

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI GENOVA
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E
NATURALI

Corso di laurea magistrale in Matematica
Generale



TESI DI LAUREA

Olonomia e Teorema di Berger

Relatore:

Prof. Arvid Perego

Candidato:

Vincenzo Di Bartolo

Correlatore:

Prof. Matteo Penegini

Anno accademico
2021-2022

Indice

Ringraziamenti	iii
Introduzione	v
1 Preliminari	1
1.1 Il fibrato tangente	2
1.1.1 Campi vettoriali	7
1.1.2 Flussi di campi vettoriali	13
1.2 Campi vettoriali indotti	14
1.3 Distribuzioni	15
1.4 Gruppi di Lie	17
1.4.1 Esempi, Quaternioni e Ottonioni	18
1.4.2 L'algebra di Lie di un gruppo di Lie	26
1.4.3 La mappa esponenziale	32
1.4.4 Da infinitesimo a globale	34
2 Olonomia su fibrati vettoriali	36
2.1 Fibrati vettoriali	36
2.1.1 Le funzioni di transizione	38
2.1.2 Operazioni tra fibrati vettoriali	40
2.1.3 Sezioni di un fibrato vettoriale	44
2.2 Connessioni su fibrati vettoriali	48
2.2.1 La curvatura di una connessione	50
2.3 Sollevamento parallelo di cammini	52
2.3.1 Gruppi di Olonomia su fibrati vettoriali	55
3 Olonomia su fibrati principali	58
3.1 Fibrati principali	58
3.1.1 Il sottofibrato verticale	60

3.2	Connessioni su fibrati principali	65
3.3	Relazioni tra tipologie di fibrati	69
3.3.1	Da vettoriale a principale	69
3.3.2	Da principale a vettoriale	70
3.4	La curvatura di una connessione	73
3.5	Sollevamento orizzontale di cammini	75
3.5.1	Gruppi di Olonomia su fibrati principali	78
3.6	Relazioni tra tipologie di connessioni	80
3.6.1	Relazioni tra tipologie di Olonomia	82
4	Olonomia riemanniana	84
4.1	Relazione con i tensori costanti	86
4.2	La torsione di una connessione	89
4.2.1	La connessione di Levi Civita	90
4.3	Riducibilità di una metrica	91
4.4	Il Teorema di Berger	92
4.4.1	Riducibilità della rappresentazione di Olonomia	96
4.4.2	Il Teorema di Berger	97
4.4.3	Esempi e conseguenze	98
	Bibliografia	104

Ringraziamenti

La verità è che non so davvero da dove cominciare per scrivere questi ringraziamenti, e che l'idea di sedermi davanti al computer e provare a battere un testo che provi anche solo a dare la minima idea di tutto il supporto che ho ricevuto in questi anni non mi piaceva per niente... Così lo farò lo stesso!

Ma solo dopo averlo fatto con carta e penna, che è quello che sto facendo ora. Alla fine il testo che state leggendo sarà uguale, è vero, ma così almeno mi sento un po' più... un po' meno... vabbè, chi di voi mi conosce sa a cosa mi sto riferendo, e chi di voi non mi conosce ancora lo scoprirà molto presto.

Quando mi sono iscritto all'università, per me era tutto un po' come un gioco: non avevo davvero idea di cosa mi avrebbe aspettato, di quanto mi sarei appassionato e del così tanto impegno e dedizione che vi avrei dedicato. Se lo avessi saputo, probabilmente ne sarei rimasto spaventato. Ma questo credo che valga per molte cose nella vita...

Quando mi sono iscritto all'università non avevo scelto matematica, ma una settimana dopo l'inizio delle lezioni sì, e virai verso questo percorso pieno di insidie, che alla fine mi ha lasciato così tanto che per un lungo periodo ho pure scordato perché lo avessi iniziato... Perché l'università per me non è stata solo lo scoprire che ci sono posti dove $1 + 1 = 0$ e $(a + b)^2 = a^2 + b^2$, o il ritrovarsi a parlare sempre, sempre e sempre di questi infiniti... che manco fossero caramelle o tazzine di caffè (e che io, comunque, non ho ancora visto...).

Non è stata solo il sentirmi disperso, o l'ansia per tutti quegli esami... come ad esempio Analisi 3, che mannaggia pesava solo 7 CFU ma q.s. (quasi sicuramente) ne avrebbe meritati almeno 15.

L'università per me è stata molto, molto di più: è stata vivere per la prima volta lontano dai miei genitori, è stata ritrovarmi per la prima volta con la responsabilità della gestione della mia casa, del mio tempo e della mia men-

te, è stata circondarmi di persone con cui condividere interessi, esperienze, emozioni e un quotidiano fatto di studio sempre in buona compagnia.

L'università è stata l'Erasmus, che da solo meriterebbe pagine e pagine di questo testo e che forse solo chi lo ha vissuto sa davvero quanto possa arricchire, ed è stata la possibilità di trovare un mondo di amici (...e amici nel mondo!) subito pronti darmi sostegno nel rialzarmi tutte le volte che cadevo... e ne sono caduto parecchie di volte... Un po' scivolando, un po' inciampando qua e là, un po' sbattendo la testa e un po' sbattendo il cuore.

L'università è stata capire che cosa volevo fare nella vita per poi capire che in realtà non avevo capito niente né della vita stessa né di cosa volevo fare nella mia. E' stata crescere, e ora che sono arrivato alla fine di questo percorso faccio tutto 'sto giro di parole per dire a voi che state leggendo questo lungo testo, in cui probabilmente vi sarete ritrovati da qualche parte a pensare "Ah sì, mi ricordo di quella volta in cui era a terra e l'ho aiutato",

GRAZIE!

Ma grazie davvero.

Grazie, perché senza di voi che mi siete stati vicino in questi due (cinque!) meravigliosi anni della mia vita, io oggi non starei scrivendo questo testo, e non lo starei scrivendo in questo modo.

Grazie per aver contribuito "consapevolmente o inconsapevolmente" a rendermi la persona che sono oggi.

Un ringraziamento speciale al prof. Perego, che ha contribuito alla realizzazione di questo elaborato e che è sempre stato capace di supportarmi (e sopportarmi...) facendomi sentire sempre accolto ed ascoltato, non solo per parlare di matematica.

Un ringraziamento di cuore va alla mia famiglia, che mi ha dato la possibilità di studiare e di continuare a farlo, e che mi ha aiutato e supportato incondizionatamente nell'affrontare i momenti peggiori mai affrontati fino ad ora... Grazie di cuore anche a Zia Mamy e Zia Sabi.

Infine, ci tengo a fare i nomi di alcune persone con cui "ho fatto click" (mi hanno detto che si dice così...), che mi hanno aiutato in momenti particolarmente difficili. Grazie di cuore ad Ale, Andre, Barlets, Barby, Bo, Bea, Big, Dany, Duda, Ema, Fabi, Franca, Iris, Joaquim, Katleen, Kostas, Luz, Lolli, Marc di marc.and.vic, Maria, Pie, Sofi, WWDeiv.

Introduzione

Il mondo è stato creato con delle frasi, composte di parole, formate da lettere. Dietro queste ultime sono nascosti numeri, rappresentazione di una struttura, di una costruzione ove appaiono senza dubbio degli altri mondi ed io voglio analizzarli e capirli, perché l'importante non è questo e quel fenomeno, ma il nucleo, la vera essenza dell'universo.

Albert Einstein

Cinque anni fa immaginavo la matematica come un'elegante via verso l'infinito... Come un linguaggio che potesse meravigliosamente narrare di ciò che di mistico e armonioso ci appare nel mondo che ci circonda. La immaginavo da lontano come una silenziosa conchiglia che cela una perla di estrema purezza all'interno di un complesso involucro di simboli e ragionamenti. Aver avuto la possibilità di nuotare con la fantasia tra le sue profondità, di guardarla con gli occhi della mente e di portarla alle sue orecchie mi ha permesso di sentire l'eco di un mare nascosto che non avrei mai pensato di poter immaginare e che si faceva più forte laddove riuscivo a scorgere i confini della conoscenza umana.

Tra questi confini della conoscenza, i buchi neri sono stati sicuramente tra i più affascinanti. Li ho conosciuti in relatività generale, tramite uno spazio-tempo modellato da varietà lisce di dimensione 4, e mi hanno proiettato nel magico mondo della geometria differenziale: l'ambiente in cui ci muoveremo durante tutto l'elaborato, parlando di Olonomia: un concetto matematico che condensa informazioni legate al trasporto parallelo di vettori di un fibrato vettoriale su una varietà liscia M .

Cominciamo ponendoci una domanda: in quanti (e quali) modi possiamo far ritornare vettori tangenti $v \in T_x M$ in $T_x M$ dopo averli trasportati lungo curve chiuse? Innanzitutto, abbiamo bisogno di un modo sensato per trasportare vettori preservandone le informazioni, ovvero cercando una

nozione di parallelismo nell'operare questi spostamenti, che in un qualsiasi spazio euclideo \mathbb{R}^n sono naturalmente forniti dalle identificazioni $T_x\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$ in ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Intuiamo che abbiamo bisogno di un modo "coerente" per identificare spazi tangenti distinti ad M tra loro, per poterne così confrontare gli elementi. Questo processo verrà studiato prevalentemente nel secondo capitolo nella sua generalizzazione, trasportando parallelamente lungo curve chiuse vettori nelle fibre di un *fibrato vettoriale* $E \xrightarrow{\pi} M$: una varietà liscia che "avvolge" M dotandola di spazi vettoriali $E_x = \pi^{-1}(x)$ in ciascuna fibra.

Per far comunicare spazi tangenti distinti di M tra loro, verrà introdotto il concetto di *connessione*: un utile strumento che permetterà di derivare campi vettoriali e di parlare di *curvatura*.

Costruiremo connessioni anche nel mondo dei *fibrati principali*: fibrati $G \curvearrowright P \xrightarrow{\pi} M$ dotati di un *gruppo di Lie* G in ciascuna fibra e di un'azione destra $G \curvearrowright P$ liscia e libera, che saranno studiati prevalentemente nel terzo capitolo, ponendo particolare attenzione sul sottofibrato verticale $VP := \text{Ker}(d\pi) \subseteq TP$ e sulla mappa $\iota: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{X}(P)$ (definita in 3.1) che verrà usata per generare direzioni verticali nel fibrato tangente TP , sfruttando la *mappa esponenziale* $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$. Questa mappa, così come gli stessi gruppi di Lie, sarà studiata nei dettagli nella prima parte dell'elaborato, in cui il risultato più importante legherà \exp alle curve integrali massimali dei campi vettoriali *invarianti a sinistra* su G .

Anche se i mondi dei fibrati vettoriali e principali sono distinti, vedremo come costruire ponti tra essi nell'apposita sezione "Relazioni tra tipologie di fibrati", che vedrà sviluppare al suo interno legami tra le due definizioni distinte di connessione, modi per associare un fibrato principale a ciascun fibrato vettoriale, e modi per associare ad ogni fibrato principale (munito di una rappresentazione del gruppo su uno spazio vettoriale) un fibrato vettoriale.

Una volta scelta una connessione ∇ su un fibrato vettoriale $E \rightarrow M$ (o sul corrispondente *fibrato dei frame* $GL_{\text{rank}(E)}(\mathbb{R}) \curvearrowright P^E \xrightarrow{\pi} M$ associato), il trasporto di vettori si può finalmente realizzare attraverso lo studio delle *mappe di trasporto parallelo* $P_\gamma: E_x \rightarrow E_x \in GL(E_x)$ provenienti da loop $\gamma: I \rightarrow M$ in x , che insieme costituiscono il *gruppo di Olonomia* di ∇ in x . Esso è strettamente legato alla curvatura di M e misura le difficoltà che si hanno nell'avere un trasporto parallelo banale, che restituisca sempre lo stesso vettore di partenza, come avviene nel caso euclideo. I gruppi di

Olonomia verranno costruiti analogamente nel mondo dei fibrati principali, e queste due costruzioni saranno messe in relazione attraverso il Teorema 3.25, che ci permetterà di studiarli sfruttando risultati provenienti da ciascuno dei due mondi.

La domanda che ci siamo posti inizialmente a questo punto si traduce in un linguaggio più formale: partendo da una varietà liscia M , quali sono i gruppi di Olonomia che possiamo ottenere a partire da connessioni ∇ sul fibrato tangente TM ? In generale la risposta non è nota, ma concentrandosi su opportune (semplicemente connesse, irriducibili e non localmente simmetriche) varietà riemanniane (M, g) munite della connessione di Levi Civita, Marcel Berger riuscì nel 1955 a fornire una classificazione dei gruppi possibilmente realizzabili (si rimanda all'articolo originale in [4]), che venne perfezionata in seguito da Alekseevskii [2], Brown e Gray [6]. La classificazione di Berger (Teorema 4.20) individua *7 possibili* gruppi di Olonomia, ed è ad oggi noto (dopo oltre 30 anni di studi) che tutti i 7 gruppi sono realizzabili a partire da varietà riemanniane *irriducibili e non simmetriche*.

Vedremo che il gruppo di Olonomia di M risulta essere anche un indicatore della presenza di opportune strutture complesse globali, che acquisirà di conseguenza proprietà di varietà Kahler o Hyperkahler. Queste relazioni saranno approfondite nell'ultima parte della tesi, e saranno governate dal Principio di Olonomia (Teorema 4.5), che garantirà l'estensione globale di tensori preservati localmente dal gruppo di Olonomia.

Vi auguro una buona lettura.

Capitolo 1

Preliminari

In questo primo capitolo richiamiamo alcuni risultati fondamentali di geometria differenziale prevalentemente concernenti campi vettoriali, gruppi di Lie e algebre di Lie, con cui lavoreremo nei capitoli successivi. Studieremo anche Quaternioni, Ottonioni e gruppi di matrici associati, che vedremo avere un legame intrinseco con particolari varietà riemanniane.

Lo scopo sarà quello di fornire basi che possano garantire una lettura scorrevole, nonostante la complessità dell'argomento.

Cominciamo con alcune accortezze:

(i) Durante tutto il testo porremo:

$I := [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$;

Varietà liscia := Varietà differenziabile di classe \mathcal{C}^∞ ;

Funzione/mappa liscia := Funzione/mappa differenziabile di classe \mathcal{C}^∞ ;

$\mathbb{1}_P : X \rightarrow Y$, indicando la funzione costante di valore $P \in Y$;

(ii) Se chiameremo liscia una mappa/funzione definita su un insieme non aperto A , sottintenderemo sempre l'esistenza di una sua opportuna estensione liscia definita su un aperto $U \supset A$.

(iii) Gli insiemi di indici saranno sempre indicati con lettere in stampatello maiuscolo.

1.1 Il fibrato tangente

Uno dei primi (e fondamentali) ingredienti di cui avremo bisogno nel nostro percorso è il fibrato tangente di una varietà liscia M : una varietà liscia costituita da tutti i vettori tangenti $X_p \in T_p M$ ad ogni suo punto $p \in M$.

