Università degli Studi di Genova
Genoa University

Scuola di Scienze sociali
School of Social Sciences

DISFOR Dipartimento di Scienze della Formazione

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE DELLA FORMAZIONE PRIMARIA

FUNZIONI ESECUTIVE E DIDATTICA DELLA MATEMATICA

Relatore: Prof.ssa Elisabetta Robotti

Correlatore: Prof.ssa Maria Carmen Usai

Candidato: Alex Giustini

ANNO ACCADEMICO 2022/2023

SOMMARIO

OBIETTIVI DELLA RICERCA

Durante il mio percorso personale, sia nell'ambito del tirocinio universitario che in quello del mio lavoro come insegnante di scuola primaria, sono entrato in contatto con molti bambini. Ho sempre avuto un grande interesse nei confronti della matematica e, anche durante il corso di laurea, sono rimasto affascinato dalle diverse possibilità con cui essa può essere insegnata e da quanto possa impattare sulla vita futura dei miei alunni. In questo periodo ho avuto modo di osservare in maniera più o meno attiva come la matematica venisse insegnata e come i bambini recepissero quegli insegnamenti. Lo spunto iniziale per questa ricerca nasce quasi per caso, dall'osservazione che i bambini che presentavano maggiori difficoltà nell'apprendimento della matematica erano di frequente quelli che sembravano avere una memoria a breve termine peggiore (all'epoca, avevo cercato di ipotizzare quale fosse la causa, attribuendola alla possibilità che alcuni social media fruiti dai bambini potessero avere un impatto sulle loro capacità di memoria a breve termine). Affascinato da questa possibilità, ho deciso di approfondire durante il mio percorso di tesi il possibile legame tra la memoria di lavoro (decidendo poi di ampliare il discorso a tutte le funzioni esecutive) e l'apprendimento della matematica, cercando di comprendere se esista realmente una relazione tra questi aspetti. Il mio obiettivo principale, tuttavia, non si ferma a questo, che rappresenta la necessaria base per compiere il passo successivo, ovvero capire se l'insegnante (il futuro me!) possa agire su questi aspetti per migliorare in maniera efficace l'apprendimento dei propri studenti. Da qui, l'idea di trasporre l'obiettivo di ricerca sulla didattica della matematica e sul suo rapporto con le funzioni esecutive. In sintesi, dunque, gli obiettivi della mia ricerca sono:

- indagare la relazione fra funzioni esecutive e apprendimento della matematica

- indagare la relazione fra funzioni esecutive e insegnamento-apprendimento della matematica nella ricerca in Didattica della Matematica

QUADRO TEORICO DI RIFERIMENTO

Funzioni esecutive (dominio cognitivo)

Generalità

Le funzioni esecutive (FE) possono essere definite come la famiglia di processi mentali "capace di creare modalità di risposta comportamentale di fronte a circostanze o attività nuove e/o insolite; la capacità di inibire risposte improprie, di correggere gli errori o di modificare la risposta, di monitorare e di aggiornare il proprio comportamento, di attivare strategie di problem-solving e di flessibilità cognitiva, di pianificare gli step da svolgere per far fronte a una situazione non abituale, difficile o complessa" (Muratori & Cutrone, 2017). Per dirla in altri termini, le funzioni esecutive sono "quelle abilità che permettono a un individuo di anticipare, progettare, stabilire obiettivi, attuare progetti finalizzati a uno scopo, e monitorare, e se necessario modificare, il proprio comportamento per adeguarlo a nuove condizioni". (Treccani, s.d.)

In generale, il successo nella vita quotidiana è strettamente correlato alla capacità dell'individuo di mettere in atto in maniera adeguata le funzioni esecutive. La tabella 1 evidenzia come le FE influenzino molteplici ambiti della vita dell'individuo e la trasversalità del loro ruolo nel raggiungimento del successo sotto più aspetti (in particolare, quello scolastico e specificamente quello relativo all'apprendimento matematico, che sarà oggetto della nostra trattazione). (Diamond, 2013)

Tabella 1. Executive functions (EFs) are important to just about every aspect of life. (Diamond 2013, pag. 3)

Aspects of life	The ways in which EFs are relevant to that aspect of life	References
Mental health	EFs are impaired in many mental disorders, including:	
	- Addictions	Baler & Volkow 2006
	- Attention deficit hyperactivity (ADHD)	Diamond 2005, Lui & Tannock 2007
	- Conduct disorder	Fairchild et al. 2009
	- Depression	Taylor-Tavares et al. 2007
	- Obsessive compulsive disorder (OCD)	Penadés et al. 2007
	- Schizophrenia	Barch 2005
Physical health	Poorer EFs are associated with obesity, overeating, substance abuse, and poor treatment adherence	Crescioni et al. 2011, Miller et al. 2011, Riggs et al. 2010
Quality of life	People with better EFs enjoy a better quality of life	Brown & Landgraf 2010, Davis et al. 2010
School readiness	EFs are more important for school readiness than are IQ or entry-level reading or math	Blair & Razza 2007, Morrison et al. 2010
School success	EFs predict both math and reading competence throughout the school years	Borella et al. 2010, Duncan et al. 2007, Gathercole et al. 2004
Job success	Poor EFs lead to poor productivity and difficulty finding and keeping a job	Bailey 2007
Marital harmony	A partner with poor EFs can be more difficult to get along with, less dependable, and/or more likely to act on impulse	Eakin et al. 2004
Public safety	Poor EFs lead to social problems (including crime, reckless behavior, violence, and emotional outbursts)	Broidy et al. 2003, Denson et al. 2011

La letteratura concorda nell'affermare che esistono tre funzioni esecutive "core", sulle quali vengono costruite le funzioni esecutive di livello più complesso, quali la capacità di ragionamento, il problem-solving e la capacità di pianificazione.

Andiamo ora ad elencare le funzioni esecutive "core", rimandandone l'approfondimento ai paragrafi successivi:

- Inibizione (o controllo inibitorio)
    - Autoregolazione (inibizione comportamentale)
    - Controllo dell'interferenza
        - Attenzione selettiva

- 4Inibizione cognitiva

- Memoria di lavoro
- Flessibilità cognitiva

Le funzioni esecutive sopra elencate sono di fondamentale importanza per la nostra trattazione, dal momento che sono coinvolte nel processo di apprendimento (Blair & Razza, 2007; McClelland et al. 2007). I seguenti paragrafi saranno pertanto dedicati all'approfondimento delle singole funzioni esecutive "core", in modo da avere le basi teoriche necessarie per lo sviluppo del nostro quesito di ricerca.

Controllo inibitorio

Nella letteratura scientifica si parla di "capacità di inibizione" o di "controllo inibitorio" (inhibitory control) per riferirsi ad un insieme di capacità che permette all'individuo di regolare il proprio comportamento, i propri pensieri, le proprie emozioni così da produrre una risposta adeguata rispetto all'obiettivo che ci si è prefissati o al contesto sociale in cui ci si trova. In particolare, il controllo inibitorio rappresenta l'abilità di reprimere un'azione dominante, o impulsiva, per metterne in atto una sub-dominante, più adattiva. (Diamond, 2013; State of Mind (Giornale delle Scienze Psicologiche), n.d.)

Nello specifico, possiamo distinguere due componenti:

1. Autoregolazione (self-regulation): attuazione di comportamenti orientati all'obiettivo, che tipicamente si inseriscono in una prospettiva temporale di una certa durata minima. Esempi comuni includono: comportamenti orientati al conseguimento di un risultato, impegni nell'ambito personale, regolazione di obiettivi condivisi in relazioni strette.

Come si evince dall'articolo di Bridgett et al. (2013) esistono molteplici modelli che cercano di descrivere il funzionamento psicologico e neurobiologico di questo aspetto, i cui contenuti esulano dal fine della nostra trattazione (Bridgett et al., 2013).

2. Controllo dell'interferenza: capacità di escludere le informazioni irrilevanti ai fini dell'obiettivo (Marotta & Varvara, 2013); essa si esplica attraverso due declinazioni:

   a. Attenzione selettiva: processo di concentrazione su di un particolare stimolo nell'ambiente, assicurandosi che esso venga ben distinto da altri stimoli periferici e/o casuali. (MentalUp, n.d.)

   b. Inibizione cognitiva: l'azione di concludere o ignorare un processo mentale, in tutto o in parte, con o senza intenzione. (Macleod, 2007)

Memoria di lavoro

La memoria di lavoro (working-memory, WM) coinvolge la capacità di trattenere informazioni e lavorarci mentalmente (oppure, per dirla diversamente, lavorare con informazioni che non sono più percepibili attraverso i nostri cinque sensi (Diamond, 2013). La WM è essenziale per la costruzione del significato di un concetto o di una situazione, in quanto permette di tenere a mente quanto successo in precedenza per porlo in relazione alle informazioni che si acquisiscono nel momento presente (ad esempio, per dare un senso logico a frasi scritte o parlate, è necessario tenere a mente le parole già lette e porle in relazione con quelle che si stanno leggendo). Con la medesima funzione, essa si rende necessaria anche in campo matematico, permettendo di ordinare mentalmente elementi, tradurre istruzioni in azioni, mantenere quantità diverse ed aggiornarle. Nella vita quotidiana, la WM è fondamentale per considerare opzioni alternative (ad esempio, se è necessario scegliere il migliore tra tre elementi, occorrerà ricordare le caratteristiche di tutti e tre e al contempo effettuarne una comparazione), estrapolare informazioni da un insieme, metterle in relazione per trarne un principio generale o, addirittura, trovare legami tra oggetti o idee che apparentemente sono non correlati tra loro (ad esempio, se voglio trovare la mia macchina in un parcheggio, dovrò tenere a mente la sua immagine e confrontarla continuamente con quella delle altre auto che vedo, fino a quando non troverò un matching tra i due elementi). La memoria di lavoro gioca un ruolo da protagonista anche nella creatività, che richiede di scomporre e ricomporre elementi in nuove forme. (Diamond, 2013)

Il modello attualmente più accreditato in letteratura per la descrizione della struttura della WM è quello di Baddeley et al. (2006), che ha ricevuto nel corso degli anni diverse rivisitazioni; quella più recente prevede tre elementi fondamentali, più uno di controllo:

1. **Ciclo Fonologico:** adibito alla memorizzazione ed elaborazione delle informazioni verbali; entra in funzione se si ascolta una frase o un racconto, in quanto permette di conservare nozioni e in seguito riordinarle per dare un senso compiuto ad una frase o ad un racconto.
2. **Taccuino Visuo-spaziale:** adibito alla memorizzazione ed elaborazione visuo-spaziali; in maniera analoga al ciclo fonologico, effettua un check tra l'immagine attualmente davanti a noi ed i modelli spaziali presenti nella nostra memoria a lungo termine.

3. **Episodic Buffer:** una componente, anch'essa dalla capacità limitata, che si avvale di un codice multidimensionale in grado di formare collegamenti tra informazioni di diversa natura (es. verbale, visuo-spaziale) e provenienza (ambiente esterno, memoria a lungo termine), e che permette di creare degli episodi integrati.

4. **Esecutivo Centrale:** gestisce le risorse attenzionali e coordina i tre sistemi subordinati. (Baddeley, 2000, 2003, 2006)

Flessibilità cognitiva

La flessibilità cognitiva si costruisce sulle altre due FE core (controllo inibitorio e memoria di lavoro), sviluppandosi successivamente nel corso della vita. La flessibilità cognitiva è richiesta in tutte quelle occasioni in cui è necessario *cambiare prospettiva,* sia dal punto di vista spaziale (ad esempio, permette di immaginare come potrebbe essere un oggetto visto da un'altra angolazione) sia dal punto di vista interpersonale (ad esempio, permette di immedesimarsi nell'Altro). L'abilità di cambiare prospettiva richiede l'utilizzo delle altre due funzioni esecutive "core", in quanto necessitiamo di controllo inibitorio per disattivare la nostra precedente prospettiva e di memoria di lavoro per attivarne una differente. La flessibilità cognitiva rappresenta un concetto chiave anche per altri aspetti, quali la capacità di cambiare il nostro modo di pensare in maniera nuova e "fuori dagli schemi", l'adattamento a modificate priorità o richieste e la capacità di trarre vantaggio da opportunità improvvise e/o inaspettate. (Diamond, 2013) La flessibilità cognitiva è sostenuta da processi attentivi che consentono di direzionare e allocare risorse in modo adattabile, così da selezionare la risposta comportamentale più efficace all'interno di un contesto ricco di numerosi stimoli sensoriali differenti (Rikhye et al., 2018).

Nei prossimi paragrafi, andremo ad effettuare una breve trattazione relativa ai principali approcci di insegnamento-apprendimento della matematica, spostandoci dal dominio cognitivo a quello didattico, in modo da completare i riferimenti teorici necessari per procedere nella nostra ricerca.

Didattica della matematica (dominio didattico)

Generalità

L'insegnamento della matematica rappresenta uno dei pilastri dei sistemi educativi di tutto il mondo, tanto che essa è obbligatoria sostanzialmente ovunque in relazione a scuola primaria e secondaria di primo grado. Tale importanza è sottolineata anche dalle "Indicazioni Nazionali e Nuovi Scenari per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione" (Comitato Scientifico Nazionale per le Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione, 2017), che sottolineano come la matematica fornisca strumenti per indagare e spiegare molti fenomeni del mondo che ci circonda, favorendo un approccio razionale ai problemi che la realtà pone e fornendo per questo motivo un contributo importante alla costruzione di una cittadinanza consapevole. Con il tempo, si è passati da una visione prettamente "strumentale" della matematica, per la quale, gli obiettivi di apprendimento principali erano legati a fornire strumenti per le attività pratiche della vita quotidiana, ad una visione "formativa" della matematica, per la quale essa diventa strumento per la formazione del pensiero nei suoi vari aspetti (intuizione, immaginazione, progettazione, ipotesi, deduzione, controllo, verifica e smentita) (Ministro della Pubblica Istruzione, 1985). Le Indicazioni Nazionali evidenziano, inoltre, l'importanza della matematica nell'ambito dello sviluppo di competenze trasversali quali la capacità di problem-solving e le competenze argomentative, che sono alla base di una cittadinanza attiva e consapevole. Nel mondo attuale, infatti, non basta sapere che qualcosa è vero, ma è anche necessario comprenderne il motivo, analizzare in maniera critica le informazioni ricevute e saper sostenere in maniera assertiva il proprio punto di vista con il supporto di argomentazioni solide e pertinenti. La ricerca in didattica della matematica, proprio in virtù della sua volontà di migliorare l'insegnamento della matematica e, insieme ad esso, le competenze trasversali appena citate, risulta oggi, ancor più che in altri periodi storici, un ambito di fondamentale importanza, data la costante presenza di fake news ed il dilagare della cosiddetta "infodemia", ovvero epidemia di informazioni. Di seguito alcuni cenni su costrutti, strumenti teorici e approcci per la didattica della matematica, che ci saranno utili come punto iniziale per andare a ricercare nella letteratura relativa al dominio didattico la presenza e la natura di eventuali relazioni con le funzioni esecutive.

L'apprendimento per problemi

Per introdurre, in modo che abbiano senso per gli alunni e risultino funzionali allo sviluppo di competenze matematiche, i concetti e gli strumenti matematici, la ricerca in didattica, supportando le Indicazioni Nazionali, suggerisce di adottare un approccio per problemi in contesti e situazioni che siano significativi per gli alunni (Sabena et al., 2019). La scelta dei problemi rappresenta un momento delicato per l'insegnante, che deve sempre tenere conto del contesto d'apprendimento nel quale è calato. Questo è possibile attraverso un processo di modellizzazione, per cui si parte da una situazione presentata o descritta in un contesto reale che pone un problema, ovvero una situazione in cui si conosce l'obiettivo, ma non si sa come raggiungerlo. In questo processo, vengono "filtrate" e "semplificate" alcune caratteristiche della realtà per rendere il problema da "reale" a "interno alla matematica". La criticità di questo approccio è legata al fatto che, spesso, l'insegnamento scolastico si concentra unicamente sulla componente del problema "interna alla matematica"; questo può comportare una dissociazione dalla realtà e creare una divergenza tra il modo con cui i bambini approcciano i problemi reali e quello con cui approcciano i problemi scolastici. Un'altra fase critica della risoluzione del problema è quella dell'interpretazione, ovvero la capacità di utilizzare i risultati ottenuti per rispondere al problema posto; spesso, infatti, i bambini rischiano di ottenere risultati corretti dalle operazioni svolte, ma di non saperli rapportare al contesto realistico proposto. Di seguito l'esempio indagato da Schoenfeld nella sua ricerca del 1997 (Schoenfeld, 1997, citato in Sabena et al., 2019, p. 13):

"Un camion dell'esercito può portare 36 soldati. Se bisogna trasportare 1128 soldati alla loro base, quanti camion servono?"

La maggioranza degli studenti interpellati risolve correttamente la divisione 1128:36, ma il 29% risponde alla domanda "quanti camion servono?" dicendo "31 con il resto di 12", mentre il 18% risponde "31". Gli studenti sembrano rispondere senza controllare che ciò che dicono abbia senso nel contesto di realtà in cui è inserito il problema.

È quindi fondamentale che l'insegnante eviti l'instaurarsi di cicli rigidi e ripetitivi, ponendo l'attenzione sulla comprensione del problema nel senso più globale del termine (Sabena et al., 2019).

Il laboratorio di matematica

Le Indicazioni Nazionali definiscono il Laboratorio sia come “luogo fisico” sia come “momento in cui l’alunno è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte, impara a raccogliere dati, negozia e costruisce significati, porta a conclusioni temporanee e a nuove aperture la costruzione delle conoscenze personali e collettive” (Comitato Scientifico Nazionale per le Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell’infanzia e del primo ciclo di istruzione, 2017). Utilizzando un’altra definizione, per laboratorio di matematica si intende nello specifico “un insieme di indicazioni metodologiche trasversali finalizzate alla costruzione di significati matematici attraverso l’esplorazione e la sperimentazione (anche con utilizzo di strumenti tecnologici o materiali poveri), la discussione, il confronto e la condivisione di idee e riflessioni tra pari e con colleghi più esperti” (Sabena et al., 2019). Due approcci teorici legati a questo aspetto sono rappresentati dalla prospettiva della multimodalità e dalla teoria della mediazione semiotica.

