cioè, $T(M) \cong \{0\}$) oppure che $\mathrm{Min}(\mathrm{Ann}_A(T(M))) = \{\mathfrak{m}\}$; se ci si trova in quest'ultimo caso, si ha, grazie alla Proposizione 1.2.6, che l'unico primo che compare in una SD per $T(M)$ (che esiste, poiché esso è Noetheriano) è $\mathfrak{m}$, dunque $T(M)$ ha lunghezza finita.

Ora si vuole provare che, per ogni $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, $T(A/\mathfrak{p}) \cong \{0\}$. Se per assurdo esiste $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ tale che $T(A/\mathfrak{p}) \ncong \{0\}$, si considera $\mathcal{P}$ massimale rispetto a tale proprietà. Per ipotesi si ha che $T(\Bbbk) \cong \{0\}$, allora $\mathcal{P} \neq \mathfrak{m}$: allora si considera $x \in \mathfrak{m} \smallsetminus \mathcal{P}$ e si ottiene la successione esatta corta

$$0 \to A/\mathcal{P} \xrightarrow{\cdot x} A/\mathcal{P} \to A/(\mathcal{P} + (x)) \to 0. \tag{2.2}$$

Poiché $A/(\mathcal{P}+(x))$ è un A-modulo finitamente generato, è possibile prendere una sua serie di decomposizione

$$0 \cong M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_s \cong A/(\mathcal{P} + (x)),$$

tale che, per ogni $k \in \{1,\ldots,s\}$, $M_k/M_{k-1} \cong A/\mathfrak{p}_k$, con $\mathcal{P} + (x) \subseteq \mathfrak{p}_k \in \mathrm{Spec}(A)$. Per la massimalità di $\mathcal{P}$, per ogni $k \in \{1,\ldots,s\}$, $T(A/\mathfrak{p}_k) \cong \{0\}$. Si considerano la seguenti successioni esatte corte al variare di $k \in \{1,\ldots,s\}$:

$$0 \to M_{k-1} \to M_k \to A/\mathfrak{p}_k \to 0.$$

Si hanno le solite successioni esatte lunghe indotte dal funtore derivato destro di $\mathrm{Hom}_A(-, A)$, dalle quali è possibile estrapolare le successioni esatte

$$T(A/\mathfrak{p}_k) \to T(M_k) \to T(M_{k-1}).$$

Poiché $M_0 \cong \{0\}$ e, per quanto visto in precedenza, per ogni $k \in \{1, \ldots, s\}$, $T(A/\mathfrak{p}_k) \cong \{0\}$, si ottiene che $T(M_1) \cong \{0\}$; procedendo con una facile induzione, si trova che

$$T(A/(\mathcal{P} + (x))) \cong T(M_s) \cong \{0\}.$$

Ora alla successione esatta in 2.2 si associa, come prima, la successione esatta lunga indotta dal funtore derivato destro di $\mathrm{Hom}_A(-, A)$, all'interno della quale si trova il seguente complesso esatto

$$T(A/(\mathcal{P} + (x))) \cong 0 \to T(A/\mathcal{P}) \xrightarrow{\cdot x} T(A/\mathcal{P}).$$

La mappa A-lineare $\cdot x$ è quindi iniettiva; tale mappa è anche surgettiva (infatti, se non lo fosse, si avrebbe che $\mathrm{Im}(\cdot x) \subsetneq T(A/\mathcal{P})$ sarebbe un sottomodulo tale che $l_A(\mathrm{Im}(\cdot x)) < l_A(T(A/\mathcal{P}))$, ma ciò sarebbe assurdo poiché, per l'iniettività di $\cdot x$, si ha che $\mathrm{Im}(\cdot x) \cong T(A/\mathcal{P})$). Allora $T(A/\mathcal{P}) = (x)T(A/\mathcal{P})$ e, per Nakayama, $T(A/\mathcal{P}) \cong \{0\}$, che è una contraddizione.

Allora si è dimostrato che, per ogni $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, $T(A/\mathfrak{p}) \cong \{0\}$: dal Lemma 2.0.2 segue che $\mathrm{injdim}_A(A) < i$, in particolare $\mathrm{injdim}_A(A) \leq n$, ovvero A è Gorenstein.

$((iii) \Rightarrow (v))$ La dimostrazione è banale.

$((v) \Rightarrow (vi))$ La dimostrazione segue direttamente dalla Definizione 1.7.9 di profondità di un anello e dalla Definizione 1.7.14 di anello Cohen-Macaulay.

$((vi) \Rightarrow (vii))$ Dato che A è Cohen-Macaulay per ipotesi, un sistema di parametri per A "$x_1, \ldots, x_n$" è anche una sequenza A-regolare. Preso $B \coloneqq A/(x_1, \ldots, x_n)$, allora si ha:

$$\mathrm{Hom}_B(\Bbbk, B) \cong \mathrm{Hom}_A(\Bbbk, B) \cong \mathrm{Ext}^n_A(\Bbbk, A) \cong \Bbbk,$$

dove il primo isomorfismo vale perché $(x_1, \ldots, x_n) \subseteq \mathrm{Ann}_A(\Bbbk)$, mentre il secondo segue dal Lemma 1.7.6.

Poiché B è noetheriano e ha dimensione 0 (quando si riduce modulo una sequenza regolare lunga d, la dimensione cala di d), è anche artiniano. La formula precedente e la Proposizione 2.0.9 garantiscono che B abbia un unico ideale minimale non nullo, sia esso $I/(x_1, \dots, x_n)$. Siano J, K due ideali non nulli di A che contengono strettamente $(x_1, \dots, x_n)$, allora $J/(x_1, \dots, x_n)$ e $K/(x_1, \dots, x_n)$ sono due ideali non nulli di B ed entrambi, per la minimalità di $I/(x_1, \dots, x_n)$, devono contenerlo, quindi $J/(x_1, \dots, x_n) \cap K/(x_1, \dots, x_n) \neq (0)$. Sollevando il tutto ad A, si ha che $J \cap K \neq (x_1, \dots, x_n)$. Si conclude per l'arbitrarietà di J e K.

$((vii) \Rightarrow (viii))$ La dimostrazione è banale.

$((viii) \Rightarrow (iii))$ Dato che A è Cohen-Macaulay, si ha che, per ogni $i < n$, $\mathrm{Ext}^i_A(\Bbbk, A) \cong \{0\}$. Resta quindi da dimostrare che $\mathrm{Ext}^n_A(\Bbbk, A) \cong \Bbbk$ e che, per ogni $i > n$, $\mathrm{Ext}^i_A(\Bbbk, A) \cong \{0\}$.

Sia $\mathfrak{p}$ un ideale irriducibile generato da un sistema di parametri per A, allora si considera $B := A/\mathfrak{p}$. Dato che A è Cohen-Macaulay, un sistema di parametri per A è una sequenza A-regolare; utilizzando n volte il punto (i) del Lemma 2.0.5, si ottiene che, per ogni $i \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{Ext}^{n+i}_A(\Bbbk, A) \cong \mathrm{Ext}^i_B(\Bbbk, B).$$

Essendo B un anello noetheriano di dimensione 0, esso è artiniano. Si può quindi concludere la dimostrazione provando che: dato un anello artiniano B tale che (0) è irriducibile, valgono

$$\mathrm{Hom}_B(\Bbbk, B) \cong \Bbbk \quad \text{e} \quad \text{per ogni } i > 0, \mathrm{Ext}^i_B(\Bbbk, B) \cong \{0\}.$$

Poiché B è artiniano, esiste almeno un ideale minimale non nullo (se non esistesse, si potrebbe prendere una catena infinita discendente di ideali non nulli, contro l'artinianità); dunque, dalla Proposizione 2.0.9, segue che $\mathrm{Hom}_B(\Bbbk, B) \ncong \{0\}$. Siano $f, g \in \mathrm{Hom}_B(\Bbbk, B)$ che non siano la mappa nulla, allora si deve avere che $f(\Bbbk) = g(\Bbbk)$ (altrimenti $f(\Bbbk) \cap g(\Bbbk) = (0)$, contro l'irriducibilità di (0)). Allora sia $\alpha \in \Bbbk$ tale che $f(1) = g(\alpha)$: segue immediatamente che $f(1) = \alpha g(1)$, ovvero $f = \alpha g$. Ciò prova che $\mathrm{Hom}_B(\Bbbk, B) \cong \Bbbk$.

Essendo possibile vedere B come un B modulo finitamente generato, è possibile considerare una sua serie di decomposizione

$$(0) \cong N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_r \cong B.$$

Poiché B è locale e $\dim(B) = 0$, l'unico suo primo minimale è $\mathfrak{m}$: allora la Proposizione 1.2.6 garantisce che, per ogni $i \in \{1, \dots, r\}$, $N_i/N_{i-1} \cong \Bbbk$. Si possono dunque considerare le successioni esatte corte al variare di $i \in \{1, \dots, r-1\}$

$$0 \to N_i \to N_{i+1} \to \Bbbk \to 0$$

e, di conseguenza si hanno le successioni esatte lunghe

$$0 \to \mathrm{Hom}_B(\Bbbk, B) \to \mathrm{Hom}_B(N_{i+1}, B) \to \mathrm{Hom}_B(N_i, B) \xrightarrow{\delta_i} \mathrm{Ext}^1_B(\Bbbk, B) \to \dots$$

Si vuole provare che, per ogni $i \in \{1, \dots, r-1\}$, $l_B(\mathrm{Hom}_B(N_i, B)) \leq i$ e vale l'uguaglianza se e solo se, per ogni $k \in \{1, \dots, i-1\}$, δ_k è la 0-mappa. La dimostrazione è per induzione su i.

Caso $i = 1$. Considerando che $N_1 \cong \Bbbk$ e che $\mathrm{Hom}_B(\Bbbk, B) \cong \Bbbk$, si ottiene che

$$l_B(\mathrm{Hom}_B(N_1, B)) = l_B(\mathrm{Hom}_B(\Bbbk, B)) = l_B(\Bbbk) = 1.$$

Essendo la condizione per l'uguaglianza una condizione vuota, essa è sempre verificata e in effetti, come appena visto, vale sempre l'uguaglianza.

Caso $i > 1$. Si osserva che è possibile troncare la successione esatta lunga ottenuta in precedenza, costruendo la successione esatta

$$0 \to \Bbbk \to \mathrm{Hom}_B(N_{i+1}, B) \to \mathrm{Hom}_B(N_i, B) \xrightarrow{\delta_1} \mathrm{Im}(\delta_1) \to 0;$$

allora

$$l_B(\mathrm{Hom}_B(N_{i+1}, B)) = l_B(\Bbbk) + l_B(\mathrm{Hom}_B(N_i, B)) - l_B(\mathrm{Im}(\delta_i)).$$

Per ipotesi induttiva, $l_B(\mathrm{Hom}_B(N_i, B)) \leq i$ e vale l'uguaglianza se e solo se $\delta_1, \dots \delta_{i-1}$ sono le mappe nulle. Allora

$$l_B(\mathrm{Hom}_B(N_{i+1}, B)) \leq 1 + i - l_B(\mathrm{Im}(\delta_i)) \leq i + 1$$

e vale l'uguale se e solo se $\delta_1, \dots \delta_i$ sono le mappe nulle.

In particolare, segue che

$$l_B(\mathrm{Hom}_B(N_r, B)) = l_B(\mathrm{Hom}_B(B, B)) = l_B(B) = r,$$

dove l'ultima uguaglianza vale perché

$$(0) \cong N_0 \subset N_1 \subset \dots \subset N_r \cong B$$

è una SDS di B. Allora, per quanto appena provato, $\delta_1, \dots, \delta_{r-1}$ sono mappe nulle, perciò dalla successione esatta corta

$$0 \to N_{r-1} \to B \to \Bbbk \to 0$$

si ottiene la successione esatta lunga

$$\cdots \to \mathrm{Hom}_B(N_{r-1}, B) \xrightarrow{0} \mathrm{Ext}^1_B(\Bbbk, B) \to \mathrm{Ext}^1_B(B, B) \cong \{0\}.$$

Segue che $\mathrm{Ext}^1_B(\Bbbk, B) \cong \{0\}$ e, poiché $\mathfrak{m}$ è l'unico ideale primo di B, il Lemma 2.0.2 garantisce che $\mathrm{injdim}_B(B) \leq 0$, perciò B è iniettivo, ovvero, per ogni $i > 0$,

$$\mathrm{Ext}^i_B(\Bbbk, B) \cong \{0\}.$$

Questo conclude la dimostrazione.

□

Corollario 2.0.11. *Sia $(A, \mathfrak{m})$ un anello locale noetheriano di dimensione n, "$a_1, \dots, a_c$" una sequenza A-regolare e si denoti $B := A/(a_1, \dots, a_c)$. Allora A è Gorenstein se e solo se B è Gorenstein.*

Dimostrazione. Utilizzando la caratterizzazione $(i) \Leftrightarrow (vi)$, basta provare che A è Cohen-Macaulay e $\mathrm{Ext}^n_A(\Bbbk, A) \cong \Bbbk$ se e solo se B è Cohen-Macaulay e $\mathrm{Ext}^{n-c}_B(\Bbbk, B) \cong \Bbbk$.

Il fatto che A sia Cohen-Macaulay se e solo se lo è B, segue dalla Proposizione 1.7.13. Il fatto che $\mathrm{Ext}^n_A(\Bbbk, A) \cong \mathrm{Ext}^{n-c}_B(\Bbbk, B)$, segue dal punto (i) del Lemma 2.0.5 con $M = A$, iterato c volte. □

Come si è fatto per gli anelli regolari e Cohen-Macaulay, si vuole estendere tale nozione anche al caso non locale. Il prossimo teorema garantisce che la nozione Gorenstein per anelli noetheriani (anche non locali) sia coerente con la Definizione 2.0.1, data per anelli locali.

Lemma 2.0.12. *Sia A un anello noetheriano, $S \subset A$ un sistema moltiplicativo e I un A-modulo iniettivo. Allora I_S è un A_S-modulo iniettivo.*

Dimostrazione. Ogni ideale di A_S è della forma $\mathfrak{a}_S$, per qualche ideale $\mathfrak{a} \subseteq A$. Poiché I è iniettivo, il Teorema 1.5.7 garantisce l'esattezza della successione

$$\mathrm{Hom}_A(A, I) \to \mathrm{Hom}_A(\mathfrak{a}, I) \to 0.$$

Applicando il funtore esatto $- \otimes_A A_S$, si ottiene la successione esatta

$$\mathrm{Hom}_{A_S}(A_S, I_S) \to \mathrm{Hom}_{A_S}(\mathfrak{a}_S, I_S) \to 0.$$

Sempre dal Teorema 1.5.7, segue che I_S è un A_S-modulo iniettivo. $\square$

Teorema 2.0.13. *Sia A un anello locale noetheriano Gorenstein e $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, allora $A_\mathfrak{p}$ è ancora Gorenstein.*

Dimostrazione. Sia $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, allora si ha che $A_\mathfrak{p}$ è un anello locale noetheriano: resta da provare che $\mathrm{injdim}_{A_\mathfrak{p}}(A_\mathfrak{p}) < +\infty$. Sia

$$0 \to A \to I^0 \to I^1 \to \cdots \to I^n \to 0$$

una risoluzione iniettiva di A come A-modulo, allora, poiché il funtore $- \otimes_A A_\mathfrak{p}$ è esatto, il Lemma 2.0.12 garantisce che

$$0 \to A_\mathfrak{p} \to (I^0)_\mathfrak{p} \to (I^1)_\mathfrak{p} \to \cdots \to (I^n)_\mathfrak{p} \to 0$$

sia una risoluzione iniettiva di $A_\mathfrak{p}$ come $A_\mathfrak{p}$-modulo. Ciò implica che $A_\mathfrak{p}$ è Gorenstein. Si conclude per l'arbitrarietà di $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$. $\square$

Definizione 2.0.14. *Un anello noetheriano A è detto Gorenstein se, per ogni $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, $A_\mathfrak{p}$ è Gorenstein. Per il teorema precedente, basta verificare la proprietà per ogni $\mathfrak{m} \in \mathrm{Specm}(A)$.*

Per come sono stati appena definiti gli anelli Gorenstein non locali, si osserva che, grazie alla Proposizione 2.0.4 e grazie al fatto che la proprietà Cohen-Macaulay localizza, vale un analogo del Teorema 2.0.10.

