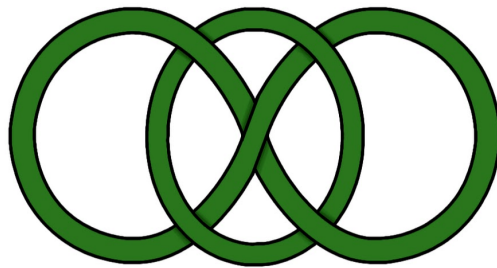


UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI GENOVA



DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

CORSO DI STUDI IN
MATEMATICA



Anno accademico 2022/2023

Tesi di Laurea Magistrale

Rivestimenti abeliani di varietà

Candidato
Attilio Momi

Relatore

Prof. Matteo Penegini

Indice

Abstract	3
Introduzione	4
Notazioni	7
1 Preliminari	8
1.1 Rappresentazioni	8
1.1.1 Rappresentazioni matriciali	8
1.1.2 Rappresentazioni come mappe lineari	9
1.1.3 Mappe G -lineari e sottorappresentazioni	11
1.2 Teorema di Maschke	12
1.2.1 Rappresentazioni irriducibili	13
1.2.2 Lemma di Schür e gruppi abeliani	14
1.2.3 Altre rappresentazioni	15
1.2.4 Ulteriori risultati sulla decomposizione in rappresentazioni irriducibili . .	16
1.3 Caratteri	18
1.3.1 Prodotto interno di caratteri	20
1.3.2 Funzioni di classe e tavola dei caratteri	21
2 Rivestimenti abeliani	26
2.1 Mappe finite	27
2.1.1 Identità di Newton	30
2.1.2 Varietà quoziente e morfismi finiti	33
2.2 Immagini dirette superiori	33
2.3 Piattezza	36
2.4 Dimostrazione del Teorema 2.0.2	40
2.5 Due importanti divisori	45
2.5.1 Fascio dei differenziali relativi	48
3 Teorema di struttura dei rivestimenti abeliani	53
3.1 Gruppo di inerzia	53
3.2 Esempi	58
3.2.1 $G = \mathbb{Z}/2$	58
3.2.2 $G = \mathbb{Z}/3$	58

3.2.3	$G = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$	58
3.2.4	$G = \mathbb{Z}/p$	59
3.3	Costruire i rivestimenti	59
3.4	Esempi	60
3.4.1	$G = \mathbb{Z}/2$	61
3.4.2	$G = \mathbb{Z}/3$	61
3.4.3	$G = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$	62
3.4.4	$G = \mathbb{Z}/p$ con p primo	63
3.4.5	$G = \mathbb{Z}/6$	67
3.4.6	$G = \mathbb{Z}/m$	71
3.5	Rivestimenti doppi di superfici	75

Bibliografia

78

Abstract

In questo lavoro viene data la definizione di rivestimento abeliano di varietà proiettive lisce definite su un campo algebricamente chiuso k di caratteristica 0. In particolare è precisato il concetto di morfismo finito e di varietà quoziente.

Successivamente viene enunciato e dimostrato un teorema che determina, dato un rivestimento abeliano di varietà $\pi : X \rightarrow Y$, una decomposizione in fibrati in rette su Y del fascio *push-forward* $\pi_*\mathcal{O}_X$ del fascio di struttura di X . Per la dimostrazione sono riportati e dimostrati alcuni risultati legati al funtore di immagine diretta superiore, ai fasci piatti di moduli ed alla teoria della rappresentazione di gruppi.

Infine viene enunciato un teorema di struttura per i rivestimenti abeliani, che determina equazioni divisoriali associate ad un rivestimento e tali che, data una varietà liscia Y e dei divisori di Weil su Y che soddisfano tali equazioni, permettono di costruire un rivestimento abeliano. Nell'ultima parte del lavoro vengono esplicitate queste equazioni in alcuni esempi e viene fornito un criterio per la costruzione di rivestimenti doppi di superfici lisce.

In this work we give the definition of an abelian cover between algebraic projective varieties defined over an algebraically closed field k of characteristic 0. In particular, we give the definition of a finite morphism and of a quotient variety.

The focus then shifts on proving a theorem that determines, given an abelian cover $\pi : X \rightarrow Y$, a decomposition in line bundles on Y of the *push-forward* sheaf $\pi_*\mathcal{O}_X$ of the structure sheaf of X . In order to prove this result, we investigate the properties of the higher direct image functor, of flat sheaves of modules and of the theory of representations of groups.

Finally, we show a structure theorem for abelian covers, which gives equations of divisors that are associated to an abelian cover, and provide a method for constructing an abelian cover starting from a smooth variety Y and some Weil divisors on Y that satisfy those equations. In the last section, we calculate these equations for certain cases and we give a criterion for the construction of double covers of smooth surfaces.

Introduzione

In geometria algebrica, i rivestimenti e i quozienti sono due degli strumenti che permettono, data una varietà X , sia essa algebrica, topologica o differenziale, di ottenere nuove varietà. In questo lavoro ci proponiamo di dare una visione generale della teoria dei rivestimenti di varietà algebriche, in particolare di quelli abeliani, fornendo le definizioni principali e alcuni teoremi fondamentali in questo campo, insieme alle conoscenze necessarie per una completa comprensione dell'elaborato.

Nello specifico, per noi X sarà una varietà algebrica definita su un campo k algebricamente chiuso e di caratteristica 0; spesso considereremo il caso $k = \mathbb{C}$. Inoltre supporremo che X sia proiettiva e liscia. I rivestimenti che considereremo saranno dati dall'azione di un gruppo finito e abeliano G . Per prima cosa ci occuperemo di spiegare che cosa intendiamo per varietà quoziente $Y = X/G$ e studieremo le proprietà di questa nuova varietà. In particolare vedremo che legame c'è tra i fasci di struttura \mathcal{O}_X di X e \mathcal{O}_Y di Y , dimostrando dettagliatamente il seguente teorema.

Teorema (A). Sia $\pi : X \rightarrow Y$ un rivestimento abeliano con gruppo G . Allora

$$\pi_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y \oplus \bigoplus_{x \in G^* \setminus \{\chi_0\}} \mathcal{L}_x^{-1},$$

dove G^* è il gruppo dei caratteri di G , χ_0 è il carattere banale e gli \mathcal{L}_x^{-1} sono fibrati in rette su Y .

I rivestimenti che consideriamo sono in generale diversi dai rivestimenti topologici perché ammettono diramazione. Con ciò si intende che, in linea di massima, non tutte le fibre hanno la stessa cardinalità. Pertanto ci sono dei *punti di diramazione* in Y la cui cardinalità della fibra differisce dalla cardinalità del punto generico. Nelle nostre ipotesi l'insieme dei punti di diramazione costituisce un divisore di Weil, detto *divisore di diramazione*.

Una delle domande più importanti nella teoria dei rivestimenti è la seguente: data Y varietà algebrica proiettiva liscia e G un gruppo, quali sono i dati che dobbiamo conoscere su Y per costruire un rivestimento $X \rightarrow Y$ tale che $Y = X/G$? Se il gruppo G è finito ed abeliano la risposta a questa domanda è stata data da Pardini in [Par91]. Il teorema principale dimostrato in tale lavoro è il seguente

Teorema (B). Un rivestimento abeliano $\pi : X \rightarrow Y$ con gruppo G e Y liscia e X normale è determinato, a meno di isomorfismi di G -rivestimenti, dai dati di rivestimento: fibrati in

rette \mathcal{L}_χ (visti sopra) e divisori di Weil $D_{H,\Psi}$ che soddisfano delle equivalenze lineari. Inoltre data una varietà Y liscia e un gruppo abeliano finito G e dati di rivestimento \mathcal{L}_χ e $D_{H,\Psi}$ che soddisfano delle equivalenze lineari, esiste un rivestimento, possibilmente non normale X i cui dati di rivestimento sono proprio \mathcal{L}_χ e $D_{H,\Psi}$.

Si avrà inoltre che i divisori $D_{H,\Psi}$ dell'enunciato del teorema sono legati al divisore di diramazione del rivestimento considerato.

In questo elaborato non verrà data la dimostrazione di questo risultato, bensì saranno esplicitate le equazioni che danno i rivestimenti in alcuni esempi semplici.

Naturalmente domande interessanti e complicate rimangono aperte in questo campo, come per esempio cosa accade alle equazioni lineari se G non è abeliano. Teoremi simili a quello di Pardini si hanno per rivestimenti diedrali ottenuti da Catanese e Perroni[CatPer16] ma, per ora, non si va molto oltre.

Come vedremo questa teoria ha bisogno della teoria della rappresentazione, della teoria dei fasci su una varietà, delle teorie coomologiche su una varietà e di altri strumenti importanti della geometria e dell'algebra. Non potendo qui riportare tutte le nozioni necessarie daremo per acquisite alcune di queste e ci limiteremo per facilitare la lettura a riportare solo quelle di uso specifico per i nostri scopi.

L'intento di questo progetto di tesi è quello di fornire gli strumenti di base della teoria dei rivestimenti e alcuni esempi significativi. Inoltre un obiettivo di questo elaborato è quello di fornire in forma esplicita le equazioni che determinano i rivestimenti abeliani in alcuni casi concreti.

Questo elaborato è costituito di tre capitoli, in cui sono raccolte le nozioni preliminari necessarie per lo studio dei rivestimenti, la definizione di rivestimento, la dimostrazione del Teorema (A) di decomposizione per il fascio *push-forward* del fascio di struttura, l'enunciato del Teorema (B) di caratterizzazione dei rivestimenti abeliani e alcuni esempi di equazioni determinanti la struttura di rivestimenti abeliani con gruppi noti.

Il CAPITOLO 1 contiene i risultati preliminari necessari alla comprensione dei contenuti raccolti nei capitoli successivi. In particolare, viene proposta un'introduzione alla teoria della rappresentazione con la definizione di rappresentazione, l'enunciato e la dimostrazione del teorema di Maschke, la definizione di rappresentazione irriducibile, l'enunciato e la dimostrazione del Lemma di Schür e altre proprietà delle rappresentazioni. Inoltre sono forniti numerosi esempi di rappresentazioni di gruppi. Infine è presenta in questo capitolo una sezione sulla teoria dei caratteri, in cui sono date la definizione di carattere e alcune proprietà fondamentali. I testi di riferimento in questo capitolo sono [Seg14] e [Ser96].

Il CAPITOLO 2 contiene la definizione di rivestimento, con, al contorno, le definizioni di morfismo finito e varietà quoziente. Sono presenti inoltre alcuni esempi interessanti. Il fulcro di questo capitolo è il Teorema (A), di cui è fornita una dimostrazione completa. Al fine di tale dimostrazione sono introdotti i concetti di funtore di immagine diretta superiore e di piattezza di fasci di \mathcal{O}_X -moduli. Infine nell'ultima parte del capitolo viene precisata la definizione di luogo di ramificazione e di diramazione e viene enunciato il teorema di *Purity of branch locus* di Zariski. In questo capitolo i principali testi di riferimento sono [Har77] per la parte geometrica e [AtMac69], [Lan93] e [Mat70] per gli aspetti tecnici legati all'algebra.

Il CAPITOLO 3 si concentra sul al Teorema (B) di struttura per i rivestimenti abeliani. In generale l'intento di questo capitolo è quello di esplicitare le equazioni introdotte nel suddetto Teorema (B).

A tal fine, dopo una sezione in cui viene definito il gruppo di inerzia e successivamente all'enunciato del Teorema (B) di struttura sono presentati alcuni esempi in cui, fissato un gruppo abeliano finito, vengono scritte tutte le equazioni caratterizzanti un rivestimento con tale gruppo. In questa parte sono presi in considerazione gruppi con cardinalità *piccola*, ma non mancano risultati più generali validi per intere classi di gruppi finiti.

Nell'ultima sezione del capitolo viene inoltre riportata una strategia per la ricerca di soluzioni all'equazione caratteristica dei rivestimenti doppi nel caso le varietà coinvolte siano superfici. Il principale articolo di riferimento in questo capitolo è [Par91].

Notazioni

In questa sezione precisiamo alcune delle notazioni che utilizzeremo nel seguito del lavoro.

- Tutte le varietà considerate sono definite su un campo algebricamente chiuso k fissato e di caratteristica 0.
- Tutte le varietà considerate sono proiettive, in particolare complete e separabili.
- Se X è una varietà, indicheremo con \mathcal{O}_X il suo fascio di struttura.
- Denoteremo con G un gruppo finito e con G^* il gruppo dei caratteri di G .
- Se p è un punto di una curva, indicheremo con (p) il divisore corrispondente.
- Se Y è una varietà liscia, denoteremo con Ω_Y il fascio cotangente e con ω_Y il canonico.

Nel lavoro utilizzeremo i seguenti simboli

\equiv	equivalenza lineare di divisori;	χ	indicherà sempre un carattere;
\curvearrowright	azione di gruppo;	\mathcal{L}	indicherà sempre un fibrato in rette;
k	indicherà sempre un campo algebricamente chiuso di caratteristica 0;	\cong	isomorfismo di gruppi (o di algebre quando sarà chiaro dal contesto).

Capitolo 1

Preliminari

In questo capitolo riportiamo i principali risultati nell'ambito della teoria della rappresentazione. Questi costituiscono la maggior parte delle conoscenze preliminari necessarie per una piena comprensione del resto del lavoro. Alcuni testi di riferimento per questa teoria sono, per esempio, [Seg14] e [Ser96].

1.1 Rappresentazioni

Per prima cosa forniamo la definizione di rappresentazione con alcuni esempi e prime proprietà.

1.1.1 Rappresentazioni matriciali

Definizione 1.1.1. Sia G un gruppo, una **rappresentazione matriciale** (complessa) di G è un omomorfismo di gruppi

$$\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

per un qualche intero positivo n .

Il numero n sarà detto **dimensione** della rappresentazione ρ .

Osservazione 1.1.2. È importante osservare che, per definizione, una rappresentazione è un omomorfismo di gruppi. In particolare non assumiamo che una rappresentazione sia iniettiva. Se ρ è iniettiva diremo che si tratta di una rappresentazione **fedele**.

Esempio 1.1.3. Ad esempio possiamo considerare il gruppo $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$.

Una sua rappresentazione è data dall' omomorfismo

$$\rho : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$$

$$1 \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =: M$$

(e dunque $\bar{2} \mapsto M^2$, $\bar{3} \mapsto M^3$ e $\bar{4} = \bar{0} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M^4$).

La rappresentazione ρ ha chiaramente dimensione 2 ed è fedele.

Un'altra rappresentazione di $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, questa volta di dimensione 1, che però non è fedele, si ottiene considerando

$$\begin{aligned}\psi : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathrm{GL}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ \varphi &\longmapsto 1 \quad \forall \varphi \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Questa sarà detta **rappresentazione banale** (triviale) di $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ di dimensione 1.

Definizione 1.1.4. Sia $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ una matrice invertibile. Definiamo la mappa di **coniugio** per P :

$$\begin{aligned}c_P : \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \\ M &\longmapsto P^{-1}MP.\end{aligned}$$

Osservazione. Per ogni matrice invertibile P la mappa di coniugio c_P è un isomorfismo di gruppi. In particolare, allora, se $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ è una rappresentazione di un gruppo G e $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, anche $c_P \circ \rho$ sarà una rappresentazione di G .

Definizione 1.1.5. Sia G un gruppo finito. Diciamo che due rappresentazioni matriciali $\rho_1 : G \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ e $\rho_2 : G \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ di G sono **equivalenti** se esiste una matrice invertibile $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tale che $\rho_1 = c_P \circ \rho_2$.

1.1.2 Rappresentazioni come mappe lineari

Abbiamo definito le rappresentazioni come mappe tra un gruppo G e un gruppo di matrici invertibili a coefficienti complessi. D'altra parte sappiamo che ogni matrice invertibile è associata a un isomorfismo tra spazi vettoriali. Dunque possiamo ridefinire le rappresentazioni di gruppi come segue.

Definizione 1.1.6 (Generalizzazione della definizione 1.1.1). Sia G un gruppo, una **rappresentazione** di G è una scelta di un \mathbb{C} -spazio vettoriale V e di un omomorfismo di gruppi

$$\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V).$$

Osserviamo che, per ogni scelta di una base di V ritroveremo una rappresentazione per come l'abbiamo intesa finora.

Lemma 1.1.7. Sia G un gruppo e sia $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ una sua rappresentazione. Allora per ogni scelta di basi \mathcal{A} e \mathcal{B} di V , le rappresentazioni matriciali $\rho^{\mathcal{A}}$ e $\rho^{\mathcal{B}}$ associate a ρ sono equivalenti.

Dimostrazione. La tesi segue dal fatto che esiste una matrice di cambio di base P tale che per ogni $f \in \mathrm{GL}(V)$, vale la relazione tra le matrici associate a f nelle basi \mathcal{A} e \mathcal{B} : $f^{\mathcal{B}} = P^{-1}f^{\mathcal{A}}P$. \square

Presentiamo adesso due esempi di rappresentazione molto importanti a cui faremo riferimento nel seguito.

Ricordiamo l'enunciato del Teorema di Cayley:

Teorema 1.1.8 (Teorema di Cayley). Sia G un gruppo finito di cardinalità n , allora esiste un omomorfismo di gruppi iniettivo $\sigma : G \rightarrow S_n$, dove S_n è il gruppo delle permutazioni su n elementi.

Pertanto, a meno di identificare G con la sua immagine tramite l'omomorfismo σ , ogni gruppo finito è un sottogruppo di un gruppo di permutazioni.

Esempio 1.1.9 (Rappresentazione del segno). Sia G un gruppo finito. Abbiamo osservato che, a meno di isomorfismi, G è un sottogruppo di S_n . D'altra parte conosciamo l'omomorfismo di gruppi $\text{sgn} : S_n \rightarrow \mathbb{Z}/2$ che assegna ad una permutazione il suo segno.

Allora la composizione di tale omomorfismo con l'omomorfismo σ dato dal Teorema di Cayley 1.1.8 fornisce un omomorfismo di gruppi $G \rightarrow \mathbb{Z}/2$. Componendo con l'omomorfismo $\mathbb{Z}/2 \rightarrow \mathbb{C} \cong \text{GL}(\mathbb{C})$ che mappa il generatore di $\mathbb{Z}/2$ in -1 , troviamo una rappresentazione 1-dimensionale di G che sarà detta **rappresentazione del segno**:

$$\text{sgn} : G \rightarrow \mathbb{C} \cong \text{GL}(\mathbb{C}),$$

$$g \mapsto \begin{cases} 1 & \text{se } \sigma(g) \text{ è una permutazione pari,} \\ -1 & \text{se } \sigma(g) \text{ è una permutazione dispari.} \end{cases}$$

Esempio 1.1.10 (Rappresentazione regolare). Abbiamo introdotto l'omomorfismo $\sigma : G \rightarrow S_n$ per un generico gruppo G (Teorema di Cayley 1.1.8). D'altra parte ogni permutazione di n elementi può essere vista come una matrice invertibile di taglia $n \times n$ che agisce su una n -upla per moltiplicazione da sinistra permutandone le entrate.

In altre parole si osserva che esiste un omomorfismo iniettivo di gruppi $f : S_n \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$.

Pertanto componendo σ con f troviamo una rappresentazione matriciale di dimensione $n = |G|$ di G . Questa (o meglio la rappresentazione associata a questa rappresentazione matriciale, che prescinde dalla scelta di una base di \mathbb{C}^n) sarà detta **rappresentazione regolare** di G .

Consideriamo ad esempio il gruppo $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ e descriviamo la sua rappresentazione regolare. Un omomorfismo $\sigma : \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rightarrow S_3$ è dato da

$\bar{1} \mapsto (1, 2, 3)$, $\bar{2} \mapsto (1, 3, 2)$ e $\bar{0} \mapsto ()$ dove $(1, 2, 3)$ indica la permutazione $(1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 1)$ e analogamente $(1, 3, 2)$ mentre $()$ indica l'elemento neutro di S_3 .

Allora a $(1, 2, 3) \in S_3$ corrisponderà la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ottenuta permutando le righe della matrice identica secondo la permutazione $(1, 2, 3)$.

Pertanto la rappresentazione regolare sarà

$$\rho_{\text{reg}} : \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rightarrow \text{GL}_3(\mathbb{C})$$

$$\bar{1} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{2} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{0} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.1.3 Mappe G -lineari e sottorappresentazioni

Vogliamo costruire mappe tra rappresentazioni. Per questo motivo introduciamo la seguente definizione:

Definizione 1.1.11. Sia G un gruppo, V e W due \mathbb{C} -spazi vettoriali, $\rho_1 : G \rightarrow \text{GL}(V)$ e $\rho_2 : G \rightarrow \text{GL}(W)$ due rappresentazioni di G . Una **mappa G -lineare** tra ρ_1 e ρ_2 è una mappa lineare $f : V \rightarrow W$ tale che

$$\forall g \in G \quad f \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ f$$

cioè tale che per ogni $g \in G$ il diagramma

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\rho_1(g)} & V \\ \downarrow f & & \downarrow f \\ W & \xrightarrow{\rho_2(g)} & W \end{array}$$

commuta.

Se f è invertibile diremo che f è un **isomorfismo G -lineare** e che le due rappresentazioni ρ_1 e ρ_2 sono **isomorfe**.

Osservazione 1.1.12. Si verifica che se f è G -lineare ed invertibile, allora f^{-1} è G -lineare.

Definizione 1.1.13. Una **sottorappresentazione** di una rappresentazione $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ è un sottospazio vettoriale $W \subseteq V$ tale che

$$\forall g \in G \text{ e } \forall x \in W \quad \rho(g)(x) \in W.$$

Ciò significa che ogni $\rho(g)$ definisce una mappa lineare $W \rightarrow W$, cioè abbiamo una rappresentazione di G sul sottospazio W .

Esempio 1.1.14. Sia $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \langle \mu | \mu^2 = 1 \rangle$. Allora la rappresentazione regolare di $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ è $\rho_{\text{reg}} : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{C})$ che mappa il generatore μ di $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ in $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{GL}(\mathbb{C}^2)$.

Sia W il \mathbb{C} -spazio vettoriale 1-dimensionale generato dal vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in V := \mathbb{C}^2$. Allora

$$\rho_{\text{reg}}(\mu) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Allora $\rho_{\text{reg}}(\mu)$ preserva W , cioè W è una sottorappresentazione 1-dimensionale di ρ_{reg} . Si verifica che W è isomorfa alla rappresentazione triviale 1-dimensionale di $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Osservazione 1.1.15. Sia G un gruppo, $\rho_1 : G \rightarrow \text{GL}(V)$ e $\rho_2 : G \rightarrow \text{GL}(W)$ rappresentazioni di G . Sia $f : V \rightarrow W$ una mappa G -lineare tra ρ_1 e ρ_2 . Si verifica facilmente che $\text{Ker}(f)$ e $\text{Im}(f)$ sono sottorappresentazioni rispettivamente di ρ_1 e di ρ_2 .

1.2 Teorema di Maschke

In questa sezione viene presentato uno dei più importanti risultati nell'ambito della teoria della rappresentazione, ovvero il Teorema di Maschke.

Definizione 1.2.1. Siano V e W due spazi vettoriali e ρ_V, ρ_W due rappresentazioni di uno stesso gruppo G rispettivamente su V e W . Definiamo la **rappresentazione somma diretta**

$$\rho_{V \oplus W} : G \rightarrow \text{GL}(V \oplus W),$$

$$\rho_{V \oplus W}(g) : V \oplus W \ni (x, y) \mapsto (\rho_V(g)(x), \rho_W(g)(y)) \in V \oplus W.$$

Si verifica che $\rho_{V \oplus W}$ è una rappresentazione di G di dimensione $\dim(V) + \dim(W)$.

Definizione 1.2.2. Sia G un gruppo, V una sua rappresentazione e W una sottorappresentazione di V . Si definisce **sottorappresentazione complementare** a W di V una sottorappresentazione U di V tale che $V = U \oplus W$.

Teorema 1.2.3 (Teorema di Maschke). Sia G un gruppo, V una sua rappresentazione e W una sottorappresentazione di V . Allora esiste una sottorappresentazione di V complementare a W .

Dimostrazione. La dimostrazione sfrutta il fatto che, se V e W sono rappresentazioni di uno stesso gruppo G e $f : V \rightarrow W$ è una mappa G -lineare surgettiva tale che $f(x) = x \ \forall x \in W$ (proiezione G -lineare), allora $V = W \oplus \text{Ker}(f)$. Dunque $\text{Ker}(f)$ è una sottorappresentazione di V complementare a W .

Pertanto basta provare che, data una rappresentazione V e una sua sottorappresentazione W esiste sempre una proiezione G -lineare $f : V \rightarrow W$. Consideriamo allora la mappa $\tilde{f} : \tilde{U} \oplus W \rightarrow W$ la proiezione di V su W con nucleo \tilde{U} il sottospazio di V complementare a W . Sappiamo che \tilde{f} è una mappa lineare, ma in generale non sarà G -lineare.

Tuttavia possiamo costruire

$$f : V \rightarrow V$$

definita da

$$f(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\rho(g) \circ \tilde{f} \circ \rho(g^{-1}))(x).$$

Verifichiamo che f è una proiezione G -lineare di V su W . Abbiamo che $\text{Im}(f) \subseteq W$ dal momento che

$$\tilde{f}(\rho(g^{-1})(x)) \in W \quad \forall x \in V \ \forall g \in G$$

e dunque, essendo W una sottorappresentazione,

$$\rho(g)(\tilde{f}(\rho(g^{-1})(x))) \in W \quad \forall x \in V \quad \forall g \in G.$$

Inoltre f è una proiezione, infatti $\forall y \in W, g \in G$

$$\tilde{f}(\rho(g^{-1})(y)) = \rho(g^{-1})(y) = \rho(g)^{-1}(y)$$

in quanto ρ è un omomorfismo di gruppi. Pertanto

$$f(y) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\rho(g) \circ (\tilde{f} \circ \rho(g^{-1}))(y)) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\rho(g) \circ \rho(g)^{-1}(y)) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} y = y.$$

Infine verifichiamo che f è G -lineare. Infatti per ogni $h \in G$ e per ogni $x \in V$ abbiamo:

$$\begin{aligned} f(\rho(h)(x)) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\rho(g) \circ \tilde{f} \circ \rho(g^{-1}) \circ \rho(h))(x) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\rho(g) \circ \tilde{f} \circ \rho(g^{-1}h))(x) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{hg \in G} (\rho(g) \circ \tilde{f} \circ \rho(g^{-1}))(x) \\ &= (\rho(h) \circ f)(x). \end{aligned}$$

Dunque abbiamo provato la tesi del Teorema di Maschke. □

1.2.1 Rappresentazioni irriducibili

Il Teorema di Maschke ci permette di verificare rapidamente diverse proprietà molto importanti delle rappresentazioni.

Definizione 1.2.4. Una rappresentazione V di un gruppo G è detta **irriducibile** se le sue uniche sottorappresentazioni sono $0 \subset V$ e $V \subseteq V$.

A questo punto, data una rappresentazione V , se questa non è irriducibile possiamo considerarne una sottorappresentazione W e decomporre V come somma di W e della sua complementare. Procedendo in questo modo, dopo un numero finito di iterazioni avremo una decomposizione di V in somma di rappresentazioni irriducibili. Dunque abbiamo provato il

Corollario 1.2.5 (del Teorema di Maschke 1.2.3). Ogni rappresentazione U di un gruppo G si decompone come somma diretta

$$U = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$$

dove U_1, \dots, U_r sono sottorappresentazioni irriducibili.

Le rappresentazioni irriducibili giocano il ruolo di *numeri primi* nello studio delle rappresentazioni e spesso cercheremo di trovare decomposizioni in irriducibili. Per questo è utile la seguente proposizione.

Proposizione 1.2.6. Sia G un gruppo e $\rho : G \longrightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$ una rappresentazione matriciale. Allora esiste una base di \mathbb{C}^n tale che $\rho(g)$ è diagonale per ogni $g \in G$ se e solo se ρ si decompone come somma diretta di rappresentazioni irriducibili di dimensione 1.

Dimostrazione. (\Rightarrow) Sia $\mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_n\}$ una tale base. Allora x_i è autovettore per ogni $\rho(g)$, e quindi $\langle x_i \rangle$ è una sottorappresentazione per ogni $i = 1, \dots, n$ e chiaramente $\mathbb{C}^n = \langle x_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle x_n \rangle$.