Una carta coordinata su questa varietà dovrà fornire informazioni sul punto di tangenza e sulle coordinate del vettore nel rispettivo spazio tangente, per cui ritroveremo una varietà di dimensione doppia rispetto a quella di partenza. Faremo molto uso del fascio strutturale di una varietà liscia, ovvero il fascio delle funzioni lisce, che è bene definire subito:

Definizione 1.1. *Il fascio delle funzioni lisce \mathcal{C}_M^∞ su una varietà liscia M è il fascio di \mathbb{R} -algebre definito dall'assegnazione*

$$U \mapsto \mathcal{C}_M^\infty(U) := \{f: U \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ liscia} \}$$

per ogni aperto $U \subseteq M$, e dalle mappe di restrizione controvarianti

$$\begin{aligned} \rho_{UV}: \mathcal{C}_M^\infty(U) &\longrightarrow \mathcal{C}_M^\infty(V) \\ f &\longmapsto f|_V \end{aligned}$$

per ogni coppia di aperti $U, V \subseteq M$.

Consideriamo l'insieme \mathfrak{U}_p degli intorni aperti di un punto $p \in M$ e la relazione di equivalenza \sim_p tra funzioni lisce descritta nel modo seguente: dati due intorni aperti $U, V \subseteq M$ di p e due funzioni lisce $f \in \mathcal{C}_M^\infty(U), g \in \mathcal{C}_M^\infty(V)$, poniamo

$f \sim_p g$ se e solo se esiste un intorno aperto $W \subseteq U \cap V$ di p tale che $f|_W = g|_W$.

In questo modo possiamo descrivere le sighe del fascio \mathcal{C}_M^∞ come

$$(\mathcal{C}_M^\infty)_p := \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \mathfrak{U}_p}} \mathcal{C}_M^\infty(U) = \left(\bigsqcup_{U \in \mathfrak{U}_p} \mathcal{C}_M^\infty(U) \right) / \sim_p$$

e dotarle di mappe di valutazione

$$\begin{aligned} \text{val}_p: (\mathcal{C}_M^\infty)_p &\longrightarrow \mathbb{R} \\ [g] &\longmapsto [g]_p := g(p), \end{aligned}$$

dove g è un qualche rappresentante di $[g]$ definito in un opportuno intorno di p .

E' necessario accordarci sul significato di vettore tangente ad una varietà liscia: iniziamo pensando che ogni vettore possa agire da operatore sulle funzioni lisce tramite derivazione direzionale:

Definizione 1.2. Sia M una varietà liscia n -dimensionale e $p \in M$. Una derivazione in p è una mappa \mathbb{R} -lineare

$$X_p: (\mathcal{C}_M^\infty)_p \longrightarrow \mathbb{R}$$

che soddisfa la regola di Leibnitz

$$X_p([f][g]) = X_p([f])[g]_p + [f]_p X_p([g])$$

per ogni $[f], [g] \in (\mathcal{C}_M^\infty)_p$.

Si verifica facilmente che ogni combinazione lineare di derivazioni è ancora una derivazione, per cui l'insieme

$$T_p M := \{X_p: (\mathcal{C}_M^\infty)_p \longrightarrow \mathbb{R} : X_p \text{ derivazione in } p\}$$

ha una struttura di \mathbb{R} -spazio vettoriale, ed è chiamato spazio tangente ad M in p .

Fissiamo ora una varietà liscia M , un punto $p \in M$ e una carta coordinata $(U_\alpha, \varphi_\alpha = (x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n))$ intorno a p .

Si può dimostrare che le *derivazioni coordinate*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i} \Big|_p : (\mathcal{C}_M^\infty)_p &\longrightarrow \mathbb{R} \\ [f] &\longmapsto \frac{\partial(f \circ \varphi_\alpha^{-1})}{\partial x_\alpha^i} \Big|_{\varphi_\alpha(p)}, \end{aligned}$$

per $i = 1 \dots n$, forniscono una base per $T_p M$, che risulta quindi essere un \mathbb{R} -spazio vettoriale di dimensione n .

Il *vettore tangente ad una curva liscia* $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ nel punto $0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ è la derivazione

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dt} \Big|_{t=0} : (\mathcal{C}_M^\infty)_p &\longrightarrow \mathbb{R} \\ [f] &\longmapsto \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \Big|_{t=0} \end{aligned}$$

in cui

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dt} \Big|_{t=0}([f]) &= \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \Big|_{t=0} = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{d(\varphi_\alpha \circ \gamma)^i}{dt} \Big|_0 \frac{\partial(f \circ \varphi_\alpha^{-1})}{\partial x_\alpha^i} \Big|_{\varphi_\alpha(p)} = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{d(\varphi_\alpha \circ \gamma)^i}{dt} \Big|_0 \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i} \Big|_p([f]) \end{aligned}$$

da cui ricaviamo le componenti

$$\left\{ \frac{d(\varphi_\alpha \circ \gamma)^i}{dt} \Big|_0 \right\}_{i=1}^n$$

di $\frac{d\gamma}{dt} \Big|_{t=0}$ in $T_p M$ rispetto alla base di derivazioni coordinate $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \Big|_p \right\}_{i=1}^n$.

Osservazione 1.3. *Nel linguaggio precedente, richiamando la definizione dello spazio tangente $T_p M$ in $p \in M$, il punto di vista algebrico delle derivazioni può essere sostituito da un punto di vista più geometrico e intuitivo:*

Ad ogni curva liscia

$$\gamma: I_\gamma := (a_\gamma, b_\gamma) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow M$$

passante per $p = \gamma(c)$, con $c \in I_\gamma$, possiamo associare il suo vettore tangente in $\frac{d\gamma}{dt} \Big|_c \in T_p M$ in p , per poi considerare l'insieme

$$\mathcal{C}_p := \{(\gamma, c) : \gamma: I_\gamma \longrightarrow M \text{ curva liscia, } c \in I_\gamma, \gamma(c) = p\}$$

su cui introdurre la relazione di equivalenza

$$(\gamma_1, c_1) \sim (\gamma_2, c_2) \iff \frac{d\gamma_1}{dt} \Big|_{c_1} = \frac{d\gamma_2}{dt} \Big|_{c_2}$$

ritrovando l'insieme \mathcal{C}_p / \sim delle curve passanti per p , identificate tramite i loro vettori tangenti in p .

Siamo effettivamente in grado di ritrovare l'intuitiva corrispondenza geometrica bigettiva, che ci permette di pensare ai vettori nello spazio tangente come vettori tangenti a curve, oltre che come derivazioni locali, ottenendo una doppia caratterizzazione che ci tornerà utile:

Teorema 1.4. *Nel linguaggio precedente, la mappa*

$$\begin{aligned} \tau_p: \mathcal{C}_p / \sim &\longrightarrow T_p M \\ (\gamma, c) &\longmapsto \frac{d\gamma}{dt} \Big|_c \end{aligned}$$

è bigettiva.

Dimostrazione. Grazie alla relazione di equivalenza introdotta su \mathcal{C}_p , τ_p è iniettiva. Per mostrare la suriettività scegliamo una carta locale $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ intorno a p . A questo punto, per ogni vettore

$$X_p = \sum_{i=1}^n X_{\alpha,p}^i \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i} \Big|_p \in T_p M$$

scriviamo con

$$X := \sum_{i=1}^n X_{\alpha,p}^i e_i \in \mathbb{R}^n$$

il suo vettore euclideo corrispondente, e consideriamo la retta

$$\begin{aligned} \rho: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto \varphi_\alpha(p) + X t \end{aligned}$$

in direzione X , che sarà contenuta in $\varphi_\alpha(U)$ per t in un opportuno intorno aperto $J \subseteq \mathbb{R}$ di 0. Di conseguenza, la curva

$$\gamma := \varphi_\alpha^{-1} \circ \rho|_J: J \longrightarrow M$$

è una curva liscia per $p = \gamma(0)$, e inoltre

$$\begin{aligned} \tau_p(\overline{(\gamma, 0)}) &= \frac{d\gamma}{dt} \Big|_0 = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{d(\varphi_\alpha \circ \gamma)^i}{dt} \Big|_{t=0} \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i} \Big|_p = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{d(\varphi_\alpha(p))^i + X_{\alpha,p}^i t}{dt} \Big|_{t=0} \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i} \Big|_p = \\ &= \sum_{i=1}^n X_{\alpha,p}^i \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i} \Big|_p \\ &= X_p, \end{aligned}$$

come volevamo. □

Abbiamo finalmente costruito gli spazi tangenti nei punti di una varietà M e osservato la duplice natura dei loro elementi, e abbiamo finalmente gli strumenti per proseguire con la costruzione del fibrato tangente, dando forma ad una varietà liscia contenente al suo interno tutti gli spazi tangenti di M , opportunamente "incollati":

Teorema 1.5. *Sia M una varietà liscia n -dimensionale. Allora l'insieme*

$$TM := \bigsqcup_{p \in M} T_p M$$

è dotato di una struttura di varietà liscia $2n$ -dimensionale. Inoltre, la proiezione

$$\begin{aligned} \pi: TM &\longrightarrow M \\ X_p &\longmapsto p \end{aligned}$$

è una submersione suriettiva.

Dimostrazione. Un atlante coordinato $\mathcal{U} := \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ su M , induce le basi coordinate $\{\frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}|_p\}_{i=1}^n$ sugli spazi tangenti $T_p M$, tramite le quali possiamo decomporre i vettori

$$X_p = \sum_{i=1}^n X_{\alpha,p}^i \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i},$$

avendo $X_{\alpha,p}^i \in \mathbb{R}$ per ogni $i = 1 \dots n$ e potendo così descrivere localmente TM descrivendo i sottoinsiemi

$$TU_\alpha := \bigsqcup_{p \in U_\alpha} T_p M$$

con le mappe

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha: TU_\alpha &\longrightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n \\ X_p &\longmapsto (\varphi_\alpha(p), (X_{\alpha,p}^1, \dots, X_{\alpha,p}^n)) \end{aligned}$$

Si verifica che la collezione $\{(TU_\alpha, \Phi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ costituisce un atlante liscio per TM , che acquisisce quindi una struttura di varietà liscia $2n$ -dimensionale.

La mappa π è naturalmente suriettiva, e il fatto che sia una submersione segue dalla commutatività dei diagrammi

$$\begin{array}{ccc} TU_\alpha & \xrightarrow{\Phi_\alpha} & \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n \\ \pi \downarrow & & \downarrow pr_1 \\ U_\alpha & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & \varphi_\alpha(U_\alpha) \end{array}$$

di banalizzazione locale, che evidenziano come ogni vettore $X_p \in TM$ abbia un intorno in cui $\varphi_\alpha \circ \pi \circ \Phi_\alpha^{-1} = pr_1$ sia una mappa liscia di rango $n = \dim(M)$. \square

Per costruzione, la fibra $\pi^{-1}(p)$ del fibrato tangente in $p \in M$ coincide con lo spazio tangente $T_p M$, ma avremmo potuto procedere analogamente considerando come fibre spazi vettoriali di dimensione arbitraria. Vedremo in dettaglio questo procedimento durante la costruzione dei fibrati vettoriali, che sarà affrontata in modo più completo nei capitoli successivi.

1.1.1 Campi vettoriali

Possiamo considerare il fibrato tangente come il "principe" dei fibrati vettoriali, in quanto ci accompagnerà durante tutto il percorso, sarà alla base di tutte le nostre costruzioni, e sarà il fibrato di base nella classificazione dei gruppi di Olonomia riemanniani che vedremo nell'ultimo capitolo.

Il motivo per cui lo abbiamo introdotto a questo punto del nostro percorso risiede nell'importanza delle sue "sezioni": i campi vettoriali:

Definizione 1.6. *Sia M una varietà liscia n -dimensionale. Un campo vettoriale su M è una mappa liscia $X: M \rightarrow TM$ tale che $\pi \circ X = id_M$.*

L'insieme dei campi vettoriali su M sarà denotato $\mathfrak{X}(M)$.

Questa definizione incapsula l'idea intuitiva che un campo vettoriale sia tangente alla varietà M in questione. Infatti, la condizione $\pi \circ X = id_M$ si traduce proprio in $X_p \in T_p M$ per ogni $p \in M$, con dipendenza liscia da p .

Osservazione 1.7. *Sia M una varietà liscia e $U \subseteq M$ un aperto. La struttura di spazio vettoriale nelle fibre di TM ci offre la possibilità di sommare campi vettoriali $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ definendo $X + Y \in \mathfrak{X}(U)$ puntualmente tramite*

$$(X + Y)_p := X_p + Y_p$$

per ogni $p \in U$.

E' inoltre possibile definire (sempre puntualmente) un prodotto

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_M^\infty(U) \times \mathfrak{X}(U) &\longrightarrow \mathfrak{X}(U) \\ (f, X) &\longmapsto fX \end{aligned}$$

in cui

$$(fX)_p := f(p)X_p$$

per ogni $p \in M$.

Una volta verificata l'immediata associatività tra le operazioni di somma e prodotto per funzioni, otteniamo che $\mathfrak{X}(U)$ ha una struttura di $\mathcal{C}_M^\infty(U)$ -modulo.

In realtà vale molto di più: data la compatibilità delle mappe di restrizione di campi vettoriali e funzioni, \mathfrak{X} risulta essere un fascio di \mathcal{C}_M^∞ -moduli (per maggiori dettagli sull'argomento, si rimanda a [8, p.108]).

Ad un aperto coordinato $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ su una varietà liscia M corrisponde per definizione un aperto coordinato (TU_α, Φ_α) sul fibrato tangente, la cui mappa coordinata individua per restrizione isomorfismi lineari:

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha|_{\pi^{-1}(p)} : \pi^{-1}(p) = T_p M &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}|_p &\longmapsto e_i \end{aligned}$$

dove $\{e_i\}_{i=1}^n$ è la base canonica di \mathbb{R}^n . Inoltre, la proiezione sul primo fattore

$$pr_1 : \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha)$$

è l'inversa sinistra della mappa liscia di inclusione

$$\begin{aligned} s_i : \varphi_\alpha(U_\alpha) &\longrightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto (x, e_i), \end{aligned}$$

che rendono commutativi i diagrammi

$$\begin{array}{ccc} TU_\alpha & \xrightarrow{\Phi_\alpha} & \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n \\ \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i} \uparrow \left(\downarrow \pi \right. & & \left. pr_1 \downarrow \right) \uparrow s_i \\ U_\alpha & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & \varphi_\alpha(U_\alpha) \end{array}$$

e che ci consentono quindi di definire campi vettoriali

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha^i} = \Phi_\alpha^{-1} \circ s_i \circ \varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow TU_\alpha \subseteq TM$$

tali che

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}(p) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}|_p \in T_p M$$

per ogni $i = 1, \dots, n$, $p \in U_\alpha$.

Poichè in ogni punto $p \in U_\alpha$ l'insieme $\{\frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}|_p\}_{i=1}^n$ è una base di $T_p M$, ogni campo vettoriale $X \in \mathfrak{X}(U_\alpha)$ può essere unicamente espresso come

$$X = \sum_{i=1}^n X_\alpha^i \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i} \quad (1.1)$$

dove $X_\alpha^i \in \mathcal{C}_M^\infty(U_\alpha)$ è una funzione liscia per ogni $i = 1, \dots, n$.