Teorema 2.0.15 (Caratterizzazione Gorenstein, versione non locale)**.** *Sia A un anello noetheriano di dimensione finita. Sono fatti equivalenti:*

(i) *A è Gorenstein;*

(ii) *per ogni* $\mathfrak{m} \in \mathrm{Specm}(A)$, $\mathrm{injdim}_{A_\mathfrak{m}}(A_\mathfrak{m}) = \mathrm{ht}_A(\mathfrak{m})$;

(iii) *per ogni* $\mathfrak{m} \in \mathrm{Specm}(A)$, $\mathrm{Ext}^i_{A_\mathfrak{m}}(\Bbbk(\mathfrak{m}), A_\mathfrak{m}) \cong \begin{cases} \Bbbk(\mathfrak{m}) & \text{se } i = \mathrm{ht}_A(\mathfrak{m}) \\ \{0\} & \text{se } i \neq \mathrm{ht}_A(\mathfrak{m}) \end{cases}$;

(iv) *per ogni* $\mathfrak{m} \in \mathrm{Specm}(A)$, *esiste* $i > \mathrm{ht}_A(\mathfrak{m})$ *tale che* $\mathrm{Ext}^i_{A_\mathfrak{m}}(\Bbbk(\mathfrak{m}), A_\mathfrak{m}) \cong \{0\}$;

(v) *per ogni* $\mathfrak{m} \in \mathrm{Specm}(A)$, $\mathrm{Ext}^i_{A_\mathfrak{m}}(\Bbbk(\mathfrak{m}), A_\mathfrak{m}) \cong \begin{cases} \Bbbk(\mathfrak{m}) & \text{se } i = \mathrm{ht}_A(\mathfrak{m}) \\ \{0\} & \text{se } i < \mathrm{ht}_A(\mathfrak{m}) \end{cases}$;

(vi) A è Cohen-Macaulay e, per ogni $\mathfrak{m} \in \mathrm{Specm}(A)$,$\mathrm{Ext}_{A_\mathfrak{m}}^{\mathrm{ht}_A(\mathfrak{m})}(\Bbbk(\mathfrak{m}), A_\mathfrak{m}) \cong \Bbbk(\mathfrak{m})$.

Nel caso in cui A sia anche una K-algebra graduata standard, si può dare una versione semplificata del teorema precedente: anziché verificare le condizioni su tutti gli ideali massimali di A, è sufficiente limitarsi al solo massimale omogeneo. Per ulteriori dettagli riguardo a questo fatto, si rimanda al capitolo 1.5 di [2].

Teorema 2.0.16 (Caratterizzazione Gorenstein, versione graduata)**.** *Sia A una K-algebra noetheriana $\mathbb{N}$-graduata standard di dimensione d; dato $\mathfrak{m}$ l'unico massimale omogeneo di A, si ricorda che $A/\mathfrak{m} \cong K$. Sono fatti equivalenti:*

(i) A è Gorenstein;

(ii) $\mathrm{injdim}_A(A) = d$;

(iii) $\mathrm{Ext}_A^i(K, A) \cong \begin{cases} K & \textit{se } i = d \\ \{0\} & \textit{se } i \neq d \end{cases}$;

(iv) esiste $i > d$ tale che $\mathrm{Ext}_A^i(K, A) \cong \{0\}$;

(v) $\mathrm{Ext}_A^i(K, A) \cong \begin{cases} K & \textit{se } i = d \\ \{0\} & \textit{se } i < d \end{cases}$;

(vi) A è un anello Cohen-Macaulay e $\mathrm{Ext}_A^d(K, A) \cong K$.

Proposizione 2.0.17. *Gli anelli Gorenstein sono Cohen-Macaulay.*

Dimostrazione. Sia A un anello Gorenstein, allora, per ogni $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, si ha che $A_\mathfrak{p}$ è Gorenstein. Utilizzando, ad esempio, l'equivalenza del Teorema 2.0.10 $(i) \Leftrightarrow (vi)$, si ottiene subito che, per ogni $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, $A_\mathfrak{p}$ è Cohen-Macaulay. Ne segue che, per definizione, A è Cohen-Macaulay. $\square$

Esempio 2.0.18. Il viceversa della proposizione precedente non vale.
Sia $R := K[\![x, y]\!]/(x^2, xy, y^2)$. Si osserva che $\dim(R) = 0$, in quanto $\mathrm{Spec}(R) = \{(\overline{x}, \overline{y})\}$: perciò, R è Cohen-Macaulay. Si osserva che $(\overline{x}) \cap (\overline{y}) = (\overline{xy}) = (\overline{0})$: dunque $(\overline{0})$ è un ideale riducibile di R generato da un sistema di parametri. Per il Teorema 2.0.10, R non è Gorenstein.

Proposizione 2.0.19. *Gli anelli regolari sono Gorenstein*

Dimostrazione. Sia A un anello regolare: si deve dimostrare che, per ogni ideale primo $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, l'anello $A_{\mathfrak{p}}$ è Gorenstein. Sia quindi $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, allora $A_{\mathfrak{p}}$ è un anello regolare poiché lo è A e si fissi $\dim(A_{\mathfrak{p}}) = n$. Sia $\mathbf{a} = {}"a_1, \ldots, a_n"$ un sistema di parametri regolari per $A_{\mathfrak{p}}$, allora $(\mathbf{a}) = \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ e, per il Lemma 1.7.6

$$\mathrm{Ext}^n_{A_{\mathfrak{p}}}(\Bbbk(\mathfrak{p}), A_{\mathfrak{p}}) \cong \mathrm{Hom}_{A_{\mathfrak{p}}}(\Bbbk(\mathfrak{p}), A_{\mathfrak{p}}/(\mathbf{a})) \cong \mathrm{Hom}_{A_{\mathfrak{p}}}(\Bbbk(\mathfrak{p}), \Bbbk(\mathfrak{p})).$$

Poiché che $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} = \mathrm{Ann}_{A_{\mathfrak{p}}}(\Bbbk(\mathfrak{p}))$, segue che

$$\mathrm{Hom}_{A_{\mathfrak{p}}}(\Bbbk(\mathfrak{p}), \Bbbk(\mathfrak{p})) \cong \mathrm{Hom}_{\Bbbk(\mathfrak{p})}(\Bbbk(\mathfrak{p}), \Bbbk(\mathfrak{p})) \cong \Bbbk(\mathfrak{p}).$$

Poiché ogni anello regolare è Cohen-Macaulay, la tesi segue dall'equivalenza $(i) \Leftrightarrow (vi)$ del Teorema 2.0.10. □

Esempio 2.0.20. Il viceversa della proposizione precedente è falso: l'anello $K[x]/(x^2)$ è Gorenstein per il Corollario 2.0.11 (poiché $K[x]$ è regolare, quindi Gorenstein, e $"x^2"$ è una $K[x]$-sequenza), ma non è regolare in quanto non è un dominio.

Capitolo 3

Anelli di Stanley-Reisner e anelli Gorenstein

In questo capitolo viene studiata una nuova classe di anelli: gli anelli di Stanley-Reisner. Non è vero né che tutti gli anelli Gorenstein sono Stanley-Reisner, né che tutti gli anelli di Stanley-Reisner sono Gorenstein: verranno dunque date delle condizioni necessarie e sufficienti affinché un anello di Stanley-Reisner sia Gorenstein.

3.1 Anelli di Stanley-Reisner

In questa sezione, vengono introdotti gli anelli di Stanley-Reisner, vale a dire le K-algebre ottenute quozientando $S = K[x_1, \ldots, x_n]$ con ideali monomiali squarefree.
Una caratteristica peculiare di questi anelli è il fatto che si riesca a trovare una corrispondenza biunivoca tra di essi e degli oggetti puramente combinatorici e geometrici chiamati complessi simpliciali. Il vantaggio di questa bigezione sta nel fatto che proprietà algebriche di un anello di Stanley-Reisner (come ad esempio l'essere Gorenstein o Cohen-Macaulay) si possono tradurre in proprietà topologiche del complesso simpliciale ad esso associato.

Notazione 3.1.1. D'ora in avanti si utilizzano, in aggiunta a quelle del capitolo 1, le seguenti notazioni.

- L'insieme $\{1, \ldots, n\}$ viene denotato con $[n]$.
- Sia $\sigma \subseteq [n]$, si denota il suo complementare con $\overline{\sigma} \coloneqq [n] \setminus \sigma$.

- Dato $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, si denota il monomio $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} =: \mathbf{x}^\alpha$.
- Dato $\sigma \subseteq [n]$, si scrive $\mathbf{x}^\sigma := \prod_{i \in \sigma} x_i$.
- $\mathbf{x} := x_1, \dots, x_n$ e $S := K[x_1, \dots, x_n]$.
- Sia $\sigma \subseteq [n]$, allora $\mathbf{m}^\sigma := (x_i : i \in \sigma) \subseteq S$.
- Sia $\sigma \subseteq [n]$, allora $V(\sigma)$ è il vettore di $\mathbb{N}^n$ tale che, per ogni $i \in [n]$,

$$V(\sigma)_i = \begin{cases} 0 & \text{se } i \notin \sigma \\ 1 & \text{se } i \in \sigma \end{cases}$$

- Siano U, V due spazi topologici. Si scrive $U \cong V$ se i due spazi sono omeomorfi e $U \simeq V$ se sono omotopicamente equivalenti.
- Sia M un A-modulo, allora si indica il duale di M con $M^* := \mathrm{Hom}_A(M, A)$.
- Siano due vettori $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n), \mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{N}^n$. Si dice che $\mathbf{a} \succeq \mathbf{b}$ se, per ogni $i \in [n]$, si ha che $a_i \geq b_i$ (è una relazione d'ordine parziale).

Definizione 3.1.2. *Sia l'insieme $V = [n]$, che viene detto insieme dei vertici. Un complesso simpliciale $\Delta \subseteq 2^V$ è un insieme che verifica la seguente proprietà:*

$$\text{per ogni } F, G \in 2^V (F \subseteq G,\ G \in \Delta \implies F \in \Delta).$$

Gli elementi di Δ sono detti facce: le facce massimali all'interno di un complesso simpliciale sono chiamate faccette. Sia $F \in \Delta$, si definisce la dimensione di F come $\dim(F) := |F| - 1$ e la dimensione di Δ come

$$\dim(\Delta) := \max\{\dim(F) : F \in \Delta\}.$$

Nel caso in cui $\Delta = \emptyset$ sia il complesso vuoto, si definisce $\dim(\emptyset) := -\infty$. Si definiscono poi $F_i(\Delta) := \{F \in \Delta : \dim(F) = i\}$ (l'insieme delle i-facce o i-simplessi) e $f_i := |F_i(\Delta)|$. Sia inoltre $d := \dim(\Delta) + 1$.

I complessi simpliciali possono sembrare degli oggetti puramente astratti, ma vi è un modo molto naturale di dare loro un significato geometrico, che giustifica anche il fatto di parlare di "vertici", "facce" e "dimensione" di un complesso simpliciale.

Definizione 3.1.3. *Sia Δ un complesso simpliciale su $[n]$. Sia e_i l'i-esimo elemento della base canonica di $\mathbb{R}^n$; data una faccia $F \in \Delta$, si definisce*

$$|F| \coloneqq \mathrm{cx}\{e_i : i \in F\},$$

dove $\mathrm{cx}\{I\}$ indica l'inviluppo convesso in $\mathbb{R}^n$ dell'insieme I. La topologia di $|F|$ è quella di sottospazio di $\mathbb{R}^n$.

Una realizzazione geometrica di Δ è lo spazio topologico

$$|\Delta| \coloneqq \bigcup_{F\in\Delta} |F|,$$

sempre dotato della topologia di sottospazio.

Osservazione 3.1.4. Sia Δ un complesso simpliciale, allora esso è completamente determinato dalle sue faccette: infatti Δ è composto da tutti i sottoinsiemi delle sue faccette. Spesso, per presentare Δ, si scriverà $\Delta = \langle \sigma : \sigma \text{ faccetta di } \Delta\rangle$.

Notazione 3.1.5. Per una maggiore compattezza nella scrittura delle facce di un complesso simpliciale, essa viene resa meno pesante nel seguente modo: data $\tau = \{i_1, \dots, i_c\} \subseteq [n]$, essa viene denotata semplicemente con $\tau = i_1 \dots i_c$

Esempio 3.1.6. Si considera il seguente complesso simpliciale su $V = [5]$, generato dalle sue faccette

$$C \coloneqq \langle 123, 24, 34, 5\rangle \subseteq 2^{[5]}.$$

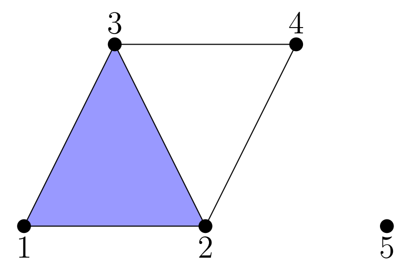


Figura 3.1: Una realizzazione geometrica del complesso simpliciale C

Osservazione 3.1.7. Gli unici complessi simpliciali che hanno dimensione negativa sono il complesso vuoto $\emptyset$, che ha dimensione $-\infty$, e il complesso irrilevante $\{\emptyset\}$, che ha dimensione -1. Il nome "irrilevante" deriva dal fatto che il suo ideale di Stanley-Reisner è $\mathbf{m}^{[n]} = (x_1, \dots, x_n)$, il massimale irrilevante di S. Questi due complessi simpliciali possono sembrare molto simili, ma avere chiara la distinzione tra di essi, come si vedrà più avanti, è importante.

Definizione 3.1.8. *Sia $V = [n]$, K un campo e Δ un complesso simpliciale su V. Si definisce l'anello di Stanley-Reisner (o l'anello delle facce) del complesso Δ su K come*

$$K[\Delta] \coloneqq S/I_\Delta,$$

con $I_\Delta \coloneqq (\mathbf{x}^\sigma : \sigma \notin \Delta)$ l'ideale composto dalle non-facce di Δ. Si osserva che un sistema di generatori monomiali minimali (in realtà l'unico) è composto dalle non-faccette di Δ, ovvero dalle non-facce di Δ minimali rispetto all'inclusione. I_Δ viene chiamato l'ideale di Stanley-Reisner di Δ.

Teorema 3.1.9. *Sia $V = [n]$, K un campo e Δ un complesso simpliciale su V. Allora*

$$\dim(K[\Delta]) = \dim(\Delta) + 1 = d.$$

Dimostrazione. Se $\Delta = \emptyset$, allora $K[\emptyset] \cong S/I_\emptyset \cong S/S \cong \{0\}$: la tesi è verificata poiché sia la dimensione di Krull dell'anello banale, sia la dimensione del complesso simpliciale vuoto, valgono $-\infty$.
Se $\Delta \neq \emptyset$, si ha che, poiché $\dim(K[\Delta])$ è la massima cardinalità di un insieme algebricamente indipendente di vertici, allora, per definizione di $K[\Delta]$, è proprio il massimo della cardinalità delle facce di Δ. □

Teorema 3.1.10. *Vale la seguente corrispondenza biunivoca:*

$$\{\textit{Complessi simpliciali su } [n]\} \xleftrightarrow[\Delta \rightsquigarrow I_\Delta]{} \{\textit{Ideali monomiali squarefree di } S\}$$

Inoltre $I_\Delta = \bigcap_{\sigma \in \Delta} \mathbf{m}^{\overline{\sigma}}$.

Dimostrazione. Per definizione di I_Δ, l'insieme dei monomi squarefree che non sono zero nel quoziente S/I_Δ è precisamente $\{\mathbf{x}^\sigma : \sigma \in \Delta\}$. Ciò implica che la mappa è effettivamente una bigezione.
Per la seconda parte dell'enunciato, si osserva che

$$\mathbf{x}^\tau \in \bigcap_{\sigma \in \Delta} \mathbf{m}^{\overline{\sigma}} \iff \forall_{\sigma \in \Delta}(\tau \cap \overline{\sigma} \neq \emptyset) \iff \forall_{\sigma \in \Delta}(\tau \nsubseteq \sigma) \iff \tau \notin \Delta \iff \mathbf{x}^\tau \in I_\Delta.$$

□

Osservazione 3.1.11. Si noti che, in generale, nell'intersezione $\bigcap_{\sigma \in \Delta} \mathbf{m}^{\overline{\sigma}}$ vi sono elementi superflui: si può osservare infatti che $\sigma \subseteq \tau$ se e solo se $\mathbf{m}^{\overline{\tau}} \subseteq \mathbf{m}^{\overline{\sigma}}$, perciò per eliminare gli elementi superflui dall'intersezione, basta considerare solo le faccette di Δ. Quest'ultima intersezione non è altro che la decomposizione di I_Δ in ideali primi di S.

Esempio 3.1.12.

- Sia l'ideale monomiale squarefree

$$I_\Gamma \coloneqq (x_1x_2x_3x_4, x_1x_2x_5, x_1x_3x_5, x_4x_5) \subseteq K[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5].$$

  Per calcolare Γ, il complesso simpliciale associato a I_Γ, si trova la decomposizione in ideali primi di I_Γ per poi utilizzare la corrispondenza del Teorema 3.1.10.

$$\begin{aligned}
I_\Gamma &= (x_1x_2x_3x_4, x_1x_2x_5, x_1x_3x_5, x_4x_5) = \\
&= (x_1, x_4x_5) \cap (x_1x_3x_5, x_2, x_4x_5) \cap (x_1x_2x_5, x_3, x_4x_5) \cap \\
&\quad \cap (x_1x_2x_5, x_1x_3x_5, x_4) = \\
&= (x_1, x_4) \cap (x_1, x_5) \cap (x_1, x_2, x_4x_5) \cap (x_2, x_3, x_4x_5) \cap (x_2, x_5) \cap \\
&\quad \cap (x_1, x_3, x_4x_5) \cap \cancel{(x_2, x_3, x_4x_5)} \cap (x_3, x_5) \cap \cancel{(x_1, x_4)} \cap \\
&\quad \cap (x_1x_3x_5, x_2, x_4) \cap (x_4, x_5) = \\
&= (x_1, x_4) \cap (x_1, x_5) \cap \cancel{(x_1, x_2, x_4)} \cap \cancel{(x_1, x_2, x_5)} \cap (x_2, x_3, x_4) \cap \\
&\quad \cap \cancel{(x_2, x_3, x_5)} \cap (x_2, x_5) \cap \cancel{(x_1, x_3, x_4)} \cap \cancel{(x_1, x_3, x_5)} \cap (x_3, x_5) \cap \\
&\quad \cap \cancel{(x_1, x_2, x_4)} \cap \cancel{(x_2, x_3, x_4)} \cap \cancel{(x_2, x_4, x_5)} \cap (x_4, x_5) = \\
&= (x_1, x_4) \cap (x_1, x_5) \cap (x_2, x_3, x_4) \cap (x_2, x_5) \cap (x_3, x_5) \cap (x_4, x_5).
\end{aligned}$$

  Dalla decomposizione appena trovata e dal fatto che

$$I_\Gamma = \bigcap_{\sigma \in \Gamma} \mathbf{m}^{\overline{\sigma}},$$

  segue che

$$\Gamma = \langle 123, 124, 134, 15, 234, 235 \rangle \subseteq 2^{[5]}.$$

- Ora si procede inversamente, riprendendo il complesso simpliciale C visto nell'Esempio 3.1.6 ed esibendo il suo ideale di Stanley-Reisner I_C.