- Prospettiva della multimodalità: considera l’apprendimento e l’insegnamento della matematica come caratterizzati da diverse componenti cognitive e semiotiche, in particolari quelle legate alle attività percettivo-motorie ed embodied (nella quale ogni pensiero astratto viene spiegato in riferimento ad esperienze corporee e della vita quotidiana tramite metafore). In questo senso, ogni pensiero astratto (compreso quello matematico) viene fortemente influenzato da aspetti quali i movimenti corporei, i gesti, la manipolazione di materiali o artefatti, il disegno o i ritmi. Fondamentale, perciò, è il ruolo dei gesti dell'insegnante nell'apprendimento. (Sabena et al., 2019)

- Teoria della mediazione semiotica: sfrutta la relazione tra *artefatto* (qualsiasi tipo di oggetto, suono, utensile, figura ecc) e *strumento* (artefatto + suoi sistemi di utilizzo in funzione della soluzione di un compito) per far comprendere i *significati teorici* sottesi ad essa agli alunni. Un artefatto potrà essere definito "strumento di mediazione semiotica" quando sarà usato intenzionalmente dall'insegnante per mediare un contenuto matematico attraverso un intervento didattico pianificato intenzionalmente. (Bartolini Bussi & Mariotti, 2009)

La discussione matematica

In "Interazione sociale e conoscenza a scuola: la discussione matematica" (1995), Bartolini Bussi definisce la discussione matematica come "una polifonia di voci articolate su un oggetto matematico (concetto, problema, procedura, ecc.), che costituisce un motivo dell'attività di insegnamento-apprendimento" (Bartolini Bussi et al., 1995). La metafora usata per descrivere la discussione matematica ha lo scopo di sottolineare alcuni aspetti importanti di questa attività:

- Esiste un tema che ne definisce l'obiettivo
- Esiste l'interazione tra voci (polifonia)
- Esiste un riferimento esplicito all'attività di insegnamento/apprendimento (processo di lungo termine)
- Si richiede la presenza di voci diverse tra cui, essenziale, quella dell'insegnante

- Si valorizza la presenza di voci imitanti (diversi tipi di imitazione nel contrappunto)
- Si prescinde dall'esistenza fisica di una comunità di parlanti (discussione con un interlocutore non fisicamente presente, ma rappresentato da un testo scritto)
- La discussione matematica dell'intera classe orchestrata dall'insegnante garantisce, con la presenza di quest'ultima, la possibilità dell'articolazione di voci diverse da quelle degli allievi. L'insegnante ha un ruolo di guida nel senso che:
    - Inserisce una particolare discussione nel flusso dell'attività della classe
    - Influenza la discussione in modo determinante, inserendosi con interventi mirati nel suo sviluppo.

Possono essere individuate tre macro-tipologie di discussione matematica:

- Discussione di un problema
    - Discussione di soluzione: processo in cui tutta la classe risolve un problema dato durante la discussione stessa, condividendo idee e strategie e contribuendo a favorire il raggiungimento dell'obiettivo didattico trasversale dell'educazione all'ascolto e alla comprensione del pensiero altrui.
    - Discussione di bilancio: processo di analisi delle soluzioni proposte dagli studenti a un problema; viene favorita la socializzazione di strategie messe in atto e la rappresentazione di più soluzioni a un medesimo problema. L'insegnante può esplicitare in fase finale gli aspetti teorici emersi, fungendo da mediatore culturale.

- Discussione di concettualizzazione: momento collettivo del processo di costruzione dei collegamenti tra esperienze già vissute e concetti particolari della matematica. Generalmente è introdotta dall'insegnante dopo attività didattiche durante le quali sono emersi termini legati a concetti matematici.
- Meta-discussione: tutte le discussioni che pongono una questione legata all'attività metacognitiva (ad esempio, ricostruire la storia della classe tramite stralci di discussioni precedenti, o valutare il rapporto matematica-realtà).

Nel prossimo paragrafo inizieremo la valutazione del rapporto tra FE ed apprendimento della matematica relativamente al dominio cognitivo, mentre le sopracitate declinazioni di insegnamento-apprendimento della matematica saranno oggetto di ricerca in letteratura, con l'obiettivo di valutare se esiste una specifica relazione tra ciascuna di esse e le funzioni esecutive e se, esiste, di valutare quale sia l'impatto reciproco di questi due aspetti, in un paragrafo dedicato.

RICERCA IN LETTERATURA SUL RAPPORTO TRA FE E APPRENDIMENTO DELLA MATEMATICA (DOMINIO COGNITIVO)

Le funzioni esecutive e l'apprendimento

La relazione tra funzioni esecutive e performance nell'apprendimento è stata ampiamente dimostrata in letteratura. (Spiegel et al., 2021). L'impatto delle funzioni esecutive è rilevante in maniera generale su tutte le funzioni dell'apprendimento, dal momento che esse svolgono un ruolo cruciale nel determinare le risorse cognitive che il soggetto riesce a dedicare alle attività svolte in classe. All'interno del contesto della scuola primaria, i bambini devono essere in grado di prestare attenzione, svolgere i compiti richiesti ed evitare distrazioni per trarre vantaggio dalle opportunità di apprendimento (Mcclelland et al., 2015). Coerentemente con questo, le differenze individuali nelle funzioni esecutive acquisite precocemente predicono in maniera significativa sia le successive prestazioni matematiche sia l'alfabetizzazione (Mcclelland et al., 2007), sebbene questa relazione sembri essere più forte e più consistente per la matematica che per l'alfabetizzazione. Verosimilmente, le abilità matematiche e di alfabetizzazione specifiche sono differenti tra loro in termini di requisiti e di complessità, di conseguenza il loro sviluppo necessita di differenti componenti delle funzioni esecutive. Ad esempio, il controllo inibitorio è considerata una tra le funzioni esecutive meno "complesse", si sviluppa principalmente in età prescolare, ed è probabilmente coinvolta nel supportare l'acquisizione di abilità matematiche di base (ad esempio, contare) e di alfabetizzazione; al contrario, essendo la memoria di lavoro una funzione esecutiva più "complessa" e che richiede una maturità cognitiva maggiore, dal momento che continua a svilupparsi anche in adolescenza, potrebbe essere coinvolta nello sviluppo di abilità matematiche e capacità di alfabetizzazione più sofisticate, come il calcolo o la consapevolezza fonologica. Infine, come abbiamo già citato nella parte introduttiva, la flessibilità cognitiva rappresenta la funzione esecutiva più complessa e potrebbe per questo impattare su concetti matematici e di alfabetizzazione più complessi, più difficilmente riconducibili alla realtà, o che richiedano un cambio di prospettiva (Purpura et al., 2017).

Sebbene sia ancora dibattuta la modalità con la quale le funzioni esecutive possono influenzare l'apprendimento, i due modelli interpretativi predominanti sono rappresentati da:

- Intrinsic cognitive load theory: presume che alcuni compiti scolastici siano intrinsecamente più complessi di altri, indipendentemente dalla quantità di istruzione o dall'esperienza personale che il soggetto ha nello svolgere questi compiti. La teoria sostiene che compiti scolastici più complessi utilizzano più risorse cognitive/esecutive perché questi compiti richiedono sia il completamento della risoluzione di problemi direttamente correlati all'obiettivo del compito sia il completamento di altre attività collaterali che richiedono l'uso di risorse cognitive (Chandler & Sweller, 1991). In altre parole, secondo tale teoria, l'impatto delle funzioni esecutive sugli outcome scolastici non varia con il passare del tempo, né con il livello dell'apprendimento, in quanto esso è legato unicamente alla complessità intrinseca del compito stesso (ad esempio, un problema di matematica scritto "a parole" sarà sempre maggiormente influenzato dal livello di utilizzo delle funzioni esecutive rispetto ad una semplice addizione, in quanto richiederà di avvalersi di un maggior numero di step cognitivi).
- "Dual process" theories: presuppongono la presenza di due sistemi di elaborazione cognitiva: l'elaborazione autonoma e l'elaborazione controllata. L'elaborazione autonoma include l'elaborazione cognitiva che non richiede attenzione controllata o input da processi cognitivi di ordine superiore ed è automatica, associativa e veloce, mentre l'elaborazione controllata richiede l'impegno di processi cognitivi di livello superiore ed è più lenta, influenzata dalla volontà e seguente una logica sequenziale (Evans & Stanovich, 2013). Durante la scuola primaria, le abilità scolastiche continuano ad essere apprese e diventano sempre più automatizzate man a mano che vengono esperite; pertanto, la difficoltà dei compiti scolastici percepita dal soggetto e la facilità con cui vengono completati è fortemente associata all'esposizione a tali task e all'istruzione che

viene fornita all'interno di un dato dominio accademico. Peng e colleghi (2018) hanno ipotizzato che man mano che le abilità diventano più familiari, attraverso l'esperienza e l'apprendimento, diventano sempre più automatiche e richiedono meno risorse cognitive (Peng et al., 2018). Pertanto, in questo senso, l'impatto delle funzioni esecutive sugli outcome scolastici è "mediato" dall'esperienza che il soggetto matura sul singolo task, indipendentemente dalla complessità del task stesso.

Il rapporto tra funzioni esecutive e l'apprendimento matematico – generalità

Dopo aver analizzato in maniera generale i modelli teorici che tentano di spiegare come le funzioni esecutive possano impattare sull'apprendimento, il nostro focus di ricerca si è concentrato specificamente sulla matematica. La letteratura nel dominio delle scienze cognitive in merito è vasta e generalmente concorde nell'affermare che esista una relazione tra le due componenti, sebbene la tipologia di studio e la modalità di definizione sia delle funzioni esecutive che delle abilità matematiche negli alunni sia nei vari studi piuttosto disomogenea. Prima di andare a valutare la relazione tra apprendimento e FE, abbiamo ritenuto opportuno recuperare alcuni brevi cenni sullo sviluppo delle abilità matematiche nel corso dell'età prescolare e scolare così da poter contestualizzare successivamente quanto diremo; prima di iniziare a frequentare la scuola primaria, i bambini iniziano ad acquisire abilità matematiche precoci che costituiscono la base per abilità più avanzate (U.S. Department of Education, 2008). Le abilità matematiche numeriche precoci si sviluppano attraverso una progressione che vede coinvolte delle sotto-abilità fortemente legate tra loro, ma al tempo stesso distinte (Purpura et al., 2013) processo è anche noto come "traiettoria di apprendimento" (Sarama & Clements, 2009). Si ritiene che le prime abilità di calcolo si sviluppino durante tre fasi che si sovrappongono tra loro, con ciascuna fase più complessa dal punto di vista cognitivo (Krajewski & Schneider, 2009). In una prima fase, infatti, i bambini imparano a riconoscere piccoli insiemi senza contare, a distinguere in modo rapido e accurato la quantità di un ridotto numero di oggetti o elementi (subitizing), a distinguere tra piccole quantità (confronto tra insiemi). In una seconda fase, i bambini applicano la sequenza di conto verbale dei numeri a insiemi fissi (conteggio a uno a uno), contano verbalmente seguendo la corretta sequenza, e creano collegamenti tra ciascuna delle parole numeriche e la rispettiva quantità (ad esempio, applicano la conoscenza dei numeri cardinali). In terzo luogo, i bambini combinano le parole utilizzate per indicare i numeri e le quantità in nuove parole e quantità senza usare oggetti fisici (ad esempio, durante la risoluzione di problemi con testo scritto). Queste abilità, unite alle abilità scritte basate sui simboli (ad esempio, dare un nome scritto ai numeri, collegare le quantità con i numeri, confrontare i numeri, conoscere l'ordine dei numeri), gettano le basi per l'acquisizione di abilità più avanzate, come la capacità di mettere insieme quantità o togliere quantità ad una data (Purpura et al., 2017).

La valutazione dell'impatto delle funzioni esecutive dei bambini della fascia d'età dai 6 agli 11 anni è stata effettuata in maniera dettagliata da Spiegel et al. (2021), che hanno cercato di comprendere quale sia l'impatto delle funzioni esecutive su outcome scolastici di diversa natura (compreso quelli di nostro interesse), andando a valutare in maniera meta-analitica molteplici studi che trattavano questo aspetto in bambini della scuola primaria. Sono stati indagati working memory, controllo inibitorio e flessibilità cognitiva ed il loro rapporto con i risultati in diverse materie, tra le quali la matematica, su un campione di oltre 65000 alunni (Spiegel et al., 2021). I risultati sono estremamente interessanti: tutte queste tre funzioni esecutive sono risultate univocamente legate alla capacità di risolvere *word problems* (problemi che contengono una combinazione di parole e numeri che richiede l'interpretazione da parte dello studente (Mellone et al., 2014) alla *math fluency* (capacità di ricordare e rispondere a domande di calcolo matematico in modo rapido ed efficiente) ed alla capacità di calcolo (ad eccezione della flessibilità cognitiva, che in base ai risultati dello studio non sarebbe legata a quest'ultima). Un altro aspetto interessante emerso dallo studio è quello relativo all'età: la flessibilità cognitiva era più fortemente correlata alla risoluzione dei problemi matematici rispetto al controllo inibitorio nei primi anni di scuola primaria, mentre il contrario avveniva negli ultimi anni di scuola primaria. Nonostante questo, in linea generale sono stati riscontrati pochi cambiamenti nella relazione tra FE ed abilità matematiche tra l'inizio e la fine della scuola primaria, il che rende concreta la possibilità che la relazione tra tali aspetti segua l'intrinsic cognitive load theory in quanto le skills matematiche mantengono intrinsecamente una complessità che non viene meno nel corso dello sviluppo (Spiegel et al., 2021).

Il rapporto tra funzioni esecutive e l'apprendimento matematico – memoria di lavoro

Nello studio di Spiegel et. al (2021), la funzione esecutiva che maggiormente è risultata legata all'apprendimento della matematica è la working memory, dato non sorprendente viste le evidenze già fornite dalla letteratura riguardo alla relazione tra WM e la capacità di mantenere ed elaborare le informazioni durante il completamento di problemi matematici che prevedevano più fasi (Fürst & Hitch, 2000), tenere traccia delle singole operazioni durante calcoli complessi (Noël et al., 2004) e completare problemi matematici che richiedono la creazione di determinate rappresentazioni mentali (Trbovich & LeFevre, 2003). È stato dimostrato in letteratura che tutte le componenti della memoria di lavoro sono coinvolte nello sviluppo di skill matematiche: infatti, diversi studi dimostrano come la memoria di lavoro verbale impatti sulle componenti dell'apprendimento della matematica che richiedono più passaggi o il mantenimento delle informazioni nella memoria (ad esempio, effettuare dei calcoli) (Purpura & Ganley, 2014), ma è stato anche dimostrato da molteplici studi sul training cognitivo che sia la memoria di lavoro verbale sia quella visuo-spaziale contribuiscono allo sviluppo delle abilità matematiche (Holmes et al., 2009; Holmes & Gathercole, 2014; Ramani et al., 2017).

Entrando più nello specifico, la memoria di lavoro ha un ruolo primario nello sviluppo delle skill matematiche fondamentali, che si sviluppano durante la scuola primaria; tra queste, citiamo la capacità di calcolo (esecuzione di addizioni ad una o due mani, sottrazioni, moltiplicazioni e divisioni) e la geometria (Boyer & Merzbach, 2011). Per quanto riguarda i problemi che necessitano di calcoli per la loro risoluzione, i bambini si avvalgono dell'utilizzo della memoria di lavoro in quanto devono immagazzinare e manipolare i numeri rilevanti ai fini della soluzione, mentre al contempo scelgono il corretto metodo di calcolo al fine di trovare la risposta corretta. In relazione, invece, alla geometria, la memoria di lavoro entra in gioco soprattutto nella sua componente visuo-spaziale, in quanto la risoluzione di problemi di geometria richiede la simultanea manipolazione e mantenimento di concetti visuo-spaziali quali forma, dimensioni, posizioni relative tra due o più figure.

La forza della correlazione tra le differenti componenti della memoria di lavoro e la performance matematica varia in funzione dell'età, sebbene le attuali evidenze manchino di una forte consistenza. Diversi ricercatori riportano un aspetto interessante:

l'impatto della memoria di lavoro visuo-spaziale nell'apprendimento della matematica diminuisce con l'età, a favore invece di un progressivo aumento dell'impatto della WM verbale (De Smedt et al., 2009; Holmes & Adams, 2006). Una possibile ipotesi per questo aspetto, come suggerito da (Friso-van den Bos et al., 2013), potrebbe essere legata al fatto che i bambini più piccoli nell'apprendimento della matematica fanno maggiore affidamento sulle rappresentazioni visuo-spaziali (ad esempio, ricreare nella mente la linea dei numeri, oppure avvalersi di oggetti immaginari) ed utilizzano maggiormente strategie legate al senso della vista (ad esempio, contare con le dita oppure contare a mente oggetti e numeri posizionandoli su di una linea dei numeri); mano a mano che il bambino cresce, diventa sempre meno dipendente dalla visualizzazione di oggetti specifici e tende a fare più affidamento su rappresentazioni verbali quando risolve problemi di matematica. Questa ipotesi è supportata da ulteriori evidenze che hanno dimostrato come il ruolo predittivo della memoria di lavoro visuo-spaziale sulle differenze individuali nelle performance matematica si indebolisca all'aumentare della classe frequentata, mentre al contrario il ruolo predittivo della memoria di lavoro aumenti (Van de Weijer-Bergsma et al., 2015). Come abbiamo detto, tuttavia, la letteratura non è concorde sull'argomento. Esistono molti studi, come quello di Li & Geary del 2017, che affermano che esiste uno shift tra la memoria di lavoro verbale e quella visuo-spaziale all'aumentare della classe frequentata (Li & Geary, 2017). Un esempio è rappresentato dallo studio di Meyer et al. (2010), che ha evidenziato come la componente fonologica della WM fosse capace di predire l'andamento del ragionamento matematico per i bambini di seconda elementare, mentre la componente visuo-spaziale predicesse sia il ragionamento matematico che la capacità di svolgere le operazioni per i bambini di terza elementare (Meyer et al., 2010); infine, alcuni studi addirittura negano il ruolo della WM verbale, sostenendo che l'unica componente che ha un ruolo nel predire la performance matematica è quella visuo-spaziale, oppure negano che vi sia un rapporto tra le subcomponenti della WM e l'età (Li & Geary, 2017). Il quadro, dunque, permane complesso e di difficile valutazione, ma rappresenta un punto d'inizio per ulteriori future ricerche.

Il rapporto tra funzioni esecutive e l'apprendimento matematico – controllo inibitorio

Il controllo inibitorio è forse la funzione esecutiva il cui ruolo risulta maggiormente controverso nell'apprendimento della matematica. Alcuni studi, tra cui quello di Purpura et al. (2017), analizzano in maniera dettagliata l'impatto delle singole funzioni esecutive sulle singole skill matematiche, facendo emergere numerosi aspetti d'interesse. Il primo dato peculiare è che il controllo inibitorio predice largamente gli outcome delle abilità matematiche apprese precocemente; questo pare dovuto al fatto che la capacità di inibire gli stimoli provenienti dal contesto mentre ci si impegna nello studio della matematica giochi un ruolo significativo nei risultati ottenuti per un'ampia gamma di abilità matematiche. I bambini devono fare appello al loro controllo inibitorio per riuscire a portare a termine con successo i compiti di matematica, resistendo non solo alla naturale inclinazione ad abbandonare il compito per una attività più appetibile, ma anche a quella di utilizzare una regola precedentemente appresa, che potrebbe non essere più applicabile nel contesto attuale, in maniera "automatica" (Purpura et al., 2017).