Grazie all'Osservazione 1.7 sappiamo che $\mathfrak{X}(U_\alpha)$ ha una struttura di $\mathcal{C}_M^\infty(U_\alpha)$ -modulo, e le espressioni (1.1) garantiscono che l'insieme

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i} : U_\alpha \longrightarrow TU_\alpha \right\}_{i=1}^n$$

ne costituisca una base.

Riassumendo, abbiamo ottenuto il seguente risultato:

Proposizione 1.8. *Sia M una varietà liscia di dimensione n e U_α un aperto coordinato. Allora $\mathfrak{X}(U_\alpha)$ è un $\mathcal{C}_M^\infty(U_\alpha)$ -modulo libero di rango n , che ammette come base i campi coordinati direzionali*

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i} : U_\alpha \longrightarrow TU_\alpha \right\}_{i=1}^n$$

Osservazione 1.9. *Grazie alla Proposizione precedente possiamo proseguire l'Osservazione 1.7 affermando che \mathfrak{X} è un fascio di \mathcal{C}_M^∞ -moduli localmente libero di rango $\dim M$.*

In precedenza (Proposizione 1.4) abbiamo mostrato la doppia natura dei vettori tangenti ad una varietà M in un suo punto p , vedendoli sia algebricamente come derivazioni locali sia geometricamente come vettori tangenti a curve. Vediamo adesso che vale un discorso analogo per i campi vettoriali:

Definizione 1.10. *Sia M una varietà liscia e $U \subseteq M$ un aperto. Una mappa \mathbb{R} -lineare $D: \mathcal{C}_M^\infty(U) \longrightarrow \mathcal{C}_M^\infty(U)$ è chiamata derivazione di $\mathcal{C}_M^\infty(U)$ se soddisfa la regola di Leibnitz*

$$D(fg) = D(f)g + fD(g)$$

per ogni $f, g \in \mathcal{C}_M^\infty(U)$.

Si verifica che l'insieme delle derivazioni

$$\mathcal{D}_M(U) := \{ D: \mathcal{C}_M^\infty(U) \longrightarrow \mathcal{C}_M^\infty(U) : D \text{ derivazione} \}$$

su un aperto $U \subseteq M$ ha una struttura di $\mathcal{C}_M^\infty(U)$ -modulo.

Ogni campo vettoriale può essere pensato come derivazione, e ogni derivazione proviene da un campo vettoriale, come mostra il seguente importante

Teorema 1.11. *Sia M una varietà liscia e $U \subseteq M$ un aperto. Allora vi è un isomorfismo*

$$\mathfrak{X}(U) \simeq \mathcal{D}_M(U)$$

di $\mathcal{C}_M^\infty(U)$ -moduli.

Dimostrazione. Consideriamo un campo vettoriale $X \in \mathfrak{X}(U)$ e $p \in U$. Considerando una carta coordinata $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ possiamo esprimere ogni derivazione locale (vettore) in p come

$$X_p = \sum_{i=1}^n X_{\alpha,p}^i \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i} \Big|_p$$

Per ogni funzione liscia $f \in \mathcal{C}_M^\infty(U)$ costruiamo una derivazione

$$\begin{aligned} X(-): \mathcal{C}_M^\infty(U) &\longrightarrow \mathcal{C}_M^\infty(U) \\ f &\longmapsto X(f) \end{aligned}$$

definendo

$$X(f)(p) = \sum_{i=1}^n X_{\alpha,p}^i \frac{\partial(f \circ \varphi_\alpha^{-1})}{\partial x_\alpha^i} \Big|_{\varphi_\alpha(p)}$$

che si verifica essere indipendente dalla scelta della carta coordinata. Intuitivamente, stiamo facendo agire ogni vettore del campo vettoriale separatamente su ogni germe locale della funzione per poi riassemblare tutto globalmente.

La funzione $X(f)$ è liscia su U poiché lo sono le mappe

$$X_{\alpha,-}^i: U \cap U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}$$

e le mappe

$$\frac{\partial(f \circ \varphi_\alpha^{-1})}{\partial x_\alpha^i} \Big|_{\varphi_\alpha(-)}: U \cap U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}$$

per ogni $i = 1, \dots, n$, per ogni $\alpha \in A$.

Si verifica infine che $X(-): \mathcal{C}_M^\infty(U) \longrightarrow \mathcal{C}_M^\infty(U)$ soddisfa la regola di Leibnitz e che quindi abbiamo effettivamente costruito una derivazione.

Viceversa, sia $D \in \mathcal{D}_M(U)$ una derivazione su U . Per ogni $p \in U$, sfruttando bump function opportune, possiamo estendere un rappresentante h di ciascun germe $[h] \in (\mathcal{C}_M^\infty)_p$ ad una funzione $\tilde{h}: U \longrightarrow \mathbb{R}$ che coincide con h in un opportuno intorno di p , in modo da avere $[\tilde{h}] = [h] \in (\mathcal{C}_M^\infty)_p$.

Possiamo ora determinare una derivazione

$$X_p^D: (\mathcal{C}_M^\infty)_p \longrightarrow \mathbb{R}$$

di $(\mathcal{C}_M^\infty)_p$ ponendo

$$X_p^D[h] = D(\tilde{h})(p)$$

per ogni germe $[h] \in (\mathcal{C}_M^\infty)_p$, che si verifica essere indipendente dalla scelta delle bump function.

Di conseguenza abbiamo ottenuto mappe

$$\begin{aligned} X^D: U &\longrightarrow TM \\ p &\longmapsto X^D(p) := X_p^D \end{aligned}$$

tali che $\pi \circ X^D = id_U$, che possiamo descrivere localmente in forma

$$(X^D)_\alpha := X^D|_{U_\alpha \cap U} = \sum_{i=1}^n (X^D)_\alpha^i \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i},$$

dove $(U_\alpha, \varphi_\alpha = (x^1, \dots, x^n))$ è una carta coordinata tale che $U_\alpha \cap U \neq \emptyset$, e dove ogni $(X^D)_\alpha^i: U_\alpha \cap U \longrightarrow \mathbb{R}$ è liscia poiché

$$(X^D)_\alpha^i(p) = D(x_\alpha^i)(p)$$

e $D(x_\alpha^i)$ è liscia su tutto U_α .

Questo mostra che $X^D \in \mathfrak{X}(U)$ è un campo vettoriale, e dal fatto che le due assegnazioni costruite siano una l'inversa $\mathcal{C}_M^\infty(M)$ -lineare dell'altra segue la tesi. \square

Proprio come per i vettori, anche per i campi vettoriali abbiamo dunque evidenziato una doppia natura: possiamo pensarli geometricamente come mappe lisce $X: M \longrightarrow TM$ oppure algebricamente come derivazioni $X: \mathcal{C}_M^\infty(M) \longrightarrow \mathcal{C}_M^\infty(M)$. Nei capitoli successivi (specialmente nella prossima sezione) sfrutteremo molto la comodità di questa doppia natura durante processi di induzione di campi vettoriali attraverso differenziali di mappe lisce.

Il punto di vista algebrico delle derivazioni è comodo anche per definire le parentesi di Lie di due campi vettoriali:

Definizione 1.12. *Sia M una varietà liscia e $U \subseteq M$ un aperto. Per ogni coppia di campi vettoriali $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$, la loro parentesi di Lie è la derivazione*

$$\begin{aligned} [X, Y]: \mathcal{C}_M^\infty(U) &\longrightarrow \mathcal{C}_M^\infty(U) \\ f &\longmapsto X(Y(f)) - Y(X(f)) \end{aligned}$$

Per ogni coppia $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$, la \mathbb{R} -linearità di $[X, Y]$ è immediata, mentre il calcolo

$$\begin{aligned} [X, Y](fg) &= X(Y(fg)) - Y(X(fg)) = \\ &= X(Y(f)g + fY(g)) - Y(X(f)g + fX(g)) = \\ &= X(Y(f))g + \overline{Y(f)X(g)} + \overline{X(f)Y(g)} + fX(Y(g)) + \\ &\quad - Y(X(f))g - \overline{X(f)Y(g)} - \overline{Y(f)X(g)} - fY(X(g)) = \\ &= [X, Y](f)g + f[X, Y](g) \end{aligned}$$

mostra che $[X, Y]$ soddisfa effettivamente la regola di Leibnitz.

Il Teorema 1.11 di corrispondenza biunivoca restituisce allora

Proposizione 1.13. *Sia M una varietà liscia e $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ due campi vettoriali su M . Allora le parentesi di Lie $[X, Y]$ sono un campo vettoriale:*

$$[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$$

Le parentesi di Lie sono uno strumento molto importante in matematica, e il caso dei campi vettoriali è solo uno dei tanti in cui un tale oggetto equipaggia uno spazio vettoriale:

Definizione 1.14. *Un'algebra di Lie sul campo \mathbb{F} è una coppia $(\mathfrak{g}, [,])$, dove*

- (i) \mathfrak{g} è un \mathbb{F} -spazio vettoriale.
- (ii) Le parentesi di Lie

$$\begin{aligned} [,]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ (x, y) &\longmapsto [x, y] \end{aligned}$$

soddisfano le seguenti condizioni

- (a) $[,]$ è \mathbb{F} -bilineare.
- (b) $[x, x] = 0$ per ogni $x \in \mathfrak{g}$.
- (c) Per ogni $x, y, z \in \mathfrak{g}$ è soddisfatta l'Identità di Jacobi

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$$

Ci capiterà di lavorare spesso con parentesi di Lie di campi vettoriali, che acquisiranno un ruolo fondamentale nella sezione relativa ai gruppi di Lie, in cui considereremo in particolare campi vettoriali "invarianti a sinistra" per indurre una struttura di algebra di Lie sullo spazio tangente nell'identità del gruppo.

Osservazione 1.15. *Si può verificare che per ogni terna di campi vettoriali $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ su una varietà liscia M , è soddisfatta l'identità di Jacobi:*

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

Inoltre, le parentesi di Lie sono antisimmetriche e \mathbb{R} -bilineari. Segue quindi che

$$(\mathfrak{X}(M), [,])$$

ha una struttura di algebra di Lie, detta algebra di Lie dei campi vettoriali su M .

1.1.2 Flussi di campi vettoriali

Ogni campo vettoriale $X \in \mathfrak{X}(M)$ su una varietà liscia M ammette curve integrali massimali in ogni punto $p \in M$, ovvero curve $\psi_p: I_p \rightarrow M$ definite in un opportuno intorno massimale I_p di $0 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} \frac{d\psi_p}{dt}(t) = X_{\psi_p(t)} & \text{per ogni } t \in I_p \\ \psi_p(0) = p \end{cases}$$

Inoltre, ogni punto $p \in M$ ammette un intorno $U \subseteq M$ e un $\varepsilon > 0$ tale che la mappa

$$\begin{aligned} \Psi_p: U \times (-\varepsilon, \varepsilon) &\longrightarrow M \\ (q, t) &\longmapsto \psi_q(t) \end{aligned}$$

sia ben definita, liscia, e verificchi

$$\psi_{\psi_p(t)}(s) = \psi_p(s + t) \tag{1.2}$$

$$\psi_{\psi_p(t)}(-t) = p, \tag{1.3}$$

per s, t sufficientemente piccoli (per maggiori dettagli, si veda [13, p206]).

Definizione 1.16. *Nel linguaggio precedente,*

- (i) la mappa Ψ_p è chiamata (un) flusso locale del campo vettoriale $X \in \mathfrak{X}(M)$ in p .
- (ii) se $U = M$ e $(-\varepsilon, \varepsilon) = \mathbb{R}$ la mappa

$$\begin{aligned} \Psi &:= \Psi_p: M \times \mathbb{R} \longrightarrow M \\ (q, t) &\longmapsto \psi_q(t) \end{aligned}$$

è chiamata invece flusso globale del campo X , che viene definito completo.

1.2 Campi vettoriali indotti

Con i gruppi di Lie lavoreremo utilizzando traslazioni sinistre, loro differenziali e campi vettoriali indotti. Il seguente è un ottimo linguaggio che ci consentirà di condensare molte informazioni ed evidenziare l'intuitività di alcuni risultati. Sfrutteremo fin da subito la bivalenza di un campo vettoriale ottenuta nei risultati della scorsa sezione, sfruttando in particolare il punto di vista algebrico e vedendolo come derivazione sullo spazio delle funzioni.

Definizione 1.17. *Siano M, N due varietà lisce e $F: M \rightarrow N$ liscia. Diremo che $Y \in \mathfrak{X}(N)$ è indotto da $X \in \mathfrak{X}(M)$ tramite F se per ogni $p \in M$ vale*

$$dF_p(X_p) = Y_{F(p)}$$

L'induzione di campi vettoriali rispecchia la visione intuitiva di "spinta in avanti" di un campo attraverso una mappa liscia. Per noi sarà comodo osservare che tale induzione sia intrinsecamente legata all'azione dei campi sulle funzioni lisce:

Lemma 1.18. *Siano M, N due varietà lisce e $F: M \rightarrow N$ liscia. Il campo $Y \in \mathfrak{X}(N)$ è indotto dal campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ tramite F se e solo se per ogni $f \in \mathcal{C}_N^\infty(N)$ vale*

$$X(f \circ F) = Y(f) \circ F$$

Dimostrazione. Per ogni $p \in M$ abbiamo

$$X(f \circ F)(p) = X_p(f \circ F) = dF_p(X_p)(f),$$

mentre

$$(Y(f) \circ F)(p) = (Yf)(F(p)) = Y_{F(p)}(f),$$

per cui abbiamo l'uguaglianza tra i due membri sinistri delle equazioni in ogni punto di M se e solo se Y è indotto da X tramite F . \square

Infine, vediamo come parentesi di Lie di campi vettoriali indotti siano indotte a loro volta tramite la stessa mappa:

Proposizione 1.19. *Siano M, N due varietà lisce, $F: M \rightarrow N$ liscia e siano $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M), Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(N)$ campi vettoriali rispettivamente indotti tramite F .*

Allora il campo $[Y_1, Y_2] \in \mathfrak{X}(N)$ è indotto dal campo $[X_1, X_2] \in \mathfrak{X}(M)$ tramite F .

Dimostrazione. Usiamo il Lemma 1.18:

$$X_1 X_2(f \circ F) = X_1(Y_2(f) \circ F) = Y_1 Y_2(f) \circ F,$$

e analogamente

$$X_2 X_1(f \circ F) = Y_2 Y_1(f) \circ F,$$

per cui

$$\begin{aligned} [X_1, X_2](f \circ F) &= X_1 X_2(f \circ F) - X_2 X_1(f \circ F) = \\ &= (Y_1 Y_2(f)) \circ F - Y_2 Y_1(f) \circ F = \\ &= ([Y_1, Y_2](f)) \circ F, \end{aligned}$$

da cui la tesi, sempre grazie al Lemma 1.18. \square

1.3 Distribuzioni

Nel nostro percorso capiterà spesso di passare da una varietà liscia agli spazi tangenti nei suoi punti, ma capiterà anche l'opposto: partendo da una famiglia di spazi tangenti avremo bisogno di ricostruire una varietà sottogiacente avente come spazi tangenti quelli di partenza. Nel linguaggio delle distribuzioni lisce, l'esistenza di queste *varietà integrali* è garantita, sotto opportune ipotesi, dal teorema di Frobenius:

Definizione 1.20. *Sia M una varietà liscia. Una distribuzione liscia k -dimensionale D su M è un sottoinsieme del fibrato tangente $D \subseteq TM$ che verifica le seguenti condizioni:*

- (i) $D_p = D \cap T_p M$ è un sottospazio vettoriale k -dimensionale di $T_p M$ per ogni $p \in M$.
- (ii) Per ogni $p \in M$ esiste un intorno aperto $U \subseteq M$ di p e campi vettoriali $Y_1, \dots, Y_k \in \mathfrak{X}(U)$ tali che

$$D_p = \langle Y_{1,p}, \dots, Y_{k,p} \rangle$$

per ogni $p \in U$.