  Si ricorda che $C = \langle 123, 24, 34, 5 \rangle \subseteq 2^{[5]}$: allora, omettendo questa volta i calcoli,

$$\begin{aligned}
I_C &= (x_4, x_5) \cap (x_1, x_3, x_5) \cap (x_1, x_2, x_5) \cap (x_1, x_2, x_3, x_4) = \\
&= \cdots = (x_1x_4, x_1x_5, x_2x_3x_4, x_2x_5, x_3x_5, x_4x_5).
\end{aligned}$$

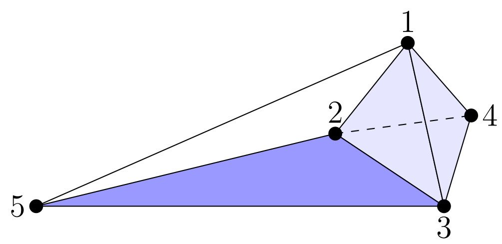


Figura 3.2: Una realizzazione geometrica del complesso simpliciale Γ

Per conoscere le proprietà di un modulo graduato, è molto utile conoscere la sua serie di Hilbert: si vuole quindi capire com'è fatta la serie di Hilbert del K-spazio vettoriale S/I_Δ.

Nella trattazione viene utilizzata la gradazione su $\mathbb{N}^n$ (gradazione fine), tuttavia è possibile convertire tutto nella gradazione su $\mathbb{N}$ (gradazione grezza), sostituendo ai monomi $x_1, \dots, x_n$ il monomio t.

Esempio 3.1.13. La serie di Hilbert di S come K-modulo è

$$\mathrm{HS}_S(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{1-x_i} \right),$$

ovvero la somma (infinita) di tutti i monomi di S. Sia $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$, allora

$$\mathrm{HS}_{S(-\mathbf{a})}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^{\mathbf{a}}}{\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)} = \mathbf{x}^{\mathbf{a}} \cdot \mathrm{HS}_S(\mathbf{x}).$$

Analogamente, dato $I \subseteq S$ un ideale monomiale, si ha che $\mathrm{HS}_{S/I}(\mathbf{x})$ è la somma di tutti i monomi che non sono in I.

Definizione 3.1.14. *Sia M un S-modulo graduato su $\mathbb{N}^n$. Il K-polinomio di M è il polinomio $\boldsymbol{K}_M(\mathbf{x})$ tale che*

$$\mathrm{HS}_M(\mathbf{x}) = \frac{\boldsymbol{K}_M(\mathbf{x})}{\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)}.$$

Dall'ultima definizione segue che conoscere la serie di Hilbert è equivalente a conoscere il K-polinomio. Il prossimo teorema permette di scrivere esplicitamente $\mathbf{K}_{S/I_\Delta}(\mathbf{x})$ in termini di Δ.

Definizione 3.1.15. *Sia* $\mathbf{a} = (\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_n) \in \mathbb{N}^n$ *un vettore. Si definisce il supporto di* $\mathbf{a}$

$$\mathrm{supp}(\mathbf{a}) \coloneqq \{i \in [n] : \mathrm{a}_i \neq 0\} \subseteq [n].$$

Teorema 3.1.16. *Sia* Δ *un complesso simpliciale su* $[n]$*, allora*

$$\boldsymbol{K}_{S/I_\Delta}(\mathbf{x}) = \sum_{\sigma\in\Delta}\left(\prod_{i\in\sigma} x_i \cdot \prod_{j\notin\sigma}(1-x_j)\right).$$

Dimostrazione. Poiché I_Δ è un ideale monomiale squarefree, dato $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$, si osserva che $\mathbf{x}^\mathbf{a} \in I_\Delta$ se e solo se $\mathbf{x}^{\mathrm{supp}(\mathbf{a})} \in I_\Delta$. Dal momento che $\mathrm{HS}_{S/I_\Delta}(\mathbf{x})$ è la somma dei monomi che non stanno in I_Δ, si ottiene:

$$\begin{aligned}\mathrm{HS}_{S/I_\Delta}(\mathbf{x}) &= \sum\{\mathbf{x}^\mathbf{a} : \mathbf{a} \in \mathbb{N}^n \wedge \mathrm{supp}(\mathbf{a}) \in \Delta\} = \\ &= \sum_{\sigma\in\Delta}\left(\sum\{\mathbf{x}^\mathbf{a} : \mathbf{a} \in \mathbb{N}^n \wedge \mathrm{supp}(\mathbf{a}) = \sigma\}\right) = \sum_{\sigma\in\Delta}(\mathbf{x}^\sigma) = \sum_{\sigma\in\Delta}\mathbf{x}^\sigma S = \\ &= \sum_{\sigma\in\Delta}\mathbf{x}^\sigma\{\text{monomi di } S\} = \sum_{\sigma\in\Delta}\left(\prod_{i\in\sigma}\frac{x_i}{1-x_i}\right).\end{aligned}$$

Allora

$$\mathbf{K}_{S/I_\Delta}(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^{n}(1-x_j)\mathrm{HS}_{S/I_\Delta}(\mathbf{x}) = \sum_{\sigma\in\Delta}\left(\prod_{i\in\sigma} x_i \cdot \prod_{j\notin\sigma}(1-x_j)\right).$$

□

Osservazione 3.1.17. Sia Δ un complesso simpliciale su $[n]$; allora, passando alla gradazione su $\mathbb{Z}$, si ottiene

$$\mathrm{HS}_{S/I_\Delta}(t) = \frac{1}{(1-t)^n}\sum_{i=0}^{d} f_{i-1}t^i(1-t)^{n-i}.$$

Cancellando $(1-t)^{n-d}$, si ottiene

$$\frac{1}{(1-t)^d}\sum_{i=0}^{d} f_{i-1}t^i(1-t)^{d-i} = \frac{h_{S/I_\Delta}(t)}{(1-t)^d}.$$

Si ricorda che h_{S/I_Δ} è l'h-polinomio di S/I_Δ, o anche l'h-polinomio di Δ.

Gli strumenti che si utilizzano per codificare le informazioni di un complesso simpliciale sono l'omologia e la coomologia. Vi sono diversi modi di costruire tali oggetti, che variano a seconda dell'argomento che si sta trattando. Per lo studio dei complessi simpliciali si sceglie di utilizzare l'omologia e la coomologia ridotta.

Definizione 3.1.18. *Sia Δ un complesso simpliciale su $[n]$. Si definisce $\widetilde{C}_\bullet(\Delta; K)$ il complesso di catene ridotto di Δ su un campo K come*

$$0 \to K^{F_{n-1}(\Delta)} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \xrightarrow{\partial_1} K^{F_0(\Delta)} \xrightarrow{\partial_0} K^{F_{-1}(\Delta)} \to 0,$$

dove, ovviamente, per ogni $i \in \{-1, 0, \dots, n-1\}$, $\widetilde{C}_i(\Delta; K) := K^{F_i(\Delta)}$. Per ogni $i \in \{0, \dots, n-1\}$, la mappa di bordo $\partial_i : K^{F_i(\Delta)} \to K^{F_{i-1}(\Delta)}$ è la mappa K-lineare definita, per ogni $\sigma \in F_i(\Delta)$, da

$$\partial_i(e_\sigma) = \sum_{j \in \sigma} sign(j, \sigma) e_{\sigma \smallsetminus j},$$

dove e_σ è l'elemento della base di $K^{F_i(\Delta)}$ associato a σ e $sgn(j, \sigma) = (-1)^{r-1}$ se j è l'r-esimo elemento di σ.

Si dimostra che quello appena definito è effettivamente un complesso di catene, allora è possibile dare la seguente definizione.

Definizione 3.1.19. *Sia Δ un complesso simpliciale su $[n]$. Si definisce, per ogni $i \in \mathbb{Z}$, l'i-esima omologia ridotta di Δ su K come il K-spazio vettoriale*

$$\widetilde{H}_i(\Delta; K) := \mathrm{Ker}(\partial_i)/\mathrm{Im}(\partial_{i+1}).$$

Osservazione 3.1.20.

- Se Δ non è il complesso irrilevante $\{\emptyset\}$, allora $\widetilde{H}_{-1}(\Delta; K) \cong \{0\}$ (invece $\widetilde{H}_{-1}(\{\emptyset\}; K) \cong K$);
- per ogni $i \in \mathbb{Z}$, $\widetilde{H}_i(\emptyset, K) \cong \widetilde{H}_i(2^{[n]}, K) \cong \{0\}$;
- per un qualsiasi complesso simpliciale $\Delta \neq \emptyset$, si ha che

  $$\dim_K(\widetilde{H}_0(\Delta; K)) = \pi_0(|\Delta|) - 1,$$

  dove π_0 è il funtore che conta le componenti connesse di uno spazio topologico.

Definizione 3.1.21. *Sia Δ un complesso simpliciale su $[n]$. Si definisce il complesso di cocatene ridotto di Δ su un campo K come $\widetilde{C}^{\bullet}(\Delta; K) := (\widetilde{C}_{\bullet}(\Delta; K))^*$. Lo spazio duale $K^{F_i^*(\Delta)} := (K^{F_i(\Delta)})^*$ ha base duale $\{e_\sigma^* : \sigma \in F_i(\Delta)\}$. Esplicitamente, si ha*

$$0 \to K^{F_{-1}^*(\Delta)} \xrightarrow{\partial^0} K^{F_0^*(\Delta)} \xrightarrow{\partial^1} \dots \xrightarrow{\partial^{n-1}} K^{F_{n-1}^*(\Delta)} \to 0,$$

dove, per ogni $i \in \{0, \dots, n-1\}$, la mappa di cobordo

$$\partial^i := \partial_i^* : K^{F_{i-1}^*(\Delta)} \to K^{F_i^*(\Delta)}$$

è la mappa K-lineare definita, per ogni $\sigma \in F_{i-1}(\Delta)$, da

$$\partial^i(e_\sigma^*) = \sum_{\substack{j \notin \sigma \\ j \cup \sigma \in \Delta}} sign(j, j \cup \sigma) e_{j \cup \sigma}^*.$$

Definizione 3.1.22. *Sia Δ un complesso simpliciale su $[n]$. Si definisce, per ogni $i \in \mathbb{Z}$, l'i-esima coomologia ridotta di Δ su K come il K-spazio vettoriale*

$$\widetilde{H}^i(\Delta; K) := \mathrm{Ker}(\partial^{i+1})/\mathrm{Im}(\partial^i).$$

Si può dimostrare che l'omologia e la coomologia ridotta sono degli invarianti omotopici.

Osservazione 3.1.23. Dato Δ un complesso simpliciale, si ha che, per ogni $i \in \mathbb{Z}$,

$$\widetilde{H}^i(\Delta; K) \cong \widetilde{H}_i(\Delta; K)^*.$$

Poiché entrambi sono due K-spazi vettoriali di dimensione finita, allora sono isomorfi al loro duale, perciò, per ogni $i \in \mathbb{Z}$,

$$\widetilde{H}^i(\Delta; K) \cong \widetilde{H}_i(\Delta; K).$$

Per studiare a fondo la struttura degli ideali di Stanley-Reisner, si devono studiare le loro RLGM. Ora si introducono degli oggetti che permettono di sintetizzare l'informazione di una mappa tra moduli graduati, le cosiddette matrici monomiali.

Definizione 3.1.24. *Siano $c, d \in \mathbb{N}^*$ e $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_c, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_d \in \mathbb{N}^n$. Una matrice monomiale è una matrice $(\lambda_{q,p})_{q,p}$ a coefficienti in un campo K che rappresenta una mappa K-lineare tra $\bigoplus_{p=1}^{c} S(-\mathbf{a}_p)$ e $\bigoplus_{q=1}^{d} S(-\mathbf{b}_q)$. Le colonne della matrice sono etichettate dagli elementi $\mathbf{a}_p$ (che definiscono la gradazione del dominio) e le righe* *dagli elementi* $\mathbf{b}_q$ *(gradazione codominio).*

Se, per qualche $q \in [d]$ *e per qualche* $p \in [c]$ $\lambda_{q,p} \neq 0$, *allora* $\mathbf{a}_p \succeq \mathbf{b}_q$. *L'entrata* $\lambda_{q,p}$ *indica che il vettore che genera* $S(-\mathbf{a}_p)$, *ovvero* $\mathbf{x}^{\mathbf{a}_p}$ *è mappato nel vettore che genera* $S(-\mathbf{b}_q)$, *ovvero* $\mathbf{x}^{\mathbf{b}_q}$, *moltiplicato per un fattore* $\lambda_{q,p}\mathbf{x}^{\mathbf{a}_p-\mathbf{b}_q}$ *(si osserva che il grado è preservato).*

$$\bigoplus_{p=1}^{c} S(-\mathbf{a}_p) \xrightarrow{\begin{array}{cccc} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_c & \\ \lambda_{1,1} & \cdots & \lambda_{1,c} & \mathbf{b}_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{d,1} & \cdots & \lambda_{d,c} & \mathbf{b}_d \end{array}} \bigoplus_{q=1}^{d} S(-\mathbf{b}_q).$$

Le matrici monomiali in questa tesi si usano per scrivere le RLGM di anelli di Stanley-Reisner. In questo caso particolare, i vettori che determinano la gradazione dei moduli hanno tutte entrate che sono 0 *o* 1 : *in queste circostanze si scriveranno come etichette semplicemente i supporti di tali vettori.*

Osservazione 3.1.25. Se ci si dimentica della gradazione, si può scrivere la precedente mappa tra S^c e S^d come

$$S^c \xrightarrow{\begin{bmatrix} \lambda_{1,1}\mathbf{x}^{\mathbf{a}_1-\mathbf{b}_1} & \cdots & \lambda_{1,c}\mathbf{x}^{\mathbf{a}_c-\mathbf{b}_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{d,1}\mathbf{x}^{\mathbf{a}_1-\mathbf{b}_d} & \cdots & \lambda_{d,c}\mathbf{x}^{\mathbf{a}_c-\mathbf{b}_d} \end{bmatrix}} S^d$$

Definizione 3.1.26. *Una matrice monomiale* $(\lambda_{q,p})_{q,p}$ *è detta minimale se, per ogni* $p \in [c]$ *e* $q \in [d]$ *tali che* $\mathbf{a}_p = \mathbf{b}_q$, *si ha che* $\lambda_{q,p} = 0$. *Dimenticandosi della gradazione, questa è la stessa condizione di minimalità che viene imposta sulle matrici delle RLGM nella Definizione 1.10.12.*

Esempio 3.1.27. Si riprendono i complessi simpliciali C e Γ dei precedenti esempi per calcolarne le omologie e le coomologie ridotte. Dato che si stanno considerando i coefficienti in K, grazie all'Osservazione 3.1.23 basta calcolare solo le omologie o solo le coomologie, dal momento che esse coincidono. Per vedere entrambi i casi, per il complesso C si calcolano le omologie e per il complesso Γ si calcolano le coomologie.

- Analizzando la realizzazione geometrica $|C|$ della Figura 3.1, si osserva che:
  - $F_{-1}(C) = \{\emptyset\}$;

- $F_0(C) = \{1,2,3,4,5\}$;
- $F_1(C) = \{12,13,23,24,34\}$;
- $F_2(C) = \{123\}$;
- per ogni $i > 2$, $F_i(C) = \emptyset$.

Il complesso di catene ridotto $\widetilde{C}_\bullet(C;K)$ è

$$0 \to K \xrightarrow{\partial_2 = \begin{array}{c|c} 123 & \\ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 12 \\ 13 \\ 23 \\ 24 \\ 34 \end{array} \end{array}} K^5 \xrightarrow{\partial_1 = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} 12 & 13 & 23 & 24 & 34 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \end{array}} K^5 \xrightarrow{\partial_0 = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \emptyset \end{array}} K \to 0.$$

Si calcola che

$$\mathrm{rk}(\partial_2) = 1, \mathrm{rk}(\partial_1) = 3 \text{ e } \mathrm{rk}(\partial_0) = 1,$$

allora:

- per ogni $i > 2$, $\widetilde{H}_i(C;K) \cong \{0\}$
- $\widetilde{H}_2(C;K) = \mathrm{Ker}(\partial_2)/\mathrm{Im}(\partial_3) \cong \{0\}/\{0\} \cong \{0\}$;
- $\widetilde{H}_1(C;K) = \mathrm{Ker}(\partial_1)/\mathrm{Im}(\partial_2) \cong K^2/K \cong K$;
- $\widetilde{H}_0(C;K) = \mathrm{Ker}(\partial_0)/\mathrm{Im}(\partial_1) \cong K^4/K^3 \cong K$;
- $\widetilde{H}_{-1}(C;K) = \mathrm{Ker}(\partial_{-1})/\mathrm{Im}(\partial_0) \cong K/K \cong \{0\}$.