Un esempio tipico di questo aspetto è la comprensione dei numeri razionali, che rappresentano di frequente un concetto critico e di non semplice comprensione durante le scuole elementari. Una teoria che tenta di spiegare il motivo di questa difficoltà vede coinvolto, infatti, il controllo inibitorio, nella misura in cui le proprietà dei numeri razionali spesso contraddicono le precedenti conoscenze del soggetto in relazione ai numeri interi; da qui, la necessità di “impedire” attraverso il controllo inibitorio che quanto già appreso possa interferire con i nuovi concetti (Rosenberg-Lee, 2021). L’applicazione di proprietà dei numeri interi quando si lavora invece con numeri razionali (un concetto definito come “bias dei numeri interi” (Ni & Zhou, 2005)) si manifesta, ad esempio, in bambini non riescono a comprendere che la moltiplicazione di due numeri razionali può dare come risultato un numero inferiore a quelli di partenza, o che esiste un insieme infinito di numeri razionali tra due numeri qualsiasi (Van Hoof et al., 2018). La classica dimostrazione di questo fenomeno si ha nel confronto fra frazioni, in cui i bambini sono più lenti e meno precisi nel selezionare le frazioni più grandi quando la risposta corretta è incongruente con la loro conoscenza in relazione ai numeri interi (ad esempio½/2 è maggiore di 1/9, ma 2 è minore di 9) (Bonato et al., 2007). Inoltre, studi che sfruttano il priming negativo (ovvero quel concetto per cui l’elaborazione di uno stimolo presentato precedentemente, ma a cui non si stava prestando attenzione, peggiora quella l’elaborazione successiva) dimostrano che la risoluzione di problemi “controintuitivi” come quelli precedentemente citati riduce le prestazioni su successivi problemi “coerenti” con le aspettative, suggerendo perciò che i partecipanti abbiano inibito la loro conoscenza dei numeri interi, rendendola meno disponibile per i successivi problemi (Rossi et al., 2019). Non abbiamo individuato, nella letteratura relativa ai bambini, un rilevante numero di studi che analizzasse in maniera separata il controllo inibitorio e lo mettesse in relazione in maniera indipendente con la comprensione dei numeri razionali; citiamo tre studi che hanno adottato questo approccio e hanno trovato prove moderate a sostegno di tale relazione. Il primo è quello di Gomez e colleghi (2014) che hanno deciso di utilizzare il “Numerical Stroop task” per la valutazione del controllo inibitorio (Gomez et al., 2014); esso consiste nella presentazione di stimoli che elicitano

2 risposte alternative e incompatibili, una delle quali (quella che non si deve dare) è più spontanea rispetto all'altra (che si deve dare) perché è stata automatizzata (nel caso dello Stroop numerico, la prova consta di due parti: una baseline, in cui viene chiesto al bambino di contare quanti asterischi sono presenti in ogni casella di una tabella, ed una fase Stroop, in cui viene chiesto al bambino di contare quanti elementi (numeri) sono presenti dentro ogni cella). Gli autori hanno scoperto che le differenze individuali nel controllo inibitorio erano correlate alle prestazioni sul confronto tra frazioni, specialmente quando venivano proposti problemi "incongruenti" con la pregressa conoscenza dei numeri interi. Avgerinou e colleghi (2019) hanno invece deciso di utilizzare con strumento di valutazione del controllo inibitorio alcune attività "Go/No Go", in cui si richiede al partecipante di eseguire 'n'azione dati determinati stimoli (ad esempio, premere un pulsante quando compare un frutto rosso) e di inibire l'azione quando sottoposto ad un diverso insieme di stimoli (ad esempio, non premerlo quando compare una verdura verde); la capacità di essere accurati nello svolgere le azioni "Go" è risultata predittiva delle prestazioni sulle frazioni (Avgerinou & Tolmie, 2019). Infine, Ren e colleghi (2021) hanno utilizzato il metodo "Hearts and Flowers" (Diamond & Wright, 2014) per la valutazione del controllo inibitorio; esso consiste in un task ibrido che combina elementi di un task Stroop ad elementi di shifting task: in un primo blocco di attività (condizione congruente) viene visualizzato un cuore sul lato sinistro o destro del monitor ed i soggetti devono rispondere la posizione in cui il cuore viene visualizzato, mentre in un secondo blocco (non congruente), i soggetti vedono un fiore invece di un cuore e devono rispondere premendo il tasto opposto alla posizione in cui è esposto il fiore. Questi due blocchi misurano le prestazioni di base per la reazione di scelta alla posizione e le prestazioni di controllo inibitorio in cui le caratteristiche degli stimoli (in questo caso la posizione) interferiscono con l'attività di reazione alla scelta di premere il

tasto sinistro o destro. Il controllo inibitorio misurato in tale modalità è risultato correlato con l'accuratezza del confronto decimale nei bambini delle scuole medie (Ren & Gunderson, 2021).

Come abbiamo potuto appurare con quanto precedentemente descritto, esistono molteplici modalità di valutazione del controllo inibitorio. Negli ultimi anni, i ricercatori hanno suggerito l'impatto del controllo inibitorio sugli outcome scolastici possa variare a seconda della modalità con cui esso viene misurato, e nello specifico a seconda del livello di valenza emotiva associata al compito scelto (Willoughby et al., 2011). In particolare, possiamo distinguere due forme di controllo inibitorio: il cosiddetto controllo inibitorio "caldo", necessario quando i bambini sono coinvolti in compiti o attività che coinvolgono la regolazione degli affetti o delle emozioni, ed il cosiddetto controllo inibitorio "freddo", necessario per compiti o attività che sono decontestualizzati e in qualche modo "astratti". Ad esempio, per quanto riguarda task comportamentali che si avvalgono del controllo inibitorio, la distinzione tra le due forme viene effettuata a seconda che essi utilizzino (CI "caldo") o non utilizzino ("CI freddo") premi o punizioni (per esempio, dando o togliendo premi al bambino, oppure dando premi più grandi per periodi più lunghi di CI) (Zelazo et al., 2010). Un esempio di attività di CI "caldo" è il "ritardare lo snack", in cui a un bambino viene presentata l'opzione di ricevere immediatamente una piccola porzione di uno snack o una porzione più grande dopo un certo periodo di tempo (Shoda et al., 1990), mentre uno di CI "freddo" è il task "testa-piedi", in cui ai bambini viene detto di toccarsi la testa o i piedi e devono svolgere l'azione opposta a quella che sentono. Alcuni ricercatori hanno suggerito che il CI freddo è più associato alle abilità scolastiche rispetto all'IC caldo a causa della maggiore somiglianza nella valenza emotiva tra i task di CI "freddo" e i compiti che abitualmente vengono richiesti a scuola (Rimm-Kaufman et al., 2009); tuttavia, i risultati sono equivoci riguardo a questa distinzione: ad esempio, Allan e colleghi (2011) ritengono che queste due tipologie non siano del tutto separabili, oppure Carlson e colleghi (2004) hanno individuato correlazioni tra task che potrebbero essere classificati non solo relativi al controllo inibitorio “freddo”, ma anche a quello “caldo” (Allan & Lonigan, 2011; Carlson et al., 2004). In conclusione, sebbene sia chiaro che esiste una relazione tra controllo inibitorio misurato da task comportamentali e abilità scolastiche, non è chiaro se la valenza emotiva del compito moderi o meno queste associazioni, ma rappresenta indubbiamente un aspetto di interesse da approfondire con ulteriori studi.

Il rapporto tra funzioni esecutive e l’apprendimento matematico – flessibilità cognitiva

Il rapporto tra la flessibilità cognitiva e l’apprendimento matematico è tra gli aspetti da noi indagati quello meno valutato in letteratura; essa viene di frequente indagata in studi che valutano il rapporto tra funzioni esecutive nel loro complesso e apprendimento matematico, ma raramente è stata indagata in maniera sistematica singolarmente. In questo contesto, la base per le nostre riflessioni sull’argomento è stata una utilissima metanalisi di Alanny Nunes de Santana et al. del 2022, che ha permesso di raccogliere gran parte delle evidenze sull’argomento. Come già abbiamo descritto in precedenza, la flessibilità cognitiva è una funzione esecutiva avanzata, che permette di risolvere un problema in un modo e successivamente risolverlo in maniera differente, avendo percezione dell’esistenza di spiegazioni e possibilità alternative mentre si sovrascrivono i comportamenti automatici (Dick, 2014). In questo senso, è chiaro che l’abilità di modificare la propria strategia e non commettere più volte lo stesso errore, alla cui base vi è la flessibilità cognitiva, può avere un impatto importante sugli outcomes matematici, dal momento che una buona performance in matematica richiede che gli studenti valutino e sappiano alternare strategie differenti per non perseverare nell'errore (Blair & Razza, 2007; Bock et al., 2015).

Esistono studi che affermano l'importanza della FC nella risoluzione creativa dei problemi, essendo essa coinvolta nella creazione e nella selezione delle strategie di lavoro (Cragg & Chevalier, 2012). La review precedentemente citata rivela che la flessibilità cognitiva può essere considerata un buon predittore dei risultati in matematica nei bambini a causa della maggiore capacità, nei bambini con migliore flessibilità cognitiva, di muoversi tra differenti strategie matematiche per risolvere i problemi o raggiungere una migliore comprensione concettuale (Santana et al., 2022). I risultati emersi possono essere spiegati con il fatto che la FC favorisce l'adattamento ai cambiamenti ambientali, permettendo di spostare l'attenzione e l'impegno del soggetto per andare incontro alle richieste di nuovi compiti (Bull & Scerif, 2001; der Ven et al., 2012).

La relazione tra FC e matematica non differisce tra le differenti abilità matematiche ma si applica in maniera trasversale (Santana et al., 2022); questo risultato può essere spiegato secondo il modello proposto da Bethany Rittle-Johnson e colleghi (2001), che distingue due fondamentali forme di conoscenza coinvolte nell'apprendimento: quella *procedurale*, ovvero l'abilità di eseguire sequenze di azioni per risolvere i problemi (legata a specifici tipi di problema e non ampiamente generalizzabile) e quella *concettuale,* ovvero la capacità di comprendere in maniera implicita o esplicita i principi che governano un dominio, nonché le relazioni tra singole "unità di conoscenza" all'interno di quel dominio (Rittle-Johnson et al., 2001). Queste due forme di conoscenza, secondo gli autori, si influenzano reciprocamente e si sviluppano insieme, suggerendo che l'acquisizione di un tipo di conoscenza (e dunque, applicando il concetto, anche di abilità matematica) influenzi e sia influenzato dall'altra, indipendentemente dall'ordine di acquisizione. In ambito matematico, possiamo definire l'abilità "procedurale" come l'"how-to", l'abilità di selezionare e mettere in pratica procedure matematiche in maniera accurata ed efficiente (Cragg & Chevalier, 2012; Gilmore & Cragg, 2018); è stato dimostrato che la FC impatta su questo tipo di performance, in quanto i bambini che riescono a adattare strategie già esistenti di procedure già conosciute a nuove situazioni tendono a non perseverare negli stessi errori, decidendo quale strategia sia la migliore da usare nelle varie situazioni. Inoltre, essa facilita l'abilità di spostare l'attenzione attraverso molteplici aspetti dei compiti matematici, tra i quali citiamo l'incorporare nuove informazioni a quelle già ottenute oppure il manipolare e mettere insieme strategie di addizione, sottrazione e moltiplicazione per risolvere i problemi (Morgan et al., 2019). In relazione invece alla matematica "concettuale", ossia la comprensione di concetti, principi e relazioni che stanno alla base di un dominio, la CF ha un impatto importante in quanto essa aiuta i bambini a prestare attenzione a eventuali cambiamenti di significato nel testo, ad incorporare nella strategia di risoluzione conoscenze aggiuntive e, al contempo, cestinare o aggiornare conoscenze già usate in precedenza (Morgan et al., 2019).

Il risultato della metanalisi ha mostrato che l'associazione tra FC e apprendimento della matematica è tanto più forte quanto più i bambini sono piccoli. Questo può essere attribuito al fatto che ad un aumento importante e progressivo nel corso della scuola elementare della complessità dei task matematici, che richiedono sempre più efficienza e flessibilità, non corrisponde un aumento altrettanto rapido della flessibilità cognitiva (Espy, 1997; Gilmore & Cragg, 2018) che, come abbiamo già citato nel quadro teorico, è una delle più tardive a svilupparsi.

Dopo aver analizzato in dettaglio la relazione tra le funzioni esecutive e l'apprendimento in matematica, partendo proprio da queste basi, il nostro focus di ricerca si è spostato sulla relazione tra le funzioni esecutive e la didattica della matematica. L'obiettivo dei prossimi paragrafi sarà quello di comprendere se e come le funzioni esecutive (appurato che impattano sul dominio cognitivo della matematica) impattino anche sull'efficacia dei differenti approcci di insegnamento della matematica, quindi sulla componente didattica.

RICERCA IN LETTERATURA SUL RAPPORTO TRA FE E APPRENDIMENTO DELLA MATEMATICA (DOMINIO DELLA DIDATTICA DELLA MATEMATICA)

Rapporto tra funzioni esecutive e didattica della matematica – generalità

La didattica della matematica è una disciplina che si occupa di studiare e promuovere i processi di insegnamento e apprendimento della matematica in contesti educativi formali e informali; tra gli obiettivi della didattica della matematica vi è quello di sviluppare negli studenti non solo le competenze specifiche della disciplina, ma anche le abilità trasversali che possono favorire il successo scolastico e la cittadinanza attiva, come abbiamo visto nelle Indicazioni Nazionali. Indubbiamente, per lo sviluppo delle competenze trasversali, un ruolo importante è svolto dalle funzioni esecutive, che nel contesto della didattica della matematica consentono agli studenti di focalizzare l'attenzione sui dati rilevanti, inibire le risposte impulsive o errate, cambiare strategia quando necessario, mantenere e manipolare le informazioni nella memoria di lavoro, applicare regole e principi logici, organizzare i passaggi necessari per risolvere un problema e verificare la correttezza delle soluzioni. Nonostante l'evidente rilevanza delle funzioni esecutive per l’apprendimento della matematica, non sono molti gli studi che hanno indagato in maniera specifica i rapporti tra queste abilità e i vari approcci didattici alla matematica; a nostro avviso, i motivi nei quali ricercare queste difficoltà sono molteplici. Uno dei possibili ostacoli alla ricerca sulle funzioni esecutive e la didattica della matematica è la difficoltà di definire e misurare le funzioni esecutive in modo univoco ed efficace (Hughes & Graham, 2002). Infatti, le funzioni esecutive non sono una singola entità, ma un insieme di abilità che lavorano in maniera simultanea e che possono variare a seconda del contesto e del compito. Un altro possibile ostacolo alla ricerca su questo tema è la complessità di isolare gli effetti dei diversi approcci di insegnamento della matematica da quelli di altri fattori che possono influenzare l'apprendimento; tra questi fattori ci sono il contesto scolastico, il livello socioeconomico, le motivazioni, le emozioni, le credenze e le attitudini degli alunni verso la matematica, tutti aspetti che possono interagire con le funzioni esecutive e con i diversi approcci didattici alla matematica, rendendo difficile stabilire relazioni causali tra le variabili in gioco (Aristovnik et al., 2017; Islam et al., 2011; Remali et al., 2013). Un ulteriore ostacolo alla ricerca su questo argomento è la scarsità di collaborazione tra ricercatori e insegnanti nella progettazione e nella valutazione degli interventi didattici.

Per tutti questi motivi, nel mio lavoro ho cercato assumere questa prospettiva, almeno in parte, utilizzando le fonti disponibili relative al dominio didattico, e, laddove scarse o assenti, cercando di porre in confronto la prospettiva didattica con i contributi provenienti da altri ambiti di ricerca (psicologia, scienze cognitive, neuroscienze, ecc.) e di ipotizzare quali in quali ambiti dei vari approcci di insegnamento-apprendimento le singole FE potessero avere un ruolo.

Rapporto tra apprendimento per problemi e funzioni esecutive

Generalità

L' apprendimento per problemi (problem-based learning o PBL), nato in origine per migliorare l'apprendimento nelle facoltà di medicina, è un approccio che prevede che gli studenti affrontino situazioni problematiche autentiche e reali, che richiedono l'attivazione delle loro conoscenze pregresse e la ricerca di nuove informazioni, al fine di apprendere concetti ancora non conosciuti; il ruolo dell'insegnante è quello di facilitare il processo di apprendimento, non presentandosi come un "saggio sul palco", ma preparando e presentando il problema, interagendo con gli studenti, monitorandoli, prendendo appunti relativamente al processo e guidando gli studenti alla soluzione, senza inteferire (Ali, 2019). Le caratteristiche dei problemi su cui si basa il PBL sono le seguenti (Barrows, 1996)

- Il problema come punto di partenza dell'apprendimento;
- il problema è formulato in modo aperto e sfidante, in modo da stimolare la curiosità e la motivazione degli studenti;
- il problema è collegato alla realtà e ai contesti di vita degli studenti
- il problema richiede l'uso di diverse fonti di informazione e di diversi strumenti di rappresentazione;
- il problema richiede la collaborazione tra gli studenti, che devono confrontarsi e negoziare le soluzioni;
- il problema richiede la riflessione metacognitiva sugli apprendimenti e sui processi utilizzati.

Non abbiamo individuato in letteratura molti studi che valutassero in maniera generale e complessiva il rapporto tra problemi e funzioni esecutive; tra quelli che abbiamo individuato, citiamo lo studio di Agostino et al. (2010), che, osservando la questione sotto una lente cognitiva, ha dimostrato come tutte le funzioni esecutive siano coinvolte nel processo di risoluzione di word problems, sia one-step che multi-step; nello specifico, lo studio dimostra che la memoria di lavoro è coinvolta sia nella sua componente verbale che visuo-spaziale, che il controllo inibitorio (misurato in differenti modalità) ha un impatto sull'abilità di problem solving del bambini, così come la capacità di "shifting", ossia la capacità di cambiare atteggiamento mentale in un contesto che prevede più compiti (assimilabile perciò alla flessibilità cognitiva) (Agostino et al., 2010).

Su queste basi, riteniamo che l'apprendimento per problemi possa favorire lo sviluppo delle funzioni esecutive e l'apprendimento della matematica nei bambini perché li mette di fronte a situazioni nuove e complesse, che richiedono l'uso di strategie cognitive flessibili e creative e perché potrebbe aiutarli in vari aspetti, tra cui integrare le conoscenze matematiche con quelle di altre discipline e con le esperienze personali, essere stimolati a porsi domande, a cercare informazioni, a formulare ipotesi e a verificarle, essere incoraggiati a lavorare in gruppo, sviluppando le abilità sociali e comunicative, essere supportati nel monitorare e regolare il proprio comportamento, attraverso il feedback dell'insegnante e dei pari.