(\Leftarrow) Sia $\mathbb{C}^n = U_1 \oplus \dots \oplus U_n$ con ciascun U_i una sottorappresentazione di dimensione 1. Sia, per ogni i , $x_i \in U_i \setminus \{0\}$; allora $\{x_1, \dots, x_n\}$ è una base di \mathbb{C}^n .

Ma per ogni $g \in G$, $\rho(g)$ preserva $\langle x_i \rangle = U_i$ per ogni i ; cioè $\rho(g)$ è diagonale rispetto a tale base. □

1.2.2 Lemma di Schür e gruppi abeliani

L'obiettivo di questo paragrafo è verificare cosa succede quando consideriamo rappresentazioni di gruppi abeliani e loro decomposizioni in irriducibili.

Lemma 1.2.7 (Schür). Siano $\rho_V : G \longrightarrow \text{GL}(V)$ e $\rho_W : G \longrightarrow \text{GL}(W)$ rappresentazioni irriducibili di un gruppo G (anche non abeliano). Allora

(i) Sia $f : V \longrightarrow W$ una mappa G -lineare. Allora, o f è un isomorfismo, oppure f è la zero mappa.

(ii) Sia $f : V \longrightarrow V$ una mappa G -lineare. Allora $f = \lambda \mathbf{1}_V$ per qualche $\lambda \in \mathbb{C}$.

Dimostrazione. (i) Se f non è la zero mappa, allora $\text{Ker}(f) \subseteq V$ è una sottorappresentazione di V che è irriducibile. Allora o $\text{Ker}(f) = 0$ o $\text{Ker}(f) = V$. Poiché $f \neq 0$, avremo $\text{Ker}(f) = 0$ e dunque f è iniettiva. Con un ragionamento analogo su $\text{Im}(f) \subseteq W$ si prova che f è anche surgettiva.

(ii) Segue applicando il punto precedente a $\tilde{f} = (f - \lambda \mathbf{1}_V) : V \longrightarrow V$ con λ un autovalore di f . □

Proposizione 1.2.8. Sia G un gruppo abeliano, allora ogni rappresentazione irriducibile di G è 1-dimensionale.

Dimostrazione. Sia $\rho : G \longrightarrow \text{GL}(V)$ una rappresentazione irriducibile. Sia $h \in G$ e consideriamo la mappa lineare $\rho(h) : V \longrightarrow V$. Di fatto $\rho(h)$ è G -lineare, infatti

$$\rho(h) \circ \rho(g) = \rho(hg) = \rho(gh) = \rho(g) \circ \rho(h).$$

Pertanto, dal punto (ii) del Lemma di Schür 1.2.7 sappiamo che $\rho(h) = \lambda_h \mathbf{1}_V$ per qualche $\lambda_h \in \mathbb{C}$. Ora consideriamo un qualunque $x \in V$, abbiamo allora che, per ogni $h \in G$,

$$\rho(h)(x) = \lambda_h x \in \langle x \rangle.$$

Pertanto $\langle x \rangle$ è una sottorappresentazione 1-dimensionale di V . Ma V è irriducibile, dunque $V = \langle x \rangle$, e dunque V è 1-dimensionale. \square

1.2.3 Altre rappresentazioni

In questo paragrafo raccogliamo brevemente le definizioni di altre rappresentazioni che sono utili per il seguito.

In generale se V e W sono \mathbb{C} -spazi vettoriali, lo spazio delle mappe lineari $\text{Hom}(V, W)$ è un \mathbb{C} -spazio vettoriale. È possibile definire una rappresentazione di un gruppo G su tale spazio a partire da rappresentazioni su V e W nel modo seguente.

Definizione 1.2.9. Sia G un gruppo e V, W due sue rappresentazioni. Definiamo la rappresentazione $\text{Hom}(V, W)$ data da

$$\begin{aligned} \rho_{\text{Hom}(V, W)}(g) : \text{Hom}(V, W) &\longrightarrow \text{Hom}(V, W) \\ f &\longmapsto \rho_W(g) \circ f \circ \rho_V(g^{-1}) \quad \forall g \in G. \end{aligned}$$

Si verifica che questa definisce una rappresentazione di G di dimensione $\dim(V) \cdot \dim(W)$.

A partire da una rappresentazione di un gruppo G possiamo definire la sua sottorappresentazione degli invarianti e la rappresentazione duale come mostrato nelle seguenti definizioni

Definizione 1.2.10. Sia $\rho : G \longrightarrow \text{GL}(V)$ una rappresentazione, definiamo la **sottorappresentazione degli invarianti** $V^G = \{x \in V : \rho(g)(x) = x \ \forall g \in G\}$. Questa è una sottorappresentazione di V .

Definizione 1.2.11. Sia $\rho_V : G \longrightarrow \text{GL}(V)$ una rappresentazione, definiamo la **rappresentazione duale** V^* che è data da $\rho_{\text{Hom}(V, \mathbb{C})}(g) : V^* \ni f \mapsto f \circ \rho_V(g^{-1}) \in V^*$.

In generale se V e W sono \mathbb{C} -spazi vettoriali, lo spazio prodotto tensore su \mathbb{C} , $V \otimes W$ è un \mathbb{C} -spazio vettoriale. È possibile definire una rappresentazione di un gruppo G su tale spazio a partire da rappresentazioni su V e W nel modo seguente.

Definizione 1.2.12. Siano $\rho_V : G \longrightarrow \text{GL}(V)$ e $\rho_W : G \longrightarrow \text{GL}(W)$ rappresentazioni, definiamo la **rappresentazione prodotto tensore** $V \otimes W$ data sui tensori semplici da $\rho_{V \otimes W}(g) : a \otimes b \mapsto \rho_V(g)(a) \otimes \rho_W(g)(b)$, ed estesa per linearità su $V \otimes W$.

È possibile verificare la seguente proposizione:

Proposizione 1.2.13. La rappresentazione $V \otimes W$ è isomorfa alla rappresentazione $\text{Hom}(V^*, W)$.

Dimostrazione. Si veda [Seg14] Proposizione 1.9.5, p. 53. \square

1.2.4 Ulteriori risultati sulla decomposizione in rappresentazioni irriducibili

In questa sottosezione vengono presentate alcune proprietà della decomposizione in rappresentazioni irriducibili la cui esistenza è dimostrata nel Corollario 1.2.5.

In particolare proveremo l'unicità di una tale decomposizione e successivamente osserveremo alcune proprietà della decomposizione della rappresentazione regolare.

Notazione. Sia G un gruppo e V, W due sue rappresentazioni. Scriviamo $\text{Hom}_G(V, W) = \{f : V \rightarrow W \mid f \text{ } G\text{-lineare}\}$. In maniera analoga alla definizione 1.2.9 avremo una rappresentazione di G su $\text{GL}(\text{Hom}_G(V, W))$. Si verifica che questa rappresentazione coincide con la rappresentazione invariante $\text{Hom}(V, W)^G$.

Proposizione 1.2.14. Siano V e W due rappresentazioni irriducibili di G . Allora.

$$\dim(\text{Hom}_G(V, W)) = \begin{cases} 0 & \text{se } V \text{ e } W \text{ non sono isomorfe,} \\ 1 & \text{se } V \text{ e } W \text{ sono isomorfe.} \end{cases}$$

Dimostrazione. Supponiamo che V e W non siano isomorfe. Allora per il Lemma di Schür (1.2.7) l'unica mappa G -lineare tra V e W è la zero mappa, dunque $\text{Hom}_G(V, W) = \{0\}$.

Se invece abbiamo un isomorfismo $f_0 : V \rightarrow W$, allora per ogni $f \in \text{Hom}_G(V, W)$

$f_0^{-1} \circ f : V \rightarrow V$ è G -lineare e dunque per il Lemma di Schür (1.2.7) $f_0^{-1} \circ f = \lambda \mathbf{1}_V$ per qualche $\lambda \in \mathbb{C}$. Ma allora $f = \lambda f_0$, dunque $\text{Hom}_G(V, W) = \langle f_0 \rangle_{\mathbb{C}}$. \square

Proposizione 1.2.15. Sia $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ una rappresentazione, e sia $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_s$ una decomposizione di V in rappresentazioni irriducibili. Sia W una qualsiasi rappresentazione irriducibile di G . Allora il numero di rappresentazioni irriducibili nell'insieme $\{U_1, \dots, U_s\}$ che sono isomorfe a W è uguale alla dimensione di $\text{Hom}_G(W, V)$.

Dimostrazione. Abbiamo che

$$\text{Hom}_G(W, V) = \bigoplus_{i=1}^s \text{Hom}_G(W, U_i)$$

e dunque anche

$$\dim(\text{Hom}_G(W, V)) = \sum_{i=1}^s \dim(\text{Hom}_G(W, U_i)).$$

Ma per quanto provato alla Proposizione precedente abbiamo che questo è esattamente il numero di elementi di $\{U_1, \dots, U_s\}$ che sono isomorfi a W . \square

Corollario 1.2.16 (della Proposizione 1.2.14). Sia $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ una rappresentazione e siano

$$V = U_1 \oplus \dots \oplus U_s$$

$$V = \hat{U}_1 \oplus \dots \oplus \hat{U}_r$$

due sue decomposizioni in irriducibili. Allora i due insiemi $\{U_1 \dots U_s\}$ e $\{\hat{U}_1 \dots \hat{U}_r\}$ sono lo stesso, cioè $r = s$ e, a meno di riordinarli, \hat{U}_i è isomorfo a U_i .

Dunque la decomposizione in irriducibili di cui abbiamo provato l'esistenza nel Corollario 1.2.5 è essenzialmente unica a meno dell'ordine dei fattori.

Dimostrazione. È immediata conseguenza della Proposizione 1.2.14. Infatti per ogni rappresentazione irriducibile W di G , il numero di fattori nell'insieme $\{U_1 \dots U_s\}$ e $\{\hat{U}_1 \dots \hat{U}_r\}$ che sono isomorfi a W è uguale alla dimensione $\dim(\text{Hom}_G(W, V))$ che è uguale al numero di elementi nell'insieme $\{\hat{U}_1 \dots \hat{U}_r\}$ che sono isomorfi a W . \square

Come annunciato a inizio sezione, abbiamo provato l'unicità della decomposizione, ora enunciamo alcune proprietà della decomposizione della rappresentazione regolare.

Teorema 1.2.17. Sia $V_{\text{reg}} = U_1 \oplus \dots \oplus U_s$ la decomposizione di V_{reg} in irriducibili. Allora per ogni rappresentazione irriducibile W di G , il numero di fattori nella decomposizione che sono isomorfi a W è uguale a $\dim(W)$.

Dunque vale l'uguaglianza

$$V_{\text{reg}} = \bigoplus_{U_i \text{ rapp. irriducibili di } G} U_i^{d_i} \quad \text{dove } d_i = \dim(U_i)$$

Dimostrazione. Per quanto osservato nella Proposizione 1.2.15 il numero di fattori nella decomposizione che sono isomorfi a W è $\dim(\text{Hom}_G(W, V_{\text{reg}}))$. Dunque la tesi segue immediatamente osservando che

$$\text{Hom}_G(W, V_{\text{reg}}) = W.$$

Infatti si verifica che la mappa

$$\begin{aligned} T : \text{Hom}_G(W, V_{\text{reg}}) &\longrightarrow W \\ f &\longmapsto f(b_e) \end{aligned}$$

dove b_e è il vettore non nullo di V_{reg} dato dall'elemento neutro di G , è un isomorfismo. \square

Corollario 1.2.18 (del Teorema 1.2.17). Ogni gruppo finito ha un numero finito di rappresentazioni irriducibili.

Dimostrazione. La dimostrazione è immediata osservando che tutte le rappresentazioni irriducibili di un gruppo compaiono nella decomposizione della sua rappresentazione regolare che ha dimensione finita. \square

Corollario 1.2.19 (Teorema 1.2.17). Siano U_1, \dots, U_r tutte le rappresentazioni irriducibili di G e sia $d_i = \dim(U_i)$, allora

$$\sum_{i=1}^r d_i^2 = |G|.$$

Dimostrazione. Dal Teorema 1.2.17 sappiamo che $V_{\text{reg}} = \bigoplus U_i^{d_i}$. Calcolando la dimensione dai due lati dell'uguaglianza troviamo la tesi. \square

1.3 Caratteri

In quest'ultima sezione introduttiva definiamo uno degli oggetti che tornerà maggiormente utile nel seguito dell'articolo: i caratteri.

Definizione 1.3.1. Sia $M = (M_{ij})$ una matrice quadrata a coefficienti in k , la **traccia** di M è $\text{Tr}(M) = \sum M_{ii}$.

Osservazione. Si verifica che se M e N sono matrici $\text{Tr}(MN) = \text{Tr}(NM)$, e di conseguenza se N e M sono coniugate $\text{Tr}(N) = \text{Tr}(P^{-1}MP) = \text{Tr}(M)$.

Grazie a questa osservazione si riesce a definire la traccia di una funzione lineare tra spazi vettoriali come la traccia di una matrice ad essa associata, e la definizione prescindere dalla scelta della base degli spazi vettoriali.

Definizione 1.3.2. Sia $\rho : G \longrightarrow \text{GL}(V)$ una rappresentazione di un gruppo finito G , definiamo il **carattere** di ρ come la funzione

$$\begin{aligned}\chi_\rho : G &\longrightarrow \mathbb{C} \\ g &\longmapsto \text{Tr}(\rho(g))\end{aligned}$$

Osservazione. Si osserva che in generale χ_ρ non è un omomorfismo di gruppi, in quanto in generale $\text{Tr}(M)\text{Tr}(N) \neq \text{Tr}(MN)$.

Proposizione 1.3.3. Rappresentazioni isomorfe hanno lo stesso carattere.

Dimostrazione. Se due rappresentazioni sono isomorfe, allora esiste una base di V in cui sono descritte dalla stessa rappresentazione matriciale, dunque a maggior ragione avranno stesso carattere. \square

Proposizione 1.3.4. Sia $\rho : G \longrightarrow \text{GL}(V)$ una rappresentazione di dimensione d di un gruppo finito G e sia χ_ρ il suo carattere. Allora

(i) Se g e h sono coniugati in G , allora

$$\chi_\rho(g) = \chi_\rho(h)$$

(ii) Per ogni $g \in G$

$$\chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)}.$$

(iii) $\chi_\rho(e) = d$.

(iv) Per ogni $g \in G$,

$$|\chi_\rho(g)| \leq d$$

e $|\chi_\rho(g)| = d$ se e solo se $\rho(g) = \lambda \mathbf{1}_V$ per qualche $\lambda \in \mathbb{C}$.

Dimostrazione. (i) Sia $g = \mu^{-1}h\mu$ per qualche $\mu \in G$. Allora $\rho(g) = \rho(\mu^{-1})\rho(h)\rho(\mu)$ Dunque in ogni base le matrici $\rho(g)$ e $\rho(h)$ sono coniugate, dunque hanno la stessa traccia.

(ii) Sia $g \in G$ e sia k l'ordine di g . Supponiamo di scegliere una base in modo che la matrice $\rho(g)$ sia diagonale (è sempre possibile farlo). Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ le entrate sulla diagonale della matrice (cioè gli autovalori di $\rho(g)$). Allora ogni λ_i è una radice k -esima dell'unità. Dunque $|\lambda_i| = 1$ e $\lambda_i^{-1} = \overline{\lambda_i}$. Allora

$$\chi_\rho(g^{-1}) = \text{Tr}(\rho(g^{-1})) = \sum_{i=1}^d \lambda_i^{-1} = \sum_{i=1}^d \overline{\lambda_i} = \overline{\chi_\rho(g)}.$$

(iii) In ogni base $\chi_\rho(e)$ è la matrice identica $d \times d$.

(iv) Usando la stessa notazione del punto (ii), abbiamo, grazie alla disuguaglianza triangolare

$$|\chi_\rho(g)| = \left| \sum_{i=1}^d \lambda_i \right| \leq \sum_{i=1}^d |\lambda_i| = d.$$

Inoltre vale l'uguaglianza se e solo se $\arg(\lambda_i) = \arg(\lambda_j)$ per ogni i, j

$$\Leftrightarrow \lambda_i = \lambda_j \text{ per ogni } i, j \quad (\text{poiché } |\lambda_i| = |\lambda_j| = 1)$$

$$\Leftrightarrow \rho(g) = \lambda \mathbf{1}_V \text{ per qualche } \lambda \in \mathbb{C}.$$

□

Definizione 1.3.5. Sia ρ una rappresentazione irriducibile di G , allora diciamo che χ_ρ è un **carattere irriducibile**.

Osservazione 1.3.6. Sappiamo che ogni gruppo G ha un numero finito di rappresentazioni irriducibili U_1, \dots, U_r . Di conseguenza G avrà un numero finito di caratteri irriducibili χ_1, \dots, χ_r . Inoltre ogni rappresentazione $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ di G si scrive in modo unico come somma di irriducibili

$$V = U_1^{\oplus m_1} \oplus \dots \oplus U_r^{\oplus m_r}.$$

Ma allora avremo un'analogia decomposizione per i caratteri in termini di caratteri irriducibili:

$$\chi_\rho = m_1 \chi_1 + \dots + m_r \chi_r.$$

Proposizione 1.3.7. Sia G un gruppo e siano U_1, \dots, U_r le sue rappresentazioni irriducibili e χ_1, \dots, χ_r i corrispondenti caratteri irriducibili. Allora

(i) $\chi_{\text{reg}} = d_1 \chi_1 + \dots + d_r \chi_r$ dove d_i è la dimensione di U_i

(ii)

$$\chi_{\text{reg}}(g) = \begin{cases} |G| & \text{se } g = e; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dimostrazione. (i) Segue direttamente dal fatto che $V_{\text{reg}} = \bigoplus U_i^{d_i}$ (Teorema 1.2.17).

(ii) Il caso $g = e$ è il punto (iii) della Proposizione 1.3.4. L'altro caso è immediato osservando che $\forall h \in G \quad gh \neq h$. Di conseguenza $\text{Tr}(\rho_{\text{reg}}(g)) = 0$

□

Esempio 1.3.8 (Carattere della rappresentazione banale). Sia G un gruppo finito e sia ρ la sua rappresentazione banale n -dimensionale.

Dunque $\rho(g) = \mathbf{1}_n$ per ogni $g \in G$. Di conseguenza la traccia di $\rho(g)$ è n per ogni $g \in G$ e quindi il carattere associato a ρ è $\chi_\rho : G \ni g \mapsto n$ per ogni $g \in G$.

Esempio 1.3.9 (Carattere della rappresentazione del segno). Sia G un gruppo finito e sia sgn la sua rappresentazione del segno. Poiché sgn è una rappresentazione 1-dimensionale, questa coincide con il carattere ad essa associata.

1.3.1 Prodotto interno di caratteri

Definizione 1.3.10. Sia \mathbb{C}^G l'insieme delle funzioni da G in \mathbb{C} . Siano $\xi, \zeta \in \mathbb{C}^G$. Definiamo il loro **prodotto interno** come

$$\langle \xi | \zeta \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \xi(g) \overline{\zeta(g)}$$

Teorema 1.3.11. Siano $\rho_V : G \longrightarrow \text{GL}(V)$ e $\rho_W : G \longrightarrow \text{GL}(W)$ rappresentazioni e siano χ_V, χ_W i rispettivi caratteri. Allora $\langle \chi_V | \chi_W \rangle = \dim(\text{Hom}_G(V, W))$

Dimostrazione. Si veda [Seg14], Teorema 2.2.2, p. 64.

□

Corollario 1.3.12. Sia G un gruppo e siano χ_1, \dots, χ_r i suoi caratteri irriducibili, allora

$$\langle \chi_i | \chi_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Corollario 1.3.13. Sia χ un carattere di G , allora χ è irriducibile se e solo se $\langle \chi | \chi \rangle = 1$.

Dimostrazione. Abbiamo già osservato che se χ è irriducibile, allora $\langle \chi | \chi \rangle = 1$ nel Corollario 1.3.12.

D'altra parte, sia χ tale che $\langle \chi | \chi \rangle = 1$ e sia

$$\chi = m_1 \chi_1 + \dots + m_r \chi_r$$

una decomposizione in caratteri irriducibili di χ . Allora sappiamo dalla Proposizione 1.3.7 che m_i è la dimensione della rappresentazione irriducibile associata al carattere χ_i , pertanto sarà un numero naturale.

D'altra parte sappiamo che $\langle \chi_i | \chi_j \rangle = \delta_{i,j}$; dunque per linearità

$$1 = \langle \chi | \chi \rangle = m_1 + \dots + m_r.$$

Da questo deduciamo che $r = 1$ e $m_1 = 1$; cioè $\chi = \chi_1$ è un carattere irriducibile.

□

Osservazione. Dalla Proposizione 1.3.4 (parte (i)) sappiamo che un carattere assume lo stesso valore su elementi coniugati di G . Per ogni $g \in G$ scriviamo $[g]$ per indicare la classe di coniugio di g . Dunque per valutare il prodotto interno di due caratteri χ_V, χ_W non serve valutare $\chi_V(g)\overline{\chi_W(g)}$ per ogni elemento del gruppo, ma basta valutarlo per rappresentanti di ogni classe di coniugio. Dunque avremo

$$\begin{aligned}\langle \chi_V | \chi_W \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g) \overline{\chi_W(g)} = \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{[g]} |[g]| \chi_V(g) \overline{\chi_W(g)},\end{aligned}$$

dove con $|[g]|$ indichiamo la cardinalità della classe di coniugio dell'elemento g .

Teorema 1.3.14. Siano $\rho_V : G \longrightarrow \text{GL}(V)$ e $\rho_W : G \longrightarrow \text{GL}(W)$ rappresentazioni e supponiamo che $\chi_V = \chi_W$. Allora V e W sono isomorfe.

Dimostrazione. Siano U_1, \dots, U_r le rappresentazioni irriducibili di G , e χ_1, \dots, χ_r i rispettivi caratteri irriducibili. Abbiamo

$$V = U_1^{\oplus m_1} \oplus \dots \oplus U_r^{\oplus m_r}$$

per alcuni interi m_1, \dots, m_r , e

$$W = U_1^{\oplus l_1} \oplus \dots \oplus U_r^{\oplus l_r}$$

per alcuni interi l_1, \dots, l_r . Dunque

$$\chi_V = m_1 \chi_1 + \dots + m_r \chi_r$$

e

$$\chi_W = l_1 \chi_1 + \dots + l_r \chi_r.$$

Ma $\chi_V = \chi_W$, e dunque per ogni $i = 1, \dots, r$ abbiamo

$$m_i = \langle \chi_V | \chi_i \rangle = \langle \chi_W | \chi_i \rangle = l_i.$$

Pertanto V e W hanno la stessa decomposizione in irriducibili e dunque sono isomorfe. □

1.3.2 Funzioni di classe e tavola dei caratteri

Definizione 1.3.15. Una **funzione di classe** per un gruppo G è una funzione

$$\xi : G \longrightarrow \mathbb{C}$$

tale che

$$\xi(h^{-1}gh) = \xi(g)$$

per ogni $g, h \in G$.

Osservazione 1.3.16. Si osserva che una funzione di classe è una mappa in \mathbb{C}^G che è costante su ogni classe di coniugio. Denoteremo con $[g]$ la classe di coniugio di $g \in G$.

Si verifica immediatamente che le funzioni di classe costituiscono un sottospazio vettoriale di \mathbb{C}^G che denotiamo con

$$\mathbb{C}_{cl}^G \subset \mathbb{C}^G.$$

Avremo che la dimensione di \mathbb{C}_{cl}^G è data dal numero di classi di coniugio in G .

Inoltre si osserva che il prodotto interno di caratteri si estende a tutte le funzioni di classe come prodotto Hermitiano su \mathbb{C}_{cl}^G nel modo classico:

$$\langle \xi | \zeta \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{[g]} |[g]| \xi(g) \overline{\zeta(g)}$$

È possibile verificare il seguente

Teorema 1.3.17. Per ogni gruppo G , il numero delle rappresentazioni irriducibili di G è uguale al numero di classi di coniugio di G .

Dimostrazione. Si veda, ad esempio, [Seg14], Teorema 2.3.3, p. 73 e 108. □

Corollario 1.3.18. I caratteri irriducibili di G formano una base per \mathbb{C}_{cl}^G .

Dimostrazione. Segue immediatamente dal Teorema precedente osservando che l'insieme dei caratteri irriducibili $\{\chi_1, \dots, \chi_r\}$ è linearmente indipendente e $r = \#\{\text{classi di coniugio}\} = \dim \mathbb{C}_{cl}^G$. □

Definizione 1.3.19. Sia G un gruppo e χ_1, \dots, χ_r i suoi caratteri irriducibili. Siano $[g_1], \dots, [g_s]$ le classi di coniugio di G . Per il Teorema 1.3.17 $r = s$. Definiamo la **tavola dei caratteri** di G come la matrice C con entrate

$$C_{i,j} = \chi_i(g_j) \quad i, j = 1, \dots, r.$$

Osservazione 1.3.20. Sia G un gruppo e C la sua tavola dei caratteri. Calcoliamo $C\overline{C}^T$. Abbiamo

$$\begin{aligned} (C\overline{C}^T)_{i,j} &= \sum_{k=1}^r C_{i,k} \overline{C_{j,k}} = \\ &= \sum_{k=1}^r \chi_i(g_j) \overline{\chi_j(g_k)}. \end{aligned}$$

Questa assomiglia alla formula per $\langle \chi_i | \chi_j \rangle$ ma mancano i coefficienti $\frac{|[g_i]|}{|G|}$. Se modifichiamo C con la matrice

$$B_{i,j} = \chi_i(g_j) \sqrt{\frac{|[g_j]|}{|G|}}$$

abbiamo che

$$(B\overline{B}^T)_{i,j} = \sum_{k=1}^r \chi_i(g_k) \overline{\chi_j(g_k)} \frac{|[g_k]|}{|G|} =$$

$$= \langle \chi_i | \chi_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Cioè $B\bar{B}^T = \mathbf{1}_r$, cioè B è una matrice unitaria.

Proposizione 1.3.21. Siano $[g_i], [g_j]$ due classi di coniugio in G . Allora

$$\sum_{k=1}^r \overline{\chi_k(g_i)} \chi_k(g_j) = \begin{cases} \frac{|G|}{|[g_i]|} & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Dimostrazione. Sia B la matrice dei caratteri modificata come nell'osservazione precedente. Abbiamo $B^{-1} = \bar{B}^T$, dunque $\bar{B}^T B = \mathbf{1}_r$, cioè

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^r \bar{B}_{k,i} B_{k,j} &= \left(\sum_{k=1}^r \overline{\chi_k(g_i)} \chi_k(g_j) \right) \frac{\sqrt{|[g_i]| |[g_j]|}}{|G|} = \\ &= \begin{cases} \frac{|G|}{|[g_i]|} & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j; \end{cases} \end{aligned}$$

da cui segue la tesi. □

Esempio 1.3.22. Calcoliamo la tavola dei caratteri di alcuni gruppi.

- Consideriamo il gruppo ciclico $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Osserviamo che $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, essendo abeliano, ha due classi di coniugio che corrispondono ai due elementi. Pertanto ci saranno due caratteri irriducibili.

Osserviamo che la rappresentazione del segno e la rappresentazione triviale 1-dimensionale di $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sono irriducibili perché se ρ_{sgn} e ρ_0 sono i corrispondenti caratteri abbiamo che

$$\langle \rho_{\text{sgn}} | \rho_{\text{sgn}} \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\bar{x} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \rho_{\text{sgn}}(\bar{x})^2 = 1,$$

$$\langle \rho_0 | \rho_0 \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\bar{x} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \rho_0(\bar{x})^2 = 1,$$

e quindi tali caratteri sono irriducibili. Pertanto la tavola dei caratteri sarà

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
χ_0	1	1
χ_{sgn}	1	-1

- Consideriamo il gruppo ciclico $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Osserviamo che $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, essendo abeliano, ha tre classi di coniugio che corrispondono ai tre elementi. Pertanto ci saranno tre caratteri irriducibili.