Riassumendo, si ottiene che, come ci si aspetta dal grafico di $|C|$,

$$\widetilde{H}_i(C;K) \cong \begin{cases} K & \text{se } i \in \{0,1\} \\ \{0\} & \text{se } i \notin \{0,1\} \end{cases}.$$

- Analizzando poi la realizzazione geometrica $|\Gamma|$ della Figura 3.2, si osserva che:
  - $F_{-1}(\Gamma) = \{\emptyset\}$;

- $F_0(\Gamma) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;
- $F_1(\Gamma) = \{12, 13, 14, 15, 23, 24, 25, 34, 35\}$;
- $F_2(\Gamma) = \{123, 124, 134, 234, 235\}$;
- per ogni $i > 2$, $F_i(\Gamma) = \emptyset$.

Il complesso di cocatene ridotto $\widetilde{C}^{\bullet}(\Gamma; K)$ è

$$0 \to K^* \xrightarrow{\partial^0 = \begin{array}{cc} \emptyset & \\ \left[\begin{matrix}1\\1\\1\\1\\1\end{matrix}\right] & \begin{matrix}1\\2\\3\\4\\5\end{matrix}\end{array}} (K^5)^* \xrightarrow{\partial^1 = \begin{array}{cc} \begin{matrix}\ 1 & \ 2 & \ 3 & 4 & 5\end{matrix} & \\ \left[\begin{matrix}-1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1\end{matrix}\right] & \begin{matrix}12\\13\\14\\15\\23\\24\\25\\34\\35\end{matrix}\end{array}} (K^9)^* \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\partial^2 = \begin{array}{cc} \begin{matrix}12 & 13 & 14 & 15 & 23 & 24 & 25 & 34 & 35\end{matrix} & \\ \left[\begin{matrix}1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1\end{matrix}\right] & \begin{matrix}123\\124\\134\\234\\235\end{matrix}\end{array}} (K^5)^* \to 0.$$

Si calcola che

$$\mathrm{rk}(\partial^0) = 1, \mathrm{rk}(\partial^1) = 4 \text{ e } \mathrm{rk}(\partial^2) = 4,$$

allora:

- $\widetilde{H}^{-1}(\Gamma; K) = \mathrm{Ker}(\partial^0)/\mathrm{Im}(\partial^{-1}) \cong \{0\}/\{0\} \cong \{0\}$;
- $\widetilde{H}^{0}(\Gamma; K) = \mathrm{Ker}(\partial^1)/\mathrm{Im}(\partial^{0}) \cong K/K \cong \{0\}$;
- $\widetilde{H}^{1}(\Gamma; K) = \mathrm{Ker}(\partial^2)/\mathrm{Im}(\partial^{1}) \cong K^5/K^4 \cong K$;
- $\widetilde{H}^{2}(\Gamma; K) = \mathrm{Ker}(\partial^3)/\mathrm{Im}(\partial^{2}) \cong K^5/K^4 \cong K$;
- per ogni $i > 2$, $\widetilde{H}^{i}(\Gamma; K) \cong \{0\}$.

Riassumendo, si ottiene che, come ci si aspetta dal grafico di $|\Gamma|$,

$$\widetilde{H}^i(\Gamma;K) \cong \begin{cases} K & \text{se } i \in \{1,2\} \\ \{0\} & \text{se } i \notin \{1,2\} \end{cases}.$$

3.2 Formula di Hochster

L'obiettivo di questa sezione è quello di mettere in relazione degli invarianti fondamentali associati a I_Δ, ovvero i suoi numeri di Betti graduati, con l'omologia e la coomologia ridotta di Δ.

Definizione 3.2.1. *Siano $I \subseteq S$ un ideale monomiale e $\mathbf{b} \in \mathbb{N}^n$. Si definisce il complesso simpliciale alto di Koszul in grado $\mathbf{b}$ come*

$$K^{\mathbf{b}}(I) \coloneqq \{\sigma \subseteq [n] : \mathbf{x}^{\mathbf{b}-V(\sigma)} \in I\}.$$

Osservazione 3.2.2. Si osserva che $K^{\mathbf{b}}(I)$ è effettivamente un complesso simpliciale. Siano infatti $\tau \subseteq \sigma \subseteq [n]$, con $\sigma \in K^{\mathbf{b}}(I)$, allora, poiché vale che $V(\sigma \smallsetminus \tau) = V(\sigma) - V(\tau)$,

$$\mathbf{x}^{\mathbf{b}-V(\tau)} = \mathbf{x}^{\mathbf{b}-V(\tau)+V(\sigma)-V(\sigma)} = \mathbf{x}^{\mathbf{b}-V(\sigma)}\mathbf{x}^{V(\sigma\smallsetminus\tau)} \in I.$$

Allora $\tau \in K^{\mathbf{b}}(I)$ e si conclude per l'arbitrarietà di σ e τ.

Teorema 3.2.3. *Siano $I \subseteq S$ un ideale monomiale e $\mathbf{b} \in \mathbb{N}^n$. Allora, per ogni $i \in \mathbb{Z}$,*

$$\beta_{i+1,\mathbf{b}}(S/I) \overset{(i)}{=} \beta_{i,\mathbf{b}}(I) \overset{(ii)}{=} \dim_K(\widetilde{H}_{i-1}(K^{\mathbf{b}}(I);K))$$

Dimostrazione.

(i) Si ottiene facilmente. Sia infatti una RLGM di S/I

$$\dots \xrightarrow{f_2} S^{\gamma_1} \xrightarrow{f_1} S \xrightarrow{\pi} S/I \to 0,$$

dove è possibile prendere come ultima mappa la mappa al quoziente π poiché S/I è generato da $\overline{1}$ come S-modulo; allora si ottiene che

$$\dots \xrightarrow{f_2} S^{\gamma_1} \xrightarrow{f_1} \mathrm{Im}(f_1) \to 0,$$

è una RLGM di $\mathrm{Im}(f_1) = \mathrm{Ker}(\pi) = I$ e da ciò segue la tesi.

(ii) Poiché il complesso di Koszul è una RLGM di K come S-modulo, si sa già che, per ogni $i \in \mathbb{Z}$,

$$\beta_{i,\mathbf{b}}(I) = \dim_K(\mathrm{Tor}_i^S(K, I)_{\mathbf{b}}) = \dim_K(H_i(\mathbb{K}_\bullet \otimes_S I)_{\mathbf{b}})$$

e resta da dimostrare che $H_i(\mathbb{K}_\bullet \otimes_S I)_{\mathbf{b}} \cong \widetilde{H}_{i-1}(K^{\mathbf{b}}(I); K)$ come K-spazio vettoriale.

Si ha che, per ogni $i \in \mathbb{Z}$,

$$\mathbb{K}_i \cong \bigoplus_{\substack{\sigma \subseteq [n] \\ |\sigma|=i}} S(-V(\sigma)) \implies (\mathbb{K}_i)_{\mathbf{b}} \cong \bigoplus_{\substack{\sigma \subseteq [n] \\ |\sigma|=i}} S(-V(\sigma))_{\mathbf{b}},$$

$$\text{con } S(-V(\sigma))_{\mathbf{b}} \cong \langle \mathbf{x}^{\mathbf{b}-V(\sigma)} \rangle \cong \begin{cases} K & \text{se } \mathbf{b} \succeq V(\sigma) \\ \{0\} & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Allora, per ogni $i \in \mathbb{Z}$,

$$(\mathbb{K}_i \otimes_S I)_{\mathbf{b}} \cong \bigoplus_{\substack{\sigma \subseteq [n] \\ |\sigma|=i}} I(-V(\sigma))_{\mathbf{b}} \cong \bigoplus_{\substack{\sigma \subseteq [n] \\ |\sigma|=i}} \begin{cases} K & \text{se } \mathbf{x}^{\mathbf{b}-V(\sigma)} \in I \\ \{0\} & \text{se } \mathbf{x}^{\mathbf{b}-V(\sigma)} \notin I \end{cases} \cong \bigoplus_{\substack{\sigma \subseteq [n] \\ |\sigma|=i \\ \mathbf{x}^{\mathbf{b}-V(\sigma)} \in I}} K \cong$$

$$\cong K^{F_{i-1}(K^{\mathbf{b}}(I))} \cong \widetilde{C}_{i-1}(K^{\mathbf{b}}(I); K).$$

Si conclude osservando che le matrici che rappresentano le mappe del complesso $\mathbb{K}_\bullet \otimes_S I$ sono le stesse, a meno di riscalare di una posizione omologica, di quelle del complesso $\widetilde{C}_\bullet(K^{\mathbf{b}}(I); K)$: allora le omologie coincidono.

□

Prima di enunciare il teorema di Hochster, è necessario che siano introdotti alcuni altri concetti.

Definizione 3.2.4. *Sia $I = (\mathbf{x}^{\sigma_1}, \ldots, \mathbf{x}^{\sigma_c}) \subseteq S$ un ideale monomiale squarefree. Il duale di Alexander di I è l'ideale*

$$I^* := \bigcap_{i=1}^{c} \mathfrak{m}^{\sigma_i}.$$

Sia Δ un complesso simpliciale su $[n]$. Il duale di Alexander di Δ è il complesso simpliciale Δ^* tale $I_{\Delta^*} = I_\Delta^*$.

Proposizione 3.2.5. *Sia Δ un complesso simpliciale su $[n]$, allora*

$$\Delta^* = \{\sigma \subseteq [n] : \overline{\sigma} \notin \Delta\}.$$

Dimostrazione. Si ha che $I_\Delta = (\mathbf{x}^\sigma : \sigma \notin \Delta)$, allora, per il Teorema 3.1.10,

$$\bigcap_{\overline{\sigma} \in \Delta^*} \mathfrak{m}^\sigma = \bigcap_{\sigma \in \Delta^*} \mathfrak{m}^{\overline{\sigma}} = I_{\Delta^*} = I_\Delta^* = \bigcap_{\sigma \notin \Delta} \mathfrak{m}^\sigma,$$

da cui, per ogni $\sigma \subseteq [n]$, $\sigma \notin \Delta$ se e solo se $\overline{\sigma} \in \Delta^*$.

Per quanto appena visto, è possibile scrivere

$$\Delta^* = \{\overline{\sigma} \subseteq [n] : \overline{\sigma} \in \Delta^*\} = \{\overline{\sigma} \subseteq [n] : \sigma \notin \Delta\} = \{\sigma \subseteq [n] : \overline{\sigma} \notin \Delta\}.$$

□

La seguente proposizione giustifica l'uso del termine "dualità".

Proposizione 3.2.6. *Siano Δ un complesso simpliciale su $[n]$ e $I \subseteq S$ un ideale monomiale squarefree. Allora*

$$(\Delta^*)^* \overset{(i)}{=} \Delta \ \textit{e} \ (I^*)^* \overset{(ii)}{=} I.$$

Dimostrazione.

(i) Per il Teorema 3.2.5, si ha che $\Delta^* = \{\sigma \in [n] : \overline{\sigma} \notin \Delta\}$. Da ciò segue che, per ogni $\sigma \in \Delta$,

$$\sigma \in \Delta^* \text{ se e solo se } \overline{\sigma} \notin \Delta,$$

che equivale a

$$\sigma \notin \Delta^* \text{ se e solo se } \overline{\sigma} \in \Delta,$$

ovvero

$$\overline{\sigma} \notin \Delta^* \text{ se e solo se } \sigma \in \Delta.$$

Segue che

$$(\Delta^*)^* = \{\sigma \in [n] : \overline{\sigma} \notin \Delta^*\} = \{\sigma \in [n] : \sigma \in \Delta\} = \Delta.$$

(ii) Dal Teorema 3.1.10, si ha che esiste Δ un complesso simpliciale su $[n]$ tale che $I = I_\Delta$. Allora, per quanto visto in precedenza,

$$(I^*)^* = (I_\Delta^*)^* = (I_{\Delta^*})^* = I_{(\Delta^*)^*} = I_\Delta = I.$$

$\square$

Esempio 3.2.7. Sia Δ un complesso simpliciale, allora si è visto che le faccette di Δ^* sono i complementari delle non-faccette di Δ. Ecco alcuni esempi.

- Sia $\Delta_1 = 2^{[n]}$ un complesso simpliciale su $[n]$, allora

$$\Delta_1^* = \{\sigma \subseteq [n] : \overline{\sigma} \notin 2^{[n]}\} = \emptyset.$$

- Sia $\Delta_2 = \langle 12, 23, 13, 4 \rangle \subseteq 2^{[4]}$,

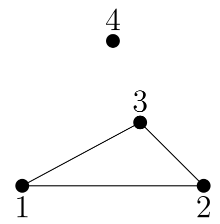


Figura 3.3: Una realizzazione geometrica del complesso simpliciale Δ_2

allora

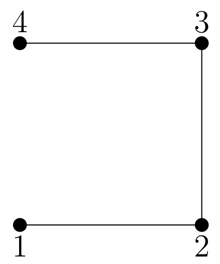
$$\Delta_2^* = \{\sigma \subseteq [n] : \overline{\sigma} \notin \Delta_2\} = \{4, 23, 13, 12\} = \Delta_2,$$

ovvero Δ_2 è il duale di se stesso.

- Sia $\Delta_3 = \langle 12, 23, 34 \rangle \subseteq 2^{[4]}$, allora

$$\Delta_3^* = \langle 24, 23, 13 \rangle.$$

Questa volta non vale che $\Delta_3^* = \Delta_3$, però si ha che $|\Delta_3^*| \cong |\Delta_3|$.

$\Delta_3 =$ 

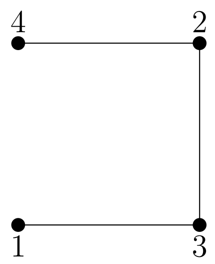
$\Delta_3^* =$ 

Figura 3.4: Una realizzazione geometrica dei complessi simpliciali Δ_3 e Δ_3^*

- Sia C il complesso simpliciale degli esempi precedenti, allora
$$C^* = \langle 15, 235, 234, 134, 124, 123 \rangle = \Gamma.$$
Si è quindi scoperto che i complessi simpliciali degli esempi precedenti C e Γ sono uno il duale dell'altro.

Definizione 3.2.8. *Sia Δ un complesso simpliciale e $\sigma \in \Delta$ una sua faccia. Si definisce il link di σ in Δ come*
$$lk_\Delta(\sigma) \coloneqq \{\tau \in \Delta : \tau \cup \sigma \in \Delta \ \ \wedge \ \ \tau \cap \sigma = \emptyset\}.$$

È finalmente giunto il momento di enunciare la formula di Hochster, per ora nella sua versione duale.

Teorema 3.2.9 (Formula di Hochster, versione duale)**.** *Siano Δ un complesso simpliciale su $[n]$ e $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$. Se $\mathbf{a}$ è squarefree, allora, per ogni $i \in \mathbb{Z}$,*
$$\beta_{i+1,\mathbf{a}}(S/I_\Delta) \overset{(i)}{=} \beta_{i,\mathbf{a}}(I_\Delta) \overset{(ii)}{=} \dim_K(\widetilde{H}_{i-1}(lk_{\Delta^*}(\overline{supp(\mathbf{a})}); K));$$
se $\mathbf{a}$ non è squarefree, allora, per ogni $i \in \mathbb{Z}$,
$$\beta_{i+1,\mathbf{a}}(S/I_\Delta) \overset{(i)}{=} \beta_{i,\mathbf{a}}(I_\Delta) \overset{(ii)}{=} 0.$$

Dimostrazione.

(i) Grazie al Teorema 3.2.3, il risultato vale per qualsiasi ideale monomiale I e per qualunque $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$.

(ii) Caso $\mathbf{a}$ squarefree. Prendendo $\mathbf{1} \coloneqq (1, \dots, 1)$, si osserva che
$$\begin{aligned} K^{\mathbf{1}}(I_\Delta) &= \{\tau \subseteq [n] : \mathbf{x}^{\mathbf{1}-V(\tau)} \in I_\Delta\} = \{\tau \subseteq [n] : \mathrm{supp}(\mathbf{1}) \setminus \tau \notin \Delta\} = \\ &= \{\tau \subseteq [n] : \overline{\tau} \notin \Delta\} = \Delta^*. \end{aligned}$$
Sfruttando quest'ultimo risultato e il fatto che, poiché $\mathbf{a}$ è squarefree, vale il contenimento $K^{\mathbf{a}}(I_\Delta) \subseteq K^{\mathbf{1}}(I_\Delta)$, si ha
$$\begin{aligned} K^{\mathbf{a}}(I_\Delta) &= \{\tau \subseteq [n] : \mathbf{x}^{\mathbf{a}-V(\tau)} \in I_\Delta\} = \{\tau \in K^{\mathbf{1}}(I_\Delta) : \mathbf{x}^{\mathbf{a}-V(\tau)} \in I_\Delta\} = \\ &= \{\tau \in K^{\mathbf{1}}(I_\Delta) : \mathrm{supp}(\mathbf{a}) \setminus \tau \notin \Delta\} = \\ &= \{\tau \in K^{\mathbf{1}}(I_\Delta) : \overline{\mathrm{supp}(\mathbf{a}) \setminus \tau} \in \Delta^*\} = \\ &= \{\tau \in K^{\mathbf{1}}(I_\Delta) : \overline{\mathrm{supp}(\mathbf{a}) \setminus \tau} \in K^{\mathbf{1}}(I_\Delta)\} = \\ &= \{\tau \in K^{\mathbf{1}}(I_\Delta) : \tau \cup \overline{\mathrm{supp}(\mathbf{a})} \in K^{\mathbf{1}}(I_\Delta) \wedge \tau \subseteq \mathrm{supp}(\mathbf{a})\} = \\ &= \mathrm{lk}_{K^{\mathbf{1}}(I_\Delta)}(\overline{\mathrm{supp}(\mathbf{a})}). \end{aligned}$$

In questi ultimi risultati si è utilizzata più volte la Proposizione 3.2.5. Da tutto ciò e dal Teorema 3.2.3, segue la tesi.