L'insieme $\{Y_i\}_{i=1}^k$ sarà chiamato riferimento locale (globale, se $U = M$)

Esempio 1. Sia $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. La distribuzione liscia definita da

$$D_{(x,y)} = \langle -y \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{(x,y)} + x \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{(x,y)} \rangle$$

è data dal riferimento globale

$$\Theta(x, y) = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$$

ed è quindi 1-dimensionale.

Definizione 1.21. Sia $U \subseteq M$ un aperto di una varietà liscia. Una sezione locale di una distribuzione liscia D su U è un campo vettoriale $X \in \mathfrak{X}(U)$ tale che $X_p \in D_p$ per ogni $p \in U$.

Indicheremo con $\mathfrak{X}(U)_D$ lo spazio delle sezioni locali di D su U e diremo che D è involutiva se per ogni $U \subseteq M$ e per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}(U)_D$ si ha che $[X, Y] \in \mathfrak{X}(U)_D$.

Consideriamo $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e la distribuzione D definita nell'Esempio 1. Le sue sezioni sono i campi vettoriali $Z \in \mathfrak{X}(M)$ "di avvolgimento" intorno all'origine. Infatti, per ogni $x \in M$, sotto l'identificazione $T_x M \simeq \mathbb{R}^2$ si ha che Z_x è ortogonale ad x :

$$Z_x \cdot x = 0$$

Definizione 1.22. Una sottovarietà immersa N di una varietà liscia M è chiamata integrale per una distribuzione D se $T_y N = D_y$ per ogni $y \in N$.

Diremo che D è completamente integrabile se ogni punto di M è contenuto in una sottovarietà integrale di D .

Ci mettiamo sempre nella situazione dell'Esempio 1, e osserviamo che tutte le circonferenze

$$\lambda S^1 \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}_+$$

sono sottovarietà integrali della distribuzione D , che è quindi completamente integrabile.

Verso la fine del nostro percorso avremo tra le mani distribuzioni involutive e ci farà comodo renderle tangenti ad opportune sottovarietà integrali. Per questo, come accennato prima, ci verrà in aiuto il teorema di Frobenius:

Teorema 1.23 (Frobenius). *Sia D una distribuzione liscia su una varietà liscia M . Allora D è completamente integrabile se e solo se è involutiva.*

Dimostrazione. Si veda [1, p.176] □

Abbiamo mostrato poco sopra che la distribuzione D definita nell'Esempio 1 è completamente integrabile. Grazie al teorema di Frobenius possiamo concludere che D è anche involutiva.

1.4 Gruppi di Lie

Introduciamo ora l'importante nozione di gruppo di Lie, che ci accompagnerà lungo tutto il percorso, in modo diretto o indiretto, durante le azioni su varietà lisce:

Definizione 1.24. *Una varietà liscia G si dice gruppo di Lie se ammette una struttura di gruppo*

$$\begin{aligned} \mu: G \times G &\longrightarrow G \\ (g, h) &\longmapsto gh \end{aligned}$$

e una mappa di inverso

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto g^{-1} \end{aligned}$$

lisce.

Osservazione 1.25. *Le condizioni su μ e l'inverso nella scorsa definizione sono equivalenti alla richiesta che l'applicazione*

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (g, h) &\longmapsto g^{-1}h \end{aligned}$$

sia liscia.

Una mappa liscia che sarà comodo considerare in futuro è la *mappa aggiunta*

$$Ad_g: G \longrightarrow G \tag{1.4}$$

$$h \longmapsto g^{-1}hg \tag{1.5}$$

per ogni $g \in G$. E' una mappa liscia grazie alle restrizioni imposte nella definizione di G , ed è un diffeomorfismo poiché $(Ad_g)^{-1} = Ad_{g^{-1}}$.

Definizione 1.26. *Dati due gruppi di Lie G_1 e G_2 , il gruppo di Lie prodotto è la varietà differenziabile $G_1 \times G_2$ munita dell'operazione prodotto componente per componente. E' infatti facile verificare che il prodotto così ottenuto, così come la funzione che manda ogni elemento di $G_1 \times G_2$ nel suo inverso rispetto a tale prodotto, sono funzioni lisce.*

Esempio 2. Vedendo la circonferenza S^1 come sottoinsieme $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \subseteq \mathbb{C}$, possiamo dotarla naturalmente di una struttura di gruppo di Lie sfruttando la moltiplicazione complessa. Questo ci permette di costruire i *tori n -dimensionali* come gruppi di Lie prodotto

$$\mathbb{T}^n := \underbrace{S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1}_{n \text{ volte}}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$.

1.4.1 Esempi, Quaternioni e Ottonioni

Continuiamo esibendo una lunga lista di gruppi di Lie, che torneranno utili lungo il percorso o che saranno semplicemente presenti nell'enunciato di classificazione del Teorema di Berger:

Esempio 3. (i) $\mathbb{R}^n = \overbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}^{n \text{ volte}}$ è un gruppo di Lie prodotto con l'usuale operazione di somma, mentre gruppi matriciali come $GL_n(\mathbb{R})$, $M_n(\mathbb{R})$ sono gruppi di Lie grazie alla differenziabilità del prodotto matriciale e alla regola di Cramer, che esibisce l'inversa di una matrice attraverso operazioni lisce a partire da quella di partenza.

(ii) L'insieme

$$O(n) := \{M \in GL_n(\mathbb{R}) : MM^t = I\}$$

delle *matrici ortogonali* ha una struttura di varietà liscia.

Infatti, se $\Sigma(n)$ è l'insieme delle matrici simmetriche di dimensione n , si verifica che la mappa

$$\begin{aligned} F: GL_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \Sigma(n) \\ A &\longmapsto AA^t \end{aligned}$$

è una submersione e $O(n) = F^{-1}(I_n)$.

Per il teorema del rango costante, $O(n)$ eredita una struttura di varietà liscia di dimensione $d = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, che acquisisce infine una struttura di gruppo di Lie rispetto alla moltiplicazione matriciale.

Il *sottogruppo speciale ortogonale* è il sottogruppo aperto delle matrici di $O(n)$ di determinante strettamente positivo (eredita quindi una struttura di varietà liscia di dimensione uguale a quella di $O(n)$).

E' indicato con

$$SO(n) := O(n) \cap SL_n(\mathbb{R}),$$

e poiché è anche visibile come sottogruppo delle matrici di $O(n)$ di determinante 1, è anche chiuso in $O(n)$.

Di conseguenza $SO(n)$ è clopen in $O(n)$, e si può dimostrare essere una delle sue due componenti connesse, diffeomorfe tra loro attraverso la mappa di riflessione

$$\begin{aligned} O(n) &\longrightarrow O(n) \\ A &\longmapsto I'_n A \end{aligned}$$

dove

$$I'_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix}$$

Possiamo pensare ad $O(n)$ come al gruppo di rotazioni e riflessioni mentre ad $SO(n)$ come al gruppo di sole rotazioni e riflessioni pari.

(iii) L'insieme delle matrici *unitarie* di grado n è il sottogruppo

$$U(n) \subseteq GL_n(\mathbb{C})$$

delle matrici $A \in GL_n(\mathbb{C})$ tali che $AA^* = I_n$, dove $A^* := \overline{A}^t$ è la matrice aggiunta di A .

Esso coincide con l'insieme delle matrici le cui colonne formano una base ortonormale di \mathbb{C}^n rispetto al prodotto hermitiano standard, e si verifica avere struttura di varietà liscia di dimensione n^2 .

Il sottogruppo

$$SU(n) = U(n) \cap SL(n, \mathbb{C})$$

delle matrici unitarie di determinante 1 è chiamato *gruppo speciale unitario* di grado n , e ha dimensione $n^2 - 1$.

Quest'ultimo fatto è abbastanza intuitivo, in quanto al contrario di quanto succede nel caso reale (in cui il determinante di matrici ortogonali è un elemento dello spazio 0-dimensionale $\{+1, -1\}$, e in cui il vincolo $\det = 1$ individua l'aperto delle matrici a cui corrisponde "+1") il determinante delle matrici unitarie ha valori nello spazio $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ di dimensione reale 1, e quindi il vincolo $\det = 1$ imposto costringe la dimensione a scendere di uno.

(iv) L'insieme delle *matrici simplettiche* di dimensione $2n$ sul campo \mathbb{F} è l'insieme

$$\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{F}) := \{M \in M_{2n}(\mathbb{F}) : M^t J' M = J'\},$$

dove

$$J' = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

Si verifica che $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{F})$ ha una struttura di gruppo di Lie di dimensione n .

(v) Il gruppo di Lie $\mathrm{Spin}(n)$ costituisce il rivestimento universale di $SO(n)$, per $n \geq 3$. Si può dimostrare che $\pi_1(SO(n)) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, e quindi che il rivestimento $\mathrm{Spin}(n) \rightarrow SO(n)$ ha grado 2.

Esempio 4 (Quaternioni). L'algebra dei *Quaternioni* \mathbb{H} è costituita da

$$\mathbb{H} := \{x_0 + x_1i + x_2j + x_3k : x_i \in \mathbb{R}\}$$

ed è costituita da una parte reale $\text{Re}(\mathbb{H}) = \mathbb{R}$ e da una immaginaria $\text{Im}(\mathbb{H}) = \langle i, j, k \rangle \simeq \mathbb{R}^3$, dotate delle seguenti regole di moltiplicazione:

$$ij = -ji = k; \quad jk = -kj = i; \quad ki = -ik = j; \quad i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

Un modo più succinto per descrivere \mathbb{H} è ottenuto ponendo

$$\mathbb{H} = \mathbb{C}[j] / (j^2 + 1, jzj^{-1} - \bar{z})$$

in modo che ogni quaternionione $h = a + bi + cj + dk$ possa essere scritto unicamente come

$$h = z + jw, \quad \text{con } z = a + ib, w = c - di \in \mathbb{C}. \quad (1.6)$$

Analogamente possiamo identificare \mathbb{H} con un opportuno quoziente di $\mathbb{C}[i]$ e $\mathbb{C}[k]$ ottenendo scritte differenti di uno stesso elemento. Per esempio, prendendo sempre $h = a + bi + cj + dk$ e scegliendo l'identificazione con il quoziente di $\mathbb{C}[i]$, otteniamo la scrittura

$$h = z' + iw' \quad \text{con } z' = a + cj, w' = b + dj \in \mathbb{C}. \quad (1.7)$$

Sui quaternioni troviamo naturalmente un antiautomorfismo dato da

$$\overline{a + bi + cj + dk} = a - bi - cj - dk, \quad \text{tale che } \overline{h_1 h_2} = \overline{h_2} \overline{h_1},$$

che si verifica agire come usuale coniugio ristretto alla scrittura in numeri complessi $h = z + jw$ (e anche rispetto alla scrittura $h = z' + iw'$).

Introduciamo il *gruppo simplettico* (indicato a volte come *gruppo iperunitario*) ponendo

$$\text{Sp}(m) := \{A \in M_m(\mathbb{H}) : \overline{A}^t A = I_m\}, \quad (1.8)$$

dove ovviamente $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})_{ij}$ se $A = (a_{ij})_{ij}$, che si verifica avere una struttura di gruppo di Lie di dimensione $m(2m + 1)$. $\text{Sp}(m)$ può essere descritto alternativamente come il sottogruppo di $GL_m(\mathbb{H})$ che preserva il prodotto scalare hermitiano standard su \mathbb{H}^m dato da

$$\begin{aligned} \mathbb{H}^m \times \mathbb{H}^m &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x = (x_h)_{h=1}^m, y = (y_l)_{l=1}^m) &\longmapsto \langle x, y \rangle = \sum_{p=1}^m \overline{x_p} y_p \end{aligned}$$

Esso agisce naturalmente (mediante moltiplicazione tra matrice e vettore) su $\mathbb{H}^m = \mathbb{R}^{4m}$, che può essere dotato di una struttura complessa che lo rende isomorfo a \mathbb{C}^{2m} come \mathbb{C} -spazio vettoriale destro scrivendo (per esempio, nel caso $m = 1$) un elemento $h = a + ib + cj + dk$ come

$$h = (a + ib) + j(c - id), \text{ con } a + ib, c - id \in \mathbb{C}, \quad (1.9)$$

e ponendo

$$(l + mi) \cdot h := h(l + mi)$$

per ogni $l + mi \in \mathbb{C}$. Sfruttando le decomposizioni in (1.9) possiamo inoltre scrivere ogni matrice $A \in \text{Sp}(m) \subseteq \text{M}_m(\mathbb{H})$ come $A = A_1 + jA_2$, con $A_1, A_2 \in \text{M}_m(\mathbb{C})$.

Si verifica che $\text{Sp}(m) \subseteq \text{Sp}(m + 1)$ per ogni $m \in \mathbb{N}$, e verificheremo più avanti che l'azione naturale su \mathbb{R}^{4m} preserva sia la metrica euclidea sia le tre strutture complesse I, J, K su \mathbb{R}^{4m} date rispettivamente dalla moltiplicazione per i, j, k . Per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, $aI + bJ + cK$ rimarrà una struttura complessa su \mathbb{R}^{4m} (infatti

$$\begin{aligned} (aI + bJ + cK)^2 &= \underbrace{a^2I^2 + b^2J^2 + c^2K^2}_{=-\text{id}} + \cancel{abIJ + baJI} + \cancel{caKI + acIK} + \cancel{bcJK + cbJK} = \\ &= -\text{id} \end{aligned}$$

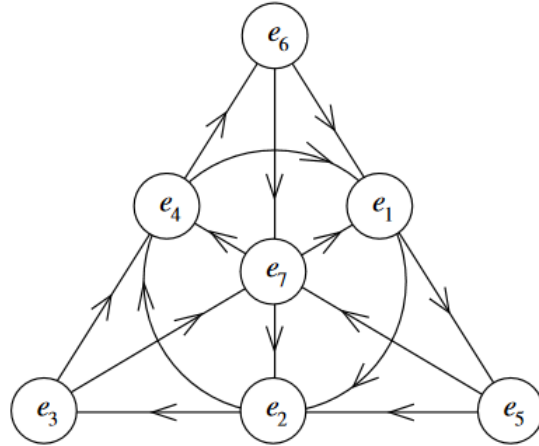
che verificheremo essere sempre preservata dagli elementi di $\text{Sp}(m)$, trovando quindi che lo spazio delle strutture complesse preservate da $\text{Sp}(m)$ è costituito da una sfera tridimensionale.