Osserviamo che la rappresentazione del segno e la rappresentazione triviale 1-dimensionale

di $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ sono irriducibili analogamente a sopra, ma in questo caso coincidono. Inoltre abbiamo la seguente rappresentazione 1-dimensionale:

$$\rho_1 : \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\bar{1} \longmapsto \zeta \text{ dove } \zeta \text{ è una radice primitiva dell'unità.}$$

Si verifica che anche ρ_1 è una rappresentazione irriducibile e analogamente a questa è irriducibile la rappresentazione

$$\rho_2 : \bar{1} \longmapsto \zeta^2.$$

Pertanto la tavola dei caratteri sarà

$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
χ_0	1	1	1
χ_{ρ_1}	1	ζ	ζ^2
χ_{ρ_2}	1	ζ^2	ζ

- Consideriamo il gruppo $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Osserviamo che $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, essendo abeliano, ha quattro classi di coniugio che corrispondono ai quattro elementi. Pertanto ci saranno quattro caratteri irriducibili.

Osserviamo che la rappresentazione del segno e la rappresentazione triviale 1-dimensionale di $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sono irriducibili analogamente a sopra. Inoltre abbiamo i seguenti caratteri:

$$\chi_1 : (\bar{0}, \bar{1}) \mapsto -1, \quad (\bar{1}, \bar{0}) \mapsto 1,$$

$$\chi_2 : (\bar{1}, \bar{0}) \mapsto -1, \quad (\bar{0}, \bar{1}) \mapsto 1,$$

che corrispondono ai sottogruppi ciclici di $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ generati rispettivamente da $(\bar{0}, \bar{1})$ e $(\bar{1}, \bar{0})$. Si verifica che questi sono irriducibili e dunque abbiamo la tavola dei caratteri:

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$(\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{1}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{1})$	$(\bar{1}, \bar{1})$
χ_0	1	1	1	1
χ_{sgn}	1	-1	-1	1
χ_1	1	1	-1	-1
χ_2	1	-1	1	-1

- Consideriamo infine il gruppo S_3 delle permutazioni di 3 elementi. Osserviamo che S_3 non è commutativo ed ha tre classi di coniugio che corrispondono agli elementi di ordine 1, 2 e 3. Dunque ci saranno 3 caratteri irriducibili. Osserviamo che la rappresentazione del segno e la rappresentazione triviale 1-dimensionale di S_3 sono irriducibili analogamente a sopra. Osserviamo che, poiché S_3 non è commutativo possiamo avere rappresentazioni irriducibili di S_3 che hanno dimensione maggiore di 1. È il caso della rappresentazione triangolare:

Sappiamo che $\tau := (1, 2)$ e $\sigma := (1, 2, 3)$ generano S_3 . Possiamo definire la rappresentazione triangolare indicando l'immagine di σ e τ e verificando che $\rho(\tau)^2 = \mathbf{1} = \rho(\sigma)^3$ e che $\rho(\sigma\tau) = \rho(\sigma)^{-1}\rho(\tau)^{-1}$. Definiamo allora la rappresentazione matriciale

$$\rho : S_3 \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$$

$$\tau \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma \longmapsto \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{dove } \omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}.$$

Si verifica che questa è una rappresentazione irriducibile, e dunque il carattere χ_ρ ad essa associata sarà un carattere irriducibile. Pertanto abbiamo la tavola dei caratteri:

S_3	[(1)]	[(1, 2)]	[(1, 2, 3)]
χ_0	1	1	1
χ_{sgn}	1	-1	1
χ_ρ	2	0	-1

Capitolo 2

Rivestimenti abeliani

In questo capitolo viene data la definizione di rivestimento abeliano e viene enunciato e dimostrato il Teorema 2.0.2 che stabilisce una relazione tra i caratteri di un gruppo e un rivestimento.

Lo studio sarà limitato a varietà algebriche definite sul campo \mathbb{C} dei numeri complessi, tuttavia molti dei risultati che non coinvolgono esplicitamente le funzioni olomorfe possono essere estesi al caso più generale di un campo algebricamente chiuso k di caratteristica 0. Per semplicità, ove non specificato diversamente, il campo considerato sarà sempre \mathbb{C} .

Assumiamo come note la definizione di varietà algebrica e le proprietà generali legate a questi oggetti. Per maggiori dettagli rimandiamo a [Har77], [Kem93] e [Per95].

Per prima cosa diamo la definizione di rivestimento abeliano. Come annunciato consideriamo (X, \mathcal{O}_X) una varietà algebrica complessa con \mathcal{O}_X il fascio di struttura delle funzioni regolari.

Definizione 2.0.1. Sia Y una varietà proiettiva liscia. Un **rivestimento abeliano** di Y con gruppo finito e abeliano G è un morfismo finito e surgettivo $\pi : X \rightarrow Y$ e un'azione fedele di G su X tali che π esibisce Y come un quoziente di X modulo G .

Nel seguito del capitolo verrà chiarito nel dettaglio cosa si intende per *quoziente di X modulo G* .

Una volta precisato il significato di rivestimento, ci concentreremo sul teorema seguente.

Teorema 2.0.2. Sia $\pi : X \rightarrow Y$ un rivestimento abeliano con gruppo G . Allora

$$\pi_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y \oplus \bigoplus_{\chi \in G^* \setminus \{\chi_0\}} \mathcal{L}_\chi^{-1}, \quad (2.1)$$

dove G^* è il gruppo dei caratteri di G , χ_0 è il carattere banale e gli \mathcal{L}_χ^{-1} sono fibrati in rette su Y .

Un'immediata e importante conseguenza del Teorema è il seguente corollario.

Corollario 2.0.3. Sia $\pi : X \rightarrow Y$ un rivestimento abeliano con gruppo G , allora abbiamo

$$h^i(\mathcal{O}_X) = h^i(\mathcal{O}_Y) + \sum_{\chi \in G^* \setminus \{\chi_0\}} h^i(\mathcal{L}_\chi^{-1}).$$

Grazie a questo corollario possiamo calcolare alcuni invarianti di X come la caratteristica di Eulero–Poincaré olomorfa, conoscendo solo la caratteristica di Y e le coomologie degli \mathcal{L}_X .

Questo è il risultato più importante del capitolo e sarà nostro obiettivo fornire una dimostrazione completa di questo teorema. A tal fine nelle prossime pagine verranno approfonditi alcuni risultati nell’ambito delle mappe finite e delle immagini dirette superiori, che ci permetteranno di dimostrare questo teorema.

2.1 Mappe finite

In questa sezione tratteremo di mappe finite. Introduciamo la definizione e andremo ad osservare le principali proprietà di questi oggetti, che, come vedremo, entrano in gioco nello studio dei rivestimenti abeliani e, in particolar modo, nella dimostrazione del Teorema 2.0.2.

Definizione 2.1.1. Sia A un anello e B una A -algebra. Diciamo che $b \in B$ è **intero** su A se esiste un polinomio monico $P \in A[x]$ di cui b è radice. In tal caso l’equazione $P(b) = 0$ è detta *relazione di dipendenza integrale* di b su A .

Si verifica immediatamente la seguente proposizione.

Proposizione 2.1.2. Sia $\varphi : A \rightarrow B$ un omomorfismo di anelli, e sia $y \in B$. Allora sono equivalenti le seguenti:

- (i) L’elemento y è intero su A
- (ii) Il sottoanello $A'[y] \subset B$ generato da $A' = \varphi(A)$ e da y è un A -modulo finitamente generato.
- (iii) Esiste una A -sottoalgebra $C \subset B$ tale che $A'[y] \subset C$ e C è finitamente generata.

Dimostrazione. Proviamo le seguenti implicazioni:

(i) \Rightarrow (ii) Sia $y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \dots + a_0 = 0$ una relazione di dipendenza integrale di y su A . Sia M il sottomodulo di A generato da $1, y, \dots, y^{n-1}$. Allora chiaramente $y^n \in M$, e per induzione anche $y^j \in M$ per ogni $j \geq n$. Essendo ora $A[y]$ generato da $\{y^j : j \geq 0\}$ si vede che $A[y] \cong M$ e dunque è un A -modulo finitamente generato.

(ii) \Rightarrow (iii) È ovvia, basta considerare $C = A'[y]$.

(iii) \Rightarrow (i) Sia $\{c_1, \dots, c_n\}$ un insieme finito di generatori per C come A -modulo. Allora, poiché $A'[y] \subset C$ avremo che esistono $a_{i,j} \in A'$ tali che

$$yc_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j}c_j.$$

Ciò significa che

$$\sum_{j=1}^n (\delta_{i,j}y - a_{i,j})c_j = 0 \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, n.$$

Dunque abbiamo un sistema di equazioni lineari in c_1, \dots, c_n . Si verifica grazie alla regola di Cramer che se $d(x) = \det(\delta_{i,j}x - a_{i,j})$, allora $d(y) = 0$ è una relazione di dipendenza integrale di y su A . \square

Vogliamo sfruttare la definizione di finitezza per omomorfismi algebrici per introdurre il concetto di morfismo finito di varietà algebriche. Il primo passo è definire il caso locale, cioè con varietà affini.

Definizione 2.1.3. Siano X e Y varietà affini definite su un campo k , e $f : X \rightarrow Y$ una mappa regolare tale che $f(X) \subset Y$ è densa. Diciamo che f è **finita** se $k[X]$ è un $k[Y]$ -modulo finitamente generato. La struttura di $k[Y]$ -modulo su $k[X]$, è data da $f^* : k[Y] \rightarrow k[X]$.

Introduciamo ora quello che sarà l'esempio guida per tutta questa sezione.

Esempio 2.1.4. Sia k un campo algebricamente chiuso di caratteristica 0. Consideriamo la varietà affine $X = V(f) \subset \mathbb{A}_k^2$ dove $f = y^2 - x(x-1)(x-\lambda)$ con $\lambda \in k \setminus \{0, 1\}$. Allora $G := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agisce naturalmente su X scambiando il punto (x, y) con $(x, -y)$. Consideriamo l'anello delle coordinate di X

$$k[X] = k[x, y]/(f).$$

Consideriamo la sottoalgebra degli invarianti di $k[X]$ all'azione di G :

$$k[X]^G := \{f \in k[X] \mid g^*(f) = f \ \forall g \in G\}$$

nel nostro caso $k[X]^G = \{h \in k[X] \mid h(x, y) = h(x, -y)\}$. Osserviamo allora che x è G -invariante, mentre y non lo è. Inoltre y^2 si scrive in $k[X]$ come combinazione di potenze di x . Allora $k[X]^G = k[x]$.

Questa è una sottoalgebra di $k[X]$ che è finitamente generata e ridotta, dunque dal teorema di struttura per varietà affini, corrisponde ad un varietà affine.

Di fatto sappiamo che $\mathbb{A}_k^1 = \text{Specm } k[x]$. Inoltre $k[X]$ è un'estensione intera di $k[x]$ in quanto la variabile y soddisfa la relazione di dipendenza minimale $y^2 - x(x-1)(x-\lambda) = 0$. Dunque, per la Proposizione 2.1.2, l'estensione di anelli $k[x] \subset k[X]$ è finita di grado 2. Definiamo allora una mappa finita che chiamiamo **mappa quoziente**

$$\pi : X \rightarrow X/G \cong \mathbb{A}_k^1,$$

che corrisponde all'inclusione di k -algebre $k[x] \subset k[X]$.

Osserviamo che per ogni $x_0 \in k \setminus \{0, 1, \lambda\}$, l'equazione

$$y^2 = x_0(x_0 - 1)(x_0 - \lambda)$$

restituisce due valori distinti per y , cioè $y_{1,2} = \pm \sqrt{x_0(x_0 - 1)(x_0 - \lambda)}$. Al contrario per $x = 0, 1, \lambda$ abbiamo un solo valore di y , cioè $y = 0$.

Chiamiamo *punti di diramazione* tali punti, cioè gli zeri del polinomio $f(x, 0)$, e *punti di ramificazione* i corrispondenti punti $(x, y) \in X$.

Allora π non può essere un rivestimento topologico perché non tutte le fibre hanno la stessa cardinalità, nonostante \mathbb{A}_k^1 sia connesso.

Tuttavia possiamo capire anche *topologicamente* questa mappa. Se compattifichiamo \mathbb{A}_k^n con $n = 1, 2$ e consideriamo la chiusura proiettiva di X :

$$\bar{X} = V_+(g) \quad \text{con } g = zy^2 - x(x-z)(x-\lambda z),$$

notiamo che il punto $[0 : 1 : 0]$ è un nuovo punto di diramazione. Allora abbiamo 4 punti di diramazione e i corrispondenti 4 punti di ramificazione come in figura. Inoltre la mappa indotta dall'azione di $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ su $\bar{X} \setminus \{[0 : 1 : 1], [1 : 0 : 1], [0 : 1 : 0], [\lambda : 0 : 1]\}$ ha immagine $\mathbb{P}^1 \setminus \{[1 : 1], [0 : 1], [\lambda : 1], [1 : 0]\}$ e costituisce un rivestimento topologico 2:1 tra questi due spazi.

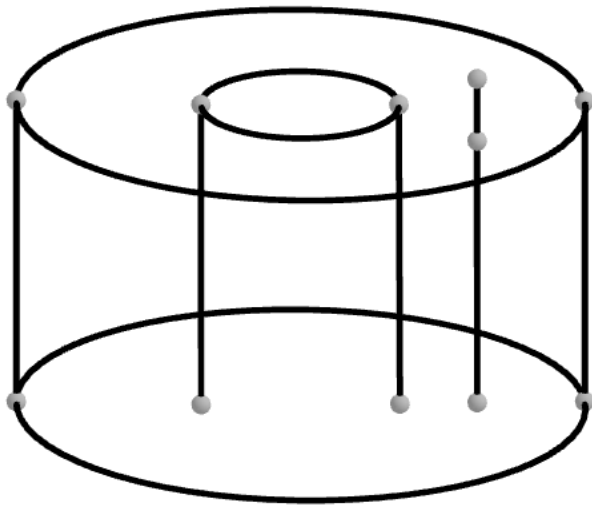


Figura 1

Osserviamo che \bar{X} è una curva di genere 1, in quanto dalla formula di Clebsch per il genere, poiché $\deg g = 3$

$$g(X) = \frac{(d-1)(d-2)}{2} = 1.$$

In conclusione abbiamo mostrato una curva di genere 1 (topologicamente un toro) come un rivestimento *ramificato* 2:1 della retta proiettiva \mathbb{P}^1 ; o viceversa abbiamo visto \mathbb{P}^1 come un quoziente di una curva di genere 1 con 4 punti di diramazione.

Questo esempio ci porta ad introdurre la seguente proposizione.

Proposizione 2.1.5. Sia A una k -algebra finitamente generata (con k un campo algebricamente chiuso). Sia inoltre G un gruppo finito di automorfismi di A . Se A^G è la sottoalgebra degli elementi $a \in A$ tali che $g(a) = a$ per ogni $g \in G$, allora A^G è una k -algebra finitamente generata.

2.1.1 Identità di Newton

Per dimostrare la Proposizione 2.1.5 abbiamo bisogno di introdurre dei nuovi oggetti. Pertanto diamo alcune definizioni nell'ambito dei polinomi simmetrici.

Definizione 2.1.6. Sia k un campo. Un polinomio $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ è detto **simmetrico** se

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

per ogni permutazione $\sigma \in S_n$.

Per esempio il polinomio $x^2 + y^2 + z^2 \in k[x, y, z]$ è chiaramente simmetrico, così come il polinomio $xyz \in k[x, y, z]$, mentre non è simmetrico il polinomio $xyz \in k[x, y, z, t]$. Osserviamo dunque che è importante chiarire quali sono le variabili considerate.

Introduciamo ora le funzioni simmetriche elementari che giocheranno un ruolo importante nelle identità di Newton.

Definizione 2.1.7. Date variabili x_1, \dots, x_n definiamo le **funzioni simmetriche elementari** $\sigma_0, \dots, \sigma_n \in k[x_1, \dots, x_n]$ come:

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= 1 \\ \sigma_1 &= x_1 + \dots + x_n \\ &\vdots \\ \sigma_r &= \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_r} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r} \\ &\vdots \\ \sigma_n &= x_1 x_2 \dots x_n \end{aligned}$$

Osservazione 2.1.8. Osserviamo che, se

$$f(X) = (X - x_1)(X - x_2) \dots (X - x_n) \in k[X],$$

allora possiamo scrivere esplicitamente i coefficienti di f in termini delle radici x_1, \dots, x_n e si verifica che questi sono proprio le funzioni simmetriche elementari, cioè

$$f(X) = X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \sigma_2 X^{n-2} - \dots + (-1)^{n-1} \sigma_{n-1} X + (-1)^n \sigma_n.$$

Da questa uguaglianza si intuisce che i polinomi $\sigma_i \in k[x_1, \dots, x_n]$ sono simmetrici, perché cambiando l'ordine delle radici di f non cambia il polinomio f , e dunque restano invariati i coefficienti $(-1)^i \sigma_i$.

Si verifica il seguente teorema.

Teorema 2.1.9. [Teorema fondamentale dei polinomi simmetrici] Ogni polinomio simmetrico in $k[x_1, \dots, x_n]$ si può scrivere in modo unico come polinomio nelle funzioni simmetriche elementari $\sigma_1, \dots, \sigma_n$.

Dimostrazione. Per la dimostrazione si veda [Cox00], Theorem 3, p. 319. □

Definiamo infine le somme di potenze.

Definizione 2.1.10. Siano x_1, \dots, x_n delle variabili. Definiamo per ogni $i = 1, \dots, n$ la **somma di potenze**

$$s_i = x_1^i + x_2^i + \dots + x_n^i.$$

Proposizione 2.1.11 (Identità di Newton). Date variabili x_1, \dots, x_n , le relative funzioni simmetriche elementari $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ e le somme di potenze s_1, \dots, s_n , valgono le seguenti identità:

$$s_k - \sigma_1 s_{k-1} + \dots + (-1)^{k-1} \sigma_{k-1} s_1 + (-1)^k k \sigma_k = 0 \quad \forall 1 \leq k \leq n,$$

$$s_k - \sigma_1 s_{k-1} + \dots + (-1)^{n-1} \sigma_{n-1} s_{k-n+1} + (-1)^n \sigma_n s_{k-n} = 0 \quad \forall k > n.$$

Dimostrazione (traccia). Come prima cosa si osserva che, definendo $\sigma_i = 0$ per ogni $i < 0$ e per ogni $i > n$, le due identità sono equivalenti a

$$s_k - \sigma_1 s_{k-1} + \dots + (-1)^{k-1} \sigma_{k-1} s_1 + (-1)^k k \sigma_k = 0 \quad \forall k \geq 1.$$

A questo punto si verifica questa uguaglianza procedendo per induzione sul numero di variabili $n \geq 1$.

- Il caso $n = 1$ segue dal fatto che $s_i = \sigma_i$ per ogni $i \geq 1$.
- Il passo induttivo si prova osservando che, indicando con s_i^n la somma di potenze i -esime con n variabili, si ha l'uguaglianza

$$s_k^n = s_k^{n-1} + x_n^k.$$

A questo punto la tesi si verifica sostituendo $s_k^{n-1} + x_n^k$ a s_k^n in

$$s_k^n - \sigma_1 s_{k-1}^n + \dots + (-1)^{k-1} \sigma_{k-1} s_1^n + (-1)^k k \sigma_k = 0$$

e applicando il passo induttivo

$$s_k^{n-1} - \sigma_1 s_{k-1}^{n-1} + \dots + (-1)^{k-1} \sigma_{k-1} s_1^{n-1} + (-1)^k k \sigma_k = 0.$$

□

Corollario 2.1.12. Sia k un campo che contiene \mathbb{Q} . Allora ogni polinomio simmetrico in $k[x_1, \dots, x_n]$ si può scrivere come polinomio nelle somme di potenze s_1, \dots, s_n .

Dimostrazione. Grazie al Teorema 2.1.9 basta provare che le funzioni simmetriche elementari σ_i si scrivono in termini delle somme di potenze.

La dimostrazione si fa per induzione sugli indici $i \geq 1$ delle funzioni simmetriche elementari.

- Se $i = 1$ la tesi è chiara osservando che $s_1 = \sigma_1$.

- Se la tesi è vera per $1, 2, \dots, i-1$, dalle identità di Newton abbiamo che

$$\sigma_i = (-1)^{i-1} \frac{1}{i} (s_i - \sigma_1 s_{i-1} + \dots + (-1)^{i-1} \sigma_{i-1} s_1).$$

Possiamo dividere per l'intero i perché $\mathbb{Q} \subset k$. Allora, sfruttando l'ipotesi induttiva abbiamo che σ_i si scrive come un polinomio in s_1, \dots, s_n .

□

A questo punto possiamo procedere con la dimostrazione della Proposizione 2.1.5.

Dimostrazione della Proposizione 2.1.5. Consideriamo l'operatore

$$S(a) := \frac{1}{n} \sum_{g \in G} g(a).$$

Per ogni $a \in A$ i coefficienti σ_i del polinomio

$$P_a(T) := \prod_{g \in G} (T - g(a)) = T^n - \sigma_1 T^{n-1} + \dots + (-1)^n \sigma_n$$

sono in A^G . Di fatto i coefficienti σ_i sono le funzioni simmetriche elementari nelle variabili $\{g(a) : g \in G\}$ (Si veda l'osservazione 2.1.8). Pertanto, per il Corollario 2.1.12, possiamo scrivere i σ_i come polinomi nelle somme di potenze

$$s_i = \sum_{g \in G} g(a)^i = \sum_{g \in G} g(a^i) = nS(a^i) \quad \text{con } i = 1, \dots, n.$$

Sia $\{u_1, \dots, u_m\}$ un insieme di generatori per A , vogliamo scrivere un insieme di generatori per A^G in termini di u_1, \dots, u_m . Sia B la sottoalgebra di A^G generata dagli elementi $S(u_i^j)$ con $i = 1, \dots, m$ e con $j = 1, \dots, n$, allora per quanto osservato in precedenza $\sigma_i \in B$ per ogni $i = 1, \dots, n$.

Osserviamo che $P_{u_i}(u_i) = 0$ e dunque, essendo P_{u_i} monico, u_i^n si scrive come combinazione lineare di $1, u_i, \dots, u_i^{n-1}$ a coefficienti in B . Pertanto segue per induzione che ogni monomio $u_1^{\alpha_1} \dots u_m^{\alpha_m}$ si può scrivere come combinazione di monomi dello stesso tipo con $\alpha_1, \dots, \alpha_m < n$. Di conseguenza ogni $a \in A$ avrà un'analogia espressione:

$$a = \sum_{\alpha_i < n} \varphi_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} u_1^{\alpha_1} \dots u_m^{\alpha_m} \quad \text{con } \varphi_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} \in B.$$

In particolare, se $a \in A^G$, applicando l'operatore S alla precedente uguaglianza otteniamo

$$a = S(a) = \sum \varphi_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} S(u_1^{\alpha_1} \dots u_m^{\alpha_m}).$$

Ne segue che A^G è generato dagli elementi $S(u_1^{\alpha_1} \dots u_m^{\alpha_m})$ con $\alpha_i < n$ e dagli $S(u_i^n)$ con $i = 1, \dots, m$, dunque A^G è finitamente generata.

□

2.1.2 Varietà quoziente e morfismi finiti

In questa sezione vogliamo formalizzare la definizione di varietà quoziente, a cui abbiamo già fatto riferimento nella definizione 2.0.1. Per farlo partiamo da un esempio che generalizza il caso 2.1.4:

Esempio 2.1.13. Sia X una varietà affine definita su un campo k algebricamente chiuso e di caratteristica 0. Sia inoltre G un gruppo finito di automorfismi di X . Possiamo considerare lo spazio quoziente $Y = X/G$ nel modo seguente. Sia $A = k[X]$ l'anello delle coordinate di X . Sia A^G la sottoalgebra degli invarianti di G in A , cioè

$$A^G = \{f \in k[X] : g^*(f) = f \ \forall g \in G\}.$$

Allora dalla Proposizione 2.1.5 sappiamo che A^G è una k -algebra finitamente generata. Ma allora, per il Teorema di struttura delle varietà affini, esiste una varietà affine Y tale che $k[Y] \cong A^G$ (cioè $Y = \text{Specm}(A^G)$). Questa sarà la nostra *varietà quoziente*.

Formalizziamo l'intuizione dell'esempio 2.1.13 scrivendo la definizione seguente.

Definizione 2.1.14. Sia X una varietà affine e complessa, G un gruppo finito che agisce su X . Definiamo la **varietà quoziente** di X per l'azione di G come l'unica (a meno di isomorfismo) varietà affine $Y = X/G$ tale che $\mathbb{C}[X/G] = \mathbb{C}[X]^G$.

Gli ultimi esempi ci mostrano che la proprietà di *finitzza* è locale, dunque possiamo dare la seguente definizione.

Definizione 2.1.15. Un morfismo di varietà algebriche complesse $f : X \rightarrow Y$ è **finito** se esiste un ricoprimento di Y costituito da aperti affini $V_i = \text{Specm } B_i$, tale che per ogni i , $f^{-1}(V_i)$ è una varietà affine $\text{Specm } A_i$, e A_i è una B_i -algebra finitamente generata come B_i -modulo per ogni i .

Definizione 2.1.16. Diciamo che un morfismo di varietà algebriche complesse $f : X \rightarrow Y$ è **affine** se esiste un ricoprimento affine $\{V_i\}_{i \in I}$ di Y tale che $f^{-1}(V_i)$ è affine.

Osservazione 2.1.17. Dalle definizioni appena date, si osserva che ogni morfismo finito è affine.

Inoltre osserviamo che l'esempio 2.1.4 nel caso $k = \mathbb{C}$ ci mostra che $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \cong X/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, infatti $\mathbb{C}[\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1] \cong \mathbb{C}[X]^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$.

Osservazione 2.1.18. Alla luce delle ultime definizioni fornite è reso chiaro il significato della definizione di rivestimento abeliano 2.0.1.

2.2 Immagini dirette superiori

In questa sezione vogliamo studiare l'esattezza del funtore *push-forward* tra fasci di gruppi abeliani su varietà complesse. L'obiettivo è quello di trovare risultati utili al fine della dimostrazione del Teorema 2.0.2. Per i dettagli delle dimostrazioni in questa sezione rimandiamo ad [Har77], III.8.

Sia $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo di varietà algebriche e sia

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$$

una sequenza esatta corta di fasci di gruppi abeliani su X . Indichiamo con $\underline{\mathbf{Ab}}(\mathbf{X})$ la categoria dei fasci di gruppi abeliani su X .

Abbiamo allora un funtore $f_* : \underline{\mathbf{Ab}}(\mathbf{X}) \rightarrow \underline{\mathbf{Ab}}(\mathbf{Y})$ e vogliamo applicarlo alla sequenza di sopra. Otteniamo, in generale, una sequenza esatta

$$0 \rightarrow f_*\mathcal{F} \rightarrow f_*\mathcal{G} \rightarrow f_*\mathcal{H}.$$

Dunque il funtore f_* sarà, nel caso generico, esatto a sinistra ma non a destra. Possiamo allora considerare il funtore derivato destro per ottenere una sequenza esatta lunga di fasci

$$0 \rightarrow f_*\mathcal{F} \rightarrow f_*\mathcal{G} \rightarrow f_*\mathcal{H} \rightarrow R^1f_*\mathcal{F} \rightarrow R^1f_*\mathcal{G} \rightarrow R^1f_*\mathcal{H} \rightarrow \dots$$

Definizione 2.2.1. Sia $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo di varietà algebriche, definiamo i **funtori di immagine diretta superiore**

$$R^i f_* : \underline{\mathbf{Ab}}(\mathbf{X}) \rightarrow \underline{\mathbf{Ab}}(\mathbf{Y})$$

come il funtore derivato destro del funtore immagine diretta f_* .

Proposizione 2.2.2. Per ogni $i \geq 0$ e per ogni $\mathcal{F} \in \underline{\mathbf{Ab}}(\mathbf{X})$, e per ogni aperto $V \subset Y$

$$R^i f_*\mathcal{F}(V) \cong [V \mapsto H^i(f^{-1}(V), \mathcal{F}|_{f^{-1}(V)})]^\#.$$

Dimostrazione. Per la dimostrazione si veda [Har77], Proposizione III, 8.1, p.251. □

A questo punto ci concentriamo su varietà proiettive, in quanto saranno il nostro principale oggetto di studio. In generale se $f : X \longrightarrow Y$ è un morfismo di varietà, non è detto che il *push-forward* f_* di un fascio coerente sia ancora coerente. Tuttavia abbiamo il seguente risultato.

Proposizione 2.2.3. Sia $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo finito di varietà algebriche. Se \mathcal{F} è un fascio coerente di \mathcal{O}_X -moduli, allora $f_*\mathcal{F}$ è coerente.