Caso $\mathbf{a}$ non squarefree. Sia $j \in [n]$ tale che $\mathbf{a}_j \geq 2$; allora, poiché I_Δ è squarefree, si osserva che, per ogni $\tau \subseteq [n]$,

$$\mathbf{x}^{\mathbf{a}-V(\tau\cup j)} \in I_\Delta \text{ se e solo se } \mathbf{x}^{\mathbf{a}-V(\tau)} \in I_\Delta,$$

che è equivalente a

$$\tau \cup j \in K^{\mathbf{a}}(I_\Delta) \text{ se e solo se } \tau \in K^{\mathbf{a}}(I_\Delta).$$

Quest'ultimo fatto prova che $K^{\mathbf{a}}(I_\Delta)$ è un cono con vertice j. Allora $K^{\mathbf{a}}(I_\Delta)$ è contraibile, quindi, dal Teorema 3.2.3, per ogni $i \in \mathbb{Z}$,

$$\beta_{i,\mathbf{a}}(I_\Delta) = \dim_K(\widetilde{H}_{i-1}(K^{\mathbf{a}}(I_\Delta); K)) = 0.$$

□

Definizione 3.2.10. *Il complesso di coKoszul $\mathbb{K}^\bullet$ è il complesso di cocatene ridotto*

$$0 \to \mathbb{K}^0 \xrightarrow{f^0} \mathbb{K}^1 \xrightarrow{f^1} \dots \xrightarrow{f^{n-1}} \mathbb{K}^n \to 0.$$

Per ogni $i \in \{0, \dots, n-1\}$, $\mathbb{K}^i \cong K^{F^*_{i-1}(2^{[n]})}$ e la matrice monomiale associata alla mappa f^i ha le stesse entrate scalari della matrice monomiale associata alla mappa ∂^i del complesso $\widetilde{C}^\bullet(2^{[n]}; K)$; tuttavia, per ogni $\tau \in [n]$, nella riga e nella colonna corrispondenti a $e^*_{\overline{\tau}}$, viene posta l'etichetta τ e i gradi omologici sono riscalati in modo che $e^*_{\overline{\tau}}$ si trovi nel grado $n - |\overline{\tau}| = |\tau|$.

Proposizione 3.2.11. *Analogamente al complesso di Koszul, anche il complesso di coKoszul $\mathbb{K}^\bullet$ è una RLGM di K.*

Dimostrazione. Sia $\mathbf{b} \in \mathbb{N}^n$ e sia $\mathrm{supp}(\mathbf{b}) =: \sigma \subseteq [n]$. La parte di grado $\mathbf{b}$ $(\mathbb{K}^\bullet)_{\mathbf{b}}$ del complesso $\mathbb{K}^\bullet$ proviene dalle righe e dalle colonne etichettate con le facce $\tau \subseteq \sigma$, le quali corrispondono, per definizione del complesso di coKoszul, agli elementi $e^*_{\overline{\tau}}$. Dunque, se si pensa $(\mathbb{K}^\bullet)_{\mathbf{b}}$ come complesso di K-spazi vettoriali, esso è un sottocomplesso di $\widetilde{C}^\bullet(2^{[n]}; K)$, il quale, come K-spazio vettoriale, ha base

$$\{e^*_{\overline{\tau}} : \tau \subseteq \sigma\} = \{e^*_{\overline{\sigma \smallsetminus \tau}} : \tau \subseteq \sigma\} = \{e^*_{\tau \cup \overline{\sigma}} : \tau \subseteq \sigma\}.$$

Allora, a meno di traslare le posizioni omologiche, vi è un isomorfismo di complessi

$$e^*_{\tau\cup\overline{\sigma}} \in (\mathbb{K}^\bullet)_{V(\sigma)} \mapsto \mathrm{sign}(\tau, \overline{\sigma}) e^*_\tau \in \widetilde{C}^\bullet(\langle\sigma\rangle; K),$$

dove $\mathrm{sign}(\tau, \overline{\sigma})$ è il segno della permutazione $(\tau, \overline{\sigma})$. Dato che, per ogni $\sigma \neq \emptyset$, il complesso simpliciale $\langle \sigma \rangle$ è contraibile, allora

$$\widetilde{H}^i(\langle \sigma \rangle; K) \cong \begin{cases} K & \text{se } i = -1 \text{ e } \sigma = \emptyset \\ \{0\} & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Dunque

$$H^i(\mathbb{K}^\bullet) \cong \bigoplus_{\sigma \in [n]} (\mathbb{K}^\bullet)_{V(\sigma)} \cong \bigoplus_{\sigma \in [n]} \widetilde{H}^{i-1}(\langle \sigma \rangle; K) \cong \bigoplus_{\sigma \in [n]} \begin{cases} K & \text{se } i = 0 \text{ e } \sigma = \emptyset \\ \{0\} & \text{altrimenti} \end{cases} \cong$$

$$\cong \begin{cases} K & \text{se } i = 0 \\ \{0\} & \text{se } i \neq 0 \end{cases}.$$

Segue immediatamente che il complesso $\mathbb{K}^\bullet \to K \to 0$ è esatto e quindi, poiché tutte le entrate delle matrici associate alle mappe del complesso $\mathbb{K}^\bullet$ sono nel massimale irrilevante, esso è una RLGM di K.

□

Teorema 3.2.12. *Sia Δ un complesso simpliciale su $[n]$. Allora, per ogni $i \in \mathbb{Z}$,*

$$\widetilde{H}_{i-1}(\Delta^*; K) \cong \widetilde{H}^{n-2-i}(\Delta; K).$$

Dimostrazione. Dal Teorema 3.2.9 con $\mathbf{a} = \mathbf{1}$, si ha che

$$\widetilde{H}_{i-1}(lk_{\Delta^*}(\emptyset); K) \cong \widetilde{H}_{i-1}(\Delta^*; K) \cong \mathrm{Tor}^S_{i+1}(K, S/I_\Delta)_{\mathbf{1}}.$$

È possibile calcolare il Tor anche prendendo $\mathbb{K}^\bullet$ come risoluzione libera di K e poi tensorizzando con S/I_Δ. Si ricorda che, come visto nella dimostrazione della proposizione precedente, $(\mathbb{K}^\bullet)_{\mathbf{1}} \cong \widetilde{C}^\bullet(2^{[n]}; K)$. Si osserva che

$$(\mathbb{K}^\bullet \otimes_S S/I_\Delta)_{\mathbf{1}} \cong (\mathbb{K}^\bullet)_{\mathbf{1}}/(I_\Delta \cdot \mathbb{K}^\bullet)_{\mathbf{1}}$$

può essere visto come il sottocomplesso $\widetilde{C}^\bullet(\Delta; K)$: infatti, dato $1_{\overline{\tau}}$ il vettore della base di $\mathbb{K}^\bullet$ in grado $V(\overline{\tau})$, si ha che $\mathbf{x}^\tau \cdot 1_{\overline{\tau}} \in (\mathbb{K}^\bullet)_{\mathbf{1}}$ corrisponde all'elemento $e^*_\tau \in \widetilde{C}^\bullet(2^{[n]}; K)$ e

$$\mathbf{x}^\tau \cdot 1_{\overline{\tau}} \notin (I_\Delta \cdot \mathbb{K}^\bullet)_{\mathbf{1}} \iff \mathbf{x}^\tau \notin I_\Delta \iff \tau \in \Delta.$$

Per come sono disposti i gradi omologici di $\mathbb{K}^\bullet$, si ha che, per ogni $i \in \mathbb{Z}$,

$$H_i((\mathbb{K}^\bullet \otimes_S S/I_\Delta)_{\mathbf{1}}) \cong \widetilde{H}^{n-1-i}(\Delta; K),$$

dunque, per ogni $i \in \mathbb{Z}$,

$$\widetilde{H}_{i-1}(\Delta^*; K) \cong \mathrm{Tor}^S_{i+1}(K, S/I_\Delta)_{\mathbf{1}} \cong \widetilde{H}^{n-2-i}(\Delta; K).$$

□

Definizione 3.2.13. *Siano $I \subsetneq S$ un ideale monomiale, $\mathbf{b} \in \mathbb{N}^n$ e il vettore $\mathbf{b}' := \mathbf{b} - V(supp(\mathbf{b})) \in \mathbb{N}^n$ ottenuto togliendo 1 dalle coordinate non nulle di $\mathbf{b}$. Si definisce il complesso simpliciale basso di Koszul di S/I in grado $\mathbf{b}$ come*

$$K_{\mathbf{b}}(I) := \{\tau \subseteq [n] : V(\tau) \preceq \mathbf{b} \ \wedge \ \mathbf{x}^{\mathbf{b}'+V(\tau)} \notin I\}$$

Osservazione 3.2.14. Si osserva che $K_{\mathbf{b}}(I)$ è effettivamente un complesso simpliciale. Siano infatti $\tau \subseteq \sigma \subseteq [n]$, con $\sigma \in K_{\mathbf{b}}(I)$, allora, poiché vale che $V(\sigma \setminus \tau) = V(\sigma) - V(\tau)$, si ha

$$\mathbf{x}^{\mathbf{b}'+V(\sigma)} = \mathbf{x}^{\mathbf{b}'+V(\tau)+V(\sigma\setminus\tau)} = \mathbf{x}^{\mathbf{b}'+V(\tau)}\mathbf{x}^{V(\sigma\setminus\tau)}.$$

Dal momento che $\mathbf{x}^{\mathbf{b}'+V(\sigma)} \notin I$, si ha che $\mathbf{x}^{\mathbf{b}'+V(\tau)} \notin I$. Allora $\tau \in K^{\mathbf{b}}(I)$ e si conclude per l'arbitrarietà di σ e τ.

Lemma 3.2.15. *Siano $I \subsetneq S$ un ideale monomiale, $\mathbf{b} \in \mathbb{N}^n$ e $\sigma := \mathrm{supp}(\mathbf{b})$ Allora, se visti come sottocomplessi di $\Delta := \langle\sigma\rangle$, $K_{\mathbf{b}}(I)^* = K^{\mathbf{b}}(I)$.*

Dimostrazione. Si osserva che, dato che si sta considerando tutto all'interno di Δ, il complementare di $\tau \in \Delta$ è $\sigma \setminus \tau$. Come sottocomplessi di Δ,

$$\begin{aligned}K_{\mathbf{b}}(I)^* = \{\tau \in \Delta : \overline{\tau} \notin K_{\mathbf{b}}(I)\} = \{\tau \in \Delta : \mathbf{x}^{b-V(\overline{\tau})} \notin I\} = \\ = \{\tau \in \Delta : \mathbf{x}^{b-V(\sigma)+V(\tau)} \notin I\} = K^{\mathbf{b}}(I).\end{aligned}$$

□

Teorema 3.2.16. *Siano $I \subseteq S$ un ideale monomiale, $\mathbf{b} \in \mathbb{N}^n$ e $\sigma = \mathrm{supp}(\mathbf{b}) \in [n]$. Allora*

$$\beta_{i,\mathbf{b}}(S/I) = \beta_{i-1,\mathbf{b}}(I) = \dim_K(\widetilde{H}^{|\sigma|-i-1}(K_{\mathbf{b}}(I); K)).$$

Dimostrazione. La dimostrazione segue direttamente applicando il Teorema 3.2.3, il Teorema 3.2.12 e il Lemma 3.2.15. □

Definizione 3.2.17. *Siano Δ un complesso simpliciale su $[n]$ e $\sigma \subseteq [n]$. Si definisce la restrizione di Δ a σ come*

$$\Delta_{|\sigma} := \{\tau \in \Delta : \tau \subseteq \sigma\}.$$

Teorema 3.2.18 (Formula di Hochster)**.** *Siano Δ un complesso simpliciale su $[n]$, $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$ e $\sigma = \mathrm{supp}(\mathbf{a})$. Se $\mathbf{a}$ è squarefree, allora, per ogni $i \in \mathbb{Z}$,*

$$\beta_{i,\mathbf{a}}(S/I_\Delta) = \beta_{i-1,\mathbf{a}}(I_\Delta) = \dim_K(\widetilde{H}^{|\sigma|-i-1}(\Delta_{|\sigma}; K));$$

se $\mathbf{a}$ non è squarefree, allora, per ogni $i \in \mathbb{Z}$,

$$\beta_{i+1,\mathbf{a}}(S/I_\Delta) = \beta_{i,\mathbf{a}}(I_\Delta) = 0.$$

Dimostrazione. Se $\mathbf{a}$ non è squarefree, allora la tesi era già stata dimostrata nella versione duale del teorema.

Se $\mathbf{a}$ è squarefree, ponendo $\mathbf{a}' \coloneqq \mathbf{a} - V(\mathrm{supp}(\mathbf{a}))$, si ha che $\mathbf{a}' = (0, \dots, 0)$; la tesi segue dal fatto che

$$\begin{aligned} K_\sigma(I_\Delta) &= \{\tau \subseteq [n] : V(\tau) \preceq \mathbf{a} \ \wedge \ \mathbf{x}^{\mathbf{a}'+V(\tau)} \notin I_\Delta\} = \\ &= \{\tau \subseteq [n] : V(\tau) \preceq \mathbf{a} \ \wedge \ \mathbf{x}^{V(\tau)} \notin I_\Delta\} = \\ &= \{\tau \subseteq \sigma : \mathrm{supp}(V(\tau)) \in \Delta\} = \{\tau \subseteq \sigma : \tau \in \Delta\} = \Delta_{|\sigma}. \end{aligned}$$

□

3.3 Le sfere sono Gorenstein

Definizione 3.3.1. *Sia Δ un complesso simpliciale su $[n]$. Δ si dice Gorenstein (rispettivamente Cohen-Macaulay) su K se il suo anello di Stanley-Reisner su K S/I_Δ è Gorenstein (rispettivamente Cohen-Macaulay).*

Osservazione 3.3.2. Il fatto che un complesso simpliciale verifichi o meno le proprietà appena definite può dipendere dal campo K.

L'obiettivo di questa sezione è quello di mostrare che un complesso simpliciale la cui realizzazione geometrica è isomorfa ad una sfera n-dimensionale è Gorenstein su ogni campo K. Per fare ciò, serve dapprima caratterizzare attraverso i numeri di Betti la proprietà Gorenstein. Per prima cosa, si caratterizzano ora i complessi simpliciali Cohen-Macaulay.

Osservazione 3.3.3. Sia Δ un complesso simpliciale di dimensione $d-1$; si ricorda che, per il Teorema 3.1.9, $\dim(S/I_\Delta) = d$. Allora si osserva che

$$\begin{aligned} \Delta \text{ è CM su } K \Leftrightarrow S/I_\Delta \text{ è CM } &\Leftrightarrow \mathrm{depth}(S/I_\Delta) = d \Leftrightarrow \\ &\overset{(i)}{\Longleftrightarrow} \mathrm{projdim}_S(S/I_\Delta) = n - d \Leftrightarrow \forall_{i>n-d}[\beta_i(S/I_\Delta) = 0] \Leftrightarrow \\ &\overset{(ii)}{\Longleftrightarrow} \beta_{n-d+1}(S/I_\Delta) = 0 \Leftrightarrow \forall_{\sigma\subseteq[n]}[\beta_{n-d+1,V(\sigma)}(S/I_\Delta) = 0] \Leftrightarrow \\ &\overset{(iii)}{\Longleftrightarrow} \forall_{\sigma\subseteq[n]}[\widetilde{H}^{|\sigma|-n+d-2}(\Delta_{|\sigma}; K) \cong \{0\}]. \end{aligned}$$

(i) Segue da Auslander-Buchsbaum.

(ii) Per ogni $i \in \mathbb{Z}$, $S^{\beta_i(S/I_\Delta)}$ è all'i-esimo posto di una risoluzione libera minimale di S/I_Δ : se in una risoluzione minimale si incontra il modulo nullo, allora, per la minimalità, tutti i moduli successivi sono forzati ad essere nulli.

(iii) Segue dalla formula di Hochster.

Per la caratterizzazione della proprietà Gorenstein, è necessario avere prima il seguente risultato.

Lemma 3.3.4. *Siano $I \subseteq S$ un ideale e $M \coloneqq S/I$ tale che* $\operatorname{projdim}_S(M) = p$ *e* $\operatorname{depth}(M) = d$ *(e quindi, per Auslander-Buchsbaum, $n = p + d$). Allora*

$$\operatorname{Tor}_p^S(M, K) \cong \operatorname{Ext}_S^d(K, M).$$

Dimostrazione. Si dimostra per induzione su d.