Esempio 5 (Ottonioni). Partendo dai Quaternioni possiamo ottenere l'algebra non associativa degli *Ottonioni*

$$\mathbb{O} := \left\{ x_0 + \sum_{i=1}^7 x_i e_i : x_i \in \mathbb{R} \text{ per ogni } i = 0, \dots, 7 \right\}$$

attraverso il *processo di Cayley-Dickson*: lo stesso processo con cui si ricavano i numeri complessi a partire dai numeri reali (e i quaternioni a partire dai numeri complessi!).

Le proprietà moltiplicative delle unità immaginarie ottonioniche $\{e_i\}_{i=1}^7$ sono descritte dal seguente *piano di Fano*



in cui ogni direzione o circonferenza incontra precisamente 3 unità immaginarie, e la moltiplicazione tra esse è data attraverso la loro trattazione come terna quaternionica $\{i, j, k\}$, in senso orientato dalle frecce. Da queste regole discendono tutte le regole moltiplicative dell'algebra.

Per esempio

$$e_1 e_2 = e_4, \quad e_3 e_5 = e_2 \quad \text{e} \quad e_4 e_2 = -e_1.$$

Tale moltiplicazione non è associativa, in quanto per esempio

$$\begin{aligned} (e_3 e_4) e_2 &= e_6 e_2 = -e_7 \\ e_3 (e_4 e_2) &= e_3 (-e_1) = -(-e_7) = e_7 \end{aligned}$$

Noi siamo interessati al gruppo degli automorfismi dell'algebra degli Ottonioni $\mathbb{O} \simeq \mathbb{R}^8$, ovvero

$$G_2 := \text{Aut}(\mathbb{O})$$

che si dimostra essere un *gruppo di Lie eccezionale* di dimensione 14, visibile anche come sottogruppo di $\text{SO}(7)$.

Infatti, possiamo associare a ciascuna terna quaternionica immaginaria $\{e_i, e_j, e_k\}$ la 3-forma $dx_{ijk} := dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k$ e comporre la 3-forma ottonionica

$$\varphi := dx_{123} + dx_{145} + dx_{167} + dx_{246} - dx_{257} - dx_{347} - dx_{356}$$

che descrive la tabella moltiplicativa dell'algebra \mathbb{O} , che viene quindi codificata, attraverso la scelta delle terne di indici e della signatura corrispondente.

A questo punto, come forse l'intuizione suggerirebbe, la descrizione di G_2 come sottogruppo di $\text{SO}(7)$ è ottenuta imponendo che la forma ottonionica sia preservata tramite pullback:

$$G_2 = \{A \in \text{SO}(7) : A^* \varphi = \varphi\} \subseteq \text{SO}(7)$$

Prima di proseguire con la teoria dei gruppi di Lie, è utile studiare gli \mathbb{H} -moduli (cioè i moduli sui quaternioni), per approfondire legami che torneranno utili in futuro, nella parte finale della tesi:

Osservazione 1.27. *Un \mathbb{H} -modulo libero V di dimensione n è un \mathbb{C} spazio vettoriale destro di dimensione $2n$ per restrizione degli scalari a \mathbb{C} grazie alle decomposizioni (1.6).*

Un endomorfismo di V (come \mathbb{H} -modulo) rimane \mathbb{C} -lineare a destra, per cui segue un' inclusione naturale di \mathbb{R} -algebre

$$\rho_j: \text{Hom}_{\mathbb{H}}(V, V) \hookrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V). \quad (1.10)$$

Data una \mathbb{H} -base $\tilde{\mathcal{B}} = \{e_1, \dots, e_n\}$ di V , otteniamo l'identificazione

$$\text{Hom}_{\mathbb{H}}(V, V) \simeq \text{M}_n(\mathbb{H})$$

Possiamo sfruttare nuovamente le decomposizioni (1.6) per riscrivere una matrice quaternionica $H = A + Bi + Cj + Dk \in \text{M}_n(\mathbb{H})$ (con $A, B, C, D \in \text{M}_n(\mathbb{R})$) in forma

$$H = Z + jW \quad \text{con } Z = A + iB, W = C - Di \in \text{M}_n(\mathbb{C}),$$

così da poter tradurre $\rho_j: \text{Hom}_{\mathbb{H}}(V, V) \hookrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V)$ nel morfismo di \mathbb{R} -algebre

$$\tilde{\rho}_j: \text{M}_n(\mathbb{H}) \hookrightarrow \text{M}_{2n}(\mathbb{C}) \quad (1.11)$$

$$Z + jW \mapsto \begin{pmatrix} Z & -\overline{W} \\ W & \overline{Z} \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

sfruttando la \mathbb{H} -base $\tilde{\mathcal{B}}$ (in partenza) e la \mathbb{C} -base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n, e_1j, \dots, e_nj\}$ di V ottenuta per restrizione degli scalari (in arrivo).

A questo punto osserviamo che $\tilde{\rho}_j(\text{M}_n(\mathbb{H}))$ può essere interpretato come la sottoalgebra di $\text{M}_{2n}(\mathbb{C})$ fissata da

$$\sigma_{\mathbb{H}}: \text{M}_{2n}(\mathbb{C}) \longrightarrow \text{M}_{2n}(\mathbb{C}), \quad \sigma_{\mathbb{H}}\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \overline{D} & -\overline{C} \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{pmatrix}$$

Passando agli elementi invertibili otteniamo di conseguenza

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{H}) \simeq \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C})^{\sigma_{\mathbb{H}}}$$

e richiedendo l'ortonormalità di \mathcal{B} rispetto al prodotto hermitiano standard su V , si verifica che l'operazione di aggiunzione

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbb{H}}(V, V) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{H}}(V, V) \\ H &\longmapsto H^* := \overline{H}^t \end{aligned}$$

permette di costruire l'involuzione

$$\begin{aligned} \theta_{\mathbb{H}}: \mathrm{GL}(V) &\longrightarrow \mathrm{GL}(V) \\ g &\longmapsto (g^*)^{-1} \end{aligned}$$

Procedendo in modo analogo considerando \mathbb{R} e \mathbb{C} -spazi vettoriali di dimensione finita, si ottengono rispettivamente le involuzioni $\theta_{\mathbb{R}}$ e $\theta_{\mathbb{C}}$.

Infine consideriamo l'involuzione

$$\tau_{\mathrm{Sp}} := \theta_{\mathbb{C}} \circ \sigma_{\mathbb{H}}: \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C}),$$

$$\tau_{\mathrm{Sp}}\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right) = \theta_{\mathbb{C}}\left(\begin{pmatrix} \overline{D} & -\overline{C} \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} D^t & -B^t \\ -C^t & A^t \end{pmatrix}^{-1} = \left(J'^{-1} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^t J'\right)^{-1},$$

dove

$$J' = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

è la matrice associata alla forma simplettica standard

$$\omega_{J'}: \mathbb{C}^{2n} \times \mathbb{C}^{2n} \longmapsto \mathbb{C} \tag{1.13}$$

$$(w, v) \longmapsto w^t J v \tag{1.14}$$

su \mathbb{C}^{2n} .

In questo formalismo, si ottiene che le mappe τ_{Sp} e $\theta_{\mathbb{C}}$ realizzano i seguenti insiemi di punti fissi:

$$U(2n) = \{g \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C}) : \theta_{\mathbb{C}}(g) = g\},$$

$$\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C}) = \{g \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C}) : \tau_{\mathrm{Sp}}(g) = g\},$$

e

$$\mathrm{Sp}(n) = \{g \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C}) : \theta_{\mathbb{C}}(g) = g \text{ e } \tau_{\mathrm{Sp}}(g) = g\} = \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C}) \cap U(2n),$$

per cui $\mathrm{Sp}(n)$ può essere identificato con il sottogruppo di $U(2n)$ che preserva la forma simplettica standard $\omega_{J'}$.

Per ulteriori dettagli su questi gruppi si consiglia la referenza [7] in bibliografia.

1.4.2 L'algebra di Lie di un gruppo di Lie

Come ogni volta in cui due o più strutture matematiche interagiscono in uno stesso oggetto, la nozione di morfismo ne risente:

Definizione 1.28. *Un morfismo tra gruppi di Lie $\varphi: G \rightarrow H$ è una mappa liscia che è anche un'omomorfismo di gruppi.*

Conosciamo ed usiamo da sempre morfismi di gruppi di Lie, come per esempio il determinante matriciale

$$\det: \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*$$

o l'avvolgimento esponenziale (in questo caso riportato nella sua versione estesa al toro n -dimensionale)

$$\begin{aligned} p: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{T}^n \\ (t_1, \dots, t_n) &\mapsto (e^{2\pi i t_1}, \dots, e^{2\pi i t_n}). \end{aligned}$$

E' necessario accordarci sulla definizione di "embedding":

Definizione 1.29. *Una mappa liscia $F: N \rightarrow M$ tra varietà lisce è chiamata embedding se*

- (i) F è iniettiva.
- (ii) dF_p è iniettivo per ogni $p \in M$.
- (iii) N è omeomorfa alla sua immagine $F(N)$.

In questo modo è possibile essere chiari su cosa intendiamo nella definizione seguente:

Definizione 1.30. *Sia G un gruppo di Lie. Un sottogruppo $H \subseteq G$ è detto sottogruppo di Lie se H è un gruppo di Lie e l'immersione*

$$\iota: H \rightarrow G$$

è un embedding.

Questa condizione è una condizione solitamente difficile da verificare, ma i seguenti tre teoremi (per le cui dimostrazioni si rimanda a [13, p.156]) forniscono ottimi strumenti per individuare più facilmente sottogruppi di Lie:

Teorema 1.31. *Sia G un gruppo di Lie e $H \subseteq G$ un sottogruppo tale che*

$$\iota: H \longrightarrow G$$

è un embedding. Allora H è un sottogruppo di Lie di G .

Teorema 1.32. *Sia G un gruppo di Lie e $H \subseteq G$ un sottogruppo aperto. Allora H è un gruppo di Lie, ed è anche chiuso.*

Teorema 1.33 (Cartan). *Sia G un gruppo di Lie e $H \subseteq G$ un sottogruppo chiuso. Allora H è un sottogruppo di Lie di G .*

Su un gruppo di Lie G possiamo restringere la mappa prodotto per ottenere le traslazioni lisce sinistre e destre

$$\begin{array}{ccc} L_g: G \longrightarrow G & & R_g: G \longrightarrow G \\ h \longmapsto gh & & h \longmapsto hg \end{array}$$

che sono diffeomorfismi, in quanto $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$ e $(R_g)^{-1} = R_{g^{-1}}$.

In questo modo, per ogni $g, h \in G$, abbiamo gli isomorfismi

$$(dL_g)_h: T_h G \xrightarrow{\sim} T_{gh} G \quad (dR_g)_h: T_h G \xrightarrow{\sim} T_{hg} G$$

e in particolare sfrutteremo quelli di tipo

$$(dL_g)_e: T_e G \xrightarrow{\sim} T_g G$$

Definizione 1.34. *Sia G un gruppo di Lie. Un campo vettoriale $X \in \mathfrak{X}(G)$ si dice invariante a sinistra se*

$$(dL_g)_h(X_h) = X_{gh}$$

per ogni $g, h \in G$.

Osservazione 1.35. *Su un gruppo di Lie G , un campo $X \in \mathfrak{X}(G)$ è invariante a sinistra se e solo se è indotto da se stesso tramite L_g , per ogni $g \in G$ (avevamo definito i campi vettoriali indotti nella Definizione 1.17).*

Vedremo come la condizione di invarianza a sinistra, condensata nell'Osservazione 1.35, sia molto restrittiva e vincoli di molto il comportamento dei campi vettoriali che la soddisfano.

Denotiamo $\mathfrak{X}(G)^{li}$ lo spazio vettoriale dei campi vettoriali invarianti a sinistra e osserviamo che ad ogni vettore $v \in T_e G$ possiamo assegnare un campo $\tilde{v} \in \mathfrak{X}(G)^{li}$ invariante a sinistra ponendo

$$\tilde{v}_g := (dL_g)_e v$$

cioé "portando v a spasso tramite traslazioni sinistre".

Otteniamo un campo liscio poiché dL dipende in modo liscio dal punto in cui viene calcolato (potremmo giustificare questo fatto anche sfruttando che la moltiplicazione in G è liscia), mentre l'invarianza a sinistra segue dalla compatibilità del differenziale rispetto alle operazioni di gruppo.

Inoltre, ogni campo vettoriale invariante a sinistra $X \in \mathfrak{X}(G)^{li}$ è dettato dal suo valore nell'identità, infatti

$$X_g = (dL_g)_e(X_e)$$

per ogni $g \in G$. Segue quindi che abbiamo un isomorfismo di spazi vettoriali

$$\tilde{\cdot} : T_e G \longrightarrow \mathfrak{X}(G)^{li} \tag{1.15}$$

$$v \longmapsto \tilde{v} \tag{1.16}$$

Teorema 1.36. *Sia G un gruppo di Lie. Allora $\mathfrak{X}(G)^{li}$ è una sottoalgebra di Lie di $(\mathfrak{X}(G), [\cdot, \cdot])$.*

Dimostrazione. Dobbiamo mostrare che se partiamo da due campi X, Y invarianti a sinistra, allora anche $[X, Y]$ è invariante a sinistra. Sfruttando l'Osservazione 1.35, è sufficiente mostrare che, per ogni $g \in G$, il campo $[X, Y]$ è indotto da se stesso tramite L_g , ma questo segue dalla Proposizione 1.19, poiché X e Y sono indotti da loro stessi tramite L_g , sempre grazie all'Osservazione 1.35. \square

Quindi $(\mathfrak{X}(G)^{li}, [\cdot, \cdot])$ è un'algebra di Lie, che induce di conseguenza una struttura di algebra di Lie su $T_e G$, denotata allo stesso modo e definita da

$$[v, w] := [\tilde{v}, \tilde{w}]_e$$

per ogni $v, w \in T_e G$.

Definizione 1.37. L'Algebra di Lie di G è

$$\mathfrak{g} = (T_e G, [\ , \])$$

Per definizione delle parentesi di Lie su \mathfrak{g} ,

$$\mathfrak{g} \simeq (\mathfrak{X}(G)^{li}, [\ , \]) \quad (1.17)$$

tramite la mappa (1.15).

I campi vettoriali invarianti a sinistra sono quindi un \mathbb{R} -spazio vettoriale di dimensione finita, e sarà davvero comodo condensarli pensando al tangente nell'identità. Per questo, un tale campo sarà sempre pensato come indotto dal suo elemento associato in \mathfrak{g} attraverso la mappa (1.15), ovvero dal suo valore nell'identità.

Teorema 1.38. Siano G, H due gruppi di Lie e $F: G \rightarrow H$ un omomorfismo di gruppi di Lie. Per ogni $X \in \mathfrak{X}(G)^{li}$ esiste un unico $Y \in \mathfrak{X}(H)^{li}$ indotto da X tramite F . Indicando tale Y con $F_* X$, abbiamo inoltre che la mappa

$$F_*: \mathfrak{X}(G)^{li} \rightarrow \mathfrak{X}(H)^{li}$$

è un omomorfismo di algebre di Lie.