Dimostrazione. Per provare che $f_*\mathcal{F}$ è coerente, cerchiamo un $\mathcal{O}_X(X)$ -modulo finitamente generato M tale che $f_*\mathcal{F} = \widetilde{M}$ è la fascificazione di M .

Poiché f è finito, possiamo ricoprire Y con aperti affini $\text{Specm } A$ tali che ogni $f^{-1}(\text{Specm } A) = \text{Specm } B$ con B un A -modulo finitamente generato. Allora abbiamo $f_*\mathcal{F}(\text{Specm } A) = \mathcal{F}(\text{Specm } B)$ per definizione di fascio push-forward. Ora, poiché \mathcal{F} è, in particolare, quasi coerente abbiamo che $\mathcal{F}|_{\text{Specm } B} = \widetilde{M}$ per un certo B -modulo M , che possiamo vedere come A -modulo tramite la mappa $f^\#(Y) : A \longrightarrow B$. Allora $f_*\mathcal{F}$ è quasi-coerente. Resta da provare che M è finitamente generato come A -modulo. Per ipotesi X e Y sono varietà,

dunque noetheriane, e \mathcal{F} è coerente. Allora M è finitamente generato come B -modulo e di conseguenza anche come A -modulo, perché f è finita. \square

Infine abbiamo in generale

Proposizione 2.2.4. Sia $f : X \rightarrow Y$ un morfismo tra varietà proiettive lisce, e sia \mathcal{F} un fascio coerente di \mathcal{O}_X -moduli. Allora per ogni $i \geq 0$ il fascio $R^i f_* \mathcal{F}$ è coerente.

Dimostrazione. Per la dimostrazione di questo fatto si veda [Har77], capitolo III, Teorema 8.8, p.252. \square

Proposizione 2.2.5. Sia $f : X \rightarrow Y$ una mappa continua tra spazi topologici. Sia \mathcal{F} un fascio di gruppi abeliani su X . Si assuma che $R^i f_*(\mathcal{F}) = 0$ per ogni $i > 0$, allora c'è un isomorfismo naturale per ogni $i \geq 0$

$$H^i(X, \mathcal{F}) \cong H^i(Y, f_* \mathcal{F}).$$

Dimostrazione. Per la dimostrazione si veda [Har77], capitolo III, esercizio 8.1, p.252. \square

Quest'ultima proposizione ci permette di provare il seguente risultato.

Proposizione 2.2.6. Sia $f : X \rightarrow Y$ un morfismo affine di varietà algebriche, e sia \mathcal{F} un fascio quasi coerente di \mathcal{O}_X -moduli su X . Allora per ogni $i \geq 0$

$$H^i(X, \mathcal{F}) \cong H^i(Y, f_* \mathcal{F}).$$

Dimostrazione. Vogliamo provare che le ipotesi della Proposizione 2.2.5 sono soddisfatte quando f è affine. In tal modo potremmo concludere grazie alla Proposizione precedente.

Ma questa è una conseguenza del Teorema di annullamento di Serre. Infatti sappiamo che $R^i f_* \mathcal{F}$ è il fascio associato a

$$[V \mapsto H^i(f^{-1}(V), \mathcal{F}|_{f^{-1}(V)})].$$

Dal momento che f è affine, avremo che $f^{-1}(V)$ è affine per ogni V aperto affine di Y . A questo punto il Teorema di annullamento di Serre ci dice che

$$H^i(f^{-1}(V), \mathcal{F}|_{f^{-1}(V)}) = 0 \quad \text{per ogni } i > 0.$$

Dunque $R^i f_*(\mathcal{F}) = 0$ per ogni $i > 0$. \square

Una conseguenza immediata è il seguente corollario.

Corollario 2.2.7. Sia $f : X \rightarrow Y$ un morfismo finito di varietà algebriche. Allora f_* è un funtore esatto, cioè $R^i f_*(\mathcal{F}) = 0$ per ogni $i > 0$.

Dunque se abbiamo una sequenza esatta corta di fasci di \mathcal{O}_X -moduli

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$$

avremo una sequenza esatta corta

$$0 \rightarrow f_*\mathcal{F} \rightarrow f_*\mathcal{G} \rightarrow f_*\mathcal{H} \rightarrow 0.$$

Dimostrazione. Segue immediatamente dalla Proposizione 2.2.6 osservando che un morfismo finito è affine. \square

2.3 Piattezza

In questa sezione richiamiamo alcune proprietà dei fasci di \mathcal{O}_X -moduli. In particolare tratteremo di piattezza che è uno degli strumenti più importanti in geometria algebrica. Per farlo introduciamo la definizione di modulo piatto e andiamo a osservare alcune proprietà elementari di questi oggetti.

Come annunciato all'inizio del capitolo, l'obiettivo è quello di completare la dimostrazione del Teorema 2.0.2.

Definizione 2.3.1. Sia A un anello e sia M un A -modulo. Diciamo che M è **piatto** se il funtore $N \mapsto N \otimes M$, definito sulla categoria degli A -moduli, è esatto.

Diciamo cioè che M è piatto se per ogni sequenza esatta corta di A -moduli

$$0 \rightarrow N_1 \rightarrow N_2 \rightarrow N_3 \rightarrow 0$$

è ancora esatta la sequenza

$$0 \rightarrow N_1 \otimes M \rightarrow N_2 \otimes M \rightarrow N_3 \otimes M \rightarrow 0$$

Riportiamo ora alcune proprietà di questi oggetti. In particolare abbiamo le seguenti proposizioni.

Proposizione 2.3.2. Un R -modulo M è piatto se e solo se la localizzazione $M_{\mathfrak{p}}$ è piatta per ogni \mathfrak{p} ideale primo di R .

Dimostrazione. Per prima cosa osserviamo che se $\mathcal{S} \subset A$ è un sistema moltiplicativo e siano M e N due $A_{\mathcal{S}}$ -moduli. Allora abbiamo

$$M \otimes_{A_{\mathcal{S}}} N = M \otimes_A N$$

Infatti si ha che per ogni $x \in M, y \in N, a \in A, s \in \mathcal{S}$

$$\frac{a}{s}x \otimes y = \frac{ax}{s} \otimes \frac{sy}{s} = \frac{sx}{s} \otimes \frac{ay}{s} = x \otimes \frac{a}{s}y.$$

Ora assumiamo che M sia un A -modulo piatto, consideriamo $M_{\mathfrak{p}}$ come $A_{\mathfrak{p}}$ -modulo. Sia

$$\mathcal{S} = \{0 \rightarrow N \rightarrow O \rightarrow P \rightarrow 0\}$$

una sequenza esatta corta di $A_{\mathfrak{p}}$ -moduli, allora per l'osservazione precedente

$$\mathcal{S} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} = M_{\mathfrak{p}} = \mathcal{S} \otimes_A M_{\mathfrak{p}} = (\mathcal{S} \otimes_A M) \otimes_A A_{\mathfrak{p}}.$$

In questa equazione il membro di destra è una sequenza esatta, perché per ipotesi M è un A -modulo piatto e la localizzazione è un funtore esatto. Questo prova che $M_{\mathfrak{p}}$ è esatto su $A_{\mathfrak{p}}$.

Viceversa se supponiamo che $M_{\mathfrak{p}}$ sia piatto per ogni ideale primo \mathfrak{p} di A , sia

$$\mathcal{S} = \{0 \rightarrow N \rightarrow O\}$$

una sequenza esatta di A -moduli e sia K il nucleo della mappa $N \otimes_A M \rightarrow O \otimes_A M$, allora abbiamo una sequenza esatta

$$0 \rightarrow K \rightarrow N \otimes_A M \rightarrow O \otimes_A M.$$

Per ogni ideale primo \mathfrak{p} , la localizzazione

$$0 \rightarrow K_{\mathfrak{p}} \rightarrow N \otimes_A M_{\mathfrak{p}} \rightarrow O \otimes_A M_{\mathfrak{p}}$$

sarà ancora esatta perché la localizzazione è un funtore esatto.

Dunque, poiché dall'osservazione precedente $N \otimes_A M_{\mathfrak{p}} = N \otimes_A (A_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}}) = N \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}}$, e similmente $O \otimes_A M_{\mathfrak{p}} = O \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}}$, avremo che $K_{\mathfrak{p}} = 0$, in quanto per ipotesi $M_{\mathfrak{p}}$ è esatto; e dunque, visto che questo vale per ogni ideale primo \mathfrak{p} , dunque in particolare per ogni ideale massimale \mathfrak{m} , avremo che $K = 0$, e dunque che M è un A -modulo piatto. \square

Proposizione 2.3.3. Sia R un anello locale commutativo con ideale massimale \mathfrak{m} e sia M un R -modulo piatto finitamente presentato. Allora M è libero. In particolare se $x_1, \dots, x_n \in M$ sono elementi di M le cui classi in $M/\mathfrak{m}M$, formano una base di $M/\mathfrak{m}M$ su R/\mathfrak{m} , allora x_1, \dots, x_n saranno elementi di una base di M su R .

Dimostrazione. Sia $R^{(n)} \rightarrow M$ la mappa che manda i vettori della base canonica in x_1, \dots, x_n , e sia N il suo nucleo. Abbiamo allora una sequenza esatta

$$0 \rightarrow N \rightarrow R^{(n)} \rightarrow M.$$

Avremo dunque un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccc} N \otimes R/\mathfrak{m} & \longrightarrow & R^{(n)} \otimes R/\mathfrak{m} & \longrightarrow & M \otimes R/\mathfrak{m} \\ & & \downarrow f & & \downarrow h \\ 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & R^{(n)} & \longrightarrow & M \end{array}$$

le cui righe sono esatte. Allora, dal momento che M è piatto, avremo che $\text{Ker}(h) = 0$, e dunque grazie allo *snake lemma* avremo una sequenza esatta

$$0 \rightarrow \text{coker } f \rightarrow \text{coker } g \rightarrow \text{coker } h,$$

in cui la freccia a destra corrisponde alla mappa

$$R^{(n)}/\mathfrak{m}R^{(n)} \rightarrow M/\mathfrak{m}M,$$

che è un isomorfismo per le ipotesi fatte sugli x_1, \dots, x_n . Ne segue che $\text{coker } f = 0$, cioè $N/\mathfrak{m}N = 0$. Ma allora, poiché M è finitamente presentato, N sarà finitamente generato, e dunque per il lemma di Nakayama avremo $N = 0$, cioè M è libero. \square

Definizione 2.3.4. Sia $f : X \rightarrow Y$ un morfismo di varietà algebriche e sia \mathcal{F} un fascio di \mathcal{O}_X -moduli.

- (i) Diciamo che \mathcal{F} è **f -piatto su Y in un punto $x \in X$** se la spiga \mathcal{F}_x è piatta come $\mathcal{O}_{Y,y}$ -modulo, dove $y = f(x)$. La struttura di $\mathcal{O}_{Y,y}$ -modulo su \mathcal{F}_x è data dalla mappa naturale $f_y^\# : \mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$.
- (ii) Diciamo che \mathcal{F} è **f -piatto su Y** se è f -piatto in ogni punto.
- (iii) Se $X = Y$ e $f = id_X$, diciamo semplicemente che \mathcal{F} è **piatto in x** se è id_X -piatto in x (cioè se \mathcal{F}_x è un $\mathcal{O}_{X,x}$ -modulo piatto). Analogamente diciamo che \mathcal{F} è piatto se è piatto in x per ogni $x \in X$.
- (iv) Infine diciamo che X è **piatta su Y** o che f è un **morfismo piatto** se \mathcal{O}_X è f -piatto su Y .

Osserviamo come si comporta localmente la piatezza.

Proposizione 2.3.5. Sia k un campo algebricamente chiuso di caratteristica 0, e sia $A \rightarrow B$ un morfismo di k -algebre ridotte e finitamente generate e sia M un B -modulo. Sia $f : X := \text{Specm}(B) \rightarrow Y := \text{Specm}(A)$ il corrispondente morfismo di varietà affini e sia $\mathcal{F} := \widetilde{M}$. Allora \mathcal{F} è f -piatto su Y se e solo se M è un A -modulo piatto.

Dimostrazione. La tesi è una conseguenza immediata della Proposizione 2.3.2.

Infatti per la definizione 2.3.4, \mathcal{F} è f -piatto su Y se e solo se la spiga \mathcal{F}_x è un $\mathcal{O}_{Y,y}$ -modulo piatto per ogni $x \in X$ ($y = f(x)$).

D'altra parte $Y = \text{Specm } A$, dunque $\mathcal{O}_{Y,y} \cong A_{\mathfrak{m}_y}$. Infine $\mathcal{F} = \widetilde{M}$, pertanto $\mathcal{F}_x \cong M_{\mathfrak{m}_x}$. Quindi \mathcal{F} è f -piatto su Y se e solo se $M_{\mathfrak{m}_x}$ è un $A_{\mathfrak{m}_y}$ -modulo piatto per ogni $x \in X$, e per la Proposizione 2.3.2 questo vale se e solo se M è un A -modulo piatto. \square

Possiamo ora estendere questo risultato a varietà algebriche generiche.

Proposizione 2.3.6. Sia X una varietà algebrica e \mathcal{F} un fascio coerente di \mathcal{O}_X -moduli. Allora \mathcal{F} è piatto su X se e solo se è localmente libero.

Dimostrazione. Una delle due implicazioni segue immediatamente dalle proprietà dei fasci localmente liberi. Sappiamo infatti che se \mathcal{F} è un fascio localmente libero, per ogni sequenza esatta corta di fasci

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2 \rightarrow \mathcal{F}_3 \rightarrow 0,$$

la sequenza ottenuta tensorizzando con \mathcal{F} :

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_2 \otimes \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_3 \otimes \mathcal{F} \rightarrow 0$$

è ancora esatta. Dunque in tal caso \mathcal{F} è piatto. Pertanto abbiamo provato che un fascio localmente libero è piatto.

Viceversa, se \mathcal{F} è un fascio coerente esiste un $\mathcal{O}_X(X)$ -modulo finitamente generato M tale che $\mathcal{F} = \widetilde{M}$. Ora, per la Proposizione 2.3.5, \widetilde{M} è piatto se e solo se M è piatto. Ma se M è piatto, poiché $\mathcal{O}_{X,x}$ è un anello locale, possiamo applicare la Proposizione 2.3.3 e verificare che M è libero. Pertanto, in questo caso \mathcal{F} è localmente libero. Dunque abbiamo mostrato che un fascio coerente e piatto è localmente libero. □

A questo punto possiamo legare la proprietà di piatezza all'essere localmente liberi. Enunciamo a tale scopo la proposizione:

Proposizione 2.3.7. Sia $f : X \rightarrow Y$ un morfismo finito di varietà algebriche, allora $f_*\mathcal{O}_X$ è localmente libero se e solo se f è un morfismo piatto.

Dimostrazione. Visto che stiamo trattando di proprietà locali, e dal momento che f è finito, possiamo assumere senza perdita di generalità che $X = \text{Specm}(B)$ e $Y = \text{Specm}(A)$ dove B è una A -algebra finitamente generata come A -modulo. Allora $f_*\mathcal{O}_X = \widetilde{B}$, e dunque per la Proposizione 2.3.5, f è piatto se e solo se B è un A -modulo piatto. Ma di nuovo per la stessa Proposizione, questo vale se e solo se \widetilde{B} è un fascio piatto di \mathcal{O}_Y -moduli. Ma ora grazie alla Proposizione 2.2.3 sappiamo che $f_*\mathcal{O}_X$ è coerente. Possiamo allora applicare la Proposizione 2.3.6 e verificare che \widetilde{B} è un fascio piatto di \mathcal{O}_Y -moduli se e solo se $f_*\mathcal{O}_X$ è localmente libero, cioè la tesi. □

Osservazione 2.3.8. Osserviamo che in generale il *push-forward* di \mathcal{O}_X tramite un morfismo non è localmente libero. Ad esempio si consideri l'inclusione di un punto $\iota : p \hookrightarrow X$ in una varietà X . Allora $\iota_*\mathcal{O}_p$ è il fascio grattacielo in p che chiaramente non è localmente libero.

La seguente proposizione ci assicura che potremo utilizzare le proprietà dei morfismi piatti nello studio dei rivestimenti abeliani.

Proposizione 2.3.9. Sia $f : X \rightarrow Y$ un morfismo finito e surgettivo di varietà non-singolari, allora f è piatto.

Dimostrazione. Per provare questa Proposizione abbiamo bisogno del seguente claim, che è una conseguenza immediata del Lemma di Nakayama unito alla Proposizione 2.3.7.

Claim. Sia f un morfismo come nelle ipotesi. Allora f è piatto se e solo se, per ogni $y \in Y$, l'intero

$$\dim((f_*\mathcal{O}_X)_y \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} \mathcal{O}_{Y,y}/\mathfrak{m}_y)$$

non dipende da y .

Di fatto questo è vero perché se f è piatto, allora $f_*\mathcal{O}_X$ è localmente libero, ed essendo Y liscia, il rango non dipenderà dal punto y .

Sia allora $A_y := (f_*\mathcal{O}_X)_y \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} \mathcal{O}_{Y,y}/\mathfrak{m}_y$. Si noti che la fibra di f su y è semplicemente $\text{Specm}(A_y)$. Il claim implica che f è piatto se e solo se le sue fibre corrispondono allo spettro massimale di un anello di lunghezza finita e costante (uguale al rango di $f_*\mathcal{O}_X$).

Nel nostro caso f è surgettiva e finita, dunque le fibre sono 0-dimensionali e finite. Pertanto f è piatto. \square

Osservazione 2.3.10. Osserviamo che le ipotesi della Proposizione 2.3.9 sono necessarie, infatti abbiamo:

- (i) Sia C una curva proiettiva con un solo punto di singolarità in cui C abbia un nodo. Allora la mappa di normalizzazione $\tilde{C} \rightarrow C$ non è piatta, sebbene sia finita e surgettiva.
- (ii) Sia $\iota : C \hookrightarrow X$ un'immersione chiusa di varietà proiettive lisce. Allora ι è finita, ma è piatta se e solo se è un'immersione aperta.

Vale in realtà il seguente risultato più generale, che però non dimostriamo e che non utilizzeremo nel seguito.

Teorema 2.3.11 (Miracle flatness theorem). Sia $f : X \rightarrow Y$ un morfismo di k -schemi equidimensionali di tipo finito, dove X è Cohen-Macaulay, Y è regolare le fibre di f hanno dimensione $\dim X - \dim Y$. Allora f è piatto.

Dimostrazione. Per la dimostrazione si veda [Har77], Ch. III, ex. 10.9. \square

2.4 Dimostrazione del Teorema 2.0.2

La dimostrazione seguirà i seguenti passi:

- (i) Per prima cosa mostreremo che $\pi_*\mathcal{O}_X$ è un fascio coerente.
- (ii) In seguito mostreremo che un rivestimento è un morfismo piatto e che $\pi_*\mathcal{O}_X$ è un fascio localmente libero.
- (iii) Infine mostreremo che questo si decompone in auto-fibrati relativi ai caratteri di G .

Lemma 2.4.1. Sia $\pi : X \rightarrow Y$ un rivestimento abeliano con gruppo G . Allora $\pi_*\mathcal{O}_X$ è un fascio coerente di \mathcal{O}_Y -moduli.

Dimostrazione. Segue direttamente dalla Proposizione 2.2.3. \square

Lemma 2.4.2. Sia $\pi : X \rightarrow Y$ un rivestimento abeliano con gruppo G . Allora $\pi_*\mathcal{O}_X$ è un fascio localmente libero.

Dimostrazione. La dimostrazione segue direttamente dalle proposizioni 2.3.9, e 2.3.7. \square

Rimane da provare l'ultimo punto, cioè la decomposizione. Per questa parte ricordiamo che nell'enunciato del teorema abbiamo considerato varietà algebriche complesse, dunque il fascio di struttura \mathcal{O}_X è il fascio delle funzioni regolari su X .

Per prima cosa facciamo la seguente osservazione.

Osservazione 2.4.3. Sia $\pi : X \rightarrow Y$ è un rivestimento abeliano con gruppo G . Abbiamo già osservato che π è finito e che, di conseguenza, $\pi_*\mathcal{O}_X$ è localmente libero.

Si ha che, inoltre $\pi_*\mathcal{O}_X$ è anche una \mathcal{O}_Y -algebra coerente. La struttura di algebra su $\pi_*\mathcal{O}_X$ è data dal prodotto di funzioni regolari su X , e corrisponde ad un morfismo

$$m : \pi_*\mathcal{O}_X \otimes \pi_*\mathcal{O}_X \longrightarrow \pi_*\mathcal{O}_X$$

di \mathcal{O}_Y -moduli, che fornisce un prodotto commutativo e associativo su $\pi_*\mathcal{O}_X$. Di fatto avremo che, scelto V aperto in Y e $f, g \in \pi_*\mathcal{O}_X(V)$ funzioni regolari, potremo definire $f + g$ e $f \cdot g$ semplicemente usando le operazioni in $\mathcal{O}_X(\pi^{-1}(V))$ che è un anello commutativo. Dunque abbiamo che, a livello locale, possiamo vedere X come $\text{Specm } \pi_*\mathcal{O}_X$.

Dall'osservazione precedente abbiamo che l'azione di G su X corrisponde all'azione di G su $\pi_*\mathcal{O}_X$. Chiaramente l'azione sarà banale su \mathcal{O}_Y dato che $Y = X/G$.

In questo modo $\pi_*\mathcal{O}_X$ eredita un'azione di gruppo banale su \mathcal{O}_Y , cioè ha quella che chiameremo struttura di G -fascio.

Più precisamente ricordiamo che per ogni gruppo abeliano G la sua *rappresentazione regolare* $\mathbb{C}[G]$ è lo spazio vettoriale con base $\{e_g\}$ indicizzata sugli elementi di G tale che per ogni $h \in G$ è definito l'endomorfismo di $\mathbb{C}[G]$

$$\rho(h) : e_g \longmapsto e_{hg}$$

per ogni $g \in G$. In maniera analoga per ogni varietà algebrica Y si definisce il fascio di \mathcal{O}_Y -algebre $\mathcal{O}_Y[G]$ come una \mathcal{O}_Y -algebra generata dagli elementi di G e con un'azione del gruppo che ne permuta i generatori.

Definizione 2.4.4. Un fascio di \mathcal{O}_Y -moduli è un G -fascio se ha struttura di $\mathcal{O}_Y[G]$ -modulo.

Osservazione 2.4.5. Nel nostro caso l'azione di G su $\pi_*\mathcal{O}_X$ determina su questo fascio la struttura di G -fascio, in quanto l'azione di G determina la struttura di $\mathcal{O}_Y[G]$ -modulo su $\pi_*\mathcal{O}_X$.

Osservazione 2.4.6. Ricordiamo che, come dimostrato nella Proposizione 1.2.15, per ogni rappresentazione $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ di G , la sua *decomposizione canonica* è l'unica decomposizione

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$$

definita come segue. Siano W_1, \dots, W_n le rappresentazioni irriducibili di G , allora ogni U_i è la somma diretta di tutte le $n_i = \dim W_i$ rappresentazioni irriducibili di G che sono isomorfe a W_i .

Abbiamo inoltre che, se χ_1, \dots, χ_n sono i caratteri associati a W_1, \dots, W_n si ha che, indicando con $\overline{\chi_i(g)}$ il complesso coniugato di $\chi_i(g)$,

$$p_i = \frac{n_i}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_i(g)} \rho(g) \in \text{End}(V) \quad (2.2)$$

è una proiezione di V su U_i per ogni $i = 1, \dots, n$. Questo segue infatti direttamente dal lemma di Schür 1.2.7 applicato alle mappe G -lineari $\overline{\chi_i(g)} \rho(g)$.

Esempio 2.4.7. Osserviamo in un esempio il fatto che le p_i sono effettivamente proiettori. Sia $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \langle x | x^3 \rangle$ e siano

$$\rho_i : G \longrightarrow \text{GL}(V_i), \quad i = 0, 1, 2$$

le tre rappresentazioni irriducibili di G , rispettivamente associate a $1, x$ e x^2 . Sia $V = V_0 \oplus V_1 \oplus V_2$ e sia $\rho = \rho_0 \oplus \rho_1 \oplus \rho_2$. Inoltre sia ζ una radice terza primitiva. Allora per p_0 abbiamo che

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{1}{|G|} \sum_{i=0}^2 \overline{\chi_0(x^i)} \rho(x^i) = \\ &= \frac{1}{3} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta & 0 \\ 0 & 0 & \zeta^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Analogamente per p_1 abbiamo che

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{|G|} \sum_{i=0}^2 \overline{\chi_1(x^i)} \rho(x^i) = \\ &= \frac{1}{3} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \zeta^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta & 0 \\ 0 & 0 & \zeta^2 \end{pmatrix} + \zeta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Infine per p_2 avremo che

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{1}{|G|} \sum_{i=0}^2 \overline{\chi_2(x^i)} \rho(x^i) = \\ &= \frac{1}{3} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \zeta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta & 0 \\ 0 & 0 & \zeta^2 \end{pmatrix} + \zeta^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

In ciascuno dei tre casi abbiamo trovato una proiezione.

Vogliamo sfruttare queste decomposizioni per fare una costruzione analoga sui nostri G -fasci e andarli a decomporre in somme dirette di sottofasci.

Definizione 2.4.8. Sia allora \mathcal{F} un G -fascio localmente libero su Y con azione

$$\rho : G \longrightarrow \text{GL}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{F}).$$

In maniera analoga a (2.2) costruiamo endomorfismi $p_i \in \text{End}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{F})$ per $i = 1, \dots, n$. Definendo $\mathcal{F}_i := \text{Im}(p_i)$ abbiamo la decomposizione

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{F}_n.$$

Osservazione 2.4.9. Si osservi che per ogni $i = 1, \dots, n$; \mathcal{F}_i è l'autofascio di \mathcal{F} corrispondente alla rappresentazione irriducibile con carattere associato χ_i . Inoltre per ogni i , \mathcal{F}_i è un sottofascio di \mathcal{F} .

In particolare nel nostro caso $\mathcal{F} = \pi_* \mathcal{O}_X$, le spighe di $\pi_* \mathcal{O}_X$ sono isomorfe a $\mathbb{C}[G]$ come G -rappresentazioni. Di fatto la procedura precedentemente descritta fornisce una decomposizione

$$\pi_* \mathcal{O}_X = (\pi_* \mathcal{O}_X)_1 \oplus \dots \oplus (\pi_* \mathcal{O}_X)_n,$$

con $(\pi_* \mathcal{O}_X)_i \subset \pi_* \mathcal{O}_X$ un sottofascio per ogni i .

Poiché G è abeliano, sappiamo che tutte le rappresentazioni irriducibili sono 1-dimensionali, dunque i fasci $(\pi_* \mathcal{O}_X)_i$ saranno fibrati in rette, indicizzati dai caratteri di G . L'equazione 2.2 diventa dunque

$$f_\chi(x) = \frac{1}{|G|} \left(\sum_{g \in G} \chi^{-1}(g) g^* f \right) (x).$$

Abbiamo ottenuto allora una scrittura della forma

$$\pi_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y \oplus \bigoplus_{x \in G^* \setminus \{\chi_0\}} \mathcal{L}_\chi^{-1},$$

dove gli \mathcal{L}_χ^{-1} sono fibrati in rette indicizzati dai caratteri irriducibili χ di G .

Vogliamo ora andare a descrivere nel dettaglio le sezioni. Ricordiamo che, se $U \subset Y$ è un aperto, il fascio localmente libero $\pi_* \mathcal{O}_X$ è su U

$$\pi_* \mathcal{O}_X(U) = H^0(\pi^{-1}(U), \mathcal{O}_X|_{\pi^{-1}(U)}) = \mathcal{O}_X(\pi^{-1}(U)).$$

Vogliamo studiare le funzioni regolari su X che hanno una G -azione.

Vediamo cosa succede alla spiga in un punto generico $p \in Y$.

Definizione 2.4.10. Sia U un intorno trivializzante di p , allora $\pi^{-1}(U) = \bigsqcup_{\chi=1}^{|G|} U_\chi$ è unione disgiunta di aperti. Definiamo le funzioni su X

$$\varphi_\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in U_\chi \\ 0 & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

e

$$1_\chi := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi^{-1}(g) \varphi_\chi;$$

dove con χ^{-1} indichiamo il carattere inverso di χ nel gruppo dei caratteri.