Nei prossimi paragrafi andremo ad indagare il rapporto tra l'apprendimento per problemi in didattica della matematica e le singole funzioni esecutive.

Apprendimento per problemi e memoria di lavoro

Come abbiamo già citato, l'apprendimento per problemi in matematica è una modalità di insegnamento e apprendimento che si basa sull'uso di problemi matematici come punto di partenza e come strumento per costruire e applicare le conoscenze matematiche (Jonassen, 2010); rispetto ad altre modalità didattiche, l'apprendimento per problemi in matematica ha numerosi vantaggi, come il favorire la motivazione, l'interesse, il coinvolgimento e la soddisfazione degli studenti, il promuovere lo sviluppo di abilità cognitive superiori, come il pensiero critico, il ragionamento, la creatività e la metacognizione, il facilitare il trasferimento e l'integrazione delle conoscenze matematiche in contesti diversi. Come abbiamo già indagato nel quadro teorico, la WM è composta da tre componenti principali: il loop fonologico (responsabile della memorizzazione e della ripetizione delle informazioni verbali o acustiche), lo sketchpad visuo-spaziale (responsabile della memorizzazione e della manipolazione delle informazioni visive o spaziali) e il buffer episodico (responsabile dell'integrazione e della conservazione delle informazioni provenienti dalle altre componenti della WM o dalla memoria a lungo termine); la WM è controllata da un'ulteriore componente, chiamata esecutivo centrale, che coordina le altre componenti e regola l'attenzione, il monitoraggio e la pianificazione.

Diversi studi nell'ambito del dominio della didattica della matematica hanno dimostrato che la WM è una funzione cognitiva essenziale per l'apprendimento per problemi in matematica per diversi aspetti; lo studio di Stender e Kaiser del 2017 ci fa notare come la memoria di lavoro sia alla base di una delle strategie euristiche (strategie inferenziali, "scorciatoie cognitive" che consentono di ridurre complessità del contesto decisionale, per prendere decisioni più semplicemente e rapidamente) di problem solving, ossia la capacità di scomporre i problemi in sottoproblemi, mantenendo a mente il quadro complessivo (Stender & Kaiser, 2017). Altri studi, come quello di Lee Swanson (2004), hanno dimostrato una correlazione la WM ed i task di problem solving matematico e che tale relazione era indipendente da altri fattori, quali la capacità di lettura, le abilità matematica ed altre funzioni esecutive come il controllo inibitorio (Swanson & Beebe-

Frankenberger, 2004); nella sua trattazione, Koichu (2014) evidenzia inoltre il ruolo della memoria di lavoro nell'ambito della cornice teorica del "cognitive decoupling", ossia dell'abilità di formare più di un modello mentale della situazione-problema e di tenerli a mente allo stesso momento (Koichu, 2014). Al tempo stesso, tuttavia, la WM rappresenta una delle maggiori sfide relative a questa questo approccio, in quanto la letteratura in ambito cognitivo dimostra che essa ha una capacità limitata e può essere facilmente sovraccaricata da informazioni irrilevanti o complesse (Niaz & Logie, 1993), cosa che accade nell'approccio per problemi perché non tutte le informazioni che ritroviamo nei word problems sono necessarie alla soluzione dello stesso.

Valutato quanto già presente in letteratura in relazione all'argomento, andiamo ad individuare ulteriori possibili ambiti di influenza della memoria di lavoro nel PBL:

- livello di complessità dei problemi affrontati: come indicato da Zan e Di Martino nel libro "Insegnare e apprendere Matematica con le Indicazioni Nazionali" (2017), i problemi si differenziano dagli esercizi in quanto chi li affronta non sa a priori quale procedura permette di raggiungere l'obiettivo, richiedono di prendere decisioni e quindi un comportamento strategico, permettendo di lavorare su conoscenze e abilità e di adattarle a situazioni nuove, mettendo in gioco competenze (Zan & Di Martino, 2017). Possiamo ipotizzare che tanto più i problemi avranno diversi approcci risolutivi, oppure presenteranno informazioni insufficienti o sovrabbondanti, tanto più richiederanno maggiore attivazione della WM, in quanto necessiteranno di una maggiore ricerca di informazioni, di generare molteplici ipotesi e una più ampia valutazione delle alternative.

  Ad esempio il problema:

"In un giardino ci sono 3 alberi di mele, 4 alberi di pere e 2 alberi di ciliegie. Ogni albero ha 10 frutti. Quanti frutti ci sono in tutto nel giardino?"

Potrebbe essere meno impegnativo per la memoria di lavoro rispetto a:

"In un giardino ci sono 3 alberi di mele, 4 alberi di pere e 2 alberi di ciliegie. Ogni albero ha 10 frutti. Sempre nello stesso giardino troviamo 2 cespugli di rose con 4 fiori ciascuno. Quanti frutti ci sono in tutto nel giardino?"

In quanto la memoria di lavoro verrà utilizzata anche per aspetti non necessari alla risoluzione del problema (ricordare il numero di cespugli di rose e di fiori).

Potremmo dunque ipotizzare che per ottenere un problema che non sovraccarichi la memoria di lavoro ma che al tempo stesso la stimoli la quantità di informazioni fornite per la risoluzione debba essere bilanciata.

- livello di conoscenza pregressa che si possiede sul dominio matematico: la conoscenza pregressa è rappresentata dalle esperienze, concetti compresi, abilità che i bambini portano con sé nel corso del processo di apprendimento, inclusa la conoscenza relativa al linguaggio e agli aspetti culturali (SurreySchoolsOne, n.d.). La conoscenza pregressa può facilitare l'apprendimento per problemi in matematica, in quanto riduce il carico cognitivo della WM e permette di riconoscere schemi, applicare regole e risolvere situazioni familiari; al tempo stesso, essa può anche ostacolare l'apprendimento per problemi in matematica, in quanto può generare interferenze e pregiudizi; da qui l'importanza, come vedremo successivamente, anche del controllo inibitorio. Per questo motivo, è importante verificare la qualità e l'adeguatezza della conoscenza pregressa degli studenti così da poter adattare le richieste (De Jong & Ferguson-Hessler, 1996).

- tipo di rappresentazione che si usa per illustrare il problema matematico: esistono diverse modalità di rappresentazione, come il linguaggio verbale, il linguaggio simbolico, le immagini, i grafici, le tabelle o le animazioni. Ogni modalità di rappresentazione ha dei vantaggi e degli svantaggi per l'apprendimento per problemi in matematica, in quanto alcune modalità possono essere di più semplice ed immediata comprensione di altre; la letteratura in didattica della matematica presenta, su questo, opinioni contrastanti: ad esempio, alcuni studi, come quello di Berends (2009) sostengono che la presenza di illustrazioni a supporto della soluzione del problema matematico peggiori la qualità della performance, in quanto (secondo la teoria del carico cognitivo) va ad impegnare inutilmente la memoria di lavoro (Berends & Van Lieshout, 2009); altri, come quello di Edens (2010), mostrano che l'utilizzo di schemi grafici favorisce la risoluzione dei problemi (Edens & Potter, 2008). Inoltre, alcune modalità possono richiedere una maggiore elaborazione, una maggiore astrazione o una maggiore integrazione di altre, oppure possono essere più adatte a certi tipi di problemi o a certi livelli di difficoltà. Anche affrontando questo aspetto sotto una lente cognitiva, è risultato importante variare le modalità di rappresentazione dei problemi matematici e insegnare agli studenti a trasformarle e a confrontarle tra loro (Mayer & Moreno, 2003).

In conclusione, è possibile ipotizzare un ruolo attivo della memoria di lavoro nell'apprendimento per problemi in matematica; pertanto, potrebbe essere utile tenerne conto nell'ambito dell'educazione matematica e di adottare delle strategie didattiche appropriate per ottimizzare la WM degli studenti e favorire il loro apprendimento per problemi in matematica.

Apprendimento per problemi e controllo inibitorio

Tra le funzioni esecutive, una delle più importanti è il controllo inibitorio, che consiste nella capacità di inibire o controllare risposte impulsive o automatiche e generare risposte mediate dall’attenzione e dal ragionamento. La letteratura scientifica in didattica della matematica sul tema del rapporto tra apprendimento per problemi e controllo inibitorio è ancora scarsa e non conclusiva; il rapporto tra controllo inibitorio e problem-solving, che rappresenta tuttavia solo una parte dell’approccio di apprendimento per problemi, è stato indagato dalla review “Inhibitory control in mathematical thinking, learning and problem solving: a survey” di Van Dooren et al. (2015), che ha cercato di sfruttare una cornice teorica di tipo cognitivo per porla in relazione con gli aspetti più recenti relativi alla didattica della matematica. I risultati della ricerca affermano che, sebbene il controllo inibitorio abbia sicuramente un ruolo importante nell’approccio cognitivo alla ricerca, molto è ancora da esplorare sul piano della didattica (Van Dooren & Inglis, 2015).

Possiamo ipotizzare un ruolo del controllo inibitorio nell’ambito dell’apprendimento per problemi in matematica in relazione ai seguenti aspetti, per i quali abbiamo individuato riferimenti appartenenti al dominio delle scienze cognitive:

- il comportamento motorio: il controllo inibitorio permette di mantenere una postura adeguata durante le attività didattiche, evitando di alzarsi continuamente o di disturbare i compagni con gesti o rumori; il controllo inibitorio permette anche di coordinare la grafia e l’abilità visuo-motoria, abilità utili per la scrittura e la rappresentazione dei problemi matematici (Sartori et al., 2019).

- l'attenzione: il controllo inibitorio permette di filtrare gli stimoli irrilevanti che possono distrarre l'attenzione dai problemi da risolvere, come i rumori ambientali, le conversazioni dei compagni o i propri pensieri; il ruolo del controllo inibitorio nell’attenzione è ben documentato in letteratura (Neill et al., 1995).

- il processo risolutivo: il controllo inibitorio permette di inibire le risposte intuitive o errate che possono interferire con la soluzione corretta.

Segue un esempio di ruolo del controllo inibitorio sull’apprendimento per problemi:

“In una scatola ci sono 12 matite. 4 matite sono rosse, 3 matite sono blu e le altre sono verdi. Quante matite verdi ci sono nella scatola?” Per risolvere questo problema, gli alunni devono usare il loro controllo inibitorio per reprimere la tendenza a guardare solo i numeri dati e a pensare che la risposta sia 4, 3 o 7, che sarebbero risposte errate; devono invece applicare la regola che dice di sottrarre il numero totale di matite dal numero di matite rosse e blu.

Apprendimento per problemi e flessibilità cognitiva

Riprendendo il quadro teorico, la flessibilità cognitiva è la capacità di adattare il proprio pensiero e il proprio comportamento a situazioni nuove, complesse o incerte, modificando le proprie strategie, le proprie prospettive o le proprie regole in base ai cambiamenti delle condizioni ambientali o degli obiettivi, mentre l’apprendimento per problemi in matematica è una metodologia didattica che si basa sulla presentazione di situazioni problematiche agli studenti, al fine di stimolare il loro ragionamento, la loro creatività e la loro capacità di collaborare.

In letteratura in didattica della matematica esistono alcuni studi che hanno indagato il rapporto tra flessibilità cognitiva e apprendimento per problemi in matematica, anche se con risultati non sempre concordanti. Lo studio di Scheibling-Sève et al. (2022) ha esaminato l'effetto della flessibilità cognitiva sul ragionamento proporzionale in bambini di 9-10 anni. Lo studio ha manipolato la flessibilità cognitiva dei partecipanti attraverso un intervento basato sulla categorizzazione multipla dei problemi proporzionali, una strategia didattica che consiste nel presentare agli studenti problemi matematici che possono essere risolti da diverse prospettive, a seconda della struttura moltiplicativa (moltiplicazione/divisione, frazione, proporzionalità) e del punto di vista (partitivo o unitario) adottato. I risultati hanno mostrato che la flessibilità cognitiva era positivamente correlata al ragionamento proporzionale e che l'intervento basato sulla categorizzazione multipla aumentava sia la flessibilità cognitiva che il ragionamento proporzionale (Scheibling-Sève et al., 2022). Un recente studio del 2021 ha esplorato il processo di risoluzione dei problemi matematici in studenti di scuola elementare dal punto di vista della flessibilità cognitiva. Lo studio ha usato un approccio qualitativo basato sull'analisi delle trascrizioni delle interviste con gli studenti mentre risolvevano problemi matematici aperti. Lo studio ha identificato quattro indicatori della flessibilità cognitiva: l'uso di diverse strategie, il cambiamento di prospettiva, la revisione degli errori e la generalizzazione delle soluzioni. I risultati hanno mostrato che gli studenti con una maggiore flessibilità cognitiva erano in grado di risolvere i problemi matematici con maggiore efficacia e creatività rispetto agli studenti con una minore flessibilità cognitiva (Rahayuningsih et al., 2021). Secondo Stenberg et al. (2022), il concetto di flessibilità cognitiva nella risoluzione dei problemi è fortemente correlato a quello di "incertezza", ossia di uno stato misto di curiosità, ambiguità e senso di dubbio che spingono il soggetto a risolvere il problema; l'"incertezza" porta il soggetto a cercare modi creativi di risoluzione, che si avvalgono della flessibilità cognitiva (Stenberg et al., 2022). La flessibilità cognitiva, inoltre, influenza anche il modo in cui i problemi vengono percepiti: è stato dimostrato, infatti, dallo studio di Rathgeb-Schnierer (2015) che esistono diversi pattern di ragionamento per i quali i problemi vengono considerati facili o difficili; in genere, chi ha maggiore flessibilità cognitiva tende a considerare i problemi più facili o più difficili per le loro caratteristiche intrinseche (ad esempio, analogie o relazioni numeriche) piuttosto che per quelle legate alla procedura di risoluzione (es esempio, applicare un algoritmo standard di risoluzione (Rathgeb-Schnierer, 2015).

La relazione tra flessibilità cognitiva e apprendimento per problemi in matematica ha delle importanti implicazioni anche a livello applicativo. Ad esempio, si potrebbero proporre ai bambini delle attività ludiche o dei giochi che richiedano di cambiare frequentemente le regole o le strategie, come il gioco dei sette errori (attività didattica che consiste nel confrontare due testi o due immagini che presentano delle differenze o degli errori e nel cercare di individuarli e correggerli) o il gioco delle coppie (attività didattica che consiste nel trovare e abbinare due elementi che hanno una relazione matematica tra loro); si potrebbero presentare ai bambini dei problemi matematici aperti o sfidanti, che richiedano di analizzare diverse soluzioni possibili o di confrontarsi con diverse rappresentazioni dei dati; si potrebbero incoraggiare i bambini a riflettere sul proprio processo di risoluzione dei problemi e a confrontarsi con i propri compagni o con gli insegnanti. Queste strategie potrebbero avere degli effetti benefici sia sul piano cognitivo sia sul piano affettivo-motivazionale degli studenti, favorendo il loro sviluppo della flessibilità cognitiva e dell'apprendimento per problemi in matematica.

Ad ogni modo, la relazione tra flessibilità cognitiva e apprendimento per problemi in matematica è ancora poco esplorata e non abbiamo individuato studi longitudinali o sperimentali che ne dimostrino in maniera univoca la causalità. Inoltre, la flessibilità cognitiva e l'apprendimento per problemi in matematica sono due variabili complesse e multidimensionali, che possono essere influenzate da altri fattori cognitivi, affettivi, sociali e ambientali. Pertanto, si rende necessario approfondire ulteriormente questo tema di ricerca, utilizzando metodi diversificati e campioni più ampi e rappresentativi.

Seguono esempi di applicazione della flessibilità cognitiva in apprendimento per problemi:

"*In una classe ci sono 24 bambini. 8 bambini hanno la maglietta rossa, 10 bambini hanno la maglietta blu e i restanti hanno la maglietta gialla. Quanti bambini hanno la maglietta gialla?" Per risolvere questo problema, gli alunni devono usare la loro flessibilità cognitiva per cambiare prospettiva e usare diverse strategie, ad esempio quella della sottrazione: 24 - (8 + 10) = 24 - 18 = 6, quella della complementazione: 8 + ? = 24 - 10 = 14. Quindi: ? = 14 - 8 = 6, oppure quella della rappresentazione grafica, disegnando una tabella con le tre colonne delle magliette rosse, blu e gialle e riempiendo le celle con i numeri corrispondenti e contando le celle vuote nella colonna delle magliette gialle.*

"In un paniere ci sono 20 mele. Alcune mele sono verdi e altre sono rosse. Il numero delle mele verdi è il doppio del numero delle mele rosse. Quante mele verdi e quante mele rosse ci sono nel paniere?" Per risolvere questo problema, gli alunni devono usare la loro flessibilità cognitiva per passare da un compito all'altro e per apprendere da errori e feedback.

Rapporto tra laboratorio di matematica e funzioni esecutive

Generalità

Parafrasando il quadro teorico, il laboratorio di matematica è una modalità di insegnamento-apprendimento della matematica che si basa sull'attività pratica, la manipolazione di materiali, la sperimentazione, la risoluzione di problemi e la comunicazione. Il laboratorio di matematica ha come obiettivi lo sviluppo del pensiero logico-matematico, la costruzione di significati e concetti matematici, la promozione di atteggiamenti positivi verso la matematica e il potenziamento delle competenze trasversali. Come abbiamo già indagato nella parte iniziale, le lenti teoriche attraverso cui interpretiamo il laboratorio di matematica sono essenzialmente due:

- La "prospettiva della multimodalità": visione della conoscenza matematica che coinvolge diverse modalità cognitive e semiotiche, come il linguaggio verbale, il gesto, la scrittura, il disegno, la manipolazione di materiali, ecc. Questa prospettiva riconosce il ruolo del corpo e delle sue espressioni nell'apprendimento della matematica e considera le diverse rappresentazioni semiotiche come risorse per costruire significati e comunicare idee. La prospettiva della multimodalità implica una didattica della matematica che stimoli gli studenti a usare vari modi di pensare, parlare, muoversi e sentire in situazioni problematiche e creative. (Sabena et al., 2019)
- La "teoria della mediazione semiotica": quadro teorico che si ispira alla prospettiva vygotskiana e che considera il ruolo degli artefatti e dei segni come strumenti di mediazione tra il soggetto e l'oggetto di conoscenza. Secondo questa teoria, gli artefatti sono prodotti culturali che possono essere usati dagli

> insegnanti per stimolare e guidare i processi di apprendimento degli studenti, favorendo la costruzione di significati e la comunicazione di idee matematiche. I segni sono elementi semiotici che rappresentano gli oggetti matematici e che possono essere manipolati e trasformati secondo regole convenzionali. La mediazione semiotica implica una didattica della matematica che promuova l'uso di vari artefatti e segni, sia tradizionali che tecnologici, e che tenga conto delle diverse modalità cognitive e comunicative degli studenti. (Bartolini Bussi, 2008)

Come già abbiamo descritto, le funzioni esecutive sono quelle abilità cognitive che permettono di pianificare, organizzare, monitorare e regolare il proprio comportamento e il proprio pensiero in funzione di obiettivi e situazioni e per questo motivo sono fondamentali per l'apprendimento in generale e per la matematica in particolare. Su queste basi, possiamo ipotizzare che la relazione tra il laboratorio di matematica e le funzioni esecutive sia duplice: da un lato, infatti, il laboratorio di matematica richiede e stimola l'uso delle funzioni esecutive da parte degli studenti; dall'altro, il laboratorio di matematica favorisce lo sviluppo e il potenziamento delle funzioni esecutive stesse. Più nello specifico, possiamo ipotizzare che nella teoria della mediazione semiotica, le funzioni esecutive siano coinvolte sia nel processo di trasformazione dei segni, che richiede di coordinare diverse rappresentazioni semiotiche e di applicare regole convenzionali, sia nell'uso degli artefatti, che richiede di gestire le relazioni tra il livello pratico e il livello riflessivo; nella prospettiva della multimodalità, invece, le funzioni esecutive potrebbero coinvolte nel processo di integrazione delle diverse modalità cognitive e semiotiche, che richiede di coordinare vari modi di pensare, parlare, muoversi e sentire.