Dimostrazione. L'unicità segue dal fatto che un tale campo vettoriale è completamente individuato dal suo valore in e , e che quest'ultimo è vincolato dall'induzione tramite F :

$$Y_e = (dF)_e(X_e)$$

Poniamo quindi

$$Y = (d\widetilde{F})_e(X_e)$$

e mostriamo che è indotto da X tramite F . Poiché F è un omomorfismo di gruppi,

$$\begin{aligned} F(gg') = F(g)F(g') &\implies F(L_g g') = L_{F(g)} F(g') \\ &\implies F \circ L_g = L_{F(g)} \circ F \\ &\implies dF \circ d(L_g) = d(L_{F(g)}) \circ dF \end{aligned}$$

e quindi

$$dF(X_g) = dF(d(L_g)(X_e)) = (dL_{F(g)})(dF_e(X_e)) = d(L_{F(g)})(Y_e) = Y_{F(g)}$$

cioè Y è indotto da X tramite F .

Grazie alla Proposizione 1.19, $[F_* X, F_* Y]$ (che è ancora invariante a sinistra) è indotto da $[X, Y]$ tramite F , e per unicità otteniamo la tesi. \square

Il teorema precedente può essere tradotto nella sua seguente versione infinitesimale, praticamente più comoda:

Teorema 1.39. *Sia $F:G \rightarrow H$ un omomorfismo di gruppi di Lie. Allora*

$$dF_e: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$$

è un omomorfismo di algebre di Lie.

Avere direzioni globali su una varietà liscia è una condizione non sempre verificata e che merita di essere caratterizzata attraverso una definizione:

Definizione 1.40. *Una varietà liscia M di dimensione n è parallelizzabile se esistono $\{X_i\}_{i=1}^n$ campi vettoriali su M tali che per ogni $p \in M$*

$$\{X_{i,p}\}_{i=1}^n$$

è una base di $T_p M$.

Se un tale sistema di campi vettoriali esiste, sarà chiamato parallelismo.

Osservazione 1.41. *In un gruppo di Lie G , le traslazioni sinistre L_g sono diffeomorfismi e i loro differenziali trasportano basi $\{v_i\}_{i=1}^n$ di \mathfrak{g} in basi di $T_g G$. In altre parole, un gruppo di Lie è sempre parallelizzabile, e ad ogni base $\{v_i\}_{i=1}^n$ di \mathfrak{g} possiamo associare il parallelismo $\{\tilde{v}_i\}_{i=1}^n$ di campi vettoriali invarianti a sinistra.*

Il fatto che un gruppo di Lie sia sempre parallelizzabile ha importanti conseguenze sulla "forma" del suo spazio tangente, che risulta essere sempre banale:

Proposizione 1.42. *Sia G un gruppo di Lie n -dimensionale. Allora*

$$TG \simeq G \times \mathfrak{g}$$

Dimostrazione. L'Osservazione 1.41 ci consente di considerare un parallelismo

$$\{\tilde{v}_i: G \rightarrow TG\}_{i=1}^n$$

di campi vettoriali invarianti a sinistra a partire da una base $\{v_i\}_{i=1}^n$ di $T_e G$, che sfruttiamo per indurre la banalizzazione liscia

$$\begin{aligned} TG &\xrightarrow{\sim} G \times \mathfrak{g} \\ \tilde{v}_{i,x} &\longmapsto (x, v_i) \end{aligned}$$

definita estendendo per linearità in ciascun tangente $T_x G$, sfruttando il fatto che per ogni $x \in G$ l'insieme $\{\tilde{v}_{i,x}\}_{i=1}^n$ ne costituisce una base. \square

Siamo interessati ai flussi dei campi vettoriali invarianti a sinistra e a come si comportano le loro curve integrali massimali. Con il seguente risultato fondamentale, vediamo che l'ambiente dei gruppi di Lie è agevole e che è tutto sotto controllo:

Teorema 1.43. *Ogni campo vettoriale invariante a sinistra $\tilde{v} \in \mathfrak{X}(G)^{li}$ su un gruppo di Lie G è completo, e il suo flusso è*

$$\begin{aligned} \Phi: G \times \mathbb{R} &\longrightarrow G \\ (g, t) &\longmapsto (L_g)(\alpha^{\tilde{v}}(t)) \end{aligned}$$

Dove $\alpha^{\tilde{v}}$ è la curva integrale massimale di \tilde{v} passante per e (che ha quindi v come vettore tangente in e).

Dimostrazione. Innanzitutto, se $\alpha^{\tilde{v}}: I_{\alpha^{\tilde{v}}} \longrightarrow G$ è la curva integrale massimale di \tilde{v} passante per e , allora

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} L_g(\alpha^{\tilde{v}}(t)) = (L_g)_*(\tilde{v}_e) = (L_g)_*(v) = \tilde{v}_g$$

e quindi $L_g(\alpha^{\tilde{v}})$ è la curva integrale massimale di \tilde{v} passante per g .

Sia ora $\alpha^{\tilde{v}}: (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow G$ la curva integrale simmetrica massimale di \tilde{v} per e , con $\epsilon > 0$. Se ϵ fosse finito, allora potremmo prolungarla con

$$\alpha^{\tilde{v}}(\epsilon/2) \cdot \alpha^{\tilde{v}},$$

che è una curva integrale di \tilde{v} per $\alpha^{\tilde{v}}(\epsilon/2)$, ottenendo una contraddizione sul dominio di $\alpha^{\tilde{v}}$, e quindi \tilde{v} è completo. \square

Osservazione 1.44. *Grazie al precedente teorema, sappiamo che tutte le curve integrali massimali di un campo invariante a sinistra hanno come dominio \mathbb{R} , e sono naturalmente in relazione tra di loro attraverso le traslazioni sinistre. Questo ci avvicina all'idea che l'informazione in un gruppo di Lie è sempre codificata da ciò che succede "vicino" all'identità, che viene poi reso globale, per esempio tramite traslazioni sinistre.*

Trarremo vantaggio dall'identificazione

$$\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{X}(G)^{li}$$

(vista in (1.17)) per parlare di "curva integrale massimale di $v \in \mathfrak{g}$ " riferendoci alla curva integrale massimale di $\tilde{v} \in \mathfrak{X}(G)^{li}$.

1.4.3 La mappa esponenziale

Nella situazione del Teorema 1.43, poiché Φ è un flusso

$$\begin{aligned}\alpha^{\tilde{v}}(t+s) &= e \cdot \alpha^{\tilde{v}}(t+s) = \\ &= (L_e)(\alpha^{\tilde{v}}(t+s)) = \\ &= \Phi_e(t+s) = \\ &\stackrel{(*)}{=} \Phi_e(t) \circ \Phi_e(s) = \\ &= \alpha^{\tilde{v}}(t)\alpha^{\tilde{v}}(s)\end{aligned}$$

dove in (*) sfruttiamo l'equazione (1.2). Inoltre, poiché $\Phi_e(t+s) = \Phi_e(s+t)$, otteniamo

$$\alpha^{\tilde{v}}(s)\alpha^{\tilde{v}}(t) = \alpha^{\tilde{v}}(t)\alpha^{\tilde{v}}(s)$$

Cioè $\alpha^{\tilde{v}}: \mathbb{R} \rightarrow G$ è un omomorfismo di gruppi di Lie, e la sua immagine è costituita da elementi che commutano tra loro.

Tutto questo ci consente di definire una mappa esponenziale, dotata di proprietà interessanti, che sarà fondamentale nel nostro percorso:

Teorema 1.45. *Sia G un gruppo di Lie e \mathfrak{g} la sua algebra di Lie. La mappa esponenziale*

$$\begin{aligned}\exp: \mathfrak{g} &\longrightarrow G \\ v &\longmapsto \exp(v) := \alpha^{\tilde{v}}(1)\end{aligned}$$

gode delle seguenti proprietà:

- (i) $\exp(tv) = \alpha^{\tilde{v}}(t)$
- (ii) $\exp((t_1 + t_2)v) = \exp(t_1v) \cdot \exp(t_2v)$
- (iii) $\exp(-tv) = \exp(tv)^{-1}$

per ogni t, t_1, t_2 in \mathbb{R} e $v \in \mathfrak{g}$.

- (iv) \exp è differenziabile e $d\exp_0: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ è l'identità.

Dimostrazione. Grazie alle osservazioni che precedono il teorema, l'unica cosa da dimostrare è che \exp goda della proprietà (iv):

Definiamo un campo vettoriale Z su $TG = G \times \mathfrak{g}$ ponendo

$$Z_{(g,v)} = (\tilde{v}_g, 0) \in T_g G \oplus \mathfrak{g}$$

Poiché definito su un gruppo di Lie, sappiamo che il suo flusso è dato da

$$\begin{aligned} \Phi: (G \times \mathfrak{g}) \times \mathbb{R} &\longrightarrow G \times \mathfrak{g} \\ ((g, v), t) &\mapsto L_{(g,v)}(\alpha^Z(t)) \end{aligned}$$

In questo caso l'identità è $(e, 0)$, e $\alpha^Z(t) = (\exp(tv), 0)$, e quindi

$$L_{(g,v)}(\alpha^Z(t)) = (g \cdot \exp(tv), v)$$

A questo punto, aiutandoci con la proiezione a primo fattore $pr_1: G \times \mathfrak{g} \longrightarrow G$, recuperiamo l'esponenziale tramite l'equazione

$$\exp(v) = pr_1 \circ \Phi((e, v), 1)$$

Da questo segue che \exp è liscia, poiché lo è il flusso di Z .

Consideriamo infine l'inclusione della retta reale

$$j_v: \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{g} \tag{1.18}$$

$$t \longmapsto tv \tag{1.19}$$

con $(j_v)'(0) = v$.

Allora la tesi segue poiché

$$d\exp_0(v) = (\exp \circ j_v)'(0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(tv) \stackrel{(i)}{=} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \alpha^{\tilde{v}}(t) = v$$

□

Osservazione 1.46. *Come accennato in precedenza, la mappa esponenziale è un oggetto molto utile, e possiamo subito sfruttarla per descrivere comodamente le curve integrali massimali per l'origine.*

A tal proposito, nel linguaggio precedente, consideriamo un vettore $v \in \mathfrak{g}$ e richiamiamo l'inclusione della retta reale

$$\begin{aligned} j_v: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ t &\longmapsto tv \end{aligned}$$

introdotta in (1.19).

Grazie alla proprietà (i) dello scorso teorema sappiamo che $\exp(tv) = \alpha^{\tilde{v}}(t)$, da cui otteniamo

$$\alpha^{\tilde{v}} = \exp \circ j_v.$$

Cioè le curve integrali massimali dei vettori tangenti all'identità sono date da restrizioni della mappa esponenziale alle rette da essi generate.

1.4.4 Da infinitesimo a globale

Nel Teorema 1.45 abbiamo dimostrato che lo Jacobiano di $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$ è non singolare nell'identità, e come importante conseguenza otteniamo che \exp è un diffeomorfismo locale, e quindi deduciamo l'esistenza di intorno $V \subseteq \mathfrak{g}$ e $U \subseteq G$, contenenti rispettivamente 0 ed e , tali che

$$\exp|_V: V \rightarrow U$$

sia un diffeomorfismo. L'intorno U appena evidenziato sarà chiamato *intorno normale*.

Questo ci consente di dotare localmente un gruppo di Lie di coordinate speciali (cartesiane...*normali*), che giocano un importante ruolo (ad esempio) in relatività generale, e che sono un vero e proprio ponte tra l'infinitesimale e il globale. Avviciniamoci a questo ponte:

Proposizione 1.47. *Sia G un gruppo di Lie connesso e U un intorno aperto di e . Allora*

$$G = \bigcup_{n \geq 1} U^n,$$

dove $U^n = \{u_1 \cdots u_n : u_i \in U\}$.

Dimostrazione. Consideriamo l'aperto $V = U \cap U^{-1}$ (vale $V = V^{-1}$) e l'aperto $H := \cup_{n \geq 1} V^n \subseteq \cup_{n \geq 1} U^n$. Allora

$$H = G \setminus \bigcup_{g \notin H} gH$$

è anche chiuso, poiché ciascun gH è un aperto. Poiché G è connesso e H è non vuoto (contiene e), la tesi segue. \square

Segue immediatamente il seguente

Corollario 1.48. *Siano G un gruppo di Lie connesso, H un gruppo di Lie e $\varphi, \psi: G \rightarrow H$ due omomorfismi di gruppi di Lie tali che $d\varphi_e = d\psi_e$. Allora*

$$\varphi = \psi$$

Nello scorso corollario sono già definite le mappe tra i gruppi di Lie, e se differenziali coincidono otteniamo la loro uguaglianza.

Alla luce dei teoremi precedenti (in particolare dell'esistenza di un intorno con coordinate normali e della Proposizione 1.47), ci si potrebbe chiedere come mai non basti che il gruppo di Lie di partenza sia connesso per estendere un omomorfismo $\varphi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ tra algebre di Lie ad un omomorfismo tra i gruppi di Lie sottogiacenti senza richiedere che φ sia il differenziale di un qualche morfismo in partenza.

La ragione è che avendo a priori più scritte di un elemento come prodotto di elementi nell'intorno normale, per dimostrare la buona definizione di una tale eventuale mappa ci sarebbe bisogno di lavorare con curve e collegamenti omotopici, ma il tutto diventa fattibile richiedendo la semplice connessione del gruppo di Lie di partenza:

Teorema 1.49. *Siano G, H due gruppi di Lie e $\varphi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ un omomorfismo tra le loro algebre di Lie. Se G è semplicemente connesso, allora esiste un unico morfismo di gruppi di Lie*

$$\Phi: G \rightarrow H$$

tale che $d\Phi_e = \varphi$

Dimostrazione. Si rimanda a [7, p.76] □

Capitolo 2

Olonomia su fibrati vettoriali

In questo capitolo approfondiremo la teoria dei fibrati vettoriali, con particolare attenzione ai legami tra le operazioni tra essi e le corrispondenti sezioni. Dopo aver parlato di connessioni su fibrati vettoriali, svilupperemo la teoria dell'Olonomia, arrivando per la prima volta a conoscere i protagonisti del nostro percorso: i gruppi di Olonomia di una connessione. Cominciamo subito:

2.1 Fibrati vettoriali

Introduciamo per prima cosa la nozione di fibrato vettoriale, che generalizza la nozione di fibrato tangente vista nel primo capitolo:

Definizione 2.1. *Siano E, M due varietà lisce e $\pi: E \rightarrow M$ una submersione suriettiva.*

- (i) *La terna (E, π, M) sarà chiamata fibrato vettoriale di rango k se esiste un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ di M e diffeomorfismi*

$$h_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^k$$

tali che

- (a) *le fibra $E_x := \pi^{-1}(x)$ ha una struttura di \mathbb{R} -spazio vettoriale k -dimensionale per ogni $x \in M$.*

(b) per ogni $\alpha \in A$ il seguente diagramma è commutativo

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{h_\alpha} & U_\alpha \times \mathbb{R}^k \\ \pi \downarrow & \swarrow pr_1 & \\ U_\alpha & & \end{array}$$

e le restrizioni $h_\alpha|_x := h_\alpha|_{E_x} : E_x \rightarrow \mathbb{R}^k$ sono isomorfismi di \mathbb{R} -spazi vettoriali.

(ii) Il ricoprimento \mathcal{U} della definizione in (i) sarà chiamato banalizzante, così come gli aperti al suo interno e la mappa h_α , mentre il rango di E sarà indicato con $\text{rk}(E)$.