Caso $d = 0$. Per Auslander-Buchsbaum, $p = n$, dunque

$$\begin{aligned}\operatorname{Ext}_S^0(K, M) \cong \operatorname{Hom}_S(K, M) \overset{(i)}{\cong} \operatorname{Hom}_S(M/(\mathfrak{m}/I), M) \cong \\ \overset{(ii)}{\cong} \operatorname{Hom}_M(M/(\mathfrak{m}/I), M) \overset{(iii)}{\cong} \operatorname{Ann}_M(\mathfrak{m}/I).\end{aligned}$$

(i) $M/(\mathfrak{m}/I) \cong (S/I)/(\mathfrak{m}/I) \cong S/\mathfrak{m} = K$.

(ii) Poiché $I \subseteq \operatorname{Ann}_S(M/(\mathfrak{m}/I))$, tutti gli S-omomorfismi passano al quoziente e sono anche M-omomorfismi (il viceversa è sempre vero).

(iii) Si mostra che $F : \phi \in \operatorname{Hom}_M(M/(\mathfrak{m}/I), M) \mapsto \phi(\overline{1}) \in \operatorname{Ann}_M(\mathfrak{m}/I)$ è un isomorfismo di M-moduli (il fatto che, una volta mostrato che è ben definita, F sia un M-omomorfismo è ovvio).

- F è ben definita: sia $m \in \mathfrak{m}/I$, allora $m\phi(\overline{1}) = \phi(\overline{m}) = \phi(\overline{0}) = 0$.
- F è iniettiva: sia $\phi \in \operatorname{Hom}_M(M/(\mathfrak{m}/I), M)$ tale che $F(\phi) = 0$, allora, per ogni $m \in M, \phi(\overline{m}) = m\phi(\overline{1}) = 0$, ovvero $\phi = 0$.
- F è surgettiva: sia $m \in \operatorname{Ann}_M(\mathfrak{m}/I)$, allora è ben definita la mappa $\phi_m : \overline{1} \in M/(\mathfrak{m}/I) \mapsto m \in M$.

Per calcolare $\operatorname{Tor}_p^S(M, K)$, si prende il complesso di Koszul $K(x_1, \ldots, x_n; S)$ come RLM di K e si ha che

$$\begin{aligned}\mathrm{Tor}_n^S(M,K) &\cong H_n((K(x_1,\dots,x_n;S)\otimes_S M)_\bullet) \cong H_n(K(x_1,\dots,x_n;M)_\bullet) = \\ &= H_n(x_1,\dots,x_n;M) \cong \mathrm{Ann}_M(\mathfrak{m}/I).\end{aligned}$$

L'ultimo isomorfismo segue direttamente dal Lemma 1.8.11.

Caso $d > 0$. Sia $\mathbf{a} =$ "$a_1, \dots, a_d$" una M-sequenza massimale in $\mathfrak{m}$ e si consideri $M' := M/(a_1)M$: allora $\mathrm{depth}(M') = d-1$ e $\mathbf{a}' =$ "$\overline{a_2}, \dots, \overline{a_d}$" è una M'-sequenza in $\mathfrak{m}' := \mathfrak{m}/(a_1)$. Vale che

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}_S^d(K,M) &\overset{(i)}{\cong} \mathrm{Hom}_S(K, M/(\mathbf{a})M) \overset{(ii)}{\cong} \mathrm{Hom}_S(K, M'/(\mathbf{a}')M') \cong \\ &\overset{(iii)}{\cong} \mathrm{Ext}_S^{d-1}(K,M') \overset{(iv)}{\cong} \mathrm{Tor}_{p+1}^S(M',K).\end{aligned}$$

(i) Dato che $\mathbf{a}$ è una M-sequenza, segue dal Lemma 1.7.6.

(ii) $\frac{M'}{(\mathbf{a}')M'} \cong \frac{M/(a_1)M}{(\mathbf{a}')(M/(a_1)M)} \cong \frac{M/(a_1)M}{(\mathbf{a})M/(a_1)M} \cong \frac{M}{(\mathbf{a})M}$.

(iii) Dato che $\mathbf{a}'$ è una M'-sequenza, segue dal Lemma 1.7.6.

(iv) Per ipotesi induttiva.

Si consideri ora la successione $0 \to M \xrightarrow{\cdot a_1} M \xrightarrow{\pi} M' \to 0$, la quale è esatta corta perché a_1 è M-regolare: allora essa induce la sequenza esatta lunga

$$\{0\} \cong \mathrm{Tor}_{p+1}^S(M,K) \to \mathrm{Tor}_{p+1}^S(M',K) \xrightarrow{\partial} \mathrm{Tor}_p^S(M,K) \xrightarrow{\cdot a_1} \mathrm{Tor}_p^S(M,K) \to \dots$$

L'isomorfismo $\mathrm{Tor}_{p+1}^S(M,K) \cong \{0\}$ vale poiché $\mathrm{projdim}_S(M) = p$.

Dato che $a_1 \in \mathrm{Ann}_S(K)$, dalla proposizione 1.7.8 segue che $\cdot a_1$ è la mappa nulla; dall'esattezza, segue che ∂ è un isomorfismo, ovvero

$$\mathrm{Tor}_p^S(M,K) \cong \mathrm{Tor}_{p+1}^S(M',K) \cong \mathrm{Ext}_S^d(K,M).$$

□

Ora è possibile caratterizzare la proprietà Gorenstein per complessi simpliciali.

Osservazione 3.3.5. Sia Δ un complesso simpliciale di dimensione $d-1$, quindi $\dim(S/I_\Delta) = d$. Allora si osserva che

$$\begin{aligned}
\Delta \text{ è Gorenstein su } K \Leftrightarrow S/I_\Delta \text{ è Gorenstein } \Leftrightarrow &\\
&\overset{(i)}{\Longleftrightarrow} S/I_\Delta \text{ è CM e } \operatorname{Ext}^d_S(K, S/I_\Delta) \cong K \Leftrightarrow\\
&\overset{(ii)}{\Longleftrightarrow} \operatorname{projdim}_S(S/I_\Delta) = n-d \quad \text{e} \quad \operatorname{Tor}^S_{n-d}(S/I_\Delta, K) \cong K \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow \beta_i(S/I_\Delta) = \begin{cases} 0 & \text{se } i > n-d \\ 1 & \text{se } i = n-d \end{cases} \overset{(iii)}{\Longleftrightarrow} \beta_{n-d}(S/I_\Delta) = 1 \Leftrightarrow\\
&\overset{(iv)}{\Longleftrightarrow} \exists!_{\sigma \subseteq [n]} \begin{cases} \widetilde{H}^{|\sigma|-n+d-1}(\Delta_{|\sigma}; K) \cong K \\ \forall_{\tau \subseteq [n], \tau \neq \sigma} [\widetilde{H}^{|\tau|-n+d-1}(\Delta_{|\tau}; K) \cong \{0\}] \end{cases} .
\end{aligned}$$

(i) Segue dalla caratterizzazione della proprietà Gorenstein per gli anelli noetheriani non locali.

(ii) Segue da Auslander-Buchsbaum e dal Lemma 3.3.4.

(iii) Caso $n > d$. Si considera una RLM di S/I_Δ

$$\cdots \to S \xrightarrow{\partial_{n-d}} S^{\beta_{n-d-1}(S/I_\Delta)} \to \cdots .$$

Per la minimalità della risoluzione, ∂_{n-d} è una mappa tra due moduli liberi che non può essere la mappa nulla; allora, poiché il dominio di ∂_{n-d} ha dimensione 1, essa è forzata ad essere iniettiva e ciò implica che nella posizione omologica $n-d$ si trova l'ultimo S-modulo non nullo della RLM. In altre parole, si è dimostrato che, se in una RLM c'è un modulo in posizione omologica $i > 0$ che ha dimensione 1, esso forza i moduli successivi ad essere $\{0\}$.

Caso $n = d$. Si osserva che $\dim(S) = n = d = \dim(S/I_\Delta)$; poiché S è un dominio, allora tutte le catene di ideali primi di lunghezza n di S devono iniziare con (0), perciò l'unica possibilità per la quale ci possa essere una catena di ideali primi di lunghezza n in S/I_Δ è quella per cui $I_\Delta = (0)$, ovvero $S/I_\Delta \cong S$. In questo caso sono soddisfatte entrambe le proprietà che si vogliono dimostrare essere equivalenti.

(iv) Segue dalla formula di Hochster.

Esempio 3.3.6. Di seguito vi sono alcuni esempi in cui vengono utilizzate le caratterizzazioni delle Osservazioni 3.3.3 e 3.3.5.

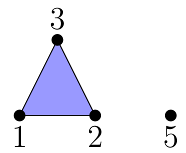
- Si riprende il complesso simpliciale $C = \langle 123, 24, 34, 5 \rangle \subseteq 2^{[5]}$ degli esempi precedenti. Si osserva che $d = \dim(C) + 1 = 3$ e si vuole mostrare che C non è Cohen-Macaulay (e quindi neanche Gorenstein).

  Grazie alla caratterizzazione, è sufficiente trovare $\sigma \in 2^{[5]}$ tale che

  $$\{0\} \ncong \widetilde{H}^{|\sigma|-5+d-2}(C_{|_\sigma}; K) \cong \widetilde{H}^{|\sigma|-4}(C_{|_\sigma}; K).$$

  Sia $\sigma = 1235$, allora

  $$|C_{|_\sigma}| \cong$$

  e $\widetilde{H}^{|\sigma|-4}(C_{|_\sigma}; K) \cong \widetilde{H}^{0}(C_{|_\sigma}; K) \cong K \ncong \{0\}$.

  Dunque C non è Cohen-Macaulay.

  In realtà si potrebbe mostrare che C non è Cohen-Macaulay osservando che $K[C]$ non è puro: utilizzando ciò che si è detto in questo capitolo, non è difficile mostrare che un complesso simpliciale è puro (ovvero il suo anello di Stanley-Reisner è puro) se e solo se tutte le sue faccette hanno la stessa dimensione. Si osserva che C non è puro, dunque non può essere Cohen-Macaulay.

- Si riprende il complesso simpliciale $\Delta_3 = \langle 12, 23, 34 \rangle \subseteq 2^{[4]}$ dell'Esempio 3.2.7. Si osserva che $d = \dim(\Delta_3) + 1 = 2$ e si vuole mostrare che Δ_3 non è Gorenstein, ma è Cohen-Macaulay.

  Per provare che Δ_3 è Cohen-Macaulay si deve dimostrare, per la caratterizzazione, che, per ogni $\sigma \in 2^{[4]}$,

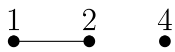
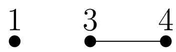
  $$\{0\} \cong \widetilde{H}^{|\sigma|-4+d-2}(\Delta_{3|_\sigma}; K) \cong \widetilde{H}^{|\sigma|-4}(\Delta_{3|_\sigma}; K).$$

  - Se $\sigma = [4]$, si ottiene che $\widetilde{H}^{|[4]|-4}(\Delta_{3|_{[4]}}; K) \cong \widetilde{H}^{0}(\Delta_3; K) \cong \{0\}$.
  - Se $|\sigma| = 3$, allora $\Delta_{3|_\sigma} \neq \{\emptyset\}$ e $\widetilde{H}^{|\sigma|-4}(\Delta_{3|_\sigma}; K) \cong \widetilde{H}^{-1}(\Delta_{3|_\sigma}; K) \cong \{0\}$.
  - Se $|\sigma| < 3$, si ha che, poiché $|\sigma| - 4 < -1$, $\widetilde{H}^{|\sigma|-4}(\Delta_{3|_\sigma}; K) \cong \{0\}$.

Per provare che Δ_3 non è Gorenstein, per la caratterizzazione, è sufficiente trovare $\sigma_1, \sigma_2 \in 2^{[4]}$ distinti tali che, per $i \in \{1, 2\}$,

$$\{0\} \ncong \widetilde{H}^{|\sigma_i|-4+d-1}(\Delta_{3|_{\sigma_i}}; K) \cong \widetilde{H}^{|\sigma_i|-3}(\Delta_{3|_{\sigma_i}}; K).$$

Dati $\sigma_1 = 124$ e $\sigma_2 = 134$, si osserva che

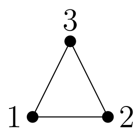
$|\Delta_{3|_{\sigma_1}}| \cong$  e $|\Delta_{3|_{\sigma_2}}| \cong$  .

Si ottiene dunque che, per $i \in \{1, 2\}$,

$$\widetilde{H}^{|\sigma_i|-3}(\Delta_{3|_{\sigma_i}}; K) \cong \widetilde{H}^{0}(\Delta_{3|_{\sigma_i}}; K) \cong K.$$

Si è allora dimostrato che Δ_3 non è Gorenstein ma è Cohen-Macaulay.

- Si considera il complesso simpliciale $\Delta_4 = \langle 12, 13, 23 \rangle \subseteq 2^{[3]}$. Si osserva che $d = \dim(\Delta_4) + 1 = 2$ e si vuole mostrare che Δ_4 è Gorenstein (e quindi è Cohen-Macaulay). Si considera

  $|\Delta_4| \cong$ 

  una realizzazione geometrica di Δ_4.

  Per provare che Δ_4 è Gorenstein, si deve dimostrare, per la caratterizzazione, che esiste $\sigma \in 2^{[3]}$ tale che $\widetilde{H}^{|\sigma|-3+d-1}(\Delta_{4|_{\sigma}}; K) \cong \widetilde{H}^{|\sigma|-2}(\Delta_{4|_{\sigma}}; K) \cong K$ e, per tutti gli altri $\tau \in 2^{[3]}$, $\widetilde{H}^{|\tau|-2}(\Delta_{4|_{\tau}}; K) \cong \{0\}$.

  - Se $\sigma = [3]$, allora $\widetilde{H}^{|[3]|-2}(\Delta_{4|_{[3]}}; K) \cong \widetilde{H}^{1}(\Delta_4; K) \cong K$.
  - Se $|\sigma| = 2$, allora $|\Delta_{4|_{\sigma}}| \cong \bullet\!\!-\!\!\bullet$ e $\widetilde{H}^{|\sigma|-2}(\Delta_{4|_{\sigma}}; K) \cong \widetilde{H}^{0}(\Delta_{4|_{\sigma}}; K) \cong \{0\}$.
  - Se $|\sigma| = 1$, allora $|\Delta_{4|_{\sigma}}| \cong \bullet$ e $\widetilde{H}^{|\sigma|-2}(\Delta_{4|_{\sigma}}; K) \cong \widetilde{H}^{-1}(\Delta_{4|_{\sigma}}; K) \cong \{0\}$.
  - Se $\sigma = \emptyset$, allora $\widetilde{H}^{|\sigma|-2}(\Delta_{4|_{\emptyset}}; K) \cong \widetilde{H}^{-2}(\{\emptyset\}; K) \cong \{0\}$.

  Si è dunque dimostrato che Δ_4 è Gorenstein.

Prima di dimostrare il teorema principale della sezione, è necessario menzionare un risultato molto importante di topologia algebrica: il Teorema di Mayer-Vietoris.

Teorema 3.3.7 (Teorema di Mayer-Vietoris, versione ridotta)**.** *Sia X uno spazio topologico. Siano $A, B \subseteq X$ sottospazi tali che $A^\circ \cup B^\circ = X$ e (solo per il caso ridotto) $A \cap B \neq \emptyset$. Allora esiste una successione esatta lunga, detta successione di Mayer-Vietoris per $n \in \mathbb{N}$*

$$\cdots \to \widetilde{H}_{n+1}(X;K) \to \widetilde{H}_n(A \cap B;K) \to \widetilde{H}_n(A;K) \oplus \widetilde{H}_n(B;K) \to \widetilde{H}_n(X;K) \to \dots$$

$$\cdots \to \widetilde{H}_1(X;K) \to \widetilde{H}_0(A \cap B;K) \to \widetilde{H}_0(A;K) \oplus \widetilde{H}_0(B;K) \to \widetilde{H}_0(X;K) \to 0$$

Per la dimostrazione, si rimanda ad un qualsiasi testo di topologia algebrica.

Notazione 3.3.8. Si denotano con $\mathbb{S}^n$ e $\mathbb{D}^n$ la sfera e il disco di dimensione n

Teorema 3.3.9 (Le sfere sono Gorenstein)**.** *Siano $d > 0$ un intero, K un campo qualsiasi e Δ un complesso simpliciale su $[n]$ di dimensione $d-1$. Se $|\Delta| \cong \mathbb{S}^{d-1}$, allora Δ è Gorenstein su K.*

Dimostrazione. Dalla caratterizzazione dell'Osservazione 3.3.5, segue che

$$\Delta \text{ è Gorenstein su } K \iff \exists!_{\sigma \subseteq [n]} \begin{cases} \widetilde{H}^{|\sigma|-n+d-1}(\Delta_{|_\sigma};K) \cong K \\ \forall_{\tau \subseteq [n], \tau \neq \sigma}[\widetilde{H}^{|\tau|-n+d-1}(\Delta_{|_\tau};K)] \cong \{0\} \end{cases}.$$

Per l'Osservazione 3.1.23, è equivalente utilizzare l'omologia e la coomologia. In questa dimostrazione viene sempre utilizzata l'omologia e viene inoltre omesso il campo K.