La didattica nei campi di esperienza è efficace per promuovere l'apprendimento della matematica in modo significativo e motivante, per sviluppare competenze trasversali come il problem solving e l'argomentazione, per favorire l'integrazione tra i diversi ambiti della matematica e tra la matematica e le altre discipline, per valorizzare le differenze individuali e culturali tra gli allievi. Riteniamo che un approccio così trasversale preveda un ruolo importante delle funzioni esecutive.

Laboratorio di matematica e memoria di lavoro

La letteratura in didattica della matematica dimostra il ruolo della memoria di lavoro nell'ambito dell'approccio laboratoriale sotto numerosi aspetti. Come abbiamo accennato nella parte introduttiva, il ruolo dei dispositivi elettronici è ultimamente diventato particolarmente importante; nel lavoro di Franziska (2022), viene presentato l'utilizzo di risorse acustiche (nello specifico, la radio) come una modalità di diminuire il carico cognitivo legato alla lettura ed alle illustrazioni in bambini con deficit di lettura; allo stesso modo, l'utilizzo di questo tipo di risorse può avere un effetto positivo sullo sviluppo della memoria di lavoro, in quanto stimola il soggetto a costruirsi la propria rappresentazione mentale (Franziska, 2022); d'altro canto, l'utilizzo di molteplici canali sensoriali (come avviene di frequente nell'approccio del laboratorio e, nello specifico, considerando la prospettiva della multimodalità) sembra avere un ruolo importante nel ridurre il carico cognitivo: riprendendo Mayer (2005), Ladel et. al (2009) presentano brevemente nel loro studio come l'utilizzo di strumenti multimediali (ad esempio, video) permetta di sfruttare un doppio canale visivo/uditivo e come questo diminuisca il carico della memoria di lavoro (Ladel & Kortenkamp, 2009). Sulla base di questa teoria, anche rimanendo focalizzati sull'aspetto visivo, modificare la tipologia di messaggio fornito (ad esempio, testo scritto unito a simboli) favorisce la diminuzione del carico di lavoro della WM; è stato dimostrato da Noll et al. (2017) che bambini con disabilità comprendono meglio il testo scritto se accompagnato da simboli e che questo avviene, in genere, senza che nessuna spiegazione sul simbolo venga fornita in precedenza (Noll et al., 2017). Appare tuttavia fondamentale che le risorse grafiche scelte dal punto di vista visivo non siano eccessivamente complesse e non vadano a sovraccaricare la memoria di lavoro: lo studio di Ben-Haim et al. (2019) ha dimostrato che, a parità di apprezzamento da parte degli studenti, risultava di gran lunga più efficace un'attività didattica basata su contenuti grafici più semplici rispetto ad una con contenuti grafici più complessi ed animati (Ben-Haim et al., 2019). Tutte le fonti che abbiamo individuato sull'argomento, pur essendo afferenti al dominio della didattica della matematica, utilizzano come base per le proprie argomentazioni la teoria del cognitive overload, andando così ad integrare l'approccio didattico a quello cognitivo.

Anche il movimento, aspetto fondamentale nella prospettiva della multimodalità, è stato collegato da alcuni studi alle performance matematiche e alla memoria di lavoro ad esse correlate. Sebbene non pienamente afferente al dominio della didattica della matematica, ritengo sia interessante citare il lavoro di Henz et al. (2015), che ha dimostrato attraverso indagini elettroencefalografiche che la possibilità di muoversi rispetto al rimanere immobili durante l'esecuzione di task matematici impatta positivamente sulla memoria di lavoro visuo-spaziale, il che impatta a sua volta positivamente sulle performance matematiche di algebra, geometria e calcolo (Henz et al., 2015). Andando a definire per punti gli eventuali ambiti di impatto della memoria di lavoro nella didattica laboratoriale, possiamo individuare:

- memorizzare ed elaborare diverse informazioni, tra cui dati, regole, procedure, formule, algoritmi, necessari per svolgere i compiti via via assegnati.
- usare diversi strumenti (tecnologici o non), come software, calcolatrici, regoli, compassi, che richiedono agli studenti di memorizzare e

applicare le modalità d'uso e le funzioni degli strumenti stessi. A questo proposito, è interessante notare l'importanza dell'utilizzo di strumenti tecnologici come il laboratorio virtuale di matematica, forma di animazione che permette di visualizzare fenomeni astratti o esperimenti complessi e che si basa sulla memoria a doppia codifica, cioè sull'uso di informazioni visive e verbali per facilitare la memorizzazione e il recupero delle informazioni. Il laboratorio virtuale di matematica può essere usato per insegnare e apprendere diversi argomenti di matematica, come la geometria, l'algebra, la trigonometria, il calcolo, la statistica e la probabilità. Esso può essere utile, secondo la teoria del carico cognitivo (Plass et al., 2010), a diminuire il carico di memoria di lavoro necessario e dunque a migliorare l'apprendimento. L'articolo di Murtianto del 2022 presenta una revisione sistematica della letteratura sugli effetti della teoria del carico cognitivo sul laboratorio virtuale di matematica. La teoria del carico cognitivo è una teoria che mira a migliorare l'apprendimento di compiti cognitivi complessi, basandosi sulla conoscenza della struttura e dei processi cognitivi umani, assumendo che il fattore limitante per l'acquisizione di nuove conoscenze sia la capacità limitata della memoria di lavoro. Lo studio ha trovato il laboratorio virtuale di matematica ha un impatto positivo sull'apprendimento, in quanto riduce il carico cognitivo estraneo, ossia quello che è imposto alla memoria di lavoro da attività che non sono rilevanti per l'apprendimento, come la comprensione delle istruzioni, la navigazione nell'interfaccia, la gestione delle distrazioni (Murtianto et al., 2022).

- lavorare a piccoli gruppi, per confrontarsi, discutere e collaborare con gli altri, con la necessità di memorizzare e integrare le informazioni provenienti da diverse fonti (gli altri studenti, l'insegnante, i materiali), sfruttando perciò tutti i sottocomponenti della memoria di lavoro, anche quelle integrate.

- sperimentare la matematica come una scienza viva e dinamica, che si occupa di problemi reali e stimolanti e non solo di aspetti astratti e teorici; secondo studi di neuroimaging, questo aumenta il livello di motivazione e di interesse degli studenti verso la matematica, che a sua volta favorisce il funzionamento della memoria di lavoro (Szatkowska et al., 2008).

Volendo indagare possibili ruoli specifici della memoria di lavoro nella prospettiva della multimodalità, potremmo individuare i seguenti aspetti:

- Dalla WM alla multimodalità: integrare le informazioni provenienti da diverse modalità cognitive e semiotiche, come il linguaggio verbale, il gesto, il disegno, la manipolazione di materiali, ecc. Questo significa che la memoria di lavoro consentirebbe di costruire una rappresentazione mentale coerente e complessa dell'oggetto matematico in esame, tenendo conto delle diverse prospettive e dimensioni che lo caratterizzano. Ad esempio, la memoria di lavoro permetterebbe di integrare le informazioni visive, verbali e gestuali che si riferiscono a una figura geometrica, come un triangolo o un cerchio.

- Dalla multimodalità alla WM: la memoria di lavoro potrebbe essere potenziata dall'uso di diverse modalità cognitive e semiotiche, che possono offrire supporti esterni e interni per ridurre il carico cognitivo e facilitare il ragionamento matematico. Questo significa che l'uso di diverse modalità cognitive e semiotiche può aiutare a memorizzare e elaborare le informazioni in modo più efficace ed efficiente, sfruttando le risorse disponibili nell'ambiente o nella mente. Ad esempio, l'uso di materiali concreti o di disegni potrebbe aiutare a rappresentare e manipolare gli oggetti matematici; l'uso del linguaggio verbale o del gesto potrebbe aiutare a esprimere e comunicare le idee matematiche; l'uso di analogie o metafore potrebbe aiutare a comprendere e generalizzare i concetti matematici.

- Dalla WM alla mediazione semiotica: la memoria di lavoro permetterebbe di mantenere attive le informazioni provenienti dagli artefatti, dai segni e dalla memoria a lungo termine, di manipolarle e trasformarle in modo da produrre nuovi testi matematici, di partecipare alle attività collettive di discussione matematica, nelle quali si confrontano e si condividono i significati matematici costruiti individualmente o in piccolo gruppo.

- Dalla mediazione semiotica alla WM: in base a come viene applicata la teoria, la WM necessaria potrebbe essere influenzata dalla complessità e quantità delle informazioni da trattare, dal grado di familiarità con gli artefatti e i segni usati, dal livello di attenzione e concentrazione richiesto, dal tipo di modalità sensoriale coinvolta (visiva, uditiva, tattile, ecc.), dal grado di coinvolgimento emotivo e motivazionale.

In conclusione, la memoria di lavoro è verosimilmente una funzione esecutiva cruciale per la didattica della matematica attraverso l'approccio del laboratorio, in quanto è coinvolta in tutte le fasi del processo di insegnamento-apprendimento della matematica e ne influenza gli esiti. Il laboratorio di matematica richiede e stimola l'uso della memoria di lavoro da parte degli studenti e allo stesso tempo favorisce lo sviluppo e il potenziamento della stessa. Il laboratorio di matematica può quindi contribuire a formare degli studenti più competenti, autonomi e motivati verso la matematica.

Seguono alcuni esempi di attività di laboratorio di matematica in cui è evidenziato l'utilizzo della memoria di lavoro:

- *Messaggi cifrati: gli studenti devono costruire e risolvere dei codici segreti con le lettere dell'alfabeto e i numeri, stabilendo una corrispondenza tra le lettere e i numeri (A=1, B=2, C=3, ecc.) e poi scrivere dei messaggi segreti usando i numeri. In questo modo, gli studenti devono memorizzare la corrispondenza tra le lettere e i numeri e usarla per decifrare i messaggi degli altri.*

- *misurazioni con strumenti non convenzionali: si possono usare dei fili di lana o delle mollette per misurare la lunghezza di oggetti o di percorsi, per cui gli studenti devono memorizzare il numero di unità usate per misurare e confrontarlo con quello degli altri oggetti o percorsi.*

Laboratorio di matematica e controllo inibitorio

Il controllo inibitorio è una funzione esecutiva che consiste nella capacità di sopprimere o ignorare informazioni o risposte irrilevanti o interferenti per raggiungere un obiettivo ed è fondamentale per il funzionamento cognitivo e per l'apprendimento, in quanto permette di focalizzare l'attenzione, di selezionare le informazioni pertinenti, di evitare le distrazioni e di regolare il comportamento. Come abbiamo già citato in precedenza, il laboratorio di matematica prevede l'uso di materiali concreti o virtuali, giochi, problemi, situazioni problematiche, attività collettive e individuali.

Se il controllo inibitorio può facilitare l'apprendimento della matematica attraverso il laboratorio (Van Dooren & Inglis, 2015), è possibile anche ipotizzare che il laboratorio possa a sua volta favorire lo sviluppo del controllo inibitorio negli studenti. Infatti, il laboratorio di matematica presenta delle caratteristiche che possono stimolare e allenare la funzione esecutiva dell'inibizione, tra cui:

- La manipolazione di materiali concreti o virtuali: il laboratorio di matematica prevede l'uso di materiali diversi, sia reali che virtuali, che permettono agli studenti di esplorare le proprietà e le relazioni degli oggetti matematici, di trasformarli e di rappresentarli in modi diversi. Questo implica la capacità di inibire le rappresentazioni intuitive o errate e di adottare quelle formali e astratte.

- Il gioco: il laboratorio di matematica può prevedere l'uso di giochi come contesti motivanti e sfidanti per l'apprendimento della matematica; tali giochi richiedono agli studenti di seguire delle regole, di elaborare delle strategie, riflettere sulle proprie azione; anche in questo caso, il controllo inibitorio permette di inibire le risposte impulsive o errate e di selezionare quelle appropriate e corrette; i metodi basati sul gioco, inoltre, favoriscono lo sviluppo delle funzioni esecutive, compreso il controllo inibitorio (Lambert, 2021; Vidal Carulla et al., 2021)

- L'attività collettiva e individuale: il laboratorio di matematica può prevedere l'alternanza tra momenti di lavoro a piccoli gruppi e momenti di confronto con la classe intera, richiedendo agli studenti di comunicare e argomentare le proprie idee, di ascoltare e valutare quelle degli altri, di negoziare e condividere i significati matematici; la letteratura delle scienze cognitive ha dimostrato l'importanza del controllo inibitorio nell'ambito della regolazione delle emozioni, aspetto fondamentale per l'interazione tra pari (Carlson & Wang, 2007).

In relazione alla prospettiva della multimodalità, possiamo ipotizzare un ruolo del controllo inibitorio nei seguenti aspetti:

Ecco una possibile descrizione in maniera più approfondita di alcuni aspetti della prospettiva della multimodalità in cui potrebbe essere coinvolto il controllo inibitorio:

- La codifica e la decodifica dei segni multimodali: poiché la prospettiva della multimodalità si focalizza sui diversi modi di comunicare e rappresentare la matematica (ad esempio, le immagini, i gesti, i movimenti), si rende necessario per gli studenti utilizzare diverse modalità sensoriali (visiva, uditiva, tattile, ecc.) e diverse risorse semiotiche (parole, simboli, icone, ecc.).

Questo implica la capacità di inibire le interferenze tra i diversi sistemi semiotici e di selezionare quello più adeguato al contesto.

- Il passaggio da una modalità all'altra: la prospettiva della multimodalità prevede il passaggio da una modalità di comunicazione e rappresentazione della matematica all'altra, (ad esempio da una descrizione verbale a una rappresentazione grafica). Questo passaggio richiede agli studenti di trasformare e integrare le informazioni provenienti da diverse fonti e modalità, mantenendo la coerenza e la congruenza dei significati matematici, rendendo necessario inibire le rappresentazioni intuitive o errate (in una modalità che risulta a cavallo con la flessibilità cognitiva).

Esempio: si richiede agli studenti di individuare l'area di un triangolo; dovrà dunque passare da una modalità verbale (la descrizione del problema) a una modalità grafica (il disegno del triangolo) a una modalità simbolica (la formula dell'area). Per fare questo passaggio, gli studenti devono inibire le rappresentazioni intuitive o errate del triangolo (come, ad esempio, che sia equilatero o isoscele in base a come è disegnato) e le interferenze tra i diversi sistemi semiotici (come, ad esempio, che la lettera A indichi il vertice opposto all'angolo retto o l'altezza del triangolo invece che l'area, come richiesto dal contesto).

Di seguito, alcuni aspetti dell'approccio attraverso la teoria della mediazione semiotica in cui il controllo inibitorio potrebbe avere un ruolo:

- L'uso di artefatti: la teoria della mediazione semiotica prevede l'uso di artefatti come strumenti di comunicazione e rappresentazione della matematica; essi possono essere di diversa natura e origine, per cui il controllo inibitorio potrebbe essere coinvolto, analogamente a quanto già detto, nell'inibizione delle componenti più intuitive ed automatiche a favore di aspetti più ragionati.

Esempio – tangram: un puzzle cinese composto da sette pezzi geometrici (cinque triangoli, un quadrato e un parallelogramma) che possono essere combinati per formare diverse figure. Il tangram può essere usato per far esplorare agli studenti le proprietà e le relazioni delle forme geometriche, come la congruenza, la simmetria, l'area, il perimetro, ecc. Per usare il tangram, gli studenti devono inibire le rappresentazioni intuitive o errate delle figure (come, ad esempio, che siano tutte uguali o che abbiano lo stesso orientamento) e adottare quelle formali e astratte (come, ad esempio, che siano congruenti o simmetriche).

- L'orchestrazione della discussione matematica: la teoria della mediazione semiotica prevede l'orchestrazione della discussione matematica da parte dell'insegnante, che ha il compito di guidare gli studenti nella trasformazione delle tracce prodotte con gli artefatti in testi matematici condivisi dalla classe; come in tutte le fasi di discussione, che affronteremo meglio nel prossimo paragrafo, si rende necessaria una autoregolazione emotiva e sociale che si basa sul controllo inibitorio (Bartholomew et al., 2021).

In conclusione, si può affermare che è verosimile una possibile relazione (anche bidirezionale) tra il controllo inibitorio e il laboratorio di matematica in didattica della matematica. Il controllo inibitorio può essere considerato un fattore facilitatore dell'apprendimento della matematica attraverso il laboratorio, in quanto permette agli studenti di selezionare ed elaborare le informazioni pertinenti, di evitare le distrazioni e gli errori, di regolare il comportamento. Il laboratorio di matematica può essere considerato un fattore potenziatore del controllo inibitorio negli studenti, in quanto li stimola a manipolare i materiali, a risolvere i problemi, a partecipare alle attività collettive e individuali, allenando così la funzione esecutiva dell'inibizione.

Laboratorio di matematica e flessibilità cognitiva

Come già indagato nel quadro teorico, la flessibilità cognitiva è la capacità di cambiare prospettiva mentale e di adattarsi a situazioni nuove o mutevoli; è fondamentale nel risolvere problemi, superare i pregiudizi e affrontare le situazioni in un'ottica differente dal passato; questi aspetti si inseriscono perfettamente nel contesto del laboratorio di matematica, che, come sappiamo, non è un luogo fisico diverso dalla classe, ma un insieme strutturato di attività volte alla sperimentazione, alla scoperta, alla risoluzione di problemi e alla riflessione critica.