Un fibrato vettoriale (E, π, M) sarà spesso indicato con $E \xrightarrow{\pi} M$, o semplicemente con E qualora il resto delle informazioni siano sottintese o irrilevanti.

Definizione 2.2. Un morfismo tra due fibrati vettoriali E ed E' su una varietà liscia M è una mappa liscia $\tau : E \rightarrow E'$ tale che

(a) preserva le fibre, ovvero rende commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\tau} & E' \\ \pi \searrow & & \swarrow \pi' \\ & M & \end{array}$$

(b) le restrizioni $\tau_x := \tau|_{E_x} : E_x \rightarrow E'_x$ sono lineari per ogni $x \in M$.

Un isomorfismo di fibrati si realizza se τ è un diffeomorfismo. In tal caso, le restrizioni $\tau_p : E_x \xrightarrow{\sim} E'_x$ diventano isomorfismi lineari.

Esempio 6. Consideriamo un \mathbb{R} -spazio vettoriale V di dimensione k e una varietà liscia M . La terna $(M \times V, pr_1, M)$ costituisce un esempio di fibrato vettoriale, il cui ricoprimento banalizzante è dato semplicemente da $\mathcal{U} = \{M\}$, e in cui ogni base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_k\}$ di V induce la mappa banalizzante

$$\begin{aligned} h_{\mathcal{B}} : M \times V &\longrightarrow M \times \mathbb{R}^{\dim_{\mathbb{R}} V} \\ (x, v) &\longmapsto (x, (v_1, \dots, v_k)) \end{aligned}$$

dove (v_1, \dots, v_k) sono le componenti di v rispetto alla base \mathcal{B} .

Definizione 2.3. *Un fibrato vettoriale E di rango k su M è detto banale se ammette $\mathcal{U} = \{U\}$ come ricoprimento banalizzante. In tal caso, se la fibra è V e se la varietà di base è sottintesa, il fibrato sarà anche denotato \underline{V} .*

2.1.1 Le funzioni di transizione

Sia $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrato vettoriale di rango k . Segue immediatamente dalla definizione che ogni $x \in M$ ammette un intorno aperto $U_\alpha \subseteq M$ sul quale il fibrato si restringe ad un fibrato banale

$$E|_{U_\alpha} := \pi^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\pi} U_\alpha,$$

banalizzato proprio dalla mappa h_α .

Questo, però, a priori può essere fatto in più modi, e abbiamo bisogno di istruzioni per collegare modalità differenti: ogni intersezione di aperti banalizzanti $U_\alpha \cap U_\beta \subseteq M$ fornisce il diagramma

$$\begin{array}{ccc}
 & \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) & \\
 h_\alpha \swarrow & & \searrow h_\beta \\
 (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^k & \xleftarrow{h_\alpha \circ h_\beta^{-1}} & (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^k \\
 \searrow pr_1 & & \swarrow pr_1 \\
 & U_\alpha \cap U_\beta &
 \end{array}$$

la cui commutatività restituisce

$$h_\alpha \circ h_\beta^{-1}(x, v) = (x, g_{\alpha\beta}(x)(v)),$$

dove le mappe

$$g_{\alpha\beta}(x) := h_\alpha|_x \circ h_\beta|_x^{-1} \in \text{GL}_k(\mathbb{R})$$

dipendono in modo liscio da x .

Abbiamo quindi associato ad E e al ricoprimento \mathcal{U} le mappe lisce

$$g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \text{GL}_k(\mathbb{R}) \quad (2.1)$$

$$x \longmapsto g_{\alpha\beta}(x) \quad (2.2)$$

chiamate *funzioni di transizione*.

Per definizione, su ogni intersezione tripla $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ abbiamo

$$(h_\alpha \circ h_\gamma^{-1}) \circ (h_\gamma \circ h_\beta^{-1}) = h_\alpha \circ h_\beta^{-1},$$

e quindi le funzioni di transizione soddisfano la *condizione di cociclo*

$$g_{\alpha\gamma}(x)g_{\gamma\beta}(x) = g_{\alpha\beta}(x)$$

per ogni $x \in M$.

Tali funzioni ci consentono di capire perfettamente come le restrizioni di un fibrato si "incollino" sulle intersezioni degli aperti banalizzanti, e come ci consentano di "ricostruirlo" a partire dalle sue banalizzazioni:

Proposizione 2.4. *Data una varietà liscia M , un suo ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, un insieme di spazi vettoriali $\{E_x\}_{x \in M}$ di dimensione k e un insieme di funzioni lisce*

$$\{g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathrm{GL}_k(\mathbb{R})\}_{\alpha, \beta \in A}$$

che soddisfano le condizioni di cociclo, esiste un unico (a meno di isomorfismo) fibrato vettoriale $E \xrightarrow{\pi} M$ di rango k , di fibre E_x e le cui funzioni di transizione sono le $\{g_{\alpha\beta}\}_{\alpha, \beta \in A}$.

Inoltre, insiemi di funzioni di transizione $\{g_{\alpha\beta}\}_{\alpha, \beta \in A}$ e $\{g'_{\alpha\beta}\}_{\alpha, \beta \in A}$ definiscono lo stesso fibrato se e solo se esistono mappe lisce

$$\{\lambda_\alpha: U_\alpha \longrightarrow \mathrm{GL}_k(\mathbb{R})\}_{\alpha \in A}$$

tali che

$$g'_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha \cdot g_{\alpha\beta} \cdot \lambda_\beta^{-1}$$

per ogni $\alpha, \beta \in A$.

Dimostrazione. Consideriamo lo spazio topologico

$$\tilde{E} := \bigsqcup_{\alpha \in A} U_\alpha \times \mathbb{R}^k,$$

su cui definiamo la relazione (di equivalenza grazie alle condizioni di cociclo): per ogni $(x, v) \in U_\alpha \times \mathbb{R}^k$ e $(y, w) \in U_\beta \times \mathbb{R}^k$, porremo $(x, v) \sim (y, w)$ se e solo se $x = y \in U_\alpha \cap U_\beta$ e $v = g_{\alpha\beta}(x)w$.

Lo spazio quoziente $E = \tilde{E} / \sim$ è dotato di una struttura e di una proiezione $\pi: E \longrightarrow M$ lisce, le cui fibre sono descritte da

$$E_x = \pi^{-1}(x) = \{[(y, v)] : v \in \mathbb{R}^k\} \simeq \mathbb{R}^k.$$

Per ogni U_α abbiamo quindi omeomorfismi

$$\begin{aligned} h_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) &\longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^r \\ [(p, v)] &\longmapsto (p, v) \end{aligned}$$

che costituiscono l'atlante banalizzante $\mathcal{U} := \{(U_\alpha, h_\alpha)\}$ per il fibrato vettoriale $E \xrightarrow{\pi} M$, insieme agli aperti banalizzanti U_α , le cui funzioni di transizione sono, per costruzione, le $g_{\alpha\beta}$.

Riguardo la seconda affermazione, se due fibrati $\pi: E \longrightarrow M, \pi': E' \longrightarrow M$, banalizzati da $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, con carte $\{h_\alpha\}_{\alpha \in A}, \{h'_\alpha\}_{\alpha \in A}$ e con funzioni di transizione $\{g_{\alpha\beta}\}_{\alpha, \beta \in A}, \{g'_{\alpha\beta}\}_{\alpha, \beta \in A}$ sono isomorfi, allora per ogni $\alpha \in A$ e $p \in U_\alpha$ si ha

$$h'_\alpha(p) \circ h_\alpha^{-1}(p) \in \text{GL}_r(\mathbb{R})$$

e quindi $h_\alpha = \lambda_\alpha h'_\alpha$, con $\lambda_\alpha: U_\alpha \longrightarrow \text{GL}_r(\mathbb{R})$ liscia.

Ma allora

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta}(p) &= (h_\alpha \circ h_\beta^{-1})(p) \\ &= \lambda_\alpha(p) (h'_\alpha \circ (h'_\beta)^{-1})(p) \lambda_\beta^{-1}(p) = \\ &= \lambda_\alpha(p) g'_{\alpha\beta}(p) \lambda_\beta^{-1}(p) \end{aligned}$$

come volevamo.

Viceversa si può vedere che seguendo la procedura svolta nella prima parte della dimostrazione, che insiemi $\{g_{\alpha\beta}\}_{\alpha, \beta \in A}, \{g'_{\alpha\beta}\}_{\alpha, \beta \in A}$ che soddisfano le condizioni nell'enunciato determinano due fibrati vettoriali E, E' isomorfi. \square

2.1.2 Operazioni tra fibrati vettoriali

Le funzioni di transizione sono un ottimo strumento che ci consente di definire fibrati in modo semplice, anche attraverso operazioni algebriche tra fibrati già conosciuti:

Definizione 2.5. *Siano E ed E' due fibrati vettoriali di rango k e k' su una varietà liscia M , banalizzati dal ricoprimento $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ e con funzioni di transizione $\{g_{\alpha\beta}\}_{\alpha, \beta \in A}$ e $\{g'_{\alpha\beta}\}_{\alpha, \beta \in A}$ rispettivamente. Allora*

- (i) *Il fibrato somma diretta $E \oplus E'$ su M è il fibrato di fibre $\{E_x \oplus E'_x\}_{x \in M}$, definito a partire dalle funzioni di transizione*

$$\begin{bmatrix} g_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & g'_{\alpha\beta} \end{bmatrix}: U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathrm{GL}_{k+k'}(\mathbb{R})$$

(ii) Il fibrato prodotto tensore $E \otimes E'$ su M è il fibrato di fibre $\{E_x \otimes E'_x\}_{x \in M}$, definito a partire dalle funzioni di transizione

$$g_{\alpha\beta} \otimes g'_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathrm{GL}_{kk'}(\mathbb{R}),$$

dove

$$(g_{\alpha\beta} \otimes g'_{\alpha\beta})_{(ii')(jj')} = (g_{\alpha\beta})_{ij} \cdot (g'_{\alpha\beta})_{i'j'}$$

(iii) Il fibrato duale $E^* \longrightarrow M$ è il fibrato di fibre $\{E_x^*\}_{x \in M}$ definito a partire dalle funzioni di transizione

$$(g_{\alpha\beta}^{-1})^t: U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$$

(iv) Il fibrato potenza esterna r -esima $\wedge^r E_x$ è il fibrato di fibre $\{\wedge^r E_x\}_{x \in M}$ definito a partire dalle funzioni di transizione

$$\underbrace{g_{\alpha\beta} \wedge \cdots \wedge g_{\alpha\beta}}_{r \text{ volte}}: U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathrm{GL}_{\binom{r}{k}}(\mathbb{R})$$

dove

$$(g_{\alpha\beta} \wedge \cdots \wedge g_{\alpha\beta})(x): \wedge^r E_x \longrightarrow \wedge^r E_x$$

è il prodotto wedge r volte di $g_{\alpha\beta}(x)$ con se stesso.

(v) Il fibrato degli endomorfismi di E è il fibrato

$$\mathrm{End}E := E^* \otimes E$$

Questa definizione, in particolare, è giustificata dall'isomorfismo naturale

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) \simeq V^* \otimes W$$

nel caso di \mathbb{R} spazi vettoriali di dimensione finita,

I fibrati di endomorfismi giocheranno un ruolo molto importante nella definizione di connessione su un fibrato.

Esempio 7. Alcuni esempi di fibrati vettoriali su una varietà liscia M sono forniti dal fibrato tangente

$$TM \longrightarrow M,$$

che abbiamo già studiato nel primo capitolo, dal fibrato cotangente

$$T^*M \longrightarrow M,$$

dal fibrato dei tensori di tipo (r, s)

$$T^{r,s}M := \underbrace{TM \otimes \cdots \otimes TM}_r \otimes \underbrace{T^*M \otimes \cdots \otimes T^*M}_s,$$

e dal fibrato delle potenze esterne r -esime

$$\bigwedge^r T^*M \longrightarrow M.$$

Osservazione 2.6. Nella definizione precedente (e nella dimostrazione del Teorema 2.4), non è restrittivo supporre che entrambi i fibrati siano banalizzati dallo stesso ricoprimento $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$: se sono banalizzati da ricoprimenti distinti $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ e $\mathcal{V}' = \{V'_\gamma\}_{\gamma \in B}$ allora sono entrambi banalizzati da

$$\mathcal{U} := \{V_\alpha \cap V'_\beta\}_{(\alpha, \beta) \in A \times B}$$

Osservazione 2.7. Sia $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrato vettoriale di rango r . Se $\underline{\mathbb{R}} := M \times \mathbb{R}$ è il fibrato banale di rango 1, le sue funzioni di transizione valgono costantemente 1, per cui le funzioni di transizione di $E \otimes \underline{\mathbb{R}}$ coincidono con quelle di E . La Proposizione 2.4 garantisce allora un isomorfismo

$$E \otimes \underline{\mathbb{R}} \simeq E$$

Si può verificare analogamente che

$$E \otimes \underline{\mathbb{R}}^k \simeq \bigoplus_{i=1}^k E$$

Oltre ad eseguire operazioni tra fibrati vettoriali definiti sulla stessa varietà liscia, sarà comodo spostare fibrati vettoriali da una varietà "di arrivo" ad una "di partenza", attraverso un'operazione chiamata *pullback*. Quest'operazione avrà talvolta un ruolo di restrizione, per esempio per spostare un fibrato vettoriale su una sottovarietà o su una curva liscia.

Definizione 2.8. *Date due varietà differenziabili M, N e una mappa liscia $F: N \rightarrow M$, se $E \xrightarrow{\pi} M$ è un fibrato vettoriale con funzioni di transizione*

$$\{g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \mathrm{GL}_k(\mathbb{R})\}_{\alpha, \beta \in A},$$

allora il fibrato pullback $F^(E) \rightarrow N$ è il fibrato vettoriale di fibre $\{E_{F(x)}\}_{x \in N}$ definito dalle funzioni di transizione*

$$g_{\alpha\beta} \circ F: F^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$$

Le fibre di un fibrato pullback sono le stesse del fibrato di partenza, ma quello che cambia è che vengono "spostate indietro" sui punti nelle fibre, in modo liscio. Ciò è utile quando vogliamo considerare solo particolari sezioni di un fibrato vettoriale, per esempio sezioni limitate lungo il supporto di una curva:

Esempio 8. Consideriamo un fibrato tangente $TM \xrightarrow{\pi} M$ e una curva liscia $\gamma: I \rightarrow M$. Il fibrato pullback

$$\gamma^*(TM) \rightarrow I$$

è il fibrato dei vettori tangenti al supporto della curva.

Osservazione 2.9. *Consideriamo due varietà lisce N, M , il fibrato cotangente $T^*M \rightarrow M$ e una mappa liscia $G: N \rightarrow M$.*

I codifferenziali di G in $x \in N$

$$\begin{aligned} \delta G_x: T_{G(x)}^*M &\rightarrow T_x^*N \\ \omega_x &\mapsto \omega_x \circ (dG)_x \end{aligned}$$

inducono il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} G^*(T^*M) & \xrightarrow{\delta} & T^*N \\ & \searrow & \swarrow \\ & N & \end{array}$$

che si estende a

$$\begin{array}{ccc} G^*(\wedge^q T^*M) & \xrightarrow{\delta \wedge \dots \wedge \delta} & \wedge^q T^*N \\ & \searrow & \swarrow \\ & N & \end{array}$$

dove per ogni $x \in N$ la mappa indotta sulle fibre è

$$\delta G_p \wedge \cdots \wedge \delta G_p: \bigwedge^q T_{G(p)}^* M \longrightarrow \bigwedge^q T_p^* N.$$

Queste mappe ci torneranno utili a breve quando avremo bisogno di eseguire il pullback di una connessione su un fibrato vettoriale.