Poiché $|\Delta| \cong \mathbb{S}^{d-1}$, si ha che

$$\widetilde{H}_q(\Delta) \cong \widetilde{H}_q(\mathbb{S}^{d-1}) \cong \begin{cases} K & \text{se } q = d-1 \\ \{0\} & \text{se } q \neq d-1 \end{cases}.$$

Si osserva che, se si considera $\sigma = [n]$,

$$\widetilde{H}_{|[n]|-n+d-1}(\Delta_{|_{[n]}}) \cong \widetilde{H}_{d-1}(\Delta) \cong K;$$

allora, per avere la tesi, basta dimostrare che, per ogni $\tau \subsetneq [n]$,

$$\widetilde{H}_{|\tau|-n+d-1}(\Delta_{|_\tau}) \cong \{0\}.$$

In realtà verrà mostrato il seguente risultato più forte:

$$\forall_{\tau \subsetneq [n]}, \forall_{q \leq d-|\overline{\tau}|-1}[\widetilde{H}_q(\Delta_{|_\tau}) \cong \{0\}].$$

La dimostrazione viene svolta per induzione su $|\overline{\tau}|$.

Caso $|\overline{\tau}| = 1$.
Si ha che $\tau = [n] \smallsetminus \{i\}$, per qualche $i \in [n]$; allora $|\Delta_{|_\tau}|$ è omotopicamente equivalente alla sfera senza un punto, cioè

$$|\Delta_{|_\tau}| \simeq \mathbb{S}^{d-1} \smallsetminus \{p\} \simeq \mathbb{D}^{d-1} \simeq \{p\}$$

e vale, per ogni $q \in \mathbb{Z}$,

$$\widetilde{H}_q(\Delta_{|_\tau}) \cong \widetilde{H}_q(\{p\}) \cong \{0\}.$$

Caso $|\overline{\tau}| = 2$, per una migliore comprensione della dimostrazione.
Si ha che $\tau = [n] \smallsetminus \{i, j\}$, per qualche $i, j \in [n]$ con $i \neq j$. Se $ij \in \Delta$, allora togliere i due vertici i e j a Δ equivale topologicamente a togliere un solo vertice, ovvero si crea un solo buco nella sfera: in questo caso si ottiene

$$|\Delta_{|_\tau}| \simeq \mathbb{S}^{d-1} \smallsetminus \{p\} \simeq \{p\},$$

ovvero, per ogni $q \in \mathbb{Z}, \widetilde{H}_q(\Delta_{|_\tau}) \cong \{0\}$.
Se $ij \notin \Delta$, allora $\Delta_{|_\tau} \simeq \mathbb{S}^{d-1} \smallsetminus \{p_1, p_2\}$, che in generale ha omologia non ovunque nulla!

L'idea, in questo caso, è quella di utilizzare la successione di Mayer-Vietoris con $A \coloneqq \Delta_{|_{[n] \smallsetminus i}}$ e $B \coloneqq \Delta_{|_{[n] \smallsetminus j}}$, osservando che ciò è lecito, poiché $A^\circ \cup B^\circ = \Delta$ e $A \cap B \simeq \Delta_{|_\tau} \neq \emptyset$. Si considera, per ogni $q \in \mathbb{N}$, la parte della successione esatta lunga di Mayer-Vietoris

$$\dots \to \widetilde{H}_{q+1}(\Delta) \to \widetilde{H}_q(\Delta_{|_\tau}) \to \widetilde{H}_q(A) \oplus \widetilde{H}_q(B) \to \dots$$

Si osserva che, per ogni $q \leq d - 3 = d - |\overline{\tau}| - 1, \widetilde{H}_{q+1}(\Delta) \cong \widetilde{H}_{q+1}(\mathbb{S}^{d-1}) \cong \{0\}$ e che, per ogni $q \in \mathbb{Z}, \widetilde{H}_q(A) \cong \widetilde{H}_q(B) \cong \widetilde{H}_q(\mathbb{D}^{d-1}) \cong \{0\}$. Da ciò segue che, per ogni $q \leq d - |\overline{\tau}| - 1, \widetilde{H}_q(\Delta_{|_\tau}) \cong \{0\}$.

Caso $\overline{\tau} > 2$.
Sia $\tau = [n] \smallsetminus \{i_1, \dots, i_c\}$ e si suppone che la condizione

$$\text{esiste } \eta \subseteq \{i_1, \dots, i_c\} \text{ tale che } |\eta| \geq 2 \text{ e } \eta \in \Delta \tag{3.1}$$

sia verificata: allora ci si trova nel caso in cui $\Delta_{|_\tau}$ ha meno buchi dei vertici che sono stati tolti ed è possibile rifarsi a quanto visto precedentemente, osservando che esiste $\tau' \in [n]$, con $\tau \subseteq \tau'$, tale che $|\Delta_{|_\tau}| \simeq |\Delta_{|_{\tau'}}|$. Poiché $|\overline{\tau'}| < |\overline{\tau}|$, per ipotesi induttiva si ha che, per ogni $q \leq n - |\overline{\tau'}| - 1$, (in particolare per ogni $q \leq n - |\overline{\tau}| - 1$),

$$\{0\} \cong \widetilde{H}_q(\Delta_{|_{\tau'}}) \cong \widetilde{H}_q(\Delta_{|_\tau}).$$

Se, invece, non è verificata la condizione 3.1, si osserva che, se si considerano $A \coloneqq \Delta_{|_{[n] \smallsetminus \{i_1,\dots,i_{c-1}\}}}$ e $B \coloneqq \Delta_{|_{[n] \smallsetminus i_c}}$ si ha che $A^\circ \cup B^\circ = \Delta$ e $A \cap B \simeq \Delta_{|_\tau} \neq \emptyset$. Allora sono verificate le ipotesi di Mayer-Vietoris, dunque è possibile considerare, per ogni $q \in \mathbb{N}$, la parte della successione esatta lunga di Mayer-Vietoris

$$\dots \to \widetilde{H}_{q+1}(\Delta) \to \widetilde{H}_q(\Delta_{|_\tau}) \to \widetilde{H}_q(A) \oplus \widetilde{H}_q(B) \to \dots$$

Si ha che, per ogni $q \leq d - 3$ (in particolare per ogni $q \leq d - |\overline{\tau}| - 1$), $\widetilde{H}_{q+1}(\Delta) \cong \widetilde{H}_{q+1}(\mathbb{S}^{d-1}) \cong \{0\}$. Inoltre, per ipotesi induttiva, per ogni $q \leq d - (|\overline{\tau}| - 1) - 1 = d - |\overline{\tau}|$ (in particolare per ogni $q \leq d - |\overline{\tau}| - 1$), $\widetilde{H}_q(A) \cong \{0\}$ e per ogni $q \leq d - 2$ (in particolare per ogni $q \leq d - |\overline{\tau}| - 1$), $\widetilde{H}_q(B) \cong \{0\}$. Da ciò segue che, per ogni $q \leq d - |\overline{\tau}| - 1$, $\widetilde{H}_q(\Delta_{|_\tau}) \cong \{0\}$. □

3.4 Sistemi di parametri negli anelli di Stanley-Reisner

L'ultimo oggetto di studio di questo capitolo sono i sistemi di parametri omogenei negli anelli di Stanley-Reisner. Prima però si inizia con una definizione generale che si può dare sia nel caso graduato sia nel caso locale.

Definizione 3.4.1. *Sia A una K-algebra graduata standard (oppure un anello locale) e M un A-modulo, allora si definisce lo zoccolo di M come*

$$\operatorname{Soc}(M) \coloneqq \{f \in M : f\mathfrak{m} = \{0\}\},$$

dove $\mathfrak{m}$ è il massimale irrilevante (nel caso graduato) o l'unico massimale (nel caso locale).

Osservazione 3.4.2. $\operatorname{Soc}(M)$ è un A-sottomodulo di M. Inoltre, segue banalmente dalla definizione che $\mathfrak{m} \subseteq \operatorname{Ann}_A(\operatorname{Soc}(M))$, dunque $\operatorname{Soc}(M)$ è anche un $A/\mathfrak{m}$-spazio vettoriale.

Proposizione 3.4.3. *Sia $\Delta \subseteq 2^{[n]}$ un complesso simpliciale con* $\dim(\Delta) = d - 1$ *e siano $l_1, \dots, l_d \in K[\Delta]_1$. Dati $l = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in K[\Delta]_1$ e $F \in \Delta$, sia $l_{|_F} \coloneqq \sum_{i \in F} \lambda_i x_i$. Sono fatti equivalenti:*

(i) $l_1, \dots, l_d$ *è un sistema di parametri omogenei per* $K[\Delta]$;

(ii) *per ogni* $F \in \Delta$, $\dim_K(\langle l_{1|_F}, \dots, l_{d|_F}\rangle) = |F|$.

(iii) *per ogni* $F \in \Delta$ *faccetta,* $\dim_K(\langle l_{1|_F}, \dots, l_{d|_F}\rangle) = |F|$.

Dimostrazione.

($(i) \Rightarrow (ii)$) Si osserva che ciò che si deve mostrare è equivalente al seguente enunciato:

$$\text{per ogni } F \in \Delta, \text{ per ogni } i \in F, x_i \in \langle l_{1|_F}, \dots, l_{d|_F}\rangle.$$

Sia $R \coloneqq K[\Delta]/(l_1, \dots, l_d)$. Se $l_1, \dots, l_d$ è un sistema di parametri omogenei per $K[\Delta]$, allora $\dim(R) = 0$ e dunque R è un K-spazio vettoriale di dimensione finita. Data $F \in \Delta$, si definisce $R_{|_F} \coloneqq R/(x_j : j \notin F)$, il quale è 0-dimensionale poiché quoziente di un anello 0-dimensionale. Si osserva che, poiché I_Δ è generato dalle non-faccette di Δ, ognuna delle quali contiene almeno un vertice che non è in F, vale che $I_\Delta/(x_j : j \notin F) \cong \{0\}$; inoltre $(l_1, \dots, l_d)/(x_j : j \notin F) \cong (l_{1|_F}, \dots, l_{d|_F})$. Sfruttando tutto ciò, si scrive:

$$R_{|_F} \cong \left(\frac{S}{I_\Delta + (l_1, \dots, l_d)}\right)_{|_F} \cong \frac{K[x_j : j \in F]}{(l_{1|_F}, \dots, l_{d|_F})}.$$

Dal momento che $l_{1|_F}, \dots, l_{d|_F}$ sono forme lineari, allora $R_{|_F}$ è ancora un anello di polinomi a coefficienti in K e, poiché $\dim(R)_{|_F} = 0$, l'unica possibilità è che $R_{|_F} \cong K$, dunque, per ogni $i \in F$, $x_i \in (l_{1|_F}, \dots, l_{d|_F})$. Sempre per il fatto che $l_{1|_F}, \dots, l_{d|_F}$ sono forme lineari, si ha che $x_i \in \langle l_{1|_F}, \dots, l_{d|_F}\rangle$.

($(ii) \Rightarrow (iii)$) La dimostrazione è banale.

($(iii) \Rightarrow (i)$) Sia $F \in \Delta$ una faccetta: si vuole dapprima provare che $x^F \in \mathrm{Soc}(R)$, ovvero che, per ogni $i \in [n]$, $x_i x^F = 0$ in R. Se $i \notin F$, allora $x_i x^F = 0$ anche in $K[\Delta]$; se $i \in F$, per ipotesi $x_i \in \langle l_{1|_F}, \dots, l_{d|_F}\rangle$, quindi esiste una combinazione lineare di $l_{1|_F}, \dots, l_{d|_F}$ tale che $x_i = \sum_{h=1}^{d} \alpha_h l_{h|_F}$. Prendendo $\phi \coloneqq \sum_{h=1}^{d} \alpha_h l_h$, si ottiene che

$$\phi = x_i + \sum_{j \notin F} c_j x_j,$$

allora, in R, $x_i x^F = \left(-\sum_{j \notin F} c_j x_j\right) x^F = 0$. Dunque si ha che $x^F \in \mathrm{Soc}(R)$ e, in particolare, $x^F x^F = 0$ in R.

Sia ora $I = (x^F : F \text{ faccetta di } \Delta) \subseteq R$, un ideale generato da un numero finito di monomi nilpotenti e sia $R' := R/I$; allora vale che

$$I \subseteq \sqrt{(0)} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in Min(R)} \mathfrak{p}.$$

Poiché I è contenuto in tutti i primi minimali di R, è chiaro che $\dim(R) = \dim(R')$. Sia ora $\Delta' := \{F \in \Delta : F \text{ non è una faccetta di } \Delta\}$, il quale è ancora un complesso simpliciale e sia $I' = (x^F : F \text{ faccetta di } \Delta') \subseteq R'$: per lo stesso ragionamento precedente, vale che

$$\dim(R) = \dim(R') = \dim(R'/I').$$

Procedendo in questo modo, si ottiene che $\dim(R) = \dim(R/J)$, dove J è l'ideale generato da tutti i monomi associati alle facce di Δ di dimensione non negativa, dunque $R/J \cong K$ e $\dim(R) = \dim(K) = 0$. Ciò dimostra che $l_1, \dots, l_d$ è un sistema di parametri omogenei per $K[\Delta]$.

□

Dato un complesso simpliciale $\Delta \subseteq 2^{[n]}$ di dimensione $d-1$, la proposizione precedente fornisce un modo per costruire un sistema di parametri lineari per $K[\Delta]$ e per capire se d forme lineari formano un sistema di parametri.

Esempio 3.4.4. Sia $D := \langle 12, 15, 23, 34, 45 \rangle \subseteq 2^{[5]}$.

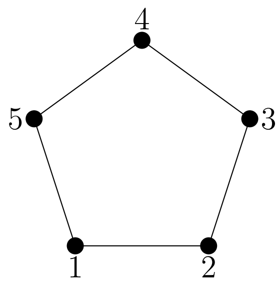


Figura 3.5: Una realizzazione geometrica del complesso simpliciale D

Si osserva che $|D| \cong \mathbb{S}^1$, dunque, per il Teorema 3.3.9, D è Gorenstein e, poiché $\dim(D) = 1$, vale che $\dim(K[D]) = 2$. Siano $l_1 := x_1 + x_2 + x_4$ e $l_2 := x_2 + x_3 + x_5$: la proposizione precedente garantisce che "l_1, l_2" formino un sistema di parametri per $K[D]$, infatti:

- $\dim_K(\langle l_{1|_{12}}, l_{2|_{12}}\rangle) = \dim_K(\langle x_1 + x_2, x_2\rangle) = 2 = |12|$;
- $\dim_K(\langle l_{1|_{15}}, l_{2|_{15}}\rangle) = \dim_K(\langle x_1, x_5\rangle) = 2 = |15|$;
- $\dim_K(\langle l_{1|_{23}}, l_{2|_{23}}\rangle) = \dim_K(\langle x_2, x_2 + x_3\rangle) = 2 = |23|$;
- $\dim_K(\langle l_{1|_{34}}, l_{2|_{34}}\rangle) = \dim_K(\langle x_4, x_3\rangle) = 2 = |34|$;
- $\dim_K(\langle l_{1|_{45}}, l_{2|_{45}}\rangle) = \dim_K(\langle x_4, x_5\rangle) = 2 = |45|$.

Poiché "l_1, l_2" è un sistema di parametri, $R \coloneqq K[D]/(l_1, l_2)$ è un anello Gorenstein 0-dimensionale, dunque deve valere che $\mathrm{Ext}^0_R(K, R) \cong K$. Si è visto nella dimostrazione del Lemma 3.3.4 che $\mathrm{Ext}^0_R(K, R) \cong \mathrm{Hom}_R(K, R) \cong \mathrm{Ann}_R(\mathfrak{m}) = \mathrm{Soc}(R)$: si vuole verificare ora che $\dim_K(\mathrm{Soc}(R)) = 1$.

Si ricorda che $I_D = (x_1x_3, x_1x_4, x_2x_4, x_2x_5, x_3x_5)$ e si ha che

$$R \cong \frac{K[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]}{I_D + (l_1, l_2)} \cong \frac{K[x_1, x_2, x_3]}{J} =: R',$$

dove $J \coloneqq (x_1x_3, x_1^2 + x_1x_2, x_1x_2 + x_2^2, x_2^2 + x_2x_3, x_2x_3 + x_3^2)$. Con un programma di algebra computazionale (CoCoA, Magma,...) si può verificare che una base di Gröbner di J rispetto all'ordinamento lessicografico è data da

$$\{x_1^2 - x_3^2, x_1x_2 + x_3^2, x_1x_3, x_2^2 - x_3^2, x_2x_3 + x_3^2, x_3^3\}.$$

Per le proprietà delle basi di Gröbner vale che $LT(J) = (x_1^2, x_1x_2, x_1x_3, x_2^2, x_2x_3, x_3^3)$, dunque, per il teorema di Macaulay, una base $K[x_1, x_2, x_3]/J$ come K-spazio vettoriale è

$$\{\overline{\mathbf{x}^\alpha} : \mathbf{x}^\alpha \notin LT(J)\} = \{\overline{1}, \overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \overline{x_3^2}\}.$$

- per ragioni di grado, $\overline{x_3^2} \in \mathrm{Soc}(R')$;
- $\overline{1} \notin \mathrm{Soc}(R')$, poiché $\overline{1} \cdot \overline{x_1} = \overline{x_1} \neq \overline{0}$;
- $\overline{x_1} \notin \mathrm{Soc}(R')$, poiché $\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} = \overline{x_1x_2} = -\overline{x_3^2} \neq \overline{0}$;
- $\overline{x_2} \notin \mathrm{Soc}(R')$, poiché $\overline{x_2} \cdot \overline{x_1} = \overline{x_1x_2} = -\overline{x_3^2} \neq \overline{0}$;
- $\overline{x_3} \notin \mathrm{Soc}(R')$, poiché $\overline{x_3} \cdot \overline{x_3} = \overline{x_3^2} \neq \overline{0}$.