Con queste definizioni abbiamo che ogni $f \in (\pi_* \mathcal{O}_X)(U)$ è una funzione olomorfa che si decompone come somma di funzioni su X nella forma

$$f = \sum_{\chi \in G^*} f_\chi = \sum_{\chi \in G^*} f \cdot 1_\chi.$$

Con questa scrittura è facile osservare che l'azione indotta da G su $\pi_* \mathcal{O}_X(U)$ è data da

$$h^* f_\chi = \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi^{-1}(gh)(gh)^* f \right) \chi(h).$$

Questo mostra che f_χ è un autovettore e che dunque il suo insieme di definizione \mathcal{L}_χ è un autospazio.

Infine consideriamo l'estensione di campi

$$\mathbb{C}(Y) \subset \mathbb{C}(X)$$

di grado $|G|$ dei campi delle funzioni razionali sulle due varietà. Si osservi che, per definizione di rivestimento, questa è un'estensione di Galois con gruppo G .

Analizziamo per prima la situazione in cui G è un gruppo ciclico. Nel caso generale potremo ricondurci a questo sfruttando il Teorema di struttura per gruppi abeliani fintamente generati.

Esempio 2.4.11. Sia G un gruppo ciclico di ordine d , cioè $G = \langle \sigma | \sigma^d = 1 \rangle$. Allora il campo delle funzioni razionali su $Y = X/G$ è il campo $\mathbb{C}(X)^{\langle \sigma \rangle}$ delle funzioni invarianti per l'azione di σ . Sia ζ una radice d -esima primitiva dell'unità. Per ogni carattere χ di G , di ordine d , esiste $v \in \mathbb{C}(Y)$ e $f \in \mathbb{C}(X)$ tale che

$$\begin{cases} \mathbb{C}(X) = \mathbb{C}(Y)(v), & v^d = f \\ \sigma(v) = \zeta v \end{cases} \quad (2.3)$$

con $f \in \mathbb{C}(Y)$. In questo caso v è un χ -autovettore.

Dal momento che Y è liscia avremo che f ammette un'unica fattorizzazione in prodotto di sezioni di fibrati in rette relativamente prime tra loro (cioè abbiamo una fattorizzazione in primi di entrambi i polinomi al numeratore e denominatore di f). Possiamo allora scrivere

$$v^d = \frac{\prod_i \eta_i^{n_i}}{\prod_j \tau_j^{m_j}}.$$

Ponendo

$$n_i = N_i + dn'_i, \quad m_j = M_j + dm'_j,$$

con $0 \leq N_i, M_j \leq d-1$, definiamo

$$z = w \cdot \prod_i \eta_i^{n'_i} \prod_j \tau_j^{-m'_j}.$$

In questo modo z è una funzione razionale che è sezione di un fibrato in rette su Y . Avremo

$$z^d = w^d \cdot \prod \eta_i^{n_i - N_i} \prod \tau_j^{-m_j + N_j} = w^d \cdot v^d \cdot \frac{\prod_i \eta_i^{-N_i}}{\prod_j \tau_j^{-N_j}} = w^d \cdot v^d \frac{\prod_j \tau_j^{N_j}}{\prod_i \eta_i^{N_i}}.$$

Ogni fattore del prodotto non è in generale irriducibile ma corrisponde per definizione a un divisore di Cartier che denotiamo con D_i . Dal momento che Y è liscia, il gruppo dei divisori di Weil coincide con il gruppo dei divisori di Cartier, pertanto D_i corrisponde ad un divisore di Weil che denotiamo ancora con D_i e che sarà ridotto ma in generale non irriducibile.

Vedremo che, geometricamente, D_i è la parte *divisoriale* del luogo di diramazione in cui la monodromia locale è σ^i e v è una sezione razionale di un fibrato in rette L su Y che soddisfa l'equazione lineare

$$dL \equiv \sum_{i=0}^{d-1} \overline{\chi(i)} D_i \quad (2.4)$$

dove \overline{m} con $m \in \mathbb{Z}/d$ è l'unico rappresentante della classe dei residui in $\{0, 1, \dots, d-1\}$.

Osservazione 2.4.12. Nella situazione descritta nell'esempio 2.1.4, possiamo ricostruire le equazioni precedenti. Abbiamo infatti che il campo delle funzioni razionali su $Y = X/\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ è $\mathbb{C}[X]^{\langle -1 \rangle}$.

Avremo che $v = y$ e $v^2 = g = x(x-1)(x-\lambda)$.

Possiamo allora scrivere la fattorizzazione

$$v^2 = x(x-1)(x-\lambda)$$

che corrisponde al divisore

$$D = (0) + (1) + (\lambda) + (\infty).$$

Infine l'equazione che coinvolge l'unico fibrato in rette non banale \mathcal{L} ($\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ha infatti solo un carattere non banale) sarà l'equazione 2.4:

$$2\mathcal{L} \equiv (P_0) + (P_1) + (P_\lambda) + (P_\infty).$$

2.5 Due importanti divisori

Abbiamo già osservato nell'Esempio 2.1.4 che ci sono alcuni insiemi che caratterizzano un rivestimento ramificato, ovvero quello dei *punti di diramazione* e quello dei *punti di ramificazione*.

In questa sezione osserveremo che questi insiemi costituiscono dei divisori nelle due varietà coinvolte e andremo a precisare la definizione di questi insiemi nel caso più generale.

Per comprendere meglio la situazione consideriamo il caso base in cui le varietà coinvolte sono curve. In questo caso i divisori saranno somme di punti e sarà più semplice vedere il luogo di ramificazione come divisore.

Sia $\pi : X \rightarrow Y$ un morfismo di curve lisce di grado $n = [k[X] : k[Y]]$. Per ogni punto $P \in X$ definiamo l'**indice di ramificazione** $e_P \in \{1, \dots, n\}$ nel modo seguente.

Definizione 2.5.1. Dato $\pi : X \rightarrow Y$ un morfismo di curve lisce di grado n e un punto $P \in X$, sia $Q = \pi(P)$ e $\pi^\sharp : \mathcal{O}_{Y,Q} \rightarrow \mathcal{O}_{X,P}$ il corrispondente morfismo tra le spighe dei fasci di struttura. Posti ν_P la valutazione dell'anello di valutazione discreta $\mathcal{O}_{X,P}$ e t un generatore di $\mathcal{O}_{Y,Q}$ definiamo

$$e_P = \nu_P(\pi^\sharp(t)).$$

Osservazione 2.5.2. Cerchiamo di comprendere meglio la definizione. Sia $Q = \pi(P)$, allora la spiga $\mathcal{O}_{Y,Q}$ è un anello locale con ideale massimale \mathfrak{m}_Q . Inoltre, poiché Y è liscia, allora $\mathcal{O}_{Y,Q}$ avrà dimensione di Krull 1. Sia allora $t \in \mathcal{O}_{Y,Q}$ un parametro locale. In questo caso avremo che il morfismo tra le spighe π^\sharp è definito da

$$\begin{aligned} \pi_P^\sharp : \mathcal{O}_{X,P} &\longrightarrow \mathcal{O}_{Y,Q}, \\ t &\longmapsto t^{e_P}, \end{aligned}$$

dove, con un abuso di notazione, abbiamo indicato con t il parametro locale di $\mathcal{O}_{X,P}$ (si osservi che anche X è non-singolare, e dunque $\mathcal{O}_{X,P}$ ha dimensione di Krull 1). L'esponente e_P corrisponde proprio all'indice di ramificazione di π in P .

Nell'Esempio 2.1.4, vediamo che per ogni $P = (x, y) \in X$ con $x \neq 0, 1, \lambda, \infty$; abbiamo $t \mapsto t$ e dunque $e_P = 1$. Viceversa nel caso $P = (x, y)$ con $x = 0, 1, \lambda, \infty$; avremo che $t \mapsto t^2$ e dunque $e_P = 2$.

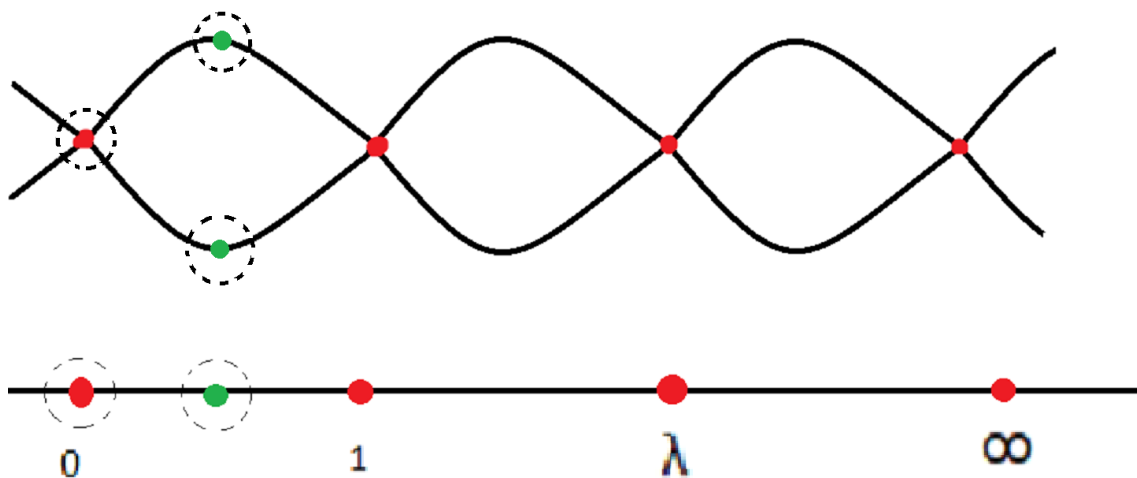


Figura 2

Definizione 2.5.3. Sia $\pi : X \rightarrow Y$ un morfismo finito di curve lisce. Diciamo che un punto $P \in X$ è un **punto di ramificazione** se $e_P > 1$. In tal caso diciamo che $Q = \pi(P)$ è un **punto di diramazione**. Viceversa, se $e_P = 1$, P è detto punto **non-ramificato**. Chiameremo l'insieme dei punti di ramificazione **luogo di ramificazione**, e l'insieme dei punti di diramazione **luogo di diramazione**.

Osservazione 2.5.4. In Figura 2 i punti in verde sono non ramificati, mentre quelli indicati in rosso sono ramificati.

A questo punto è necessario fare un'osservazione.

Osservazione 2.5.5. È sempre vero che l'immagine di un punto di ramificazione è un punto di diramazione. Viceversa in generale non è detto che la preimmagine di un punto di diramazione sia costituita solo da punti di ramificazione. Di fatto, se $R \subset X$ è l'insieme dei punti di ramificazione di $\pi : X \rightarrow Y$ e $B \subset Y$ è l'insieme dei punti di diramazione, avremo che, in generale

$$B = \pi(R) \quad R \neq \pi^{-1}(B).$$

Mostriamo meglio questa osservazione con un esempio

Esempio 2.5.6. Si consideri in \mathbb{P}^2 la curva cubica $C := \{\sum_{i=0}^2 x_i^3 + \lambda x_0 x_1 x_2 = 0\}$. Proiettiamo C su \mathbb{P}^1 dal punto $P = [0 : 1 : 0]$ che non appartiene a C . Per farlo consideriamo tutte le rette, passanti per P . Queste sono parametrizzate dalla loro pendenza, cioè corrispondono a punti di \mathbb{P}^1 . Se indichiamo con $[l] \in \mathbb{P}^1$ il punto corrispondente alla retta l passante per P , possiamo definire

$$\begin{aligned} \pi : C &\longrightarrow \mathbb{P}^1 \\ Q &\longmapsto [\overline{PQ}] \end{aligned}$$

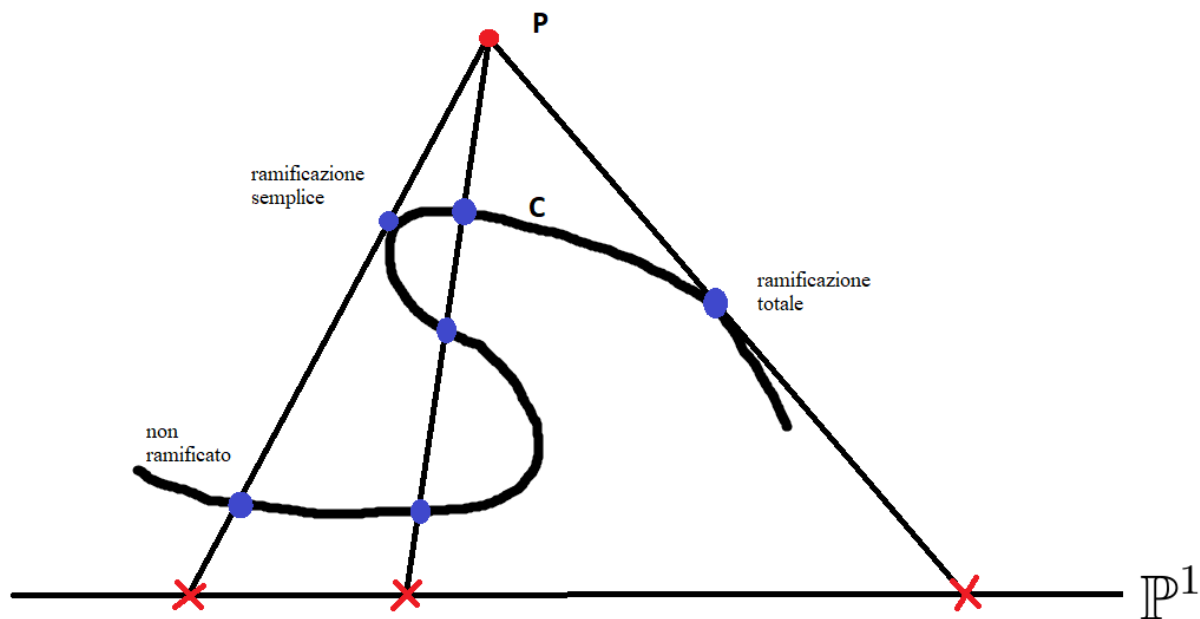
dove \overline{PQ} è la retta passante per P e Q .

Per il Teorema di Bézout, ogni retta l passante per P interseca la curva C in 3 punti contati con molteplicità. Pertanto π è una mappa finita di grado 3. Dunque, in generale, l interseca C in tre punti distinti. Tuttavia è possibile che ci siano punti di intersezione multipla. Ci sono, in particolare, due casi: possiamo avere un punto di tangenza con molteplicità di intersezione 3, oppure avere due punti di intersezione, uno con molteplicità 2 e l'altro con molteplicità 1.

Nel caso in cui l'intersezione tra la retta e la curva consista di un solo punto x (con molteplicità 3), diremo che π è *totalmente ramificata* in x . Se invece abbiamo $l \cap C = \{x, y\}$ con x di molteplicità 2 e y di molteplicità 1, diremo che x è un punto di *ramificazione semplice* (π è *semplicemente ramificata* in x), e che π è *non-ramificata* in y . In questo caso si osserva che $\pi(x) = \pi(y) = q$ per definizione di π e $\pi^{-1}(q) = \{x, y\}$, con $x \in R$ e $y \notin R$, a conferma del fatto che in generale

$$R \subsetneq \pi^{-1}(B).$$

La situazione può essere descritta dalla seguente figura:



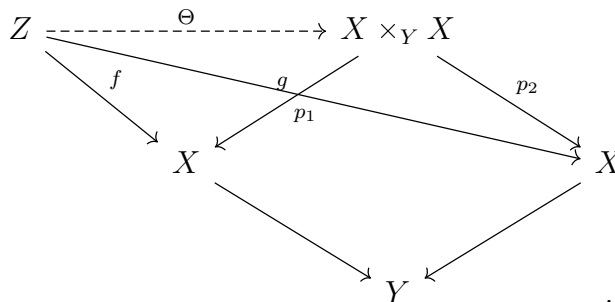
Osservazione 2.5.7. Nel caso delle curve il luogo di diramazione e di ramificazione sono chiaramente dei divisori (rispettivamente in Y e in X).

2.5.1 Fascio dei differenziali relativi

Abbiamo intuito il concetto di punto di ramificazione e diramazione nel caso delle curve. Adesso vogliamo generalizzare queste definizioni al caso di varietà generiche. Per farlo definiremo il fascio dei differenziali relativi, che ci permetterà di *misurare la differenza* tra i fasci cotangenti di due varietà lisce X e Y in presenza di un morfismo finito $\pi : X \rightarrow Y$.

Per prima cosa definiamo il prodotto fibrato.

Definizione 2.5.8. Sia $\pi : X \rightarrow Y$ un morfismo tra varietà. Definiamo il **prodotto fibrato** $X \times_Y X$ come l'unica (a meno di isomorfismi) varietà con **morfismi di proiezione** $p_1, p_2 : X \times_Y X \rightarrow X$ tali che per ogni varietà Z e per ogni morfismo $h : Z \rightarrow Y$, e dati morfismi $f, g : Z \rightarrow X$ esiste un unico morfismo $\Theta : Z \rightarrow X \times_Y X$ tale che il seguente diagramma commuta:



Questa costruzione ci serve per definire il fascio dei differenziali relativi. Per farlo è necessario dare la seguente definizione.

Definizione 2.5.9. Sia Y un sottospazio chiuso di una varietà X . Definiamo il **fascio degli ideali** di Y come il fascio \mathfrak{I}_Y dato da

$$U \longmapsto \mathfrak{I}_Y(U)$$

dove U è un aperto di X e $\mathfrak{I}_Y(U)$ è l'insieme delle funzioni regolari in $\mathcal{O}_X(U)$ che si annullano in $Y \cap U$. Dunque \mathfrak{I}_Y è un sottofascio di \mathcal{O}_X .

Siano X e Y due varietà e $X \times_Y X$ il prodotto fibrato. Consideriamo il morfismo diagonale $\Delta_Y : X \rightarrow X \times_Y X$. Si verifica che questo dà un isomorfismo di X su $\Delta_Y(X)$ che è chiuso di $X \times_Y X$. Allora possiamo considerare il fascio degli ideali di $\Delta_Y(X)$ come nell'ultima definizione. Diciamo allora che:

Definizione 2.5.10. Siano X e Y varietà algebriche. Il **fascio dei differenziali relativi** di X su Y è il fascio su X :

$$\Omega_{X/Y} := \Delta_Y^*(\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2)$$

dove \mathfrak{I} è il fascio degli ideali di $\Delta_Y(X)$.

La definizione data può risultare complicata poco intuitiva. Tuttavia nel caso delle varietà affini è più semplice comprendere la struttura del fascio dei differenziali relativi.

Approfondiamo questo caso definendo i seguenti oggetti algebrici.

Definizione 2.5.11. Sia B una A -algebra e M un B -modulo. Una **A -derivazione** da B su M è una mappa $d : B \rightarrow M$ tale che

- (i) Per ogni $b, c \in B$, $d(b + c) = db + dc$
- (ii) Per ogni $b, c \in B$, $d(b \cdot c) = bdc + (db)c$
- (iii) Per ogni $a \in A$, $da = 0$.

Definizione 2.5.12. Se R è una k -algebra finitamente generata, definiamo Ω_R l' R -modulo libero generato dai simboli df con $f \in R$ che soddisfano

- (i) $d(f + g) = df + dg$ per ogni $f, g \in R$
- (ii) $d(f \cdot g) = f \cdot dg + df \cdot g$
- (iii) $dc = 0$ per ogni $c \in k$

Gli elementi di Ω_R sono detti **differenziali di Kähler** di R .

Osservazione 2.5.13. I differenziali di Kähler sono le immagini tramite tutte le k -derivazioni degli elementi di R e loro combinazioni lineari. Vedremo in seguito che questo fatto corrisponde a verificare una proprietà universale.

Osservazione 2.5.14. Possiamo generalizzare la definizione prendendo B una generica A -algebra e andando a considerare il B -modulo libero $\Omega_{B/A}$ definito dai simboli df con $f \in B$ che soddisfano

- (i) $d(f + g) = df + dg$ per ogni $f, g \in B$
- (ii) $d(f \cdot g) = f \cdot dg + df \cdot g$
- (iii) $dg = 0$ per ogni $g \in A$

Gli elementi di $\Omega_{B/A}$ sono detti **differenziali relativi** di B su A .

Osservazione 2.5.15. In realtà quella che abbiamo mostrato è solo una delle possibili costruzioni di *modulo di differenziali relativi* che in generale è definito dalla seguente proprietà universale.

Definizione 2.5.16. Sia B una A -algebra. Un **modulo di differenziali relativi** di B su A è un B -modulo $\Omega_{B/A}$ con una A -derivazione $d : B \rightarrow \Omega_{B/A}$ che soddisfa la seguente proprietà universale: per ogni B -modulo M e per ogni A -derivazione $d' : B \rightarrow M$ esiste un unico omomorfismo di B -moduli $f : \Omega_{B/A} \rightarrow M$ tale che commuta il diagramma

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{d'} & M \\ \downarrow d & \nearrow f & \\ \Omega_{B/A} & & \end{array}$$

Osservazione 2.5.17. Se B è una A -algebra si dimostra che il modulo dei differenziali relativi $\Omega_{B/A}$ esiste ed è unico a meno di isomorfismi.

Torniamo ora alle varietà affini e osserviamo il seguente esempio.

Esempio 2.5.18. Sia

$$\pi : X \longrightarrow Y$$

un morfismo finito di varietà affini.

A questo corrisponde un morfismo di k -algebre

$$\pi^\# : k[Y] \longrightarrow k[X].$$

Grazie a $\pi^\#$ posso vedere $k[X]$ come una $k[Y]$ -algebra. Infatti $k[X]$ e $k[Y]$ sono anelli e dati $g \in k[Y]$ e $f \in k[X]$ posso definire $f \cdot g := f \cdot \pi^\#(g) \in k[X]$ grazie al prodotto in $k[X]$.

Abbiamo che $\Omega_{k[X]/k[Y]}$ sarà generato dai simboli df con f nell'anello delle coordinate di X e con $dg = 0$ per ogni $g \in \pi^\#k[Y]$.

Questo è un $k[X]$ -modulo e possiamo trasformarlo in un fascio andando a considerare

$$\Omega_{X/Y} := \widetilde{\Omega_{k[X]/k[Y]}}$$

che è un fascio su X e corrisponde proprio al fascio dei differenziali relativi. Le spighe di $\Omega_{X/Y}$ sono le localizzazioni di $\Omega_{k[X]/k[Y]}$ nei massimali di $k[X]$:

$$(\Omega_{X/Y})_x = \Omega_{k[X]/k[Y]} \otimes_{k[X]} k[X]_{\mathfrak{m}_x} = (\Omega_{k[X]/k[Y]})_{\mathfrak{m}_x}.$$

Osservazione 2.5.19. Avremmo potuto definire il fascio dei differenziali relativi tra varietà algebriche X, Y a partire dal caso affine. Poiché morfismi finiti sono affini, infatti, è possibile ridursi a considerare ricoprimenti affini di X e Y . Ci saremmo solo dovuti preoccupare di *incollare* i diversi pezzi.

In questo paragrafo mostriamo come entra in gioco il fascio degli ideali nella costruzione del fascio dei differenziali relativi nel caso affine. L'obiettivo è quello di comprendere al meglio la struttura di $\Omega_{X/Y}$. Ci poniamo dunque nelle ipotesi in cui

$$\pi : X \longrightarrow Y$$

è un morfismo finito di varietà affini.

Abbiamo mostrato che possiamo vedere $k[X]$ come una $k[Y]$ -algebra tramite il morfismo π^\sharp .

A questo punto si può considerare il morfismo definito sui tensori elementari ed esteso per linearità:

$$\begin{aligned} \delta : k[X] \otimes_{k[Y]} k[X] &\longrightarrow k[X] \\ f \otimes g &\longmapsto f \cdot g \end{aligned}$$

Sia \mathfrak{I} il nucleo di δ . Avremo che $\sum f_i \otimes g_i \in \mathfrak{I}$ se e solo se $\sum f_i \cdot g_i = 0$ in $k[X]$.

Si consideri $k[X] \otimes_{k[Y]} k[X]$ come $k[X]$ -modulo tramite la moltiplicazione a sinistra. Allora $\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2$ eredita la struttura di $k[X]$ -modulo.

Definiamo la mappa

$$\begin{aligned} d^* : k[X] &\longrightarrow \mathfrak{I} \\ f &\longmapsto f \otimes_{k[X]} 1 - 1 \otimes_{k[X]} f \end{aligned}$$

e la mappa d data dalla composizione di d^* con la proiezione $\mathfrak{I} \rightarrow \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2$.

Si verifica che d^* e d sono $k[X]$ -derivazioni.

Proposizione 2.5.20. Con le notazioni appena introdotte $\langle \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2, d \rangle$ è un modulo di differenziali relativi per $k[X]$ su $k[Y]$.

Dimostrazione. Dobbiamo verificare la proprietà universale, dunque consideriamo un $k[X]$ -modulo M e una $k[Y]$ -derivazione $d' : k[X] \rightarrow M$. Vogliamo definire un morfismo $f : \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 \rightarrow M$ che tale che $f \circ d = d'$.

Osserviamo che in $k[X] \otimes k[X]$, abbiamo

$$f \otimes g = fg \otimes 1 + f(1 \otimes g - g \otimes 1) = \delta(f \otimes g) + f(d^*g).$$

Dunque se $f \otimes g \in \mathfrak{I}$, avremo che $\delta(f \otimes g) = 0$, e dunque $f \otimes g = f(d^*g)$.

Ora, poiché modulo \mathfrak{I}^2 vale $d^*g = dg$, avremo che ogni elemento di $\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2$ è della forma $\sum f_i dg_i$, cioè $\Omega := \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2$ è generato come $k[X]$ -modulo da $\{dg|g \in k[X]\}$. Dunque per definire f sarà sufficiente definirla su tali elementi. Definiamo allora

$$\tilde{f} : \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 \rightarrow M$$

$$dg \longmapsto d'g$$

ed estesa per linearità e avremo chiaramente che il diagramma

$$\begin{array}{ccc} k[X] & \xrightarrow{d'} & M \\ \downarrow d & \nearrow f & \\ \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 & & \end{array}$$

commuta. □

Dunque possiamo vedere $\Omega_{X/Y}$ come la fascio associato al modulo $\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2$:

$$\Omega_{X/Y} = \widetilde{\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2} = \text{Ker}(\widetilde{\delta})/\text{Ker}(\delta)^2.$$

Osserviamo che la costruzione di $\Omega_{X/Y}$ è analoga a quella del fascio cotangente di una varietà, ma viene tenuto conto della struttura di $k[Y]$ -modulo indotta su $k[X]$ dal morfismo considerato. In particolare se $Y = \mathbb{A}_k^n$, e dunque $k[Y] = k$ ritroviamo il cotangente $\Omega_{X/Y} = \Omega_X$.

A questo punto possiamo finalmente introdurre le definizioni di luogo di ramificazione e diramazione nel caso generale. Queste corrisponderanno agli insiemi definiti nella definizione 2.5.3 nel caso delle curve.

Definizione 2.5.21. Sia $\pi : X \rightarrow Y$ un rivestimento. Il **luogo di ramificazione** R di π è il supporto del fascio dei differenziali relativi $\text{supp}(\Omega_{X/Y})$.

Definizione 2.5.22. Sia $\pi : X \rightarrow Y$ un rivestimento. Il **luogo di diramazione** D di π è l'immagine del luogo di ramificazione R tramite π , cioè $B = \pi(R)$.

Avremo che in generale questi sono sempre sottospazi chiusi di Y e X rispettivamente. In generale vale il seguente teorema.

Teorema 2.5.23 (*Purity of branch locus, Zariski*). Sia $\pi : X \rightarrow Y$ un rivestimento di varietà. Se X è normale e Y è liscia, allora il luogo di diramazione B di π è un divisore di Weil di X .

Dimostrazione. Per la dimostrazione si veda [Zar58]. □

Si dimostra che anche il luogo di ramificazione è un divisore di Weil (questa volta di Y), pertanto d'ora in poi potremo parlare di **divisore di ramificazione** e **divisore di diramazione**.

Capitolo 3

Teorema di struttura dei rivestimenti abeliani

Il fulcro di questo capitolo è il Teorema 3.3.5. Questo è un teorema di struttura per i rivestimenti abeliani, che stabilisce le equazioni per i divisori che caratterizzano un rivestimento abeliano. Una volta enunciato il teorema, anziché concentrarci sulla dimostrazione, procederemo esplicitando queste equazioni in alcuni casi concreti. Riteniamo che ciò possa essere di aiuto alla comunità matematica.