In questo contesto, gli strumenti digitali e multimediali giocano un ruolo essenziale; è interessante, in relazione a questo, citare l'utilizzo di alcuni strumenti digitali come il software Geogebra. Lo studio di Granberg et al. (2015) ci mostra l'impatto dell'uso di questo programma sia sulla flessibilità cognitiva che sulla capacità di collaborazione e discussione (aspetto che indagheremo in dettaglio nel paragrafo successivo). Durante la risoluzione di un problema, l'utilizzo del software ha favorito il ragionamento creativo degli studenti, in quanto il feedback fornito dal programma, diversamente da quello di un libro di testo, richiedeva di essere interpretato e valutato dagli studenti, che di volta in volta dovevano valutare perché il proprio lavoro aveva funzionato o meno; in questo modo, tale valutazione veniva successivamente utilizzata come base per il ragionamento creativo, per sviluppare differenti strategie di problem solving e per generare argomentazioni efficaci (Granberg & Olsson, 2015). La cornice teorica su cui si basano gli autori è cognitiva, dal momento che il ruolo delle risorse multimediali sulla flessibilità cognitiva è confermato anche da Spiro e colleghi (1988), che dimostrano che la costruzione di un modello mentale attraverso rappresentazioni provenienti da più canali sensoriali permette un guadagno negli studenti in termini di flessibilità cognitiva (Spiro et al., 1988).

Quale ulteriore ruolo potremmo ipotizzare per la flessibilità cognitiva nell'ambito del laboratorio di matematica?

Aspetti del laboratorio di matematica che potrebbero richiedere l'utilizzo della flessibilità cognitiva:

- passare da un'attività all'altra, seguendo le indicazioni dell'insegnante o in autonomia;
- cambiare strategia o metodo di calcolo in base alla situazione o al problema da risolvere;
- confrontarsi con diverse rappresentazioni della matematica, come il linguaggio naturale, il linguaggio simbolico, le immagini, i gesti, le azioni;
- integrare diverse fonti di informazione, come i testi scritti, le dimostrazioni pratiche, le spiegazioni orali;
- modificare il proprio punto di vista o la propria soluzione in base al feedback ricevuto dall'insegnante o dai compagni.

Tutte queste abilità richiedono una buona dose di flessibilità cognitiva; è possibile altresì che gli studenti che hanno una maggiore flessibilità cognitiva sappiano affrontare meglio le sfide del laboratorio e trarre maggior beneficio dalle opportunità di apprendimento offerte da questa modalità didattica. Allo stesso tempo, anche chi presenta una flessibilità cognitiva minore potrebbe beneficiarne, in quanto tale approccio didattico potrebbe contribuire a sviluppare e potenziare questa funzione esecutiva negli studenti.

Aspetti del laboratorio di matematica che potrebbero migliorare le funzioni esecutive

- allenare il proprio pensiero divergente e la capacità di generare idee originali e alternative, sperimentando il proprio pensiero creativo e la capacità di produrre qualcosa di nuovo e differente; è stato dimostrato, infatti, che l'utilizzo di esperienze diversificate e diverse dal solito (come potrebbe essere il laboratorio di matematica comparata ad una lezione frontale) influenza in maniera positiva la flessibilità cognitiva e la creatività (Ritter et al., 2012).
- stimolare il proprio pensiero critico, la capacità di analizzare, valutare e giustificare le proprie affermazioni o soluzioni;
- accrescere la propria metacognizione e la consapevolezza dei propri processi mentali e delle proprie strategie di apprendimento.

In generale, possiamo dire che è verosimile che la flessibilità cognitiva e il laboratorio di matematica siano due dimensioni strettamente connesse e reciprocamente influenti. Sviluppare la flessibilità cognitiva degli studenti attraverso il laboratorio di matematica potrebbe avere effetti positivi sia sulle competenze matematiche sia sulle competenze trasversali degli studenti, per cui è importante promuovere e diffondere la didattica laboratoriale nella scuola primaria, al fine di offrire agli studenti opportunità di apprendimento significative, stimolanti e divertenti.

Andando a declinare le possibili implicazioni della flessibilità cognitiva nell'ambito della prospettiva della multimodalità, potremmo indicare:

- La capacità da una modalità di rappresentazione a un'altra, integrando le tracce (verbali, grafiche, concrete…) prodotte dagli artefatti con i testi matematici condivisi dalla classe

- La capacità di usare diverse modalità espressive (verbale, gestuale, grafica, ecc.) per comunicare e rappresentare i concetti matematici e di passare da una modalità all'altra a seconda del contesto e del destinatario

  Esempio - attività di esplorazione delle forme geometriche usando diversi materiali (carta, plastilina, lego, ecc.) e modalità (piegare, tagliare, modellare, costruire, ecc.): gli studenti devono usare la flessibilità cognitiva per passare da una modalità sensoriale all'altra, per riconoscere le proprietà delle forme in diversi contesti e per comunicare le loro scoperte usando il linguaggio verbale, gestuale e grafico.

Per quanto riguarda, invece, il ruolo della flessibilità cognitiva nella teoria della mediazione semiotica, potremmo indicare:

- La capacità di usare e interpretare diversi artefatti come strumenti di mediazione semiotica, e di passare da un artefatto all'altro a seconda del contesto e del significato matematico da esprimere o comprendere.
- La capacità di affrontare e risolvere problemi matematici che richiedono l'uso di diversi artefatti, l'analisi di vari aspetti e la valutazione di possibili soluzioni alternative.

Esempio: attività di introduzione alla simmetria usando diversi artefatti (specchio, carta, forbici, ecc.) come strumenti di mediazione semiotica: gli studenti devono usare la flessibilità cognitiva per passare da un artefatto all'altro, per comprendere il significato della simmetria in diversi contesti e per comunicare la simmetria usando differenti linguaggi.

Rapporto tra discussione matematica e funzioni esecutive

Generalità

Tra le diverse modalità di insegnamento-apprendimento della matematica, una che sembra particolarmente efficace e stimolante per lo sviluppo delle funzioni esecutive è la discussione matematica. Sintetizzando quanto già dettagliatamente descritto nel quadro teorico, per discussione matematica si intende una modalità di insegnamento-apprendimento basata sull'interazione sociale tra gli studenti e l'insegnante su un oggetto matematico (concetto, problema, procedura, ecc.), con lo scopo di favorire lo sviluppo del pensiero logico, la comunicazione, la riflessione e la condivisione delle idee. La discussione matematica è descritta come una "polifonia di voci", in cui l'insegnante ha un ruolo di guida e di mediazione semiotica tra i segni matematici della fonte (ad esempio un testo storico) e i segni accessibili agli studenti. Che ruolo possono giocare le funzioni esecutive in questo contesto? Riteniamo, in generale, che esse possano essere rilevanti nel comprendere e tenere a mente in maniera efficace quanto recepito da insegnanti e compagni, inibire le risposte impulsive o errate, passare da una strategia all'altra in base al contesto, ragionare logicamente e pianificare i passi necessari per procedere nell'analisi dell'oggetto di discussione.

Di seguito le declinazioni specifiche delle funzioni esecutive ed il loro possibile rapporto con la discussione matematica.

Discussione matematica e memoria di lavoro

Sintetizzando il quadro teorico, la memoria di lavoro è la capacità di mantenere in memoria ed elaborare le informazioni per brevi periodi di tempo; questa abilità è per l'apprendimento in diversi domini, tra cui la matematica. Identificando la discussione matematica come una modalità basata sull'interazione sociale tra gli studenti e l'insegnante su un oggetto matematico, appare evidente come la memoria di lavoro sia necessaria per poter iniziare e portare a termine in maniera efficace tale discussione. Nonostante nella nostra ricerca non abbiamo individuato studi con intento didattico che indaghino la relazione tra WM e discussione matematica, sappiamo che nell'ambito della psicologia, diversi studi, come quello di McQuade e colleghi del 2013, hanno dimostrato il ruolo della memoria di lavoro nell'interazione sociale (McQuade et al., 2013).

Gli aspetti della discussione matematica in cui abbiamo individuato possibili punti in cui la WM può avere un ruolo rilevante sono:

- La comprensione del problema da discutere: gli studenti devono comprendere il problema e riformularlo con le proprie parole, la memoria di lavoro permette di mantenere il testo del problema in mente e rielaborarlo (Caplan & Waters, 1999).

- La soluzione individuale o di piccolo gruppo del problema: gli studenti devono cercare di risolvere il problema usando le proprie conoscenze, mantenendo nella memoria di lavoro il testo del problema e le informazioni rilevanti.

- La condivisione delle soluzioni individuali o di piccolo gruppo: gli studenti devono comunicare le proprie soluzioni al problema, spiegando il procedimento seguito e giustificando le proprie scelte. In questo caso, la memoria di lavoro è necessaria per ricordare e organizzare le informazioni da esporre, per selezionare il linguaggio appropriato, per rispondere alle domande o alle obiezioni.

- La discussione collettiva delle soluzioni: gli studenti devono confrontarsi con le soluzioni degli altri, ascoltandole con attenzione, analizzandole criticamente, valutandone la correttezza e l'efficacia. Per questo motivo, la memoria di lavoro ha un ruolo nel mantenere e integrare le informazioni provenienti dalle diverse fonti (propria soluzione, soluzione degli altri, testo del problema, materiali, ecc.), formulare domande o commenti, modificare o arricchire la propria soluzione.

- La concettualizzazione del problema: gli studenti devono passare dalla soluzione del problema alla costruzione o all'approfondimento di un concetto matematico, attraverso il linguaggio e i collegamenti tra le esperienze già vissute e i termini particolari della matematica. La memoria di lavoro viene utilizzata per mantenere e integrare le informazioni provenienti dalle diverse fonti (soluzione del problema, concetto matematico, esperienze precedenti, ecc.), comprendere e generalizzare il concetto, applicarlo ad altri contesti o problemi.

Esempio: costruire il concetto di angolo a partire da diverse esperienze vissute (disegnare angoli con la riga e il compasso, misurare angoli con il goniometro, trasformare angoli con la geometria dinamica); la memoria di lavoro agisce nel mantenere e integrare le informazioni provenienti dalle diverse fonti (esperienze precedenti, materiali, software, ecc.), comprendere e generalizzare il concetto di angolo, formulare definizioni e proprietà.

Discussione matematica e controllo inibitorio

Come sappiamo, il controllo inibitorio è la capacità di sopprimere o modulare le risposte automatiche o impulsive, di selezionare le informazioni rilevanti e di ignorare le informazioni irrilevanti o distrattive. Nell'ambito della discussione matematica, esso risulta fondamentale in quanto l'autoregolazione del soggetto si rende necessaria per interagire con i pari e con l'insegnante. Lo studio di Machado e Caesar (2013) ha costruito una situazione di apprendimento in cui i compiti di matematica necessitavano della collaborazione della famiglia (in un contesto multiculturale) o dei compagni per raccogliere tutti i dati necessari alla risoluzione del problema, così da promuovere l'educazione interculturale. Le differenti strategie di risoluzione utilizzate per i compiti erano poi successivamente discusse in classe ed è stato riscontrato che questo tipo di approccio facilitava l'autoregolazione degli studenti nell'attività di studio (Machado & César, 2013). In un case study di Semana e Santos (2011), l'obiettivo dello studio era quello di promuovere l'autoregolazione degli studenti in un contesto di lavoro collaborativo tra quattro insegnanti e uno dei ricercatori; sono state programmate due lezioni in cui l'approccio utilizzato era quello della discussione matematica ed è stato evidenziato un netto miglioramento di questo aspetto dalla prima alla seconda lezione (Semana & Santos, 2011).

Abbiamo cercato di individuare in quali momenti dell'approccio didattico di discussione matematica esso potrebbe essere maggiormente coinvolto, utilizzando la stessa schematizzazione di fasi vista per la WM:

- La comprensione del problema da discutere: come descritto in precedenza, gli studenti devono comprendere il problema e riformularlo con le proprie parole; questo richiede non solo l'uso della WM, ma anche del controllo inibitorio per sopprimere o modulare le risposte apparentemente corrette ma errate che potrebbero emergere da una prima lettura del testo del problema.
- La soluzione individuale o di piccolo gruppo del problema: anche in questo caso, il controllo inibitorio risulta necessario per sopprimere o modulare le risposte errate che potrebbero emergere da un processo di soluzione che vada, per così dire, in "automatico" sulla base delle pregresse conoscenze del soggetto.

Esempio: in una classe di quarta elementare, la maestra propone ai bambini un problema di geometria che richiede di calcolare l'area di un rettangolo; i bambini devono lavorare in gruppi e confrontarsi tra loro per trovare la soluzione. Durante la discussione, alcuni bambini potrebbero essere tentati di dare risposte impulsive o sbagliate, basandosi su intuizioni o preconcetti errati (es: potrebbero pensare che l'area di un rettangolo sia data dalla somma delle lunghezze dei lati, o che sia uguale al perimetro). Queste risposte riflettono una mancanza di controllo inibitorio, ovvero la capacità di reprimere le reazioni automatiche inappropriate e di generare risposte più adattive e ragionate.

- La condivisione delle soluzioni individuali o di piccolo gruppo: il controllo inibitorio è necessario per selezionare il linguaggio appropriato e ignorare le interferenze linguistiche o ambientali che potrebbero intercorrere durante la presentazione dei propri risultati.

- La discussione collettiva delle soluzioni: emerge in questa fase la componente di autocontrollo emotivo, per sopprimere o modulare le risposte emotive o aggressive che potrebbero emergere dal confronto con le soluzioni degli altri.

- La concettualizzazione del problema: il controllo inibitorio è necessario per sopprimere o modulare le risposte intuitive ma errate che potrebbero emergere dalla costruzione del concetto matematico.

- La meta-discussione sul sapere matematico: gli studenti devono definire i valori e gli atteggiamenti nei confronti del sapere matematico, sia a livello individuale che collettivo. Il controllo inibitorio ha una funzione analoga a quanto avviene in fase di concettualizzazione.

Discussione matematica e flessibilità cognitiva

Come definito nel quadro teorico, la flessibilità cognitiva è la capacità di adattare il proprio pensiero a situazioni nuove o complesse e di cambiare prospettiva o strategia in base alle esigenze. Si tratta di una funzione esecutiva fondamentale per lo sviluppo cognitivo e per l'apprendimento in generale, e in particolare per la matematica. La discussione matematica può assumere diverse forme e finalità, a seconda del contesto e degli obiettivi didattici. Bartolini Bussi (1995) ne individua tre grandi tipologie: la discussione di un problema, la discussione di concettualizzazione e la meta-discussione sul sapere matematico (Bartolini Bussi et al., 1995).

In tutti questi tipi di discussione, la flessibilità cognitiva ha un ruolo importante; come per le due funzioni esecutive precedenti, andiamo ad indagare alcuni aspetti salienti:

- La soluzione individuale o di piccolo gruppo di un problema: richiede agli studenti di affrontare una situazione problematica che non ha una soluzione immediata o univoca, ma che richiede l'uso di conoscenze, strategie e risorse diverse. Gli studenti devono essere flessibili nel cercare e nel confrontare le possibili soluzioni, nel passare da una rappresentazione all'altra del problema (verbale, grafica, numerica, ecc.), nel modificare il proprio punto di vista in base alle evidenze o alle argomentazioni degli altri, nel caso del piccolo gruppo.

- La concettualizzazione del problema: richiede agli studenti di passare dalla soluzione del problema alla costruzione o all'approfondimento di un concetto matematico, attraverso il linguaggio e i collegamenti tra le esperienze già vissute e i termini particolari della matematica. Gli studenti devono quindi essere flessibili nel trasformare le proprie intuizioni o procedure in concetti generali e astratti, nel riconoscere le proprietà e le relazioni tra gli oggetti matematici, nel passare da un registro semiotico all'altro (linguaggio verbale, simbolico, grafico, ecc.).

Esempio: gli studenti di una classe prima devono costruire il concetto di tempo a partire da diverse esperienze vissute (misurare la durata di attività quotidiane, confrontare orologi analogici e digitali, usare calendari e stagioni). Per fare questo, devono usare la flessibilità cognitiva per trasformare le proprie intuizioni o procedure in concetti generali e astratti, per riconoscere le proprietà e le relazioni tra gli oggetti matematici, per passare da un registro semiotico all'altro.

- La meta-discussione sul sapere matematico: richiede agli studenti di riflettere sulle caratteristiche e sulle finalità della matematica, sia a livello individuale che collettivo. Gli studenti devono quindi essere flessibili nel mettere in discussione le proprie credenze o pregiudizi sulla matematica, nel confrontarsi con le diverse visioni o culture matematiche, nel riconoscere il valore e il senso della matematica nella società e nella vita quotidiana.

Esempio: gli studenti di una classe quinta sono chiamati riflettere sulle caratteristiche e sulle finalità della matematica, sia a livello individuale che collettivo. Per fare questo, devono usare la flessibilità cognitiva per mettere in discussione le proprie credenze o pregiudizi sulla matematica, per confrontarsi con le diverse visioni o culture matematiche, per riconoscere il valore e il senso della matematica nella società e nella vita quotidiana.

DISCUSSIONE

Il rapporto che lega le funzioni esecutive alla didattica della matematica è, tuttora, un argomento non pienamente approfondito. Sebbene la letteratura in didattica della matematica riporti spesso studi che citano o si occupano delle funzioni esecutive, è stato difficile rilevare degli studi che valutino in maniera puntuale il rapporto tra il dominio cognitivo ed il dominio didattico, ma di frequente abbiamo individuato studi in didattica della matematica che usano i risultati del dominio cognitivo. Inoltre, solo una ricerca sulle 35 che abbiamo individuato considerava le funzioni esecutive nella loro globalità e generalità in relazione ai singoli approcci di insegnamento-apprendimento; la restante parte delle nostre fonti si è concentrata specificamente su singole funzioni esecutive nell'ambito dei vari approcci. In particolare, 18 tra le nostre fonti si sono concentrate sulla memoria di lavoro (di queste, 9 rientravano unicamente nel dominio della didattica della matematica, mentre le altre 9 facevano riferimento al dominio cognitivo), 10 sul controllo inibitorio (rispettivamente 8 e 2), 6 sulla flessibilità cognitiva (rispettivamente 5 e 1). Le ragioni per questo riscontro possono essere molteplici e sono state, in parte, accennate nella parte introduttiva della nostra trattazione (ad esempio, la difficoltà di definire e misurare le funzioni esecutive in modo univoco ed efficace, aspetto che è stato affrontato più di frequente nella letteratura di pertinenza del dominio cognitivo); riteniamo, tuttavia, che l'approfondimento di questa relazione potrebbe giovare alla ricerca in didattica della matematica sotto molti aspetti, in quanto comprendere esattamente quali funzioni esecutive siano coinvolte in ciascun approccio didattico e in quale modalità potrebbe essere di grande aiuto. Come abbiamo evidenziato nella nostra trattazione, gli approcci didattici che abbiamo indagato si avvalgono dell'utilizzo delle funzioni esecutive in maniera differente (ad esempio, in base a quanto emerso, esiste maggiore evidenza che la memoria di lavoro venga sfruttata nell'apprendimento per problemi, piuttosto che nella discussione matematica); per questo motivo, la scelta di quale approccio didattico adottare di volta in volta potrebbe essere guidata non soltanto dalle motivazioni legate al contesto della classe e dell'insegnante, ma anche dalla volontà di sfruttare specifiche funzioni esecutive, così da favorire l'acquisizione di competenze trasversali alle varie discipline e ai vari argomenti della stessa didattica della matematica.