Allora vale che $\mathrm{Soc}(R') = \langle \overline{x_3^2} \rangle$, dunque $\dim_K(\mathrm{Soc}(R)) = \dim_K(\mathrm{Soc}(R')) = 1$.

Capitolo 4

Serie di Hilbert di anelli Gorenstein

4.1 Simmetria dell'h-vettore

In questa sezione si considera A una K-algebra noetheriana graduata standard Gorenstein della forma $A = S/I$, con I ideale omogeneo di S. L'obiettivo è arrivare a dimostrare che l'h-vettore di A è simmetrico.

Osservazione 4.1.1. Nel caso in cui A sia un anello artiniano, allora $\dim(A) = 0$ e la sue serie di Hilbert $\mathrm{HS}_A(t) = h_A(t) = h_0 + h_1 t + \cdots + h_s t^s$ è un polinomio, con $s = \max\{n \in \mathbb{N} : A_n \neq \{0\}\}$. Si osserva che $\mathfrak{m}A_s = \{0\}$, da cui $A_s \subseteq \mathrm{Soc}(A) \cong K$, dunque $A_s \cong K$.

Si ricorda che A ha una struttura di A_0-algebra e, poiché è graduata standard, è generata dagli elementi di grado 1, ovvero $A = A_0[A_1]$.

Teorema 4.1.2. *Sia A una K-algebra graduata standard Gorenstein, noetheriana e artiniana e sia $(h_0, \ldots, h_s)$ il suo h-vettore, allora, per ogni $i \in \{0, \ldots, s\}$, $h_i = h_{s-i}$.*

Dimostrazione. Per quanto visto nell'Osservazione 4.1.1 e, poiché A è graduata standard,

$$\mathrm{Ann}_A(A_1) = \mathrm{Ann}_A(\mathfrak{m}) = \mathrm{Soc}(A) = A_s \cong K.$$

Sia $t \in \{0, \ldots, s\}$ e si considera la mappa

$$\begin{aligned} \phi : &A_t \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(A_{s-t}, A_s) \cong A_{s-t}^* \\ &f \longmapsto (g \in A_{s-t} \mapsto f \cdot g \in A_s \cong K) = \cdot f \end{aligned}$$

la quale è ben definita poiché, per ogni $f \in A_t$, vale $fA_{s-t} \subseteq A_t A_{s-t} \subseteq A_s$: si vuole dimostrare che $\mathrm{Ker}(\phi) = \{0\}$. Si suppone, per assurdo, che esista $f \in$

$A_t \setminus \{0\}$ tale che $fA_{s-t} \cong \{0\}$ e sia $j := \min\{n \in \mathbb{N} : fA_n \cong \{0\}\}$; si ha che $0 < j \leq s - t$. Esiste allora un elemento non nullo $\alpha \in fA_{j-1} \subseteq A_{t+j-1}$, per il quale vale

$$\alpha A_1 \subseteq fA_{j-1}A_1 \subseteq fA_j \cong \{0\}.$$

Per quanto visto prima, $\alpha \in \mathrm{Ann}_A(A_1) = A_s$, che è una contraddizione, poiché segue che $s = t + j - 1 \leq t + s - t - 1 = s - 1$.

Vale quindi che $\mathrm{Ker}(\phi) = \{0\}$, dunque A_t può essere visto come sottospazio di A^*_{s-t} : allora vale

$$h_t = \dim_K(A_t) \leq \dim_K(A^*_{s-t}) = \dim_K(A_{s-t}) = h_{s-t}.$$

Utilizzando lo stesso ragionamento per la mappa

$$\psi : A_{s-t} \longrightarrow A^*_t,$$

si ottiene la disuguaglianza $h_{s-t} \leq h_t$. Per l'arbitrarietà di $t \in \{0, \ldots, s\}$, segue la tesi. □

Corollario 4.1.3. *Sia A una K-algebra graduata standard Gorenstein noetheriana e sia $(h_0, \ldots, h_s)$ il suo h-vettore, allora, per ogni $i \in \{0, \ldots, s\}$, $h_i = h_{s-i}$.*

Dimostrazione. Non è restrittivo assumere che il campo K sia infinito, poiché la serie di Hilbert non cambia se si estendono i coefficienti. Sia $d = \dim(A) = \mathrm{depth}(A)$ (che si può supporre positiva, altrimenti si rientra nelle ipotesi del teorema precedente) e si supponga che esistano $l_1, \ldots, l_d \in A_1$ che formino una sequenza A-regolare, allora $A/(l_1, \ldots, l_d)$ è una K-algebra graduata standard noetheriana e di dimensione 0 (quindi artiniana), dunque, per il teorema precedente, il suo h-vettore è simmetrico e, per il Lemma 1.10.6 applicato d volte, anche l'h-vettore di A è simmetrico.

Resta solo da provare che esistono $l_1, \ldots, l_d \in A_1$ che formano una sequenza A-regolare. Si ricorda che un elemento $a \in A$ è A-regolare se e solo se non appartiene a nessun primo associato di A. Grazie alla Proposizione 1.2.3, gli associati di A sono finiti: siano essi $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$. Si osserva che $\mathfrak{m} \notin Ass_A(A)$, altrimenti si avrebbe che $\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{m}, A) \ncong \{0\}$, ma ciò non è possibile poiché $\mathrm{depth}(A) > 0$. Dunque, per ogni $i \in [n]$, $\mathfrak{p}_i \subsetneq \mathfrak{m} = (A_1)$ e quindi $\mathfrak{p}_i \cap A_1 \subsetneq A_1$; poiché K è infinito,

$$\bigcup_{i=1}^{n} (\mathfrak{p}_i \cap A_1) \subsetneq A_1,$$

allora esiste $l_1 \in A_1 \smallsetminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} (\mathfrak{p}_i \cap A_1) \right)$ un elemento A-regolare di A_1. Al passo successivo si può considerare $A/(l_1)$, il quale è ancora Gorenstein di dimensione $d-1$ e, ripetendo più volte il ragionamento precedente, si trova la sequenza A-regolare in A_1. □

Osservazione 4.1.4. Non è vero che una K-algebra noetheriana graduata standard il cui h-vettore è simmetrico deve essere Gorenstein, neanche nel caso artiniano. Si considera ad esempio $A \coloneqq K[x,y]/(x^3, xy, y^2)$ con la gradazione standard: A ha dimensione 0 e, come K-spazio vettoriale, ha base $\{\overline{1}, \overline{x}, \overline{y}, \overline{x^2}\}$, dunque il suo h-polinomio $h(t) = 1 + 2t + t^2$ è simmetrico, tuttavia $\mathrm{Soc}(A) = \langle \overline{y}, \overline{x^2} \rangle$; ciò implica che A non è Gorenstein.

4.2 Unimodalità e g-conjecture

Definizione 4.2.1. *Sia $h = (h_0, \dots, h_s)$ l'h-vettore di una qualche K-algebra graduata e si suppone che esso sia simmetrico. Si dice che h è unimodale se, per ogni $i \in \{1, \dots, \lfloor s/2 \rfloor\}$, vale che $h_{i-1} \leq h_i$.*

Nella sezione precedente, si è dimostrata la simmetria dell'h-vettore di una K-algebra graduata standard Gorenstein noetheriana. Ci si chiede se un tale h-vettore sia anche unimodale: la risposta a tale domanda è negativa. In questa sezione viene proposto un famoso esempio di Stanley, che individua una K-algebra graduata standard Gorenstein noetheriana il cui h-vettore non è unimodale, dopodiché si vedranno delle condizioni sufficienti per l'unimodalità e verrà enunciata la g-conjecture.

Esempio 4.2.2 (Stanley)**.** Sia A una K-algebra noetheriana graduata di dimensione 0 (non serve che A sia graduata standard o Gorenstein), dunque si scrive $A = A_0 \oplus A_1 \oplus \cdots \oplus A_s$, con $A_s \ncong \{0\}$. Si considera A^* dotato della consueta struttura di A-modulo e si definisce la K-algebra $R \coloneqq A \times A^*$, dotata della somma componente per componente e dell'inusuale prodotto definito da

$$(a, f) \cdot (b, g) \coloneqq (ab, ag + bf), \text{ con } a, b \in A \text{ e } f, g \in A^*.$$

Si può dimostrare che R è una K-algebra Gorenstein e che $\dim(R) = 0$; inoltre è possibile dare una gradazione a R in modo che

$$HF_R(n) = \begin{cases} \mathrm{HF}_A(n) + \mathrm{HF}_A(s+1-n) & \text{se } 0 \leq n \leq s+1 \\ 0 & \text{se } n > s+1 \end{cases}.$$

Sotto queste ipotesi, R è graduata standard se e solo se A è graduata standard e $\mathrm{Soc}(A) = A_s$. Si utilizzerà questa idea per costruire la K-algebra desiderata. Quanto appena fatto non è stato visto nei dettagli, infatti l'obiettivo dell'esempio è quello di individuare almeno una K-algebra noetheriana Gorenstein il cui h-vettore non sia unimodale: si procede a fare tutte le verifiche solo sul seguente caso particolare. Si sceglie $A \coloneqq K[x, y, z]/(x, y, z)^4$ con la gradazione standard, in questo modo $\dim_K(A) = 20$, poiché una sua base come K-spazio vettoriale è (evitando di scrivere le classi)

$$\mathfrak{B}_A \coloneqq \{1, x, y, z, x^2, xy, xz, y^2, yz, z^2, x^3, x^2y, x^2z, xy^2, xyz, xz^2, y^3, y^2z, yz^2, z^3\}.$$

Si ha dunque che $\dim(A) = 0$, $\mathrm{HS}_A(t) = 1 + 3t + 6t^2 + 10t^3$ e $\mathrm{Soc}(A) = A_3$. Si ha che $\dim_K(A^*) = 20$ e si considera come base di A^* la base duale

$$\mathfrak{B}_{A^*} \coloneqq \{a^* : a \in \mathfrak{B}_A\},$$

dove, per ogni $a, b \in \mathfrak{B}_A$,

$$a^*(b) = \begin{cases} 1 & \text{se } a = b \\ 0 & \text{se } a \neq b \end{cases}.$$

Si considera ora $R \coloneqq A \times A^*$, con la struttura di K-algebra descritta precedentemente; poiché la somma in R è quella componente per componente, una sua base come K-spazio vettoriale è

$$\mathfrak{B}_R \coloneqq \{(a, 0) : a \in \mathfrak{B}_A\} \cup \{(0, a^*) : a \in \mathfrak{B}_A\},$$

allora $\dim_K(R) = 40$ e $\dim(R) = 0$. La particolare struttura moltiplicativa di R ha come conseguenza i seguenti fatti:

- per ogni $a, b \in \mathfrak{B}_A$, $(a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0)$;
- per ogni $a, b \in \mathfrak{B}_A$, $(a, 0) \cdot (0, b^*) = (0, a \cdot b^*)$, dove $a \cdot b^* : c \in A \mapsto b^*(ac) \in K$, quindi $a \cdot b^* = \begin{cases} (b/a)^* & \text{se } a|b \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$;
- per ogni $a, b \in \mathfrak{B}_A$, $(0, a^*) \cdot (0, b^*) = (0, 0)$.

Per la gradazione di R, si pone, per ogni $a \in \mathfrak{B}_A$, $\deg((a, 0)) \coloneqq \deg(a)$ e $\deg((0, a^*)) \coloneqq 4 - \deg(a)$. Di seguito, l'elenco degli elementi di $\mathfrak{B}_R$ per gradi:

- un elemento di grado 0 : $(1, 0)$;

- 13 elementi di grado 1 : $(x,0),(y,0),(z,0),(0,(x^3)^*),(0,(x^2y)^*),(0,(x^2z)^*),$ $(0,(xy^2)^*),(0,(xyz)^*),(0,(xz^2)^*),(0,(y^3)^*),(0,(y^2z)^*),(0,(yz^2)^*),(0,(z^3)^*)$;

- 12 elementi di grado 2 : $(x^2,0),(xy,0),(xz,0),(y^2,0),(yz,0),(z^2,0),$ $(0,(x^2)^*),(0,(xy)^*),(0,(xz)^*),(0,(y^2)^*),(0,(yz)^*),(0,(z^2)^*)$;

- 13 elementi di grado 3 : $(x^3,0),(x^2y,0),(x^2z,0),(xy^2,0),(xyz,0),(xz^2,0),$ $(y^3,0),(y^2z,0),(yz^2,0),(z^3,0),(0,x^*)(0,y^*)(0,z^*)$;

- un elemento di grado 4 : $(0,1^*)$.

Si verifica immediatamente che in questo modo si è resa R una K-algebra graduata, inoltre la gradazione è standard poiché tutti gli elementi di grado positivo di $\mathfrak{B}_R$ si possono ottenere tramite prodotti di elementi di grado 1. Dunque, $\mathrm{HS}_R(t) = 1 + 13t + 12t^2 + 13t^3 + t^4$.
Resta solo da provare che R è Gorenstein, ovvero che $\dim_K(\mathrm{Soc}(R)) = 1$. Per questioni di grado, certamente $\langle(0,1^*)\rangle = R_4 \subseteq \mathrm{Soc}(R)$; preso poi un elemento di $\mathfrak{B}_R \smallsetminus \{(1,0),(0,1^*)\}$, esso è della forma $(a,0)$ o $(0,a^*)$ per qualche $a \in \mathfrak{B}_A \smallsetminus \{1\}$, tuttavia quest'ultimo non può stare in $\mathrm{Soc}(R)$, poiché, per ogni $a \in \mathfrak{B}_A$, vale che $(a,0)\cdot(0,a^*) = (0,1^*) \neq (0,0)$. Si è provato, dunque, che R è Gorenstein.

Più in generale, degli altri controesempi si ottengono con la medesima costruzione, prendendo $A \coloneqq K[x,y,z]/(x,y,z)^c$, con $c \geq 4$.

Ora si enuncia un teorema, che non verrà dimostrato, nel quale si aggiunge un ipotesi che garantisce l'unimodalità dell'h-vettore di una K-algebra graduata standard Gorenstein noetheriana.

Teorema 4.2.3. *Sia $h = (h_0,\dots,h_s) \in \mathbb{N}^{s+1}$, con $h_1 \leq 3$ e $h_s \neq 0$ e si ponga $r \coloneqq \lfloor s/2 \rfloor$. Allora h è l'h-vettore di una K-algebra graduata standard Gorenstein noetheriana se e solo se valgono le seguenti condizioni:*

(i) h è simmetrico;

(ii) $g \coloneqq (h_0, h_1-h_0, h_2-h_1,\dots,h_r-h_{r-1})$ è l'h-vettore di una K-algebra graduata standard noetheriana e artiniana.

Per la dimostrazione, si veda [6] (Teorema 4.2).

Si osserva che la condizione (*ii*) implica che $g \in \mathbb{N}^{r+1}$, ovvero che h è unimodale. Non ci si può aspettare un risultato migliore di quello dato in questo teorema, poiché esistono degli esempi di K-algebre graduate standard Gorenstein noetheriane con h-vettore non unimodale e $h_1 = 4$.

Teorema 4.2.4 (g-conjecture)**.** *Siano $d \in \mathbb{N}$ e Δ un complesso simpliciale tale che $|\Delta| \cong \mathbb{S}^d$. Si considera $(h_0, \dots, h_s)$ l'h-vettore di $K[\Delta]$ e g come nel teorema precedente. Allora g è l'h-vettore di una K-algebra graduata standard noetheriana e artiniana.*

Quest'ultimo risultato è stato congetturato da McMullen negli anni '70 e provato da Stanley una decina di anni dopo nel caso in cui $|\Delta|$ sia il bordo di un politopo (per $d \leq 2$ tutte le sfere sono bordi di politopi, mentre ciò non è vero per $d > 2$). La congettura è stata risolta completamente nel 2018 da Adiprasito ([1]) e, nel 2020, è uscito un articolo di Papadakis e Petrotou nel quale viene data una dimostrazione alternativa alla g-conjecture più semplice rispetto a quella di Adiprasito (si veda [5], Teorema 9.2).

Bibliografia

[1] Adiprasito K. (2019). *Combinatorial Lefschetz theorems beyond positivity*, Quarta versione. arXiv: 1812.10454.

[2] Bruns W. e Herzog H.J. (1998) *Cohen-Macaulay rings*, Versione revisionata. Cambridge: Cambridge University Press.

[3] Matsumura H. (1987). *Commutative Ring Theory*. Cambridge: Cambridge University Press.

[4] Miller E. e Sturmfels B. (2005). *Combinatorial Commutative Algebra*. New York: Springer New York.

[5] Papadakis S. A. e Petrotou V. (2020). *The Characteristic 2 Anisotropicity of Simplicial Spheres*. arXiv: 2012.09815.

[6] Stanley R. P. (1978) *Hilbert Functions of Graded Algebras*. Cambridge, Massachusetts: Academic Press.

[7] Stanley R. P. (1996). *Combinatorics and commutative algebra*, seconda edizione. Boston: Birkhäuser.