Per arrivare all'enunciato del teorema è necessario fornire alcune definizioni preliminari.

3.1 Gruppo di inerzia

Sia $\pi : X \rightarrow Y$ un rivestimento abeliano con gruppo finito G . Ci restringiamo al caso in cui X e Y sono entrambe varietà lisce. Osserviamo che in questo caso valgono le ipotesi del Teorema di Zariski 2.5.23.

Definizione 3.1.1. Sia R il luogo di ramificazione di π , e sia $T \subset R$ una sua componente irriducibile (nel caso delle curve R sarà un insieme di punti e T sarà uno di essi). Definiamo il **gruppo di inerzia** di T come

$$H = H_T := \{g \in G \mid gx = x \ \forall x \in T\}.$$

Osservazione 3.1.2. Un rivestimento è *totalmente ramificato* se i gruppi di inerzia di tutte le componenti di R generano G .

Vogliamo approfondire il ruolo del gruppo di inerzia, cercando di intuirne la struttura. Posto H il gruppo di inerzia di T si ha che esiste un aperto di Zariski $T^\circ \subseteq T$ tale che, per ogni $p \in T^\circ$

$$\text{Stab}(p) = H.$$

Possiamo assumere che T° sia liscio, in questo caso, per il Teorema di Zariski 2.5.23, per ogni $p \in T^\circ$ esistono coordinate locali t, z_2, \dots, z_n in un intorno aperto U di p tali che

$$U \cap T^\circ = \{t = 0\}.$$

In particolare t sarà il parametro locale di $\mathcal{O}_{X,T}$.

Ora, a meno di restringere U avremo che, per ogni $g \in H$, $gU = U$. Quindi abbiamo

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{g} & U \xrightarrow{(t, x_2, \dots, x_n)} \mathbb{C}^n \\ & \searrow & \nearrow \\ & & g^*t \end{array}$$

dato che $g|_T = Id_T$ avremo che, per ogni $j = 2, \dots, n$, $g^*z_j = z_j \pmod{t}$. Inoltre avremo che

$$g^*t = t \cdot u^g \text{ per qualche } u^g : U \rightarrow \mathbb{C}$$

Se andiamo a sviluppare in serie di Taylor u^g in p , troviamo

$$u^g = u_0^g + tu_1^g + t^2u_2^g + \dots = \sum t^i u_i^g.$$

Ma allora in $\mathfrak{m}_p = (t)$ avremo che $u^g|_T = u_0^g$, cioè u^g coincide con la sua parte lineare (tangenziale).

Ora, si osserva che l'ideale $\mathfrak{m}_p = (t)$ è invariante per l'azione del gruppo di inerzia H , quindi possiamo considerare modulo t^2 (e in generale modulo t^s) la scrittura seguente

$$\forall g, h \in H \quad h^*g^*t = h^*(tu_0^g) = (tu_0^h)h^*u_0^g = tu_0^h u_0^g \pmod{t^2}.$$

Allora avremo che:

- (a) $(u_0^g)^{|g|} = 1$, cioè $u_0^g \in \mu_{|g|} \subseteq \mathbb{C}$.
- (b) La mappa $\tilde{\chi} : H \rightarrow \mathbb{C}^*$, $g \mapsto u^g$ è un omomorfismo di gruppi.

Inoltre, sia $g \in \text{Ker}(\tilde{\chi})$ allora $g^*t = t + O(t^2)$.

Se scriviamo $g^*t = t + vt^s + O(t^{s+1})$, $v = v(z_1, \dots, z_n)$; troviamo che, $\pmod{t^{s+1}}$

$$(g^*)^2t = g^*g^*t = g^*(t + vt^s) = g^*t + g^*vt^s = t + vt^s + vt^s = t + 2vt^s.$$

In generale avremo che

$$(g^*)^k t = t + kvt^s \pmod{t^{s+1}}.$$

Ma allora, poiché $(g^*)^{|g|} = Id$, avremo $|g|v = 0$, da cui $v = 0$. Pertanto, se $g \in \text{Ker}(\tilde{\chi})$ allora $g^*t = t$ e dunque, per ogni $j = 1, \dots, n$ si ha $g^*z_j = z_j \pmod{t}$.

Ripetendo lo stesso argomento con $g^*z_j = z_j + vt^s \pmod{t^{s+1}}$ troviamo che

$$(g^*)^k z_j = z_j + kvt^s \pmod{t^{s+1}},$$

da cui

$$|g|g^*z_j = z_j \text{ e quindi } |g|v = v \text{ cioè } v = 0.$$

Pertanto avremo che $g^* = Id$, cioè $\tilde{\chi}$ è iniettivo.

Di conseguenza possiamo vedere H come un sottogruppo di \mathbb{C}^* .

Di fatto abbiamo verificato i seguenti risultati:

Lemma 3.1.3. Sia T una componente del luogo di ramificazione liscia e di codimensione 1, allora il suo gruppo di inerzia H è ciclico. Inoltre esistono coordinate locali t, z_1, \dots, z_n tali che, localmente in $p \in T$, vale

(i) $T = \{t = 0\}$.

(ii) $H \curvearrowright T$ come $(g, (t, z_1, \dots, z_n)) \mapsto (\tilde{\chi}(g)t, z_1, \dots, z_n)$.

Dimostrazione. Abbiamo visto che la mappa $\tilde{\chi}$ ci permette di identificare H con un sottogruppo ciclico di \mathbb{C}^* , dunque la prima parte della tesi è verificata.

Per quanto riguarda la seconda parte cerchiamo di operare un cambio di coordinate come richiesto nella tesi.

- Consideriamo le variabili locali z_j in $p \in T$. Fissato H il gruppo di inerzia di T . Sappiamo che $\forall g \in H \quad g^* z_j = z_j \pmod t$. Definiamo

$$z'_j = \frac{1}{|H|} \sum_{g \in H} g^* z_j.$$

Allora avremo che, per ogni $h \in H$

$$h^* z'_j = z'_j$$

e inoltre

$$z'_j = z_j \pmod t$$

Ma allora è sufficiente sostituire z_j con z'_j per ottenere un nuovo sistema di coordinate locali in p tali che

$$T = \{t = 0\} \text{ e } g^* z'_j = z'_j \quad \forall g \in H.$$

In questo modo abbiamo la parte (i) della tesi, inoltre per verificare la parte (ii) dobbiamo solo trovare una coordinata da sostituire a t , mentre le nuove z'_j già soddisfano la condizione (ii).

- Consideriamo la variabile t . Abbiamo che $g^* t = \tilde{\chi}(g)t \pmod{t^2}$. Per ogni $\chi \in H^*$ definiamo

$$t_\chi = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \chi^{-1}(h) h^* t.$$

Chiaramente $t_\chi \in (t)$. Allora esiste $a_\chi \in \mathbb{C}$ tale che $t_\chi = a_\chi t \pmod{t^2}$. Inoltre dalla teoria della rappresentazione sappiamo che

$$\sum_{\chi \in H^*} \chi(g) = \begin{cases} 1 & \text{se } g = 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Pertanto avremo che

$$\frac{1}{|H|} \sum_{\chi \in H^*} t_\chi = t.$$

Inoltre per ogni $g \in H$ avremo che

$$g^*t_\chi = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \chi^{-1}(h)g^*h^*t =$$

$$\chi(g) \sum_{h \in H} \chi^{-1}(g)\chi^{-1}(h)g^*h^*t = \chi(g)t_\chi.$$

Vogliamo sostituire t_χ con $t_{\tilde{\chi}}$. Per farlo occorre verificare che $a_{\tilde{\chi}} \neq 0$.

Abbiamo che, mod t^2 ,

$$\tilde{\chi}(g) \cdot t = g^*t = g^* \sum t_\chi = \sum \chi(g)t_\chi$$

da cui deduciamo che

$$\tilde{\chi}(g) = \sum \chi(g) \cdot a_\chi \quad \forall g.$$

Quest'ultima equazione ci dice che l'insieme degli $\{a_\chi\}$ costituisce una famiglia di costanti con cardinalità $|H|$ che soddisfano $|H|$ equazioni lineari con coefficienti in \mathbb{C} dati dalla **matrice di Vandermonde**

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \zeta & \zeta^2 & \dots & \\ 1 & \zeta^2 & \zeta^4 & \dots & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \end{pmatrix}$$

dove $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{|H|}}$ è una radice primitiva dell'unità. Si ha che $\det L = \prod (\zeta^i - \zeta^j) \neq 0$, pertanto il sistema di equazioni per gli a_χ ha una sola soluzione che è data da $a_{\tilde{\chi}} = 1$ e $a_\chi = 0$. Pertanto abbiamo provato che $a_{\tilde{\chi}} \neq 0$, e dunque possiamo effettuare la sostituzione sperata, trovando un sistema di coordinate che soddisfa (i) e (ii).

□

Lemma 3.1.4. Sia T una componente del luogo di ramificazione liscia e di codimensione 1, sia $\mathcal{O}_{X,T}$ l'anello locale in T , e sia \mathfrak{m} il suo ideale massimale. Allora la mappa cotangente induce una rappresentazione

$$\rho_T : H \rightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$$

che è data da

$$h \longmapsto (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \ni [t] \mapsto [h \cdot t] \in \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$$

dove $h \cdot t$ è l'immagine di t tramite l'azione di $h \in H$. L'azione di H è definita su \mathfrak{m} perché $h \cdot T = T$ inoltre passa al quoziente.

Si ha che la rappresentazione ρ_T è fedele ed il suo carattere associato genera il gruppo dei caratteri H^* .

Dimostrazione. L'azione passa al quoziente perché abbiamo osservato che (t) è invariante. Inoltre, poiché $\tilde{\chi}$ è iniettiva, avremo che la rappresentazione ρ_T è fedele. □

Introduciamo ora alcune notazioni che ci permettono di trattare in maniera più semplice la prossima sezione

Definizione 3.1.5. Definiamo \mathfrak{C} l'insieme dei sottogruppi ciclici di G .

Definizione 3.1.6. Per ogni H in \mathfrak{C} definiamo S_H l'insieme dei generatori del gruppo dei caratteri H^* .

Osservazione 3.1.7. Con la nuova notazione, gli enunciati dei due lemmi 3.1.3 e 3.1.4 si riassumono dicendo che

Per ogni (H, Ψ) , con $H \in \mathfrak{C}$ e $\Psi \in H^*$ iniettivo esiste un unico $h \in H$ tale che $\Psi(h) = e^{\frac{2\pi i}{|H|}} = \zeta$.

Inoltre, chiaramente h determina H in quanto $H = \langle h \rangle$, e h fissa anche Ψ tramite la condizione $\Psi(h) = \zeta$.

Osservazione 3.1.8. Sia (H, Φ) una coppia costituita come sopra da un sottogruppo ciclico di G e da un generatore Φ e sia d l'ordine di H . Allora c'è un omomorfismo surgettivo

$$f_{H, \Phi} : G^* \longrightarrow \mathbb{Z}/d,$$

$$\chi \longmapsto i_\chi;$$

dove i_χ è l'unico esponente in $\{0, \dots, d-1\}$ tale che $\chi|_H = \Phi^{i_\chi}$.

Reciprocamente, dato un omomorfismo surgettivo $f : G^* \rightarrow \mathbb{Z}/d$, il sottogruppo

$$H = \{g \in G \mid \chi(g) = 1 \ \forall \chi \in \text{Ker}(f)\}$$

è ciclico di ordine d e la mappa f ci consente di identificare H^* con \mathbb{Z}/d (ovvero fornisce un criterio per la scelta di un generatore).

Diamo infine le ultime definizioni

Definizione 3.1.9. Scriveremo

$$R = \sum_{H \in \mathfrak{C}} \sum_{\Psi \in S_H} D_{H, \Psi}$$

dove $D_{H, \Psi}$ è la somma di tutte le componenti di R che hanno gruppo di inerzia H e carattere Ψ .

Ovvero avremo che

$$T \subseteq D_{H, \Psi} \Leftrightarrow h \text{ agisce su } T \text{ come } (t, z_1, \dots, z_n) \mapsto (\zeta t, z_1, \dots, z_n).$$

Definizione 3.1.10. Un rivestimento **semplicemente ciclico** è un G -rivestimento tale che esiste un generatore $\Psi \in G^*$ tale che $D = D_{G, \Psi}$. In tal caso Ψ sarà detto il **carattere generante** del rivestimento.

3.2 Esempi

In questa sezione riportiamo alcuni esempi concreti del calcolo degli insiemi \mathfrak{C} e S_H per qualche gruppo e dei possibili divisori R .

3.2.1 $G = \mathbb{Z}/2$

In questo caso i sottogruppi ciclici di G sono solo 0 e G , dunque

$$\mathfrak{C} = \{0, G\}.$$

I gruppi dei caratteri di questi sottogruppi sono:

$0^* = 0$ che non ha generatori

$(\mathbb{Z}/2)^* = \mathbb{Z}/2$ che ha un generatore χ_{sgn} dato dalla rappresentazione del segno.

Pertanto in questo caso

$$D = D_{\mathbb{Z}/2, \chi_{\text{sgn}}}.$$

Osservazione 3.2.1. Il divisore $D = D_{\mathbb{Z}/2, \chi_{\text{sgn}}}$ non è, in generale, irriducibile. Infatti nell'osservazione 2.4.11 abbiamo trovato il divisore $D = (0) + (1) + (\lambda) + (\infty)$ che non è irriducibile.

3.2.2 $G = \mathbb{Z}/3$

In questo caso i sottogruppi ciclici di G sono solo 0 e G , dunque

$$\mathfrak{C} = \{0, G\}.$$

I gruppi dei caratteri di questi gruppi sono:

$0^* = 0$ che non ha generatori

$(\mathbb{Z}/3)^* = \mathbb{Z}/2$ che ha due generatori, dati da:

- $\chi_{\rho_1} : \bar{1} \mapsto \zeta$
- $\chi_{\rho_2} : \bar{1} \mapsto \zeta^2$

Pertanto in questo caso

$$D = D_{\mathbb{Z}/3, \chi_{\rho_1}} + D_{\mathbb{Z}/3, \chi_{\rho_2}}.$$

3.2.3 $G = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$

In questo caso i sottogruppi ciclici di G sono 0 , $\langle(1, 0)\rangle$, $\langle(0, 1)\rangle$ e $\langle(1, 1)\rangle$, dunque

$$\mathfrak{C} = \{0, \langle(1, 0)\rangle, \langle(0, 1)\rangle, \langle(1, 1)\rangle\}.$$

I gruppi dei caratteri di questi gruppi sono:

$0^* = 0$ che non ha generatori

$\langle\langle(1, 0)\rangle\rangle^* \cong (\mathbb{Z}/2)^* = \mathbb{Z}/2$ che ha un solo generatore χ_{sgn} ,

$\langle\langle(0, 1)\rangle\rangle^* \cong (\mathbb{Z}/2)^* = \mathbb{Z}/2$ che ha un solo generatore χ_{sgn} ,

$\langle\langle(1, 1)\rangle\rangle^* \cong (\mathbb{Z}/2)^* = \mathbb{Z}/2$ che ha un solo generatore χ_{sgn} .

Pertanto in questo caso

$$D = D_{\langle\langle(1,0)\rangle\rangle, \chi_{\text{sgn}}} + D_{\langle\langle(0,1)\rangle\rangle, \chi_{\text{sgn}}} + D_{\langle\langle(1,1)\rangle\rangle, \chi_{\text{sgn}}}.$$

3.2.4 $G = \mathbb{Z}/p$

Se $G = \mathbb{Z}/p$ con p un numero primo, ogni elemento non nullo di G genera G . Dunque avremo

$$\mathfrak{C} = \{0, G\}.$$

I gruppi dei caratteri di questi gruppi sono:

$0^* = 0$ che non ha generatori,

$G^* = (\mathbb{Z}/p)^* \cong \mu_p$ che è omomorfo al gruppo delle radici p -esime dell'unità. Dunque avrà $p - 1$ generatori $\chi_1, \dots, \chi_{p-1}$.

Pertanto in questo caso

$$D = D_{G, \chi_1} + \dots + D_{G, \chi_{p-1}}.$$

3.3 Costruire i rivestimenti

In questa sezione enunciamo il Teorema 3.3.5, che, come vedremo, ha un ruolo centrale nella teoria dei rivestimenti. Infatti fornisce i dati per costruire un rivestimento e le equazioni che caratterizzano totalmente il rivestimento in oggetto, e dunque costituisce un vero e proprio teorema di struttura per i rivestimenti.

Osservazione 3.3.1. La struttura di algebra su $\pi_* \mathcal{O}_X$ è compatibile con l'azione di G , dunque la moltiplicazione è determinata da mappe \mathcal{O}_Y -lineari

$$\mu_{\chi, \chi'} : \mathcal{L}_\chi^{-1} \otimes \mathcal{L}_{\chi'}^{-1} \rightarrow \mathcal{L}_{\chi\chi'}^{-1} \quad \forall \chi, \chi' \in G^*.$$

Poiché c'è un isomorfismo

$$\text{Hom}(\mathcal{L}_\chi \otimes \mathcal{L}_{\chi'}, \mathcal{L}_{\chi\chi'}^{-1}) \cong H^0(\mathcal{L}_\chi \otimes \mathcal{L}_{\chi'} \otimes \mathcal{L}_{\chi\chi'}^{-1}),$$

la struttura di algebra è isomorfa a quella di $H^0(\mathcal{L}_\chi \otimes \mathcal{L}_{\chi'} \otimes \mathcal{L}_{\chi\chi'}^{-1})$.

Definizione 3.3.2. Per ogni carattere $\chi \in G^*$, per ogni $H \in \mathfrak{C}$, per ogni $\Psi \in S_H$ definiamo

$$\chi|_H := \Psi^{i_\chi}, \quad i_\chi \in \{0, \dots, m_H - 1\}$$

dove m_H è l'ordine di H .

Esempio 3.3.3. Ad esempio consideriamo il gruppo $G = \mathbb{Z}/4 = \langle x \rangle$, il suo sottogruppo $H = \langle x^2 \rangle \in \mathfrak{C}$ e un carattere $\psi \in S_H$. Sicuramente avremo che, dal momento che $\Psi \in S_H$, Ψ genera H^* , e dunque $\Psi(x^2) = -1$. Allora avremo che, per ogni carattere $\chi \in G^*$

$$i_\chi = \begin{cases} 0 & \text{se } \chi(x^2) = 1 \\ 1 & \text{se } \chi(x^2) = -1. \end{cases}$$

Definizione 3.3.4. Definiamo anche

$$\varepsilon_{\chi, \chi'}^{H, \Psi} := \begin{cases} 0 & \text{se } i_\chi + i_{\chi'} < m_H \\ 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Teorema 3.3.5 (Teorema di Pardini). Sia X una varietà normale e Y una varietà liscia. Sia $\pi : X \rightarrow Y$ un rivestimento con gruppo G abeliano e finito. Allora esistono dei fibrati in rette \mathcal{L}_χ su Y con $\chi \in G^*$, e dei divisori di Weil $D_{H, \Psi}$ di Y , con $H \in \mathfrak{C}$ e $\Psi \in S_H$, tali che

$$\pi_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y \oplus \bigoplus_{\chi \in G^* \setminus \{\chi_0\}} \mathcal{L}_\chi^{-1}$$

e tali che, per ogni coppia di caratteri $\chi, \chi' \in G^*$, valgono equazioni della forma

$$\mathcal{L}_\chi + \mathcal{L}_{\chi'} \equiv \mathcal{L}_{\chi\chi'} + \sum_{H \in \mathfrak{C}} \sum_{\Psi \in S_H} \varepsilon_{\chi, \chi'}^{H, \Psi} D_{H, \Psi}. \quad (3.1)$$

Inoltre se Y è una varietà liscia ed esistono dei fibrati in rette \mathcal{L}_χ su Y con $\chi \in G^*$, e dei divisori di Weil $D_{H, \Psi}$ di Y , con $H \in \mathfrak{C}$ e $\Psi \in S_H$ tali che soddisfano le equazioni 3.1, esiste una varietà X ed un G -rivestimento $\pi : X \rightarrow Y$ con dati $\mathcal{L}_\chi, D_{H, \Psi}$.

Dimostrazione. Per la dimostrazione si veda [Par91], Teorema 2.1, p.196. □

Osservazione 3.3.6. Osserviamo che i fibrati \mathcal{L}_χ non determinano i divisori $D_{H, \Psi}$, neanche a meno di equivalenza lineare. Quindi i dati necessari per costruire un rivestimento sono $\{\mathcal{L}_\chi\} \cup \{D_{H, \Psi}\}$.

Nella prossima sezione chiariremo meglio questo concetto con un esempio.

3.4 Esempi

Vogliamo concretizzare le equazioni del Teorema 3.3.5 in alcuni casi concreti, in cui conosciamo bene il gruppo.

3.4.1 $G = \mathbb{Z}/2$

In questo caso c'è un solo carattere non banale χ , dunque l'unico ε da calcolare è

$$\varepsilon_{\chi,\chi}^{G,\chi} = 1$$

perché $i_\chi = 1$ e $m_G = 2$.

(Gli altri ε saranno nulli perché, se χ_0 è il carattere banale, $i_{\chi_0} = 0$).

Pertanto l'equazione diventerà

$$2\mathcal{L}_\chi \equiv D_{G,\chi} \equiv D$$

perché $\chi^2 = 1$ e quindi $\mathcal{L}_{\chi^2} \equiv 0$.

Osservazione 3.4.1. In questo caso abbiamo ritrovato l'equazione dell'osservazione 2.4.12.

3.4.2 $G = \mathbb{Z}/3$

In questo caso ci sono i due caratteri non banali $\chi_{\rho_1}, \chi_{\rho_2}$, che indicheremo con χ_1, χ_2 . Abbiamo che $\chi_1 = \chi_2^2$ e che $\chi_2 = \chi_1^2$. Dunque avremo che, fissato il carattere $\Psi = \chi_j$,

$$i_{\chi_i} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 2 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Pertanto gli unici ε da calcolare sono

- $\varepsilon_{\chi_1,\chi_1}^{G,\chi_1} = 0$ perché $i_{\chi_1} = 1$ e $m_G = 3$.
- $\varepsilon_{\chi_1,\chi_1}^{G,\chi_2} = 1$ perché $i_{\chi_1} = 2$ e $m_G = 3$.
- $\varepsilon_{\chi_1,\chi_2}^{G,\chi_1} = 1$ perché $i_{\chi_1} = 1, i_{\chi_2} = 2$ e $m_G = 3$.
- $\varepsilon_{\chi_1,\chi_2}^{G,\chi_2} = 1$ perché $i_{\chi_1} = 2, i_{\chi_2} = 1$ e $m_G = 3$.
- $\varepsilon_{\chi_2,\chi_2}^{G,\chi_1} = 1$ perché $i_{\chi_2} = 2$ e $m_G = 3$.
- $\varepsilon_{\chi_2,\chi_2}^{G,\chi_2} = 0$ perché $i_{\chi_2} = 1$ e $m_G = 3$.

(Gli altri ε sono nulli perché, indicando con χ_0 il carattere banale, si ha che $i_{\chi_0} = 0$ rispetto ad ogni generatore Ψ).

Pertanto le equazioni saranno

$$\begin{cases} 2\mathcal{L}_{\chi_1} \equiv \mathcal{L}_{\chi_2} + D_{G,\chi_2} \\ \mathcal{L}_{\chi_1} + \mathcal{L}_{\chi_2} \equiv D_{G,\chi_1} + D_{G,\chi_2} \\ 2\mathcal{L}_{\chi_2} \equiv \mathcal{L}_{\chi_1} + D_{G,\chi_1}. \end{cases}$$

Sommando la seconda equazione alle altre due si trova il nuovo sistema di equazioni

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{\chi_1} + \mathcal{L}_{\chi_2} \equiv D_{G,\chi_1} + D_{G,\chi_2} \\ 3\mathcal{L}_{\chi_1} \equiv D_{G,\chi_1} + 2D_{G,\chi_2} \\ 3\mathcal{L}_{\chi_2} \equiv 2D_{G,\chi_1} + D_{G,\chi_2}. \end{cases}$$

3.4.3 $G = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$

In questo caso ci sono i tre sottogruppi ciclici che indicheremo con $H_1 = \langle(1,0)\rangle$, $H_2 = \langle(0,1)\rangle$, $H_3 = \langle(1,1)\rangle$, ciascuno dei quali ha solo un carattere non banale, che indicheremo con $\chi_{H_1}, \chi_{H_2}, \chi_{H_3}$ rispettivamente, e che corrispondono ai caratteri del segno nel sottogruppo.

D'altra parte la tavola dei caratteri di G è (indicando nella prima riga le classi di coniugio degli elementi di G)

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$(\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{1}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{1})$	$(\bar{1}, \bar{1})$
χ_0	1	1	1	1
χ_{sgn}	1	-1	-1	1
χ_1	1	1	-1	-1
χ_2	1	-1	1	-1

Dunque gli ε da calcolare sono i seguenti:

- Se considero H_1 , $S_{H_1} = \{\chi_{H_1}\}$, e dunque ho che

$$i_{\chi_{\text{sgn}}} = 1, \quad i_{\chi_1} = 0, \quad i_{\chi_2} = 1.$$

Pertanto, poiché $m_{H_1} = 2$

$$\begin{aligned} - \varepsilon_{\chi_1, \chi_1}^{H_1, \chi_{H_1}} &= 0, \\ - \varepsilon_{\chi_1, \chi_2}^{H_1, \chi_{H_1}} &= 0, \\ - \varepsilon_{\chi_1, \chi_{\text{sgn}}}^{H_1, \chi_{H_1}} &= 0, \\ - \varepsilon_{\chi_2, \chi_{\text{sgn}}}^{H_1, \chi_{H_1}} &= 1, \\ - \varepsilon_{\chi_2, \chi_2}^{H_1, \chi_{H_1}} &= 1, \\ - \varepsilon_{\chi_{\text{sgn}}, \chi_{\text{sgn}}}^{H_1, \chi_{H_1}} &= 1. \end{aligned}$$

- Se considero H_2 , $S_{H_2} = \{\chi_{H_2}\}$, e dunque ho che

$$i_{\chi_{\text{sgn}}} = 1, \quad i_{\chi_1} = 1, \quad i_{\chi_2} = 0.$$

Pertanto, poiché $m_{H_2} = 2$,

$$\begin{aligned} - \varepsilon_{\chi_1, \chi_1}^{H_2, \chi_{H_2}} &= 1, \\ - \varepsilon_{\chi_1, \chi_2}^{H_2, \chi_{H_2}} &= 0, \\ - \varepsilon_{\chi_1, \chi_{\text{sgn}}}^{H_2, \chi_{H_2}} &= 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
- \varepsilon_{\chi_2, \chi_{\text{sgn}}}^{H_2, \chi_{H_2}} &= 0, \\
- \varepsilon_{\chi_2, \chi_2}^{H_2, \chi_{H_2}} &= 0, \\
- \varepsilon_{\chi_{\text{sgn}}, \chi_{\text{sgn}}}^{H_2, \chi_{H_2}} &= 1.
\end{aligned}$$

- Se considero H_3 , $S_{H_3} = \{\chi_{H_3}\}$, e dunque ho che

$$i_{\chi_{\text{sgn}}} = 0, \quad i_{\chi_1} = 1, \quad i_{\chi_3} = 1.$$

Pertanto, poiché $m_{H_3} = 2$,

$$\begin{aligned}
- \varepsilon_{\chi_1, \chi_1}^{H_3, \chi_{H_3}} &= 1, \\
- \varepsilon_{\chi_1, \chi_2}^{H_3, \chi_{H_3}} &= 1, \\
- \varepsilon_{\chi_1, \chi_{\text{sgn}}}^{H_3, \chi_{H_3}} &= 0, \\
- \varepsilon_{\chi_2, \chi_{\text{sgn}}}^{H_3, \chi_{H_3}} &= 0, \\
- \varepsilon_{\chi_2, \chi_2}^{H_3, \chi_{H_3}} &= 1, \\
- \varepsilon_{\chi_{\text{sgn}}, \chi_{\text{sgn}}}^{H_3, \chi_{H_3}} &= 0.
\end{aligned}$$

Pertanto le equazioni saranno

$$\begin{cases}
2\mathcal{L}_{\chi_1} \equiv D_{H_2, \chi_{H_2}} + D_{H_3, \chi_{H_3}} \\
2\mathcal{L}_{\chi_2} \equiv D_{H_1, \chi_{H_1}} + D_{H_3, \chi_{H_3}} \\
2\mathcal{L}_{\chi_{\text{sgn}}} \equiv D_{H_1, \chi_{H_1}} + D_{H_2, \chi_{H_2}} \\
\mathcal{L}_{\chi_1} + \mathcal{L}_{\chi_2} \equiv \mathcal{L}_{\chi_{\text{sgn}}} + D_{H_3, \chi_3} \\
\mathcal{L}_{\chi_1} + \mathcal{L}_{\chi_{\text{sgn}}} \equiv \mathcal{L}_{\chi_2} + D_{H_2, \chi_2} \\
\mathcal{L}_{\chi_2} + \mathcal{L}_{\chi_{\text{sgn}}} \equiv \mathcal{L}_{\chi_1} + D_{H_1, \chi_1}.
\end{cases}$$

3.4.4 $G = \mathbb{Z}/p$ con p primo

In questo caso, l'unico sottogruppo ciclico non banale è proprio G . Ci sono $p - 1$ caratteri non banali $\chi_1, \dots, \chi_{p-1}$, dunque gli ε da calcolare sono tutti quelli della forma $\varepsilon_{\chi_i, \chi_j}^{G, \chi_k}$ con $i, j, k \in \{1, \dots, p-1\}$.