Tra gli approcci di didattica della matematica da noi considerati, verosimilmente l'apprendimento per problemi è quello sul quale abbiamo individuato un maggior numero di fonti relative sia all'aspetto didattico (7) che a quello cognitivo (6). Riteniamo che le possibili cause da ricercare per questo aspetto siano molteplici. Come abbiamo accennato nella parte introduttiva, il PBL è un approccio che nasce dalla necessità di insegnare in maniera efficace le nozioni di medicina; successivamente, esso si è poi esteso ed è stato applicato in varie discipline, compresa la matematica, che prende come punto di partenza per la propria ricerca nell'ambito del problem solving Polya e il suo "How to Solve It" del 1945 (Polya, 1945). Questo ha fatto sì che le informazioni contenute in letteratura su questo tipo di approccio didattico fossero, in generale, molto più numerose rispetto ad altri approcci (come quello dei campi di esperienza) che si applicano unicamente al contesto matematico. In più, il concetto di PBL è strettamente connesso a quello di "problem solving", che rappresenta un focus trasversale a molti domini (compreso quello cognitivo), nonché una delle principali caratteristiche su cui si basa l'apprendimento matematico, e che dalla didattica della matematica viene sfruttata. L'utilizzo dei problemi in didattica della matematica è frequente, per cui non ci stupisce il fatto che anche nel dominio specifico della didattica della matematica la letteratura a riguardo sia fiorente. La memoria di lavoro nell'apprendimento per problemi è risultata, dalla nostra ricerca, un aspetto ben indagato e influenzante differenti aspetti del PBL e del problem solving. È stato interessante individuare la duplicità del ruolo della WM, che da un lato è apparsa come aspetto fondamentale e necessario in quanto permette di scomporre i problemi in sottoproblemi (Stender, 2017), mantenere a mente i dati necessari alla risoluzione (Swanson & Beebe-Frankenberger, 2004) ed inserirsi nella cornice teorica del "cognitive decoupling", ossia l'abilità di formare più di un modello mentale della situazione-problema (Koichu, 2014); dall'altra, tuttavia, la WM rappresenta un limite che può influenzare la capacità di apprendimento degli studenti a causa della teoria del cognitive overload, secondo la quale la memoria di lavoro ha un limite di capacità, un numero massimo di informazioni che può essere mantenuto allo stesso momento, di conseguenza se tale limite viene superato l'apprendimento risulta difficoltoso (Niaz & Logie, 1993). Una interessante applicazione di questo concetto è emersa durante la nostra trattazione in relazione al tipo di rappresentazione utilizzato per illustrare il problema matematico, dal momento che è emerso che la presenza di illustrazioni a supporto della soluzione del problema peggiora la qualità della performance (Berends & Van Lieshout, 2009), sebbene altri studi evidenzino, invece, l'utilità di tale espediente purchè siano schemi grafici non troppo complessi (Edens & Potter, 2008). Il controllo inibitorio nell'apprendimento per problemi risulta in base alla nostra indagine un aspetto non frequentemente indagato dalla letteratura , sul quale la letteratura da noi rinvenuta è scarsa e non appartenente in maniera "pura" al dominio della didattica della matematica (3 fonti di pertinenza del dominio cognitivo), per cui il nostro ruolo si è limitato ad ipotizzare in quali aspetti esso potrebbe avere un impatto (per esempio, il controllo del comportamento motorio durante le attività di classe o il livello di attenzione mantenuto nel corso delle attività). Diversamente, invece, è avvenuto per la flessibilità cognitiva: la letteratura a riguardo è piuttosto ricca nel dominio didattico (4 fonti); quello che emerge è un ruolo importante di essa sia nella capacità di risolvere i problemi, dunque nel problem solving, sia nell'approccio stesso al problema e a come viene percepito dagli studenti. Per quanto riguarda il primo aspetto, la flessibilità cognitiva è risultata avere un ruolo importante nella capacità di approcciare in maniera differente problemi relativi alle moltiplicazioni (Scheibling-Sève et al., 2022), nell'utilizzare differenti strategie, nella capacità di cambiare prospettiva, di revisionare gli errori e di generalizzare le soluzioni (Rahayuningsih et al., 2021); inoltre, è stato evidenziato che la flessibilità cognitiva ha un ruolo nella genesi dell'incertezza, che spinge il soggetto a ricercare modalità creative di risoluzione (Hodgen et al., 2022). Per quanto riguarda il secondo aspetto, abbiamo evidenziato che la flessibilità cognitiva influenza i motivi per i quali un problema può essere considerato più semplice o più difficile (Rathgeb-Schnierer, 2015).

Il laboratorio di matematica è probabilmente l'approccio didattico nel quale abbiamo riscontrato più letteratura in merito al rapporto con le funzioni esecutive (13 fonti, di cui 7 riferite al dominio didattico e 6 riferite al dominio cognitivo/riferite al dominio didattico sfruttante i risultati del cognitivo). Secondo Sabena (2019), l'approccio laboratoriale è un "insieme di indicazioni metodologiche finalizzate alla costruzione di significati matematici […] attraverso l'esplorazione e la sperimentazione, anche con l'utilizzo di strumenti tecnologici […]" (Sabena et al., 2019). Il rapporto tra funzioni esecutive e gli strumenti multimediali e digitali sono l'argomento su cui si concentra gran parte della letteratura in didattica della matematica da noi individuata in relazione all'approccio laboratoriale, in particolare in relazione alla memoria di lavoro, che è risultata fortemente legata all'efficacia dell'utilizzo di prodotti multimediali nell'apprendimento a causa della teoria del doppio canale, secondo cui è possibile ridurre il carico di lavoro della memoria di lavoro (che rappresenta un fattore limitante per l'apprendimento secondo la teoria del cognitive overload) utilizzando differenti canali sensoriali, primi tra tutti quelli visivo ed uditivo, tipici dei contenuti video (Franziska, 2022; Ladel & Kortenkamp, 2009). È stato interessante inoltre notare che, per la stessa teoria, a parità di apprezzamento da parte degli studenti è bene preferire un'attività di didattica della matematica mediata da contenuti grafici più semplici, che non sovraccarichino in maniera eccessiva la memoria di lavoro (Ben-Haim et al., 2019). Anche il movimento, fondamentale nell'ottica della prospettiva della multimodalità, è risultato collegato in maniera positiva alla memoria di lavoro nell'ambito dell'apprendimento della matematica (Henz et al., 2015). Per quanto riguarda il controllo inibitorio, (come nei due ambiti precedenti), la letteratura non è stata particolarmente ricca, per cui siamo dovuti ricorrere al medesimo espediente precedente, ossia provare ad ipotizzare su quali aspetti o declinazioni del laboratorio di matematica il controllo inibitorio potrebbe avere un impatto; tra questi, citiamo il gioco, per il quale abbiamo trovato riferimenti non specifici nell'ambito didattico della matematica, ma nell'ambito didattico in generale (Vidal Carulla et al., 2021) e l'interazione tra pari e con l'insegnante (per la quale vale quanto detto prima (Carlson & Wang, 2007). Diverso è, invece, il caso della flessibilità cognitiva; gli strumenti digitali sono stati l'aspetto maggiormente indagato dalla letteratura in didattica della matematica considerandone le potenzialità rispetto alla flessibilità cognitiva, forse anche a causa del fatto che è un mondo in continua evoluzione ed aggiornamento e che ben si presta ad una continua revisione; il risultato emerso dalla nostra ricerca è più incentrato sul ruolo degli strumenti digitali (Granberg & Olsson, 2015) nel migliorare la flessibilità cognitiva che viceversa, per cui abbiamo cercato di individuare alcune ipotesi di bidirezionalità che potrebbero essere indagate da ulteriori studi. Fra queste: il ruolo della flessibilità cognitiva nel passaggio da un'attività laboratoriale ad un'altra, la capacità di modificare il proprio punto di vista o la propria soluzione nel confronto tra pari, la capacità di integrare fonti di informazione di natura differente. Una limitazione importante della nostra ricerca nell'ambito del dominio didattico della matematica, come già accennato in precedenza, è tuttavia legata al fatto che la quasi totalità della letteratura che trattava il rapporto tra una delle funzioni esecutive e l'approccio laboratoriale era relativa alla multimedialità ed agli strumenti digitali, mentre non abbiamo individuato nella nostra ricerca studi che si occupassero del rapporto tra funzioni esecutive e l'utilizzo di altri artefatti di natura non digitale.

L'ultimo approccio di insegnamento-apprendimento della matematica da noi indagato è stato quello relativo alla discussione matematica. Nonostante il nostro lavoro preparatorio di ricerca delle fonti abbia permesso di individuare diversi studi che sembravano poter indagare in qualche modo il rapporto tra discussione matematica ed FE, ad una valutazione più attenta essi trattavano la relazione in maniera marginale (ad esempio, le FE venivano citate unicamente nell'introduzione per poi non essere più trattate), per cui sono stati eliminati dalla nostra trattazione. L'unica funzione esecutiva nella quale abbiamo specificamente individuato studi a riguardo che la legano alla discussione matematica è il controllo inibitorio, (contrariamente ai precedenti ambiti di apprendimento, nei quali la letteratura è piuttosto scarsa). Potremmo attribuire questa differenza al fatto che la discussione matematica, in quanto dinamica sociale, si avvale fortemente del controllo inibitorio in termini di autoregolazione emotiva, per cui questo aspetto è risultato maggiormente indagato anche nella letteratura in didattica della matematica (Machado & César, 2013; Semana & Santos, 2011). In relazione alle altre funzioni esecutive, il nostro lavoro ha cercato di ipotizzare eventuali ambiti di influenza delle altre FE; per quanto riguarda la WM, possibili aspetti su cui può avere un impatto sono rappresentati dalla comprensione del problema da discutere, il mantenimento in memoria di dati e informazioni rilevanti, nonché delle opinioni e soluzioni proposte dai pari, il processo di concettualizzazione del problema; per quanto riguarda, invece, la flessibilità cognitiva, essa potrebbe essere coinvolta nell'utilizzo di differenti strategie di risoluzione, che potrebbero modificarsi in funzione dei feedback dei pari e dell'insegnante, nonché nella capacità di passare da un tipo di linguaggio ad un altro (ad es, verbale e grafico) e nella meta-discussione sul sapere matematico.

Conclusioni

La letteratura sul rapporto tra funzioni esecutive e approcci di insegnamento-apprendimento in didattica della matematica è ancora nel suo complesso non completamente conclusiva. In particolare, con la nostra ricerca siamo riusciti a dimostrare che nell'approccio dell'apprendimento per problemi la memoria di lavoro e la flessibilità cognitiva ricoprono un ruolo importante, mentre per quanto riguarda il controllo inibitorio non abbiamo individuato riferimenti specifici, ma unicamente riferimenti al dominio cognitivo in relazione a singoli aspetti coinvolti nel PBL. L'approccio laboratoriale, nello specifico con la sua declinazione relativa agli strumenti digitali, è risultato legato sia alla memoria di lavoro che alla flessibilità cognitiva, mentre anche in questo caso non abbiamo individuato sul controllo inibitorio riferimenti specifici, ma fonti relative al dominio cognitivo che indagano singoli aspetti dell'approccio. Nel contesto della discussione matematica, l'unica funzione esecutiva di cui abbiamo trovato riferimento in relazione all'ambito della didattica è il controllo inibitorio, mentre per le altre due FE abbiamo solo potuto ipotizzare eventuali aspetti di interesse. Sarebbe per me grande soddisfazione riuscire ad utilizzare gli spunti di riflessione scaturiti dalla ricerca sull'attuale letteratura come spunto per l'inizio di nuove ricerche, che vadano ad implementare questo relativo "vuoto" di letteratura.

Bibliografia

Agostino, A., Johnson, J., & Pascual-Leone, J. (2010). Executive functions underlying multiplicative reasoning: Problem type matters. *Journal of Experimental Child Psychology*, *105*, 286–305. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2009.09.006

Ali, S. S. (2019). Problem Based Learning: A Student-Centered Approach. *English Language Teaching*, *12*(5), 73. https://doi.org/10.5539/elt.v12n5p73

Allan, N., & Lonigan, C. (2011). Examining the Dimensionality of Effortful Control in Preschool Children and Its Relation to Academic and Socioemotional Indicators. *Developmental psychology*, *47*, 905–915. https://doi.org/10.1037/a0023748

Aristovnik, A., Tomazevic, N., Kerzic, D., & Umek, L. (2017). The impact of demographic factors on selected aspects of e-learning in higher education. *The International Journal of Information and Learning Technology*, *34*(2), 114–121. https://doi.org/10.1108/IJILT-09-2016-0045

Avgerinou, V., & Tolmie, A. (2019). Inhibition and cognitive load in fractions and decimals. *British Journal of Educational Psychology*, *90 Suppl 1*. https://doi.org/10.1111/bjep.12321

Baddeley, A. (2000). *The episodic buffer: a new component of working memory? Trends in Cognitive Sciences, 4(11), 417-423.*

Baddeley, A. (2003). Working memory: Looking back and looking forward. *Nature Reviews Neuroscience*, *4*(10), 829–839. https://doi.org/10.1038/nrn1201

Baddeley, A. (2006). *Working Memory: An Overview*. In *Educational Psychology, Working Memory and Education*, Academic Press, 1-31.

Barrows, H. S. (1996). Problem-based learning in medicine and beyond: A brief overview. *New Directions for Teaching and Learning*, *1996*(68), 3–12. https://doi.org/https://doi.org/10.1002/tl.37219966804

Bartholomew, M. E., Heller, W., & Miller, G. A. (2021). Inhibitory control of emotional processing: Theoretical and empirical considerations. *International Journal of Psychophysiology*, *163*, 5–10. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.ijpsycho.2019.03.015

Bartolini Bussi M. G. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In *Handbook of International Research in Mathematics Education*.

Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2009). Mediazione semiotica nella didattica della matematica: artefatti e segni nella tradizione di Vygotskij. In *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 32(A+B)*

Bartolini Bussi M. G., Boni M., & Ferri F. (1995). Interazione sociale e conoscenza a scuola: la discussione matematica. *Rapporto Tecnico n. 21, Nucleo di Ricerca in Storia e Didattica della Matematica, Università di Modena*.

Ben-Haim, E., Cohen, A., & Tabach, M. (2019). Types of graphic interface design and their role in learning via mathematical applets at the elementary school. *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*.

Berends, I. E., & van Lieshout, E. C. D. M. (2009). The effect of illustrations in arithmetic problem-solving: Effects of increased cognitive load. *Learning and Instruction*, *19*(4), 345–353. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2008.06.012

Blair, C., & Peters Razza, R. (2007). *Relating Effortful Control, Executive Function, and False Belief Understanding to Emerging Math and Literacy Ability in Kindergarten*.

Blair, C., & Razza, R. (2007). Relating Effortful Control, Executive Function, and False Belief Understanding to Emerging Math and Literacy Ability in Kindergarten. *Child development*, *78*, 647–663. https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.2007.01019.x

Bock, A., Cartwright, K., Gonzalez, C., O'Brien, S., Robinson, M., Schmerold, K., Shriver, A., & Pasnak, R. (2015). The Role of Cognitive Flexibility in Pattern Understanding. *Journal of Education and Human Development*, *4*. https://doi.org/10.15640/jehd.v4n1a3

Bonato, M., Fabbri, S., Umiltà, C., & Zorzi, M. (2007). The Mental Representation of Numerical Fractions: Real or Integer? *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, *33*(6), 1410–1419. https://doi.org/10.1037/0096-1523.33.6.1410

Boyer, C. B., & Merzbach, U. C. (2011). *A History of Mathematics*. Wiley.

Bridgett, D. J., Oddi, K. B., Laake, L. M., Murdock, K. W., & Bachmann, M. N. (2013). Integrating and differentiating aspects of self-regulation: Effortful control, executive functioning, and links to negative affectivity. *Emotion*, *13*(1), 47–63. https://doi.org/10.1037/a0029536

Bull, R., & Scerif, G. (2001). Executive Functioning as a Predictor of Children's Mathematics Ability: Inhibition, Switching, and Working Memory. *Developmental neuropsychology*, *19*, 273–293. https://doi.org/10.1207/S15326942DN1903_3

Caplan, D., & Waters, G. (1999). Verbal Working Memory and Sentence Comprehension. *Behavioral and Brain Sciences*, *22*. https://doi.org/10.1017/S0140525X99001788

Carlson, S. M., & Wang, T. S. (2007). Inhibitory control and emotion regulation in preschool children. *Cognitive Development*, *22*(4), 489–510. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.cogdev.2007.08.002

Carlson, S., Mandell, D., & Williams, J. (2004). Executive Function and Theory of Mind: Stability and Prediction From Ages 2 to 3. *Developmental psychology*, *40*, 1105–1122. https://doi.org/10.1037/0012-1649.40.6.1105

Chandler P., & Sweller J. (1991). Cognitive load theory and the format of instruction. *Cognition and instruction*, *8(4)*, 293–332.

Comitato Scientifico Nazionale per le Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione. (2017). *INDICAZIONI NAZIONALI E NUOVI SCENARI*.

Cragg, L., & Chevalier, N. (2012). The processes underlying flexibility in childhood. *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, *65*(2), 209–232. https://doi.org/10.1080/17470210903204618

De Jong, T., & Ferguson-Hessler, M. G. M. (1996). Types and qualities of knowledge. *Educational Psychologist*, *31*(2), 105–113. https://doi.org/10.1207/s15326985ep3102_2

De Smedt, B., Janssen, R., Bouwens, K., Verschaffel, L., Boets, B., & Ghesquière, P. (2009). Working memory and individual differences in mathematics achievement: A longitudinal study from first grade to second grade. *Journal of Experimental Child Psychology*, *103*(2), 186–201. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jecp.2009.01.004

der Ven, S. H. G., Kroesbergen, E. H., Boom, J., & Leseman, P. P. M. (2012). The development of executive functions and early mathematics: A dynamic relationship. *British Journal of Educational Psychology*, *82*(1), 100–119. https://doi.org/https://doi.org/10.1111/j.2044-8279.2011.02035.x

Diamond, A. (2013). Executive functions. In *Annual Review of Psychology* (Vol. 64, pagg. 135–168). Annual Reviews Inc. https://doi.org/10.1146/annurev-psych-113011-143750

Diamond, A., & Wright, A. (2014). An effect of inhibitory load in children while keeping working memory load constant. *Frontiers in Psychology*, *5*. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2014.00213

Dick, A. S. (2014). The development of cognitive flexibility beyond the preschool period: An investigation using a modified Flexible Item Selection Task. *Journal of Experimental Child Psychology*, *125*, 13–34. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jecp.2014.01.021

Edens, K., & Potter, E. (2008). How Students "Unpack" the Structure of a Word Problem: Graphic Representations and Problem Solving. *School Science and Mathematics*, *108*(5), 184–196. https://doi.org/https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2008.tb17827.x

Espy, K. (1997). The Shape School: Assessing Executive Function in Preschool Children. *Developmental Neuropsychology - DEVELOP NEUROPSYCHOL*, *13*, 495–499. https://doi.org/10.1080/87565649709540690

Evans JSB, & Stanovich KE. (2013). Dual-process theories of higher cognition: Advancing the debate. *Perspectives on psychological science, 8(3),* 223.