Per ogni scelta del carattere χ_k (cioè fissato k in $\{1, \dots, p-1\}$), avremo che, indicando con \bar{k} l'inverso di k in \mathbb{Z}/p

$$i_{\chi_i} \equiv i\bar{k} \pmod{p} \quad \text{e} \quad 0 \leq i_{\chi_i} \leq p-1.$$

Infatti si ha sempre che, identificando il gruppo dei caratteri con il gruppo delle radici p -esime dell'unità, e indicando con ζ una radice p -esima primitiva,

$$\chi_i = \zeta^i = \zeta^{k\bar{k}i} = (\zeta^k)^{\bar{k}i} = \chi_{\bar{k}}^i.$$

Pertanto, indicando con $\bar{k}i$ e $\bar{k}j$ i rappresentanti in $\{0, \dots, p-1\}$, abbiamo che

$$i_{\chi_i} + i_{\chi_j} = \bar{k}i + \bar{k}j \quad \text{e} \quad 0 \leq i_{\chi_i} + i_{\chi_j} \leq 2p - 2.$$

D'altra parte, le uniche combinazioni di i, j, k per cui $\varepsilon_{\chi_i, \chi_j}^{G, \chi_k} \neq 0$ sono quelle con

$$i_{\chi_i} + i_{\chi_j} \geq p.$$

Dunque avremo le relazioni

$$\mathcal{L}_{\chi_i} + \mathcal{L}_{\chi_j} \equiv \mathcal{L}_{\chi_{i+j}} + \sum_{\bar{k}i + \bar{k}j \geq p} D_{G, \chi_k}.$$

Esempio 3.4.2. Se scegliamo $p = 5$ siamo nel caso precedente. Grazie alla tabella moltiplicativa

i, j, \bar{k}	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

troviamo che le relazioni saranno, indicando con $\mathcal{L}_i = \mathcal{L}_{\chi_i}$ e con $D_j = D_{G, \chi_j}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\mathcal{L}_1 \equiv \mathcal{L}_2 + D_2 + D_4 \\ \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 \equiv \mathcal{L}_3 + D_3 + D_4 \\ \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_3 \equiv \mathcal{L}_4 + D_2 + D_4 \\ \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_4 \equiv D_1 + D_2 + D_3 + D_4 \\ 2\mathcal{L}_2 \equiv \mathcal{L}_4 + D_3 + D_4 \\ \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 \equiv D_1 + D_2 + D_3 + D_4 \\ \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_4 \equiv \mathcal{L}_1 + D_1 + D_3 \\ 2\mathcal{L}_3 \equiv \mathcal{L}_1 + D_1 + D_2 \\ \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_4 \equiv \mathcal{L}_2 + D_1 + D_2 \\ 2\mathcal{L}_4 \equiv \mathcal{L}_3 + D_1 + D_3. \end{array} \right.$$

Combinando, per esempio, l'ultima equivalenza con le altre 3 che coinvolgono \mathcal{L}_4 trovo la condizione

$$2\mathcal{L}_4 \equiv \mathcal{L}_3 + D_1 + D_3 \equiv \mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_4 + 2D_1 + D_2 + D_3 \equiv \mathcal{L}_1 - 2\mathcal{L}_4 + 3D_1 + D_2 + 2D_3$$

$$\mathcal{L}_1 - 2\mathcal{L}_4 + 3D_1 + D_2 + 2D_3 \equiv -3\mathcal{L}_4 + 4D_1 + 2D_2 + 3D_3 + D_4.$$

e dunque

$$5\mathcal{L}_4 \equiv 4D_1 + 2D_2 + 3D_3 + D_4.$$

Analogamente per \mathcal{L}_1 trovo

$$2\mathcal{L}_1 \equiv \mathcal{L}_2 + D_2 + D_4 \equiv \mathcal{L}_3 - \mathcal{L}_1 + D_2 + D_3 + 2D_4 \equiv \mathcal{L}_4 - 2\mathcal{L}_1 + 2D_2 + D_3 + 3D_4$$

$$\mathcal{L}_4 - 2\mathcal{L}_1 + 2D_2 + D_3 + 3D_4 \equiv -3\mathcal{L}_1 + D_1 + 3D_2 + 2D_3 + 4D_4$$

Da cui

$$5\mathcal{L}_1 \equiv D_1 + 3D_2 + 2D_3 + 4D_4.$$

Per \mathcal{L}_2 invece avremo

$$2\mathcal{L}_2 \equiv \mathcal{L}_4 + D_3 + D_4 \equiv \mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2 + D_1 + 2D_3 + D_4 \equiv \mathcal{L}_3 - 2\mathcal{L}_2 + D_1 + 3D_3 + 2D_4$$

$$\mathcal{L}_3 - 2\mathcal{L}_2 + D_1 + 3D_3 + 2D_4 \equiv -3\mathcal{L}_2 + 2D_1 + D_2 + 4D_3 + 3D_4.$$

Da cui

$$5\mathcal{L}_2 \equiv 2D_1 + D_2 + 4D_3 + 3D_4.$$

Infine per \mathcal{L}_3

$$2\mathcal{L}_3 \equiv \mathcal{L}_1 + D_1 + D_2 \equiv \mathcal{L}_4 - \mathcal{L}_3 + D_1 + 2D_2 + D_4 \equiv \mathcal{L}_2 - 2\mathcal{L}_3 + 2D_1 + 3D_2 + D_4$$

$$\mathcal{L}_2 - 2\mathcal{L}_3 + 2D_1 + 3D_2 + D_4 \equiv -3\mathcal{L}_3 + 3D_1 + 4D_2 + D_3 + 2D_4$$

Da cui

$$5\mathcal{L}_3 \equiv 3D_1 + 4D_2 + D_3 + 2D_4.$$

Dunque abbiamo le 4 equazioni

$$\begin{cases} 5\mathcal{L}_1 \equiv D_1 + 3D_2 + 2D_3 + 4D_4 \\ 5\mathcal{L}_2 \equiv 2D_1 + D_2 + 4D_3 + 3D_4 \\ 5\mathcal{L}_3 \equiv 3D_1 + 4D_2 + D_3 + 2D_4 \\ 5\mathcal{L}_4 \equiv 4D_1 + 2D_2 + 3D_3 + D_4. \end{cases}$$

Osserviamo che il coefficiente per D_k nell'equazione per \mathcal{L}_j è l'unico $\ell \in \mathbb{Z}/5$ tale che $\ell \cdot k \equiv j \pmod{5}$, cioè nell'equazione per \mathcal{L}_j , $\ell = \bar{k} \cdot j$.

Osservazione 3.4.3. Avevamo osservato (Osservazione 3.3.6) che gli \mathcal{L}_χ in generale non determinano i divisori $D_{H,\Psi}$. Vogliamo mostrare questa osservazione in un esempio concreto.

Scegliamo $Y = \mathbb{P}^1$ e consideriamo come gruppo $G = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Consideriamo i due set di divisori $\{D_0, D_1, D_2, D_3, D_4\}$ e $\{D'_0, D'_1, D'_2, D'_3, D'_4\}$ tali che

$$\deg D_0 = 0, \deg D_1 = 2, \deg D_2 = 0, \deg D_3 = 0, \deg D_4 = 2$$

$$\deg D'_0 = 0, \deg D'_1 = 1, \deg D'_2 = 1, \deg D'_3 = 1, \deg D'_4 = 1.$$

In entrambi i casi le equazioni dell'Esempio 3.4.2 sono soddisfatte con $\mathcal{L}_\chi = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$, tuttavia i due insiemi sono chiaramente diversi. Dunque abbiamo trovato due set differenti di divisori che

soddisfano le equazioni con gli stessi fibrati. Dunque le equazioni del teorema 3.3.5 in generale non saranno uniche.

Dimostriamo che in generale vale che:

Proposizione 3.4.4. Per ogni p primo, le equazioni del Teorema 3.3.5 con $G = \mathbb{Z}/p$ sono della forma

$$p\mathcal{L}_i \equiv \sum_{k=1}^{p-1} (\bar{k} \cdot i) \cdot D_k.$$

Dimostrazione. Per ogni i abbiamo che, indicando con i^j la potenza j -esima di i modulo la cardinalità di G ,

$$2\mathcal{L}_i \equiv \mathcal{L}_{i^2} + \sum_{2\bar{k}i \geq p} D_k.$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_i + \mathcal{L}_{i^2} &\equiv \mathcal{L}_{i^3} + \sum_{\bar{k}i + \bar{k}i^2 \geq p} D_k \\ \mathcal{L}_i + \mathcal{L}_{i^3} &\equiv \mathcal{L}_{i^4} + \sum_{\bar{k}i + \bar{k}i^3 \geq p} D_k \\ &\vdots \\ \mathcal{L}_i + \mathcal{L}_{i^{p-1}} &\equiv \sum_{\bar{k}i + \bar{k}i^{p-1} \geq p} D_k. \end{aligned}$$

Operando $p - 1$ sostituzioni successive come nell'esempio 3.4.2, troviamo

$$2\mathcal{L}_i \equiv (2 - p)\mathcal{L}_i + \sum_{k=1}^p \ell_k D_k,$$

dove $\ell_k = |\{j = 1, \dots, p - 1 \mid \bar{k}i + \bar{k}i^j \geq p\}|$, ovvero il coefficiente di D_k nell'equazione per \mathcal{L}_i è il numero di equazioni della forma $\mathcal{L}_i + \mathcal{L}_{i^j} = \mathcal{L}_{i^{j+1}} + \dots$ in cui compare D_k .

Proviamo che $\ell_k = \bar{k} \cdot i$ per ogni k .

- Se $k = i$, allora $\bar{k}i + \bar{k}i^j = 1 + \bar{i}i^j \equiv 1 + i^{j-1}$. Questo è maggiore o uguale a p solo quando $i^{j-1} = p - 1$. Dunque $\ell_i = 1 = \bar{i} \cdot i$. Essenzialmente, in questo caso l'unica equazione della forma $\mathcal{L}_i + \mathcal{L}_{i^j} = \mathcal{L}_{i^{j+1}} + \dots$ in cui compare D_i , è quella con $j = i \cdot (p - 1) \pmod{p}$. In questo modo infatti avremo $\bar{i}i^j = \bar{i}i(p - 1) = p - 1$.

Nell'esempio 3.4.2 con $\mathbb{Z}/5$, selezionando per esempio $i = 2$, osserviamo che D_2 appare in equazioni della forma $\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_{2^j} = \dots$ solo quando $j = 2(5 - 1) = 3$ e dunque $2^j = 2^3 = 3$, ovvero solo nell'equazione $\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 = \dots$.

- Proviamo che la tesi vale per ogni k . Cioè che $\ell_k = \bar{k} \cdot i$. Abbiamo che, fissato k , gli unici valori di possibili per $\bar{k}i^j$ tali che $\bar{k}i + \bar{k}i^j \geq p$, sono $p - \bar{k}i, p - \bar{k}i + 1, \dots, p - 1$. Questi sono esattamente $\bar{k}i$. D'altra parte la mappa $j \mapsto \bar{k} \cdot i^j$ è bigettiva su \mathbb{Z}/p per ogni $j = 1, \dots, p - 1$, dunque a ciascuno di tali valori corrisponde esattamente un j . Di conseguenza, a ciascuno di questi valori corrisponde un'equazione della forma $\mathcal{L}_i + \mathcal{L}_j = \dots$ in cui compare D_k . Pertanto avremo che $\ell_k = \bar{k}i$.

Nell'esempio 3.4.2 con $\mathbb{Z}/5$, selezionando per esempio $i = 2$ e $k = 1$, abbiamo che $\bar{1} \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2$, dunque scegliamo i valori di j per cui $\bar{1} \cdot 2^j = 3, 4$. Questi corrispondono alle equazioni

$$\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 \equiv D_1 + D_2 + D_3 + D_4 \quad \text{e} \quad \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_4 \equiv \mathcal{L}_1 + D_1 + D_3$$

che sono le uniche della forma $\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_j = \dots$ in cui compare D_1 . Dunque il coefficiente per D_1 nell'equazione per \mathcal{L}_2 sarà $\ell_1 = 2$.

□

Osservazione 3.4.5. Le equazioni descritte nella Proposizione 3.4.4 non costituiscono tutte le equazioni del Teorema 3.3.5, ma sono le equazioni per i cosiddetti dati ridotti di Pardini, definiti in [Par91], Definizione 2.3 e Proposizione 2.1.

Esempio 3.4.6. Dalla Proposizione precedente riusciamo a trovare le equazioni per $\mathbb{Z}/7$:

$$\begin{cases} 7\mathcal{L}_1 \equiv D_1 + 4D_2 + 5D_3 + 2D_4 + 3D_5 + 6D_6 \\ 7\mathcal{L}_2 \equiv 2D_1 + D_2 + 3D_3 + 4D_4 + 6D_5 + 5D_6 \\ 7\mathcal{L}_3 \equiv 3D_1 + 5D_2 + D_3 + 6D_4 + 2D_5 + 4D_6 \\ 7\mathcal{L}_4 \equiv 4D_1 + 2D_2 + 6D_3 + D_4 + 5D_5 + 3D_6 \\ 7\mathcal{L}_5 \equiv 5D_1 + 6D_2 + 4D_3 + 3D_4 + D_5 + 2D_6 \\ 7\mathcal{L}_6 \equiv 6D_1 + 3D_2 + 2D_3 + 5D_4 + 4D_5 + D_6. \end{cases}$$

3.4.5 $G = \mathbb{Z}/6$

La tavola dei caratteri di $\mathbb{Z}/6$ è la seguente.

Tavola dei caratteri di $\mathbb{Z}/6$						
$\mathbb{Z}/6$	0	1	2	3	4	5
χ_0	1	1	1	1	1	1
χ_{sgn}	1	-1	1	-1	1	-1
χ_2	1	ζ	ζ^2	1	ζ	ζ^2
χ_3	1	$-\zeta$	ζ^2	-1	ζ	$-\zeta^2$
χ_4	1	ζ^2	ζ	1	ζ^2	ζ
χ_5	1	$-\zeta^2$	ζ	-1	ζ^2	$-\zeta$

dove ζ è una radice terza primitiva.

Abbiamo che in questo caso

$$\mathfrak{C} = \{0, \langle 2 \rangle, \langle 3 \rangle, G\}.$$

Dunque gli ε da calcolare sono i seguenti:

- Considero $H_1 = \langle 2 \rangle \cong \mathbb{Z}/3$, $S_{H_1} = \{\chi_2, \chi_3, \chi_4, \chi_5\}$, e

– Se fisso $\Psi_1 = \chi_2$, ho

$$i_{\chi_2} = i_{\chi_3} = 1 \quad i_{\chi_{\text{sgn}}} = 0, \quad i_{\chi_4} = i_{\chi_5} = 2.$$

Allora, poiché $m_{H_1} = 3$,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\chi_2, \chi_4}^{H_1, \chi_2} = 1 \quad \varepsilon_{\chi_2, \chi_5}^{H_1, \chi_2} = 1 \quad \varepsilon_{\chi_3, \chi_4}^{H_1, \chi_2} = 1 \quad \varepsilon_{\chi_3, \chi_5}^{H_1, \chi_2} = 1 \\ \varepsilon_{\chi_4, \chi_4}^{H_1, \chi_2} = 1 \quad \varepsilon_{\chi_4, \chi_5}^{H_1, \chi_2} = 1 \quad \varepsilon_{\chi_5, \chi_5}^{H_1, \chi_2} = 1 \end{aligned}$$

e tutti gli altri sono nulli.

– Se fisso $\Psi_2 = \chi_3$, ho

$$i_{\chi_2} = i_{\chi_3} = 1 \quad i_{\chi_{\text{sgn}}} = 0, \quad i_{\chi_4} = i_{\chi_5} = 2.$$

Allora, poiché $m_{H_1} = 3$,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\chi_2, \chi_4}^{H_1, \chi_3} = 1 \quad \varepsilon_{\chi_2, \chi_5}^{H_1, \chi_3} = 1 \quad \varepsilon_{\chi_3, \chi_4}^{H_1, \chi_3} = 1 \quad \varepsilon_{\chi_3, \chi_5}^{H_1, \chi_3} = 1 \\ \varepsilon_{\chi_4, \chi_4}^{H_1, \chi_3} = 1 \quad \varepsilon_{\chi_4, \chi_5}^{H_1, \chi_3} = 1 \quad \varepsilon_{\chi_5, \chi_5}^{H_1, \chi_3} = 1 \end{aligned}$$

e tutti gli altri sono nulli.

– Se fisso $\Psi_3 = \chi_4$, ho

$$i_{\chi_2} = i_{\chi_3} = 2 \quad i_{\chi_{\text{sgn}}} = 0, \quad i_{\chi_4} = i_{\chi_5} = 1.$$

Allora, poiché $m_{H_1} = 3$,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\chi_2, \chi_2}^{H_1, \chi_4} = 1 \quad \varepsilon_{\chi_2, \chi_3}^{H_1, \chi_4} = 1 \quad \varepsilon_{\chi_2, \chi_4}^{H_1, \chi_4} = 1 \quad \varepsilon_{\chi_2, \chi_5}^{H_1, \chi_4} = 1 \\ \varepsilon_{\chi_3, \chi_3}^{H_1, \chi_4} = 1 \quad \varepsilon_{\chi_3, \chi_4}^{H_1, \chi_4} = 1 \quad \varepsilon_{\chi_3, \chi_5}^{H_1, \chi_4} = 1 \end{aligned}$$

e tutti gli altri sono nulli.

– Se fisso $\Psi_4 = \chi_5$, ho

$$i_{\chi_2} = i_{\chi_3} = 2 \quad i_{\chi_{\text{sgn}}} = 0, \quad i_{\chi_4} = i_{\chi_5} = 1.$$

Allora, poiché $m_{H_1} = 3$,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\chi_2, \chi_2}^{H_1, \chi_5} = 1 \quad \varepsilon_{\chi_2, \chi_3}^{H_1, \chi_5} = 1 \quad \varepsilon_{\chi_2, \chi_4}^{H_1, \chi_5} = 1 \quad \varepsilon_{\chi_2, \chi_5}^{H_1, \chi_5} = 1 \\ \varepsilon_{\chi_3, \chi_3}^{H_1, \chi_5} = 1 \quad \varepsilon_{\chi_3, \chi_4}^{H_1, \chi_5} = 1 \quad \varepsilon_{\chi_3, \chi_5}^{H_1, \chi_5} = 1 \end{aligned}$$

e tutti gli altri sono nulli.

- Considero $H_2 = \langle 3 \rangle \cong \mathbb{Z}/2$, $S_{H_2} = \{\chi_{\text{sgn}}, \chi_3, \chi_5\}$

– Se fisso $\Psi_1 = \chi_{\text{sgn}}$, ho

$$i_{\chi_3} = i_{\chi_5} = i_{\chi_{\text{sgn}}} = 1 \quad i_{\chi_2} = i_{\chi_4} = 0.$$

Allora, poiché $m_{H_2} = 2$,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\chi_3, \chi_3}^{H_2, \chi_{\text{sgn}}} &= 1 & \varepsilon_{\chi_3, \chi_5}^{H_2, \chi_{\text{sgn}}} &= 1 & \varepsilon_{\chi_3, \chi_{\text{sgn}}}^{H_2, \chi_{\text{sgn}}} &= 1 \\ \varepsilon_{\chi_5, \chi_5}^{H_2, \chi_{\text{sgn}}} &= 1 & \varepsilon_{\chi_5, \chi_{\text{sgn}}}^{H_2, \chi_{\text{sgn}}} &= 1 & \varepsilon_{\chi_{\text{sgn}}, \chi_{\text{sgn}}}^{H_2, \chi_{\text{sgn}}} &= 1 \end{aligned}$$

e tutti gli altri sono nulli.

– Se fisso $\Psi_2 = \chi_3$, ho

$$i_{\chi_3} = i_{\chi_5} = i_{\chi_{\text{sgn}}} = 1 \quad i_{\chi_2} = i_{\chi_4} = 0.$$

Allora, poiché $m_{H_2} = 2$,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\chi_3, \chi_3}^{H_2, \chi_3} &= 1 & \varepsilon_{\chi_3, \chi_5}^{H_2, \chi_3} &= 1 & \varepsilon_{\chi_3, \chi_{\text{sgn}}}^{H_2, \chi_3} &= 1 \\ \varepsilon_{\chi_5, \chi_5}^{H_2, \chi_3} &= 1 & \varepsilon_{\chi_5, \chi_{\text{sgn}}}^{H_2, \chi_3} &= 1 & \varepsilon_{\chi_{\text{sgn}}, \chi_{\text{sgn}}}^{H_2, \chi_3} &= 1 \end{aligned}$$

e tutti gli altri sono nulli.

– Se fisso $\Psi_3 = \chi_5$, ho

$$i_{\chi_3} = i_{\chi_5} = i_{\chi_{\text{sgn}}} = 1 \quad i_{\chi_2} = i_{\chi_4} = 0.$$

Allora, poiché $m_{H_2} = 2$,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\chi_3, \chi_3}^{H_2, \chi_5} &= 1 & \varepsilon_{\chi_3, \chi_5}^{H_2, \chi_5} &= 1 & \varepsilon_{\chi_3, \chi_{\text{sgn}}}^{H_2, \chi_5} &= 1 \\ \varepsilon_{\chi_5, \chi_5}^{H_2, \chi_5} &= 1 & \varepsilon_{\chi_5, \chi_{\text{sgn}}}^{H_2, \chi_5} &= 1 & \varepsilon_{\chi_{\text{sgn}}, \chi_{\text{sgn}}}^{H_2, \chi_5} &= 1 \end{aligned}$$

e tutti gli altri sono nulli.

• Se considero $H_3 = G$, $S_{H_3} = \{\chi_3, \chi_5\}$

– Se fisso $\Psi_1 = \chi_3$, ho

$$i_{\chi_3} = 1 \quad i_{\chi_4} = 2 \quad i_{\chi_{\text{sgn}}} = 3 \quad i_{\chi_2} = 4 \quad i_{\chi_5} = 5.$$

Allora, poiché $m_{H_3} = 6$,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\chi_3, \chi_5}^{H_3, \chi_3} &= 1 & \varepsilon_{\chi_2, \chi_4}^{H_3, \chi_3} &= 1 & \varepsilon_{\chi_4, \chi_5}^{H_3, \chi_3} &= 1 & \varepsilon_{\chi_{\text{sgn}}, \chi_{\text{sgn}}}^{H_3, \chi_3} &= 1 & \varepsilon_{\chi_{\text{sgn}}, \chi_2}^{H_3, \chi_3} &= 1 \\ \varepsilon_{\chi_{\text{sgn}}, \chi_5}^{H_3, \chi_3} &= 1 & \varepsilon_{\chi_2, \chi_2}^{H_3, \chi_3} &= 1 & \varepsilon_{\chi_2, \chi_5}^{H_3, \chi_3} &= 1 & \varepsilon_{\chi_5, \chi_5}^{H_3, \chi_3} &= 1 \end{aligned}$$

e tutti gli altri sono nulli.

– Se fisso $\Psi_2 = \chi_5$, ho

$$i_{\chi_5} = 1 \quad i_{\chi_2} = 2 \quad i_{\chi_{\text{sgn}}} = 3 \quad i_{\chi_4} = 4 \quad i_{\chi_3} = 5.$$

Allora, poiché $m_{H_3} = 6$,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\chi_3, \chi_5}^{H_3, \chi_5} = 1 \quad \varepsilon_{\chi_2, \chi_4}^{H_3, \chi_5} = 1 \quad \varepsilon_{\chi_2, \chi_3}^{H_3, \chi_5} = 1 \quad \varepsilon_{\chi_{\text{sgn}}, \chi_{\text{sgn}}}^{H_3, \chi_5} = 1 \quad \varepsilon_{\chi_{\text{sgn}}, \chi_4}^{H_3, \chi_5} = 1 \\ \varepsilon_{\chi_{\text{sgn}}, \chi_3}^{H_3, \chi_5} = 1 \quad \varepsilon_{\chi_4, \chi_4}^{H_3, \chi_5} = 1 \quad \varepsilon_{\chi_3, \chi_4}^{H_3, \chi_5} = 1 \quad \varepsilon_{\chi_3, \chi_3}^{H_3, \chi_5} = 1 \end{aligned}$$

e tutti gli altri sono nulli.

Pertanto, indicando con $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_{\chi_{\text{sgn}}}$ e con $\mathcal{L}_i = \mathcal{L}_{\chi_i}$ (per $i = 2, 3, 4, 5$), troviamo le equazioni

$$\left\{ \begin{aligned} 2\mathcal{L}_1 &\equiv D_{H_2, \chi_{\text{sgn}}} + D_{H_2, \chi_3} + D_{H_2, \chi_5} + D_{G, \chi_3} + D_{G, \chi_5} \\ \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 &\equiv \mathcal{L}_3 + D_{G, \chi_3} \\ \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_3 &\equiv \mathcal{L}_2 + D_{H_2, \chi_{\text{sgn}}} + D_{H_2, \chi_3} + D_{H_2, \chi_5} + D_{G, \chi_5} \\ \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_4 &\equiv \mathcal{L}_5 + D_{G, \chi_5} \\ \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_5 &\equiv \mathcal{L}_4 + D_{H_2, \chi_{\text{sgn}}} + D_{H_2, \chi_3} + D_{H_2, \chi_5} + D_{G, \chi_3} \\ 2\mathcal{L}_2 &\equiv \mathcal{L}_4 + D_{H_1, \chi_4} + D_{H_1, \chi_5} + D_{G, \chi_3} \\ \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 &\equiv \mathcal{L}_5 + D_{H_1, \chi_4} + D_{H_1, \chi_5} + D_{G, \chi_5} \\ \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_4 &\equiv D_{H_1, \chi_2} + D_{H_1, \chi_3} + D_{H_1, \chi_4} + D_{H_1, \chi_5} + D_{G, \chi_3} + D_{G, \chi_5} \\ \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_5 &\equiv \mathcal{L}_1 + D_{H_1, \chi_2} + D_{H_1, \chi_3} + D_{H_1, \chi_4} + D_{H_1, \chi_5} + D_{G, \chi_3} \\ 2\mathcal{L}_3 &\equiv \mathcal{L}_4 + D_{H_1, \chi_4} + D_{H_1, \chi_5} + D_{H_2, \chi_{\text{sgn}}} + D_{H_2, \chi_3} + D_{H_2, \chi_5} + D_{G, \chi_5} \\ \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_4 &\equiv \mathcal{L}_1 + D_{H_1, \chi_2} + D_{H_1, \chi_3} + D_{H_1, \chi_4} + D_{H_1, \chi_5} + D_{G, \chi_5} \\ \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_5 &\equiv D_{H_1, \chi_2} + D_{H_1, \chi_3} + D_{H_1, \chi_4} + D_{H_1, \chi_5} + D_{H_2, \chi_{\text{sgn}}} + D_{H_2, \chi_3} + D_{H_2, \chi_5} + D_{G, \chi_3} + D_{G, \chi_5} \\ 2\mathcal{L}_4 &\equiv \mathcal{L}_2 + D_{H_1, \chi_2} + D_{H_1, \chi_3} + D_{G, \chi_5} \\ \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_5 &\equiv \mathcal{L}_3 + D_{H_1, \chi_2} + D_{H_1, \chi_3} + D_{G, \chi_5} + D_{G, \chi_3} \\ 2\mathcal{L}_5 &\equiv \mathcal{L}_2 + D_{H_1, \chi_2} + D_{H_1, \chi_3} + D_{H_2, \chi_{\text{sgn}}} + D_{H_2, \chi_3} + D_{H_2, \chi_5} + D_{G, \chi_3}. \end{aligned} \right.$$

Con un procedimento analogo a quello fatto nell'esempio 3.4.2 con $G = \mathbb{Z}/5$, si ottengono le equazioni

$$\left\{ \begin{aligned} 2\mathcal{L}_1 &\equiv D_{H_2, \chi_{\text{sgn}}} + D_{H_2, \chi_3} + D_{H_2, \chi_5} + D_{G, \chi_3} + D_{G, \chi_5} \\ 3\mathcal{L}_2 &\equiv D_{H_1, \chi_2} + D_{H_1, \chi_3} + 2D_{H_1, \chi_4} + 2D_{H_1, \chi_5} + 2D_{G, \chi_3} + D_{G, \chi_5} \\ 6\mathcal{L}_3 &\equiv 2D_{H_1, \chi_2} + 2D_{H_1, \chi_3} + 4D_{H_1, \chi_4} + 4D_{H_1, \chi_5} + \\ &\quad + 3D_{H_2, \chi_{\text{sgn}}} + 3D_{H_2, \chi_3} + 3D_{H_2, \chi_5} + D_{G, \chi_3} + 5D_{G, \chi_5} \\ 3\mathcal{L}_4 &\equiv 2D_{H_1, \chi_2} + 2D_{H_1, \chi_3} + D_{H_1, \chi_4} + D_{H_1, \chi_5} + D_{G, \chi_3} + 2D_{G, \chi_5} \\ 6\mathcal{L}_5 &\equiv 4D_{H_1, \chi_2} + 4D_{H_1, \chi_3} + 2D_{H_1, \chi_4} + 2D_{H_1, \chi_5} + \\ &\quad + 3D_{H_2, \chi_{\text{sgn}}} + 3D_{H_2, \chi_3} + 3D_{H_2, \chi_5} + 5D_{G, \chi_3} + D_{G, \chi_5}. \end{aligned} \right.$$

In queste osserviamo che

- Il coefficiente di \mathcal{L}_i è il periodo p_i del carattere corrispondente in G^*
- Nell'equazione per \mathcal{L}_i , il coefficiente di $D_{H,\Psi}$ è dato da

$$\ell_{H,\Psi} = \frac{p_i \cdot i_{\chi_i}}{m_H}.$$

3.4.6 $G = \mathbb{Z}/m$

Proviamo a generalizzare quanto osservato nella sezione precedente al caso generico. Dimostriamo la seguente proposizione.

Proposizione 3.4.7. Per ogni m , le equazioni del Teorema 3.3.5 con $G = \mathbb{Z}/p$ sono della forma

$$p_i \mathcal{L}_i \equiv \sum_{H \in \mathfrak{C}} \sum_{\Psi \in S_H} \left(\frac{p_i \cdot i_{\chi_i}}{m_H} \right) \cdot D_{H,\Psi}$$

dove p_i è il periodo di χ_i nel gruppo dei caratteri.

Dimostrazione. Per ogni i abbiamo che, indicando con i^j la potenza j -esima di i modulo la cardinalità di G ,

$$2\mathcal{L}_i \equiv \mathcal{L}_{i^2} + \sum_{2i_{\chi_i} \geq m_H} D_{H,\Psi}.$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_i + \mathcal{L}_{i^2} &\equiv \mathcal{L}_{i^3} + \sum_{i_{\chi_i} + i_{\chi_i^2} \geq m_H} D_{H,\Psi} \\ \mathcal{L}_i + \mathcal{L}_{i^3} &\equiv \mathcal{L}_{i^4} + \sum_{i_{\chi_i} + i_{\chi_i^3} \geq m_H} D_{H,\Psi} \\ &\vdots \\ \mathcal{L}_i + \mathcal{L}_{i^{p_i-1}} &\equiv \sum_{i_{\chi_i} + i_{\chi_i^{p_i-1}} \geq m_H} D_{H,\Psi}. \end{aligned}$$

Operando sostituzioni successive come nell'esempio 3.4.2, troviamo

$$2\mathcal{L}_i \equiv (p_i - 2)\mathcal{L}_i + \sum_{k=1}^p \ell_{H,\Psi} D_{H,\Psi}$$

dove $\ell_{H,\Psi} = \left| \{j = 1, \dots, p_i - 1 \mid i_{\chi_i} + i_{\chi_i^j} \geq m_H\} \right|$ è il numero di equazioni della forma $\mathcal{L}_i + \mathcal{L}_{i^j} \equiv \dots$ in cui compare $D_{H,\Psi}$.

Proviamo che $\ell_{H,\Psi} = \frac{p_i \cdot i_{\chi_i}}{m_H}$ per ogni coppia (H, Ψ) .

Fissati H , i e Ψ , gli unici valori di $i_{\chi_i^j}$ tali che $i_{\chi_i} + i_{\chi_i^j} \geq m_H$ sono $m_H - i_{\chi_i}$, $m_H - i_{\chi_i} + 1$, \dots , $m_H - 1$. Questi sono esattamente i_{χ_i} valori. Vogliamo trovare i valori di j tali che $i_{\chi_i^j}$ sia tra questi i_{χ_i} valori.

Studiamo allora nel dettaglio la mappa $j \mapsto i_{\chi_i^j}$:

- Se $i_{\chi_i} = 0$, allora $\chi_i|_H = 1 = \chi_i^j|_H$ per ogni j e dunque $i_{\chi_i^j} = 0$ per ogni $j = 1 \dots, p_i$. In questo caso, pertanto, non avremo nessun valore di j da considerare, e dunque il coefficiente sarà $\ell_{H,\Psi} = 0 = \frac{p_i \cdot i_{\chi_i}}{m_H}$.

Ad esempio, nel caso di $G = \mathbb{Z}/6$, se fissiamo il sottogruppo $H_2 = \langle 3 \rangle$ e il carattere χ_2 , abbiamo che $\chi_2|_{H_2} = 1$. Dunque, per ogni scelta di $\Psi \in S_{H_2}$ avremo che $i_{\chi_2} = 0$. Allo stesso modo anche $i_{\chi_4} = i_{(\chi_2)^2} = 0$. Dunque il coefficiente $\ell_{H_2,\Psi}$ nell'equazione per \mathcal{L}_{χ_2} sarà 0. Abbiamo calcolato infatti che l'equazione per \mathcal{L}_{χ_2} è

$$3\mathcal{L}_2 \equiv D_{H_1,\chi_2} + D_{H_1,\chi_3} + 2D_{H_1,\chi_4} + 2D_{H_1,\chi_5} + 2D_{G,\chi_3} + D_{G,\chi_5}.$$

- Se $i_{\chi_i} \neq 0$ e $\text{MCD}(i_{\chi_i}, m_H) = 1$, allora la mappa $j \mapsto i_{\chi_i^j}$ assume tutti i valori $\{0, \dots, m_H - 1\}$, ciascuno $\frac{p_i}{m_H}$ volte. Infatti $\chi_i|_H = \Psi^{i_{\chi_i}} \in S_H$ sarà un generatore di H^* . Dunque tutti i valori sono assunti, e la molteplicità è data dal fatto che la mappa $j \mapsto \chi_i^j$ assume p_i valori distinti. Pertanto in questo caso, dato che i valori per cui $i_{\chi_i} + i_{\chi_i^j} \geq m_H$ sono esattamente i_{χ_i} , avremo che $\ell_{H,\Psi} = \frac{p_i}{m_H} \cdot i_{\chi_i}$. Infatti a ciascuno degli i_{χ_i} valori essi corrispondono $\frac{p_i}{m_H}$ valori di j , cioè $\frac{p_i}{m_H}$ equazioni della forma $\mathcal{L}_i + \mathcal{L}_{i^j} \equiv \dots$ in cui compare $D_{H,\Psi}$.

Ad esempio, nel caso $G = \mathbb{Z}/6$, se consideriamo il sottogruppo $H = H_1 = \langle 2 \rangle$ e fissiamo $\Psi = \chi_4|_H$; abbiamo che $i_{\chi_2} = 2$ dal momento che $\chi_2|_H = \Psi^2$. Allora la mappa $j \mapsto i_{(\chi_2)^j}$ assumerà tutti i valori $\{0, 1, 2\}$ e ciascuno di essi sarà assunto $\frac{p_2}{m_H} = \frac{3}{3} = 1$ volta. Infatti avremo che $i_{\chi_2^0} = 0, i_{\chi_2} = 2$ e $i_{\chi_4} = i_{\chi_2^2} = 1$.

Tra questi tre valori, gli unici maggiori o uguali a $m_H - i_{\chi_2} = 3 - 2 = 1$ sono 1 e 2 (e sono proprio $i_{\chi_2} = 2$ valori). Questi sono gli $i_{\chi_2^j}$ che vogliamo considerare e corrispondono rispettivamente ai valori $j = 2$ e $j = 1$, ovvero alle equazioni $\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_4 \equiv \dots$ e $2\mathcal{L}_2 \equiv \dots$. Dunque il coefficiente di $D_{H,\Psi} = D_{H_1,\chi_4}$ nell'equazione per \mathcal{L}_2 sarà 2. Infatti abbiamo scritto

$$3\mathcal{L}_2 \equiv D_{H_1,\chi_2} + D_{H_1,\chi_3} + 2D_{H_1,\chi_4} + 2D_{H_1,\chi_5} + 2D_{G,\chi_3} + D_{G,\chi_5}.$$

- Se $i_{\chi_i} \neq 0$, ma $\chi_i|_H$ non genera H^* , la mappa $j \mapsto i_{\chi_i^j}$ assume valori in $\{0, i_{\chi_i}, 2i_{\chi_i}, 3i_{\chi_i}, \dots\} \subseteq \{0, \dots, m_H - 1\}$ e ciascun valore è assunto $\frac{p_i}{q_i}$ volte, dove con q_i indichiamo il periodo di i_{χ_i} in \mathbb{Z}/m_H . Infatti chiaramente, se $\chi_i|_H = \Psi^{i_{\chi_i}}$, avremo che $\chi_i^j|_H = (\Psi^{i_{\chi_i}})^j = \Psi^{j \cdot i_{\chi_i}}$. Inoltre la molteplicità è data dal fatto che la mappa $j \mapsto \chi_i^j$ assume p_i valori. Osserviamo infine che, per le assunzioni fatte, q_i è un divisore proprio di p_i e di m_H .

Di questi q_i valori $\{0, i_{\chi_i}, 2i_{\chi_i}, 3i_{\chi_i}, \dots, (q_i - 1)i_{\chi_i}\}$, dobbiamo scegliere quelli maggiori o uguali a $m_H - i_{\chi_i}$. Ma dal momento che i valori in $\{0, \dots, m_H - 1\}$ che sono maggiori o uguali di $m_H - i_{\chi_i}$ sono esattamente i_{χ_i} avremo che ci sono $\frac{i_{\chi_i}}{\frac{m_H}{q_i}} = \frac{i_{\chi_i} \cdot q_i}{m_H}$ valori di $i_{\chi_i^j}$ tali che siano maggiori o uguali a $m_H - i_{\chi_i}$. Infatti $\frac{m_H}{q_i}$ è l'indice del sottogruppo generato da $\chi_i|_H$ in H . Abbiamo che, poiché ciascuno di questi valori è assunto per $\frac{p_i}{q_i}$ valori di j ,

$$\ell_{H,\Psi} = \frac{i_{\chi_i} \cdot q_i}{m_H} \cdot \frac{p_i}{q_i} = \frac{p_i}{m_H} \cdot i_{\chi_i}.$$

Ad esempio, nel caso $G = \mathbb{Z}/6$, se consideriamo il sottogruppo $H = G$ e fissiamo $\Psi = \chi_3$; abbiamo che $i_{\chi_4} = 2$ dal momento che $\chi_4 = \Psi^2$. Allora la mappa $j \mapsto i_{(\chi_4)^j}$ assumerà solo i valori $\{0, 2, 4\}$ e ciascuno di essi sarà assunto $\frac{p_4}{q_4} = \frac{3}{3} = 1$ volta. Infatti avremo che $i_{\chi_4^0} = 0$, $i_{\chi_4} = 2$ e $i_{\chi_4^2} = i_{\chi_4^4} = 4$.

Tra questi tre valori, l'unico maggiore o uguale a $m_H - i_{\chi_4} = 6 - 2 = 4$ è 4 (abbiamo infatti solo $\frac{i_{\chi_4} \cdot q_i}{m_H} = \frac{2 \cdot 3}{6} = 1$ valore). Questo corrisponde rispettivamente al valore $j = 2$, ovvero all'equazione $\mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_2 \equiv \dots$. Dunque il coefficiente di $D_{H,\Psi} = D_{G,\chi_3}$ nell'equazione per \mathcal{L}_4 sarà 1. Infatti abbiamo scritto

$$3\mathcal{L}_4 \equiv 2D_{H_1,\chi_2} + 2D_{H_1,\chi_3} + D_{H_1,\chi_4} + D_{H_1,\chi_5} + D_{G,\chi_3} + 2D_{G,\chi_5}.$$

□

Esempio 3.4.8. Consideriamo $G = \mathbb{Z}/8$. Abbiamo che i caratteri sono

Tavola dei caratteri di $\mathbb{Z}/8$									
Line Bundle	$\mathbb{Z}/8$	0	1	2	3	4	5	6	7
\mathcal{L}_0	χ_0	1	1	1	1	1	1	1	1
\mathcal{L}_1	χ_{sgn}	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
\mathcal{L}_2	χ_2	1	ζ	i	$i\zeta$	-1	$-\zeta$	$-i$	$-i\zeta$
\mathcal{L}_3	χ_3	1	$-\zeta$	i	$-i\zeta$	-1	ζ	$-i$	$i\zeta$
\mathcal{L}_4	χ_4	1	$i\zeta$	$-i$	ζ	-1	$-i\zeta$	i	$-\zeta$
\mathcal{L}_5	χ_5	1	$-i\zeta$	$-i$	$-\zeta$	-1	$i\zeta$	i	ζ
\mathcal{L}_6	χ_6	1	i	-1	$-i$	1	i	-1	$-i$
\mathcal{L}_7	χ_7	1	$-i$	-1	i	1	$-i$	-1	i

dove fissiamo ζ tale che $\zeta^2 = i$. Allora dalla Proposizione precedente troviamo che le equazioni del Teorema 3.3.5 , posti

$$H_1 = \langle 2 \rangle, \quad \text{e} \quad H_2 = \langle 4 \rangle$$

saranno le seguenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\mathcal{L}_1 \equiv D_{G,\chi_2} + D_{G,\chi_3} + D_{G,\chi_4} + D_{G,\chi_5} \\ 8\mathcal{L}_2 \equiv 2D_{H_1,\chi_2} + 2D_{H_1,\chi_3} + 6D_{H_1,\chi_4} + 6D_{H_1,\chi_5} + \\ \quad + 4D_{H_2,\chi_2} + 4D_{H_2,\chi_3} + 4D_{H_2,\chi_4} + 4D_{H_2,\chi_5} + \\ \quad + D_{G,\chi_2} + 5D_{G,\chi_3} + 3D_{G,\chi_4} + 7D_{G,\chi_5} \\ 8\mathcal{L}_3 \equiv 2D_{H_1,\chi_2} + 2D_{H_1,\chi_3} + 6D_{H_1,\chi_4} + 6D_{H_1,\chi_5} + \\ \quad + 4D_{H_2,\chi_2} + 4D_{H_2,\chi_3} + 4D_{H_2,\chi_4} + 4D_{H_2,\chi_5} + \\ \quad + 5D_{G,\chi_2} + D_{G,\chi_3} + 7D_{G,\chi_4} + 3D_{G,\chi_5} \\ 8\mathcal{L}_4 \equiv 6D_{H_1,\chi_2} + 6D_{H_1,\chi_3} + 2D_{H_1,\chi_4} + 2D_{H_1,\chi_5} + \\ \quad + 4D_{H_2,\chi_2} + 4D_{H_2,\chi_3} + 4D_{H_2,\chi_4} + 4D_{H_2,\chi_5} + \\ \quad + 3D_{G,\chi_2} + 7D_{G,\chi_3} + D_{G,\chi_4} + 5D_{G,\chi_5} \\ 8\mathcal{L}_5 \equiv 6D_{H_1,\chi_2} + 6D_{H_1,\chi_3} + 2D_{H_1,\chi_4} + 2D_{H_1,\chi_5} + \\ \quad + 4D_{H_2,\chi_2} + 4D_{H_2,\chi_3} + 4D_{H_2,\chi_4} + 4D_{H_2,\chi_5} + \\ \quad + 7D_{G,\chi_2} + 3D_{G,\chi_3} + 5D_{G,\chi_4} + D_{G,\chi_5} \\ 4\mathcal{L}_6 \equiv 2D_{H_1,\chi_2} + 2D_{H_1,\chi_3} + 2D_{H_1,\chi_4} + 2D_{H_1,\chi_5} + \\ \quad + D_{G,\chi_2} + D_{G,\chi_3} + 6D_{G,\chi_4} + 6D_{G,\chi_5} \\ 4\mathcal{L}_7 \equiv 2D_{H_1,\chi_2} + 2D_{H_1,\chi_3} + 2D_{H_1,\chi_4} + 2D_{H_1,\chi_5} + \\ \quad + 6D_{G,\chi_2} + 6D_{G,\chi_3} + D_{G,\chi_4} + D_{G,\chi_5}. \end{array} \right.$$

3.5 Rivestimenti doppi di superfici

In questa sezione ci focalizziamo su una categoria particolare di rivestimenti. Abbiamo visto quali sono le equazioni che garantiscono la possibilità di costruire un rivestimento, ci preoccupiamo ora di trovare soluzioni a queste equazioni nel caso in cui il gruppo che agisce sia $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Per semplicità consideriamo Y una superficie liscia (cioè una varietà liscia di dimensione 2).

Consideriamo un fibrato in rette $\mathcal{L} \in \text{Pic}(Y)$, denotiamo con L il fibrato associato. Sia $p : L \rightarrow Y$ la sua proiezione. Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto e affine di Y che trivializza L , ovvero tale che, per ogni i , abbiamo diagrammi del tipo

$$\begin{array}{ccc} L_{U_i} & \xrightarrow{h_i} & U_i \times \mathbb{C} \\ & \searrow p & \swarrow pr_1 \\ & & U_i. \end{array}$$

Allora sulle intersezioni $U_{ij} := U_i \cap U_j$ avremo

$$\begin{aligned} U_{ij} \times \mathbb{C} &\xleftarrow{h_j} p^{-1}(U_{ij}) \xrightarrow{h_i} U_{ij} \times \mathbb{C} \\ (x, z_j) &\longmapsto (x, g_{ij}(z_j)); \end{aligned}$$

dove $g_{ij} \in \mathcal{O}_Y^*(U_{ij})$ sono le mappe di transizione del fibrato L e danno un 1-cociclo in $Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_Y^*)$. Pertanto, indicando con z_i la coordinata della fibra di L su U_i , sull'intersezione U_{ij} si ha

$$z_i = g_{ij} z_j.$$

Ora supponiamo che esista una sezione globale $s \in H^0(Y, \mathcal{L}^{\otimes 2})$ e scriviamo

$$s_i = g_{ij}^2 s_j \text{ su } U_{ij}.$$

Indichiamo con $\mathcal{B} = \{s = 0\} \subseteq Y$ l'insieme in cui s si annulla.

A questo punto, per ogni i, j consideriamo le equazioni

$$z_i^2 - s_i = 0 \text{ su } U_i \times \mathbb{C} \quad z_j^2 - s_j = 0 \text{ su } U_j \times \mathbb{C}.$$

Dal momento che queste equazioni combaciano sull'intersezione U_{ij} , in quanto

$$z_i^2 - s_i = 0 \Leftrightarrow (g_{ij} z_j)^2 - g_{ij}^2 s_j \Leftrightarrow z_j^2 - s_j = 0,$$

le equazioni di sopra danno luogo ad una sottovarietà X di L .

In questo modo abbiamo costruito un morfismo piatto di grado 2 ramificato in \mathcal{B} :

$$\pi = p|_X : X \longrightarrow Y.$$

Vediamolo localmente come nella Definizione 2.0.1.

Abbiamo che, poiché U_i è affine, possiamo scrivere $U_i = \text{Specm}(\mathbb{C}[U_i])$ e

$$p^{-1}(U_i) \cong U_i \times \mathbb{C} = \text{Specm}(\mathbb{C}[U_i][z_i]).$$

Pertanto avremo che

$$p^{-1}(U_i) = \text{Specm}(\mathbb{C}[U_i][z_i]/(z_i^2 - s_i)).$$

Si ha allora che, poiché

$$\mathbb{C}[U_i] \subset \mathbb{C}[U_i][z_i]/(z_i^2 - s_i) = \mathbb{C}[U_i][\bar{z}_i]$$

è un'estensione integrale di anelli ($\bar{z}_i^2 - s_i = 0$ è un'equazione di dipendenza integrale), π è un morfismo finito.

Mostriamo ora che il push-forward del fascio di struttura si spezza, come previsto dal Teorema 2.0.2, nella forma

$$\pi_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{L}^{-1}.$$

Dato un aperto $V \subset Y$, denotiamo con abuso di notazione U_i l'intersezione $V \cap U_i$, che possiamo assumere affine. Per ogni $f \in \pi_* \mathcal{O}_X(V)$ denotiamo con f_i la restrizione $f|_{U_i}$. Abbiamo che

$$\pi_* \mathcal{O}_X(U_i) = \mathcal{O}_X(\pi^{-1}(U_i)) = \mathbb{C}[U_i][\bar{z}_i],$$

e dunque possiamo scrivere

$$f_i(x, z_i) = a_0^i + a_1^i z_i \quad \text{con } a_0^i, a_1^i \in \mathbb{C}[U_i] = \mathcal{O}_Y(U_i).$$

Dobbiamo capire come si trasformano da un U_i ad un altro le $a_0 = \{a_0^i\}_{i \in I}$ e le $a_1 = \{a_1^i\}_{i \in I}$. Utilizzando le g_{ij} abbiamo che, se $f_i(x, z_i) = a_0^i + a_1^i z_i$, allora

$$f_i(x, g_{ij}(x)z_j) = a_0^i + a_1^i g_{ij}(x)z_j = f_j(x, z_j) \quad \text{su } U_{ij};$$

dunque avremo che

$$a_0^i = a_0^j \quad \text{e} \quad a_1^i = g_{ij}^{-1}(x)a_1^j.$$

Questo dimostra che

$$a_0 \in \mathcal{O}_Y(V) \quad \text{e} \quad a_1 \in \mathcal{L}^{-1}(V).$$

Dato che V era arbitrario abbiamo la decomposizione

$$\pi_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{L}^{-1}.$$

Possiamo infine trovare un'involuzione naturale di L che si restringe ad un'involuzione di X . Questa è data localmente dalla moltiplicazione per -1

$$\iota : U_i \times \mathbb{C} \longrightarrow U_i \times \mathbb{C}$$

$$(x, z_i) \longmapsto (x, -z_i).$$

Per linearità tutte queste mappe al variare di $i \in I$ si incollano all'involutione cercata $\iota : L \rightarrow L$ e le equazioni locali $\{z_i^2 - s_i = 0\}$ che definiscono X sono invarianti.

L'azione indotta dal gruppo $\langle \iota \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ su

$$\pi_* \mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{L}^{-1}$$

è data su U_i da

$$\iota^*(f_i)(x, z_i) = f_i \circ \iota(x, z_i) = f_i(x, (-1) \cdot z_i) = a_0^i + (-1) \cdot a_1^i z_i.$$

Questo mostra che \mathcal{O}_Y e \mathcal{L}^{-1} sono autofasce rispetto ai caratteri di G , ovvero

$$\mathcal{O}_Y = (\pi_* \mathcal{O}_X)_1, \quad \mathcal{L}^{-1} = (\pi_* \mathcal{O}_X)_{-1}.$$

Si osservi infine che, in virtù della decomposizione $\pi_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{L}^{-1}$, la struttura di anello sul *push-forward* è data, su un aperto affine $U \subset Y$ da

$$\begin{aligned} (a_0 + a_1 z)(b_0 + b_1 z) &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)z + a_1 b_1 z^2 = \\ &= (a_0 b_0 + a_1 b_1 s) + (a_0 b_1 + a_1 b_0)z \end{aligned}$$

dove $a_i, b_i \in \mathcal{O}_Y(U)$ e $z \in \mathcal{L}^{-1}(U)$ è la sezione $x \mapsto (x, 1)$. Da questa scrittura è chiaro che, fissata una sezione globale $s \in H^0(Y, \mathcal{L}^{\otimes 2})$, la scelta del luogo di diramazione \mathcal{B} determina univocamente la struttura di anello su $\pi_* \mathcal{O}_X$. Infatti questa è data da una mappa

$$\mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{L}^{-1} \longrightarrow \mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{L}^{-1}$$

che deve essere G -invariante, perciò è necessariamente nulla nella seconda coordinata. Pertanto la struttura di anello su *push-forward* è data in realtà da una mappa

$$\mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{L}^{-1} \longrightarrow \mathcal{O}_Y$$

che corrisponde ad una sezione globale $s \in H^0(\mathcal{O}_Y, \mathcal{L}^{\otimes 2})$.

Denotando con \mathcal{B} il luogo degli zeri di s possiamo costruire il rivestimento doppio associato ai dati $(\mathcal{L}, \mathcal{B})$ come mostrato precedentemente.

In ultimo osserviamo che abbiamo una corrispondenza 1 : 1 della forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rivestimenti doppi} \\ \pi : X \rightarrow Y \end{array} \right\} \xleftrightarrow{1:1} \left\{ \begin{array}{l} \text{coppie } (\mathcal{L}, \mathcal{B}) \text{ tali che} \\ \mathcal{L} \in \text{Pic}(X) \text{ e } \mathcal{B} \in |\mathcal{L}^{\otimes 2}| \text{ ridotto} \end{array} \right\}.$$

Bibliografia

- [AtMac69] M. F. Atiyah, I.G. MacDonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley, Reading, 1969.
- [Cat84] F. Catanese, *On the moduli space of surfaces of general type*, J. Diff. Geo. vol 19, 1984, pp. 483–515.
- [Cat99] F. Catanese, *Singular bidouble covers and the construction of interesting algebraic surfaces*, Proceedings of the Warsaw Conference in honour of F. Hirzebruch's 70th Birthday, A.M.S. Contemp. Math. 241, 1999, pp.97–120.
- [CatPer16] F. Catanese, F. Perroni, *Dihedral Galois covers of algebraic varieties and the simple cases*, Journal of Geometry and Physics, 2017, pp.67–93.
- [Cox00] J. Cox, J. Little, D. O'Shea, *Ideals, Varieties and Algorithms*, Springer, 2000.
- [Gar19] A. Garbagnati, *Smooth double cover of K3 surfaces*, Annali della Scuola Normale di Pisa 19 no 1, 2019, pp.345–386.
- [Har77] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer, 1977.
- [Kem93] G.R. Kempf, *Algebraic Varieties* Cambridge University Press, 1993.
- [Lan93] S. Lang, *Algebra*, Springer, 1993.
- [Mat70] H. Matsumura, *Commutative Algebra, second Ed.*, Benjamin, 1970.
- [Par91] R. Pardini, *Abelian covers of algebraic varieties* Journal für die reine und angewandte Mathematik, **417**, 1991, pp.191–213.
- [Par98] R. Pardini, *On the period map of abelian covers of projective varieties*, Annali della Scuola Normale di Pisa 19 no 4, 1998, pp.719–735.
- [Per95] D. Perrin, *Géométrie algébrique* EDP Sciences, CNRS EEditions, 1995.
- [Seg14] E. Segal, *Group Representation Theory*, 2014.
- [Ser96] J. P. Serre, *Linear representations of finite groups* Springer-Verlag, 1996.
- [Sha13] I. R. Shafarevich, *Basic algebraic geometry. 1*, Springer, Heidelberg, 2013.
- [Zar58] O. Zariski, *On the purity of the branch locus of algebraic functions*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. , 1958, pp.791–796.