Franziska, P. (2022). The use of auditory media as mathematical language support in elementary classroom practice. *Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*.

Friso-van den Bos, I., van der Ven, S. H. G., Kroesbergen, E. H., & van Luit, J. E. H. (2013). Working memory and mathematics in primary school children: A meta-analysis. *Educational Research Review*, *10*, 29–44. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.edurev.2013.05.003

Fürst AJ, & Hitch GJ. (2000). Separate roles for executive and phonological components of working memory in mental arithmetic. *Memory & cognition, 28(5)*, 774–782.

Gilmore, C., & Cragg, L. (2018). The Role of Executive Function Skills in the Development of Children's Mathematical Competencies. In *Heterogeneity of Function in Numerical Cognition* (pagg. 263–286). https://doi.org/10.1016/B978-0-12-811529-9.00014-5

Gomez, D., Jiménez, A., Bobadilla, R., Reyes, cristián, & Dartnell, P. (2014, aprile). *Exploring fraction comparison in school children*.

Granberg, C., & Olsson, J. (2015). ICT-supported problem solving and collaborative creative reasoning: Exploring linear functions using dynamic mathematics software. *Journal of Mathematical Behavior*, *37*, 48–62. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2014.11.001

Henz, D., Oldenburg, R., & Schöllhorn, W. (2015). Does bodily movement enhance mathematical problem solving? Behavioral and neurophysiological evidence. *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*.

Holmes, J., & Adams, J. W. (2006). Working Memory and Children's Mathematical Skills: Implications for mathematical development and mathematics curricula. *Educational Psychology*, *26*(3), 339–366. https://doi.org/10.1080/01443410500341056

Holmes, J., & Gathercole, S. (2014). Taking working memory training from the laboratory into school. *Educational Psychology*, *34*. https://doi.org/10.1080/01443410.2013.797338

Holmes, J., Gathercole, S., & Dunning, D. (2009). Adaptive training leads to sustained enhancement of poor working memory in children. *Developmental science*, *12*, F9-15. https://doi.org/10.1111/j.1467-7687.2009.00848.x

Hughes, C., & Graham, A. (2002). Measuring Executive Functions in Childhood: Problems and Solutions? *Child and Adolescent Mental Health*, *7*(3), 131–142. https://doi.org/https://doi.org/10.1111/1475-3588.00024

Islam, Md. A., Abdul Rahim, N. A., Tan, C., & Hasina, M. (2011). Effect of demographic factors on e-learning effectiveness in a higher learning institution in Malaysia. *International Education Studies*, *4*. https://doi.org/10.5539/ies.v4n1p112

Jonassen David H. (2010). *Learning to Solve Problems. A Handbook for Designing Problem-Solving Learning Environments.* Routledge.

Koichu, B. (2014). Networking Theories by Iterative Unpacking. *Proceedings of the Eight Congress of European Society for Research in Mathematics Education*.

Krajewski, K., & Schneider, W. (2009). Early development of quantity to number-word linkage as a precursor of mathematical school achievement and mathematical difficulties: Findings from a four-year longitudinal study. *Learning and Instruction*, *19*, 513–526. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2008.10.002

Ladel, S., & Kortenkamp, U. (2009). Realisation of MERS (Multiple Extern Representations) and MELRS (Multiple Equivalent Linked Representations) in Elementary Mathematics Software. *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*.

Lambert, K. T., Improving Inhibitory Control in a Kindergarten Classroom"(2021). *LSU Master's Theses 5418.* https://digitalcommons.lsu.edu/gradschool_theses/5418

Li Y., Geary D.C., (2017). Children's visuospatial memory predicts mathematics achievement through early adolescence. *PLOS ONE*, *12*(2), 1–11. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0172046

Machado, R., & César, M. (2013). Diversity, dialogism and mathematics learning: social representations in action. *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*.

Macleod, C. M. (2007). *The Concept of Inhibition-in Cognition*.

Marotta L. e Varvara P. (2013). *Funzioni esecutive nei DSA - disturbo di lettura: valutazione e intervento* (Erikson, A c. Di).

Mayer, R. E., & Moreno, R. (2003). Nine Ways to Reduce Cognitive Load in Multimedia Learning. *Educational Psychologist*, *38*(1), 43–52. https://doi.org/10.1207/S15326985EP3801_6

Mcclelland, M., Cameron, C., Wanless, S., & Murray, A. (2007). Executive function, behavioral self-regulation, and social-emotional competence: Links to school readiness. *Contemporary Perspectives on Research in Social Learning in Early Childhood Education*, 83–107.

Mcclelland, M., Geldhof, G., Cameron, C., & Wanless, S. (2015). *Development and Self-Regulation* (Vol. 1, pagg. 523–565). https://doi.org/10.1002/9781118963418.childpsy114

McClelland, M. M., Cameron, C. E., Connor, C. M. D., Farris, C. L., Jewkes, A. M., & Morrison, F. J. (2007). Links Between Behavioral Regulation and Preschoolers' Literacy, Vocabulary, and Math Skills. *Developmental Psychology*, *43*(4), 947–959. https://doi.org/10.1037/0012-1649.43.4.947

McQuade, J., Murray-Close, D., Shoulberg, E., & Hoza, B. (2013). Working memory and social functioning in children. *Journal of experimental child psychology*, *115*, 422–435. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2013.03.002

Mellone, M., Verschaffel, L., & Dooren, W. Van. (2014). Making sense of word problems: the effect of rewording and dyadic interaction. Proceedings of the International Group for Mathematics Education, (4).

MentalUp. (s.d.). *Selective Attention: Definition, Examples & Tests - MentalUP*. Recuperato 24 novembre 2022, da https://www.mentalup.co/blog/selective-attention

Meyer, M. L., Salimpoor, V. N., Wu, S. S., Geary, D. C., & Menon, V. (2010). Differential contribution of specific working memory components to mathematics achievement in 2nd and 3rd graders. *Learning and Individual Differences*, *20*(2), 101–109. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.lindif.2009.08.004

Ministro della pubblica istruzione. (1985). *Decreto del Presidente della Repubblica 12 febbraio 1985, n. 104 -Approvazione dei nuovi programmi didattici per la scuola primaria*.

Morgan, P. L., Farkas, G., Wang, Y., Hillemeier, M. M., Oh, Y., & Maczuga, S. (2019). Executive function deficits in kindergarten predict repeated academic difficulties across elementary school. *Early Childhood Research Quarterly*, *46,* 20–32. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2018.06.009

Muratori, M., & Cutrone, M. C. (2017). *Allenare l'attenzione in età prescolare*. Erickson.

Murtianto, Y. H., Muhtarom, M., & Herlambang, B. (2022). Virtual Mathematics Laboratory Based on Cognitive Load Theory. *KnE Social Sciences*. https://doi.org/10.18502/kss.v7i14.12018

Neill, W. T., Valdes, L. A., & Terry, K. M. (1995). 7 - Selective attention and the inhibitory control of cognition. In F. N. Dempster, C. J. Brainerd, & C. J. Brainerd (A c. Di), *Interference and Inhibition in Cognition* (pagg. 207–261). Academic Press. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/B978-012208930-5/50008-8

Ni, Y., & Zhou, Y.-D. (2005). Teaching and Learning Fraction and Rational Numbers: The Origins and Implications of Whole Number Bias. *Educational Psychologist*, *40*(1), 27–52. https://doi.org/10.1207/s15326985ep4001_3

Niaz, M., & Logie, R. H. (1993). Working Memory, Mental Capacity and Science Education: towards an understanding of the 'working memory overload hypothesis'. *Oxford Review of Education*, *19*(4), 511–525. https://doi.org/10.1080/0305498930190407

Noël MP, Seron X, & Trovarelli F. (2004). Working memory as a predictor of addition skills and addition strategies in children. *Cahiers de Psychologie Cognitive/Current Psychology of Cognition*.

Noll, A., Roth, J., & Scholz, M. (2017). How to design educational material for inclusive classes. *Proceedings* of the Tenth Congress of European Society for Research in Mathematics Education.

Peng P., Barnes M., Wang C., Wang W., Li S., Swanson HL, & Tao S. (2018). A Meta-Analysis on the Relation Between Reading and Working Memory. *Psychological bulletin*, *144(1)*, 48.

Plass, J. L., Moreno, R., & Brunken, R. (2010). Cognitive load theory. *Cambridge University Press.*

Polya, G. (1945). *How to solve it; a new aspect of mathematical method.* Princeton University Press.

Purpura, D., & Ganley, C. (2014). Working memory and language: Skill-specific or domain-general relations to mathematics? *Journal of Experimental Child Psychology*, *122*, 104–121. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2013.12.009

Purpura, D. J., Baroody, A. J., & Lonigan, C. J. (2013). The transition from informal to formal mathematical knowledge: Mediation by numeral knowledge. *Journal of Educational Psychology*, *105*, 453–464. https://doi.org/10.1037/a0031753

Purpura, D. J., Schmitt, S. A., & Ganley, C. M. (2017). Foundations of mathematics and literacy: The role of executive functioning components. *Journal of Experimental Child Psychology*, *153*, 15–34. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2016.08.010

Rahayuningsih, S., Sirajuddin, S., & Nasrun, N. (2021). Cognitive flexibility: exploring students' problem-solving in elementary school mathematics learning. *JRAMathEdu (Journal of Research and Advances in Mathematics Education)*, *6*, 59–70. https://doi.org/10.23917/jramathedu.v6i1.11630

Ramani, G., Jaeggi, S., Daubert, E., & Buschkuehl, M. (2017). Domain-Specific and Domain-General Training to Improve Kindergarten Children's Mathematics. *Journal of Numerical Cognition, 3,* 468–495. https://doi.org/10.5964/jnc.v3i2.31

Rathgeb-Schnierer, E. (2015). Cognitive Flexibility and reasoning patternes in American and German Elementary students when sorting addition and substraction problems. *Proceedings* of the Ninth Congress of European Society for Research in Mathematics Education.

Remali, A. M., Ghazali, M. A., Kamaruddin, M. K., & Kee, T. Y. (2013). Understanding Academic Performance Based on Demographic Factors, Motivation Factors and Learning Styles. *International Journal of Asian Social Science*, *3*(9), 1938–1951. https://archive.aessweb.com/index.php/5007/article/view/2549

Ren, K., & Gunderson, E. A. (2021). The dynamic nature of children's strategy use after receiving accuracy feedback in decimal comparisons. *Journal of Experimental Child Psychology*, *202*. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2020.105015

Rikhye, R. v., Gilra, A., & Halassa, M. M. (2018). Thalamic regulation of switching between cortical representations enables cognitive flexibility. *Nature Neuroscience*, *21*(12), 1753–1763. https://doi.org/10.1038/s41593-018-0269-z

Rimm-Kaufman, S., Curby, T., Grimm, K., Nathanson, L., & Brock, L. (2009). The Contribution of Children's Self-Regulation and Classroom Quality to Children's Adaptive Behaviors in the Kindergarten Classroom. *Developmental psychology*, *45,* 958–972. https://doi.org/10.1037/a0015861

Ritter, S. M., Damian, R. I., Simonton, D. K., van Baaren, R. B., Strick, M., Derks, J., & Dijksterhuis, A. (2012). Diversifying experiences enhance cognitive flexibility. *Journal of Experimental Social Psychology*, *48*(4), 961–964. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jesp.2012.02.009

Rittle-Johnson, B., Siegler, R., & Alibali, M. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology*, *93*, 346–362. https://doi.org/10.1037//0022-0663.93.2.346

Rosenberg-Lee, M. (2021). Chapter 7 - Probing the neural basis of rational numbers: The role of inhibitory control and magnitude representations. In W. Fias & A. Henik (A c. Di), *Heterogeneous Contributions to Numerical Cognition* (pagg. 143–180). Academic Press. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/B978-0-12-817414-2.00001-4

Rossi, S., Vidal, J., Letang, M., Houdé, O., & Borst, G. (2019). Adolescents and Adults Need Inhibitory Control to Compare Fractions. *Journal of Numerical Cognition*, *5*, 314–336. https://doi.org/10.5964/jnc.v5i3.197

Sabena, C., Ferri, F., Martignone, F., & Robotti, E. (2019). *Insegnare e apprendere matematica nella scuola dell'infanzia e primaria*. Mondadori Università.

Santana, A., Roazzi, A., & Nobre, A. (2022). The Relationship between Cognitive Flexibility and Mathematical Performance in Children: A Meta-Analysis. *Trends in Neuroscience and Education, 28,* 100179. https://doi.org/10.1016/j.tine.2022.100179

Sarama, J., & Clements, D. (2009). Early Childhood Mathematics Education Research: Learning Trajectories for Young Children. In *Early Childhood Mathematics Education Research: Learning Trajectories for Young Children*. https://doi.org/10.4324/9780203883785

Sartori, R., Valentini, N., & Fonseca, R. (2019). Executive function in children with and without Developmental Coordination Disorder – A comparative study. *Child: Care, Health and Development*, *46*. https://doi.org/10.1111/cch.12734

Scheibling-Sève, C., Gvozdic, K., Pasquinelli, E., & Sander, E. (2022). Enhancing Cognitive Flexibility Through a Training Based on Multiple Categorization: Developing Proportional Reasoning in Primary School. *Journal of Numerical Cognition*, *8*(3), 443–472. https://doi.org/10.5964/jnc.7661

Semana, S., & Santos, L. (2011). Self-regulation of students in mathematics and oral communication in classroom. *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* .

Shoda, Y., Mischel, W., & Peake, P. K. (1990). Predicting adolescent cognitive and self-regulatory competencies from preschool delay of gratification: Identifying diagnostic conditions. *Developmental Psychology*, *26*, 978–986. https://doi.org/10.1037/0012-1649.26.6.978

Spiegel, J. A., Goodrich, J. M., Morris, B. M., Osborne, C. M., & Lonigan, C. J. (2021). Relations between executive functions and academic outcomes in elementary school children: A meta-analysis. *Psychological Bulletin*, *147*(4), 329–351. https://doi.org/10.1037/bul0000322

Spiegel, J., Goodrich, J., Morris, B., Jungersen, C., & Lonigan, C. (2021). Relations between executive functions and academic outcomes in elementary school children: A meta-analysis. *Psychological Bulletin*, *147*, 329–351. https://doi.org/10.1037/bul0000322

Spiro, R., Coulson, R., Feltovich, P. J., & Anderson, D. (1988). Cognitive Flexibility Theory: Advanced Knowledge Acquisition in Ill-Structured Domains. In

Cognitive Science (Vol. 12, pagg. 544–557). https://doi.org/10.1017/CBO9780511529863.023

State of Mind (Giornale delle Scienze Psicologiche). (s.d.). *Controllo inibitorio: definizione, lo sviluppo nei bambini e i possibili deficit*. Recuperato 17 novembre 2022, da https://www.stateofmind.it/controllo-inibitorio/#controllo-inibitorio-definizione

Stenberg, E., Havoold, P., & Sriraman, B. (2022). Uncertainty as catalyst for creativity in students' mathematical problem-solving process. *Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*.

Stender, P., Kaiser, G. (2017). The use of heuristic strategies in modelling activities. *ZDM*, *50*. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0901-5

SurreySchoolsOne *(n.d.) Background Knowledge | Elementary Literacy | Surrey Schools ONE*. (s.d.). Recuperato 25 aprile 2023, da https://surreyschoolsone.ca/teachers/literacy/elementary/reading-essentials/background-knowledge/

Swanson, H., & Beebe-Frankenberger, M. (2004). The Relationship Between Working Memory and Mathematical Problem Solving in Children at Risk and Not at Risk for Serious Math Difficulties. *Journal of Educational Psychology*, *96*, 471–491. https://doi.org/10.1037/0022-0663.96.3.471

Szatkowska, I., Bogorodzki, P., Wolak, T., Marchewka, A., & Szeszkowski, W. (2008). The effect of motivation on working memory: An fMRI and SEM study. *Neurobiology of Learning and Memory*, *90*(2), 475–478. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.nlm.2008.06.001

Trbovich PL, & LeFevre JA. (2003). Phonological and visual working memory in mental addition. *Memory & Cognition*, *31(5)*, 738–745.

Treccani. (s.d.). *funzioni esecutive in «Dizionario di Medicina»*. Recuperato 24 gennaio 2023, da https://www.treccani.it/enciclopedia/funzioni-esecutive_%28Dizionario-di-Medicina%29/

U.S. Department of Education. (2008). *The Final Report of the National Mathematics Advisory Panel*. www.ed.gov/MathPanel

Van de Weijer-Bergsma, E., Kroesbergen, E. H., Prast, E. J., & Van Luit, J. E. H. (2015). Validity and reliability of an online visual–spatial working memory task for self-reliant administration in school-aged children. *Behavior Research Methods, 47*(3), 708–719

Van Dooren, W., & Inglis, M. (2015). Inhibitory control in mathematical thinking, learning and problem solving: a survey. *ZDM*, *47*(5), 713–721. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0715-2

Van Hoof, J., Degrande, T., Ceulemans, E., Verschaffel, L., & Dooren, W. (2018). Towards a mathematically more correct understanding of rational numbers: A longitudinal study with upper elementary school learners. *Learning and Individual Differences*, *61*, 99–108. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2017.11.010

Vidal Carulla, C., Christodoulakis, N., & Adbo, K. (2021). Development of Preschool Children's Executive Functions throughout a Play-Based Learning Approach That Embeds Science Concepts. *International Journal of Environmental Research and Public Health, 18*, 588. https://doi.org/10.3390/ijerph18020588

Willoughby, M., Kupersmidt, J., Voegler-Lee, M., & Bryant, D. (2011). Contributions of Hot and Cool Self-Regulation to Preschool Disruptive Behavior and Academic Achievement. *Developmental Neuropsychology*, *36*(2), 162–180. https://doi.org/10.1080/87565641.2010.549980

Zan, R., & Di Martino, P. (2017). *Insegnare e apprendere matematica con le Indicazioni Nazionali*. Giunti Scuola.

Zelazo, P. D., Qu, L., & Kesek, A. C. (2010). Hot executive function: Emotion and the development of cognitive control. In *Child development at the intersection of emotion and cognition.* (pagg. 97–111). American Psychological Association. https://doi.org/10.1037/12059-006