2.1.3 Sezioni di un fibrato vettoriale

Proseguiremo la precedente osservazione in seguito, ma prima abbiamo bisogno di parlare di *sezioni di un fibrato*:

Definizione 2.10. Una sezione di un fibrato vettoriale $E \xrightarrow{\pi} M$ è una mappa liscia $s: M \rightarrow E$ tale che $\pi \circ s = id_M$.

Analogamente a quanto visto nell'Osservazione 1.7, grazie alla struttura di spazio vettoriale di ciascuna fibra, l'insieme delle sezioni $\Gamma(M, E)$ di un fibrato vettoriale E su M è dotato di una struttura di $\mathcal{C}_M^\infty(M)$ -modulo, in cui la moltiplicazione è definita puntualmente.

Esempio 9. Sia M una varietà liscia. Chiameremo

- (i) *campi vettoriali* le sezioni del fibrato tangente TM , e li indicheremo con

$$\mathfrak{X}(M) := \Gamma(M, TM)$$

(la definizione è coerente la Definizione 1.6)

- (ii) *q-forme differenziali* le sezioni del fibrato $\bigwedge^q T^*M$, e le indicheremo con

$$\Omega^q(M) := \Gamma(M, \bigwedge^q T^*M)$$

- (iii) *q-forme differenziali a valori in E* le sezioni di $E \otimes \bigwedge^q T^*M$:

$$\Omega^q(E) := \Gamma(M, E \otimes \bigwedge^q T^*M)$$

Esempio 10. Se $\gamma: I \rightarrow M$ è una curva liscia, allora le sezioni

$$\Gamma(I, \gamma^*(TM))$$

sono i campi vettoriali definiti lungo curva γ .

Le sezioni di un fibrato ci aiutano a comprendere il fibrato stesso:

Definizione 2.11. *Sia $E \rightarrow M$ un fibrato vettoriale e $U \subseteq M$ un aperto. Un insieme di sezioni locali $\{\sigma_i\}_{i=1}^r \subseteq \Gamma(U, E)$ si dice base di sezioni locali se per ogni $x \in U$ l'insieme $\{\sigma_i(x)\}_{i=1}^r$ è una base di E_x .*

Se $U = M$, l'insieme $\{\sigma_i\}_{i=1}^r$ sarà chiamato base di sezioni globali.

Come già visto nel caso dei gruppi di Lie (nella dimostrazione della Proposizione 1.42), una base di sezioni locali costituisce una base di $\Gamma(U, E)$ come $\mathcal{C}_M^\infty(U)$ -modulo e induce una banalizzazione locale

$$\begin{aligned} h: E|_U &\xrightarrow{\sim} U \times \mathbb{R}^r \\ \sigma_i(x) &\mapsto (x, e_i) \end{aligned}$$

dove $\{e_i\}_{i=1}^r$ è la base canonica di \mathbb{R}^r .

Vice versa, ad ogni aperto banalizzante $U_\alpha \subseteq M$ è associato il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{h_\alpha} & U_\alpha \times \mathbb{R}^k \\ \pi \downarrow & \swarrow pr_1 & \\ U_\alpha & & \end{array}$$

e la base di sezioni locali

$$\begin{aligned} \sigma_i^\alpha: U_\alpha &\rightarrow E \\ x &\mapsto h_\alpha^{-1}(x, e_i) \end{aligned}$$

per ogni $i = 1, \dots, r$.

Più generalmente rispetto a quanto visto nel caso del fibrato tangente di un gruppo di Lie, ritroviamo che

Proposizione 2.12. *Un fibrato vettoriale E su una varietà liscia M è banale se e solo se ammette una base di sezioni globali $\{\sigma_i\}_{i=1}^r$.*

Le sezioni di fibrati ottenuti tramite operazioni come quelle nella Definizione 2.5 sono direttamente collegate alle sezioni dei fibrati da cui provengono. Cominciamo a vederlo con il seguente

Teorema 2.13. *Siano E, E' due fibrati vettoriali su una varietà liscia M . Allora vi è un isomorfismo di $\mathcal{C}_M^\infty(M)$ -moduli*

$$\Gamma(M, E \otimes E') \simeq \Gamma(M, E) \otimes_{\mathcal{C}_M^\infty(M)} \Gamma(M, E')$$

Dimostrazione. Sia $s \in \Gamma(M, E \otimes E')$ una sezione globale e $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un ricoprimento banalizzante per E ed E' (per dettagli sulla scelta del ricoprimento comune si rimanda all'Osservazione 2.6).

Su ogni aperto banalizzante U_α possiamo scegliere basi di sezioni locali $\{\sigma_i^{(\alpha)}\}_i$ e $\{\sigma'_j{}^{(\alpha)}\}_j$ di $\Gamma(U_\alpha, E)$ e $\Gamma(U_\alpha, E')$ rispettivamente. L'insieme

$$\{\sigma_i^{(\alpha)} \otimes \sigma'_j{}^{(\alpha)}\}_{i,j}$$

è dunque una base di sezioni locali di $\Gamma(U_\alpha, E \otimes E')$, che ci permette di esprimere

$$s|_{U_\alpha} = \sum_{i,j} s_{(\alpha)}^{ij} \sigma_i^{(\alpha)} \otimes \sigma'_j{}^{(\alpha)},$$

dove ciascuna $s_{(\alpha)}^{ij}$ è una funzione liscia su U_α .

Procediamo considerando una partizione liscia dell'unità localmente finita $\{\mu_\alpha\}_{\alpha \in A}$ e subordinata al ricoprimento \mathcal{U} , e scriviamo

$$s = \left(\sum_{\alpha} \mu_\alpha \right) s = \sum_{i,j} \tilde{s}_{(\alpha)}^{ij} \tilde{\sigma}_i^{(\alpha)} \otimes \tilde{\sigma}'_j{}^{(\alpha)}$$

dove ogni $\tilde{s}_{(\alpha)}^{ij}$ è ora una funzione liscia su M (con supporto in U_α), $\tilde{\sigma}_i^{(\alpha)} \in \Gamma(M, E)$ per ogni i e $\tilde{\sigma}'_j{}^{(\alpha)} \in \Gamma(M, E')$ per ogni j .

Siccome la collezione dei supporti $\{\text{supp } \mu_\alpha\}_\alpha$ ricopre M , resta indotto un morfismo di $\mathcal{C}_M^\infty(M)$ -moduli

$$\varphi: \Gamma(M, E \otimes E') \longrightarrow \Gamma(M, E) \otimes_{\mathcal{C}_M^\infty(M)} \Gamma(M, E')$$

D'altra parte, vi è una mappa $\mathcal{C}_M^\infty(M)$ -bilineare

$$\psi: \Gamma(M, E) \times \Gamma(M, E') \longrightarrow \Gamma(M, E \otimes E')$$

data da $\psi(s, s')(p) = s(p) \otimes s'(p)$ per ogni $p \in M$. Dalla proprietà universale del prodotto tensore su $\mathcal{C}_M^\infty(M)$ resta definita un'unica mappa

$$\tilde{\psi}: \Gamma(M, E) \otimes_{\mathcal{C}_M^\infty(M)} \Gamma(M, E') \longrightarrow \Gamma(M, E \otimes E')$$

che risulta essere l'inversa di φ , da cui la tesi. □

Abbiamo inoltre che

$$\Gamma(M, E^*) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}_M^\infty(M)}(\Gamma(M, E), \mathcal{C}_M^\infty(M)) = (\Gamma(M, E))^*$$

come $\mathcal{C}_M^\infty(M)$ -moduli, e questo ci consente di dimostrare il seguente Teorema, che ci sarà molto utile nell'induzione di sezioni globali a partire da mappe $\mathcal{C}_M^\infty(M)$ -lineari:

Teorema 2.14 (Criterio di tensorialità). *Siano E, E' due fibrati vettoriali su M . Allora*

$$\Gamma(M, E^* \otimes E') \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{C}_M^\infty(M)}(\Gamma(M, E), \Gamma(M, E'))$$

come $\mathcal{C}_M^\infty(M)$ -moduli.

Dimostrazione. Abbiamo gli isomorfismi

$$\begin{aligned} \Gamma(M, E^* \otimes E) &\simeq \Gamma(M, E^*) \otimes_{\mathcal{C}_M^\infty(M)} \Gamma(M, E') \simeq \\ &\simeq \Gamma(M, E)^* \otimes_{\mathcal{C}_M^\infty(M)} \Gamma(M, E') \simeq \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}_M^\infty(M)}(\Gamma(M, E), \Gamma(M, E')) \end{aligned}$$

□

Motivati dal precedente teorema, penseremo a sezioni di un fibrato tensore sempre come al tensore di due sezioni dei singoli fibrati. Questo semplificherà, per esempio, la definizione di derivata covariante, che vedremo in seguito.

Osservazione 2.15. *Continuiamo l'Osservazione 2.9, mettendoci nella stessa situazione: consideriamo due varietà lisce N, M , una mappa liscia $G: N \rightarrow M$, il fibrato cotangente T^*M su M e la mappa indotta dal codifferenziale di G*

$$\begin{array}{ccc} \delta: G^*(\bigwedge^q T^*M) & \xrightarrow{\delta \wedge \cdots \wedge \delta} & \bigwedge^q T^*N \\ & \searrow & \swarrow \\ & N & \end{array}$$

Se E è un altro fibrato su M , allora

$$G^*(E \otimes \bigwedge^q T^*M) = G^*E \otimes G^*(\bigwedge^q T^*M)$$

poiché individuati dalle stesse funzioni di transizione, e la mappa

$$id \otimes \delta: G^*E \otimes G^*(\wedge^q T^*M) \longrightarrow G^*E \otimes \wedge^q T^*N$$

ci permette di lavorare sulle sezioni definendo le mappe

$$\begin{aligned} G_q^*: \Gamma(M, E \otimes \wedge^q T^*M) &\longrightarrow \Gamma(N, G^*(E) \otimes \wedge^q T^*M) \\ s \otimes \eta &\longmapsto G^*s \otimes \delta G(\eta) \end{aligned}$$

in cui sfruttiamo implicitamente il criterio di tensorialità (Teorema 2.14) e la notazione $\delta G(\eta) := \delta G(\eta \circ G)$

2.2 Connessioni su fibrati vettoriali

Una connessione su un fibrato vettoriale costituisce intuitivamente un modo per collegarne le fibre: se immaginiamo le fibre di un fibrato come verticali, allora una connessione può essere immaginata come un modo di raccordarle orizzontalmente infinitesimalmente.

Definizione 2.16. *Dato un fibrato vettoriale $E \xrightarrow{\pi} M$. Una connessione ∇ su E è una mappa \mathbb{R} -lineare $\nabla: \Gamma(M, E) \longrightarrow \Gamma(M, E \otimes T^*M)$ che soddisfa*

$$\nabla(\alpha e) = d\alpha \otimes e + \alpha \nabla(e) \tag{2.3}$$

per ogni $\alpha \in C_M^\infty(M)$ ed $e \in \Gamma(M, E)$.

Vedremo che anche nel caso dei fibrati principali le connessioni avranno il ruolo di raccordare le fibre orizzontalmente, anche se la loro definizione seguirà un percorso completamente diverso, sfruttando il nucleo del differenziale della proiezione. In effetti, è anche possibile definire connessioni su fibrati vettoriali sfruttando tale nucleo, come viene mostrato in [1, p.327]. Questo è un indizio che ci fa intuire come il linguaggio dei fibrati vettoriali sia strettamente collegato con quello dei fibrati principali, come vedremo in seguito.

Osservazione 2.17. *Data una base di sezioni globali $\{e_1, \dots, e_k\}$ di un fibrato vettoriale $E \longrightarrow M$, è possibile determinare completamente una connessione ∇ su E sfruttando i valori attribuiti alla base $\nabla e_1, \dots, \nabla e_k$ e il vincolo di Leibnitz (2.3).*

La precedente osservazione è utile per definire globalmente una connessione su un fibrato banale, ma quello che ci servirà sarà definire una connessione su un fibrato generico a partire da sezioni locali, "incollandole" opportunamente sulle rispettive intersezioni. Vediamo come procedere:

Osservazione 2.18. Se ∇ è una connessione su un fibrato vettoriale $E \rightarrow M$ di rango r e $U \subseteq M$ un aperto banalizzante per E con una base di sezioni locali $\{e_1, \dots, e_r\}$, allora

$$\nabla e_i = \sum_{j=1}^r \omega_{ji} \otimes e_j,$$

con $\omega_{ij} \in \Omega^1(U)$ per ogni $i, j = 1, \dots, r$. Di conseguenza, per ogni $s = \sum_{j=1}^r s_j e_j \in \Gamma(U, E|_U)$, con $s_i \in \mathcal{C}_M^\infty(U)$ per ogni $i = 1, \dots, r$, abbiamo

$$\begin{aligned} \nabla s &= \sum_{i=1}^r \nabla s_i e_i = \\ &= \sum_{i=1}^r (ds_i \otimes e_i + s_i \sum_{j=1}^k \omega_{ji} \otimes e_j) = \\ &= \sum_{i=1}^r (ds_i + \sum_{j=1}^r s_j \omega_{ij}) \otimes e_i \end{aligned}$$

e quindi possiamo esprimere ∇ localmente attraverso l'equazione

$$\nabla \underline{s} = (d + \Omega) \underline{s}$$

dove

$$\Omega = (\omega_{ij})_{ij}$$

è la matrice di 1-forme associata a ∇ su U rispetto al riferimento $\{e_i\}_{i=1}^r$ e \underline{s} è il vettore con le componenti di s rispetto al riferimento locale $\{e_i\}_{i=1}^r$.

Se $\{e'_h\}_{h=1}^r$ è un altro riferimento locale per E su U allora deve esistere una matrice $A = (A_{hk})_{hk} \in \text{GL}_r(\mathcal{C}_M^\infty(U))$ tale che

$$e'_h = \sum_{k=1}^r A_{hk} e_k$$

per ogni $i = 1, \dots, n$.

Se $\Omega' = (\omega'_{ij})_{ij}$ è la matrice di 1-forme associata a ∇ su U rispetto al riferimento $\{e'_h\}_{h=1}^r$, allora

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^r \left[\sum_{h=1}^r A_{hk} \omega'_{ih} \right] \otimes e_k &= \sum_{h=1}^r \omega'_{ih} \otimes \sum_{k=1}^r A_{hk} e_k = \\
 &= \sum_{h=1}^r \omega'_{ih} \otimes e'_h = \\
 &= \nabla e'_i = \\
 &= \nabla \left(\sum_{j=1}^r A_{ij} e_j \right) = \\
 &= \sum_{j=1}^r [dA_{ij} \otimes e_j + A_{ij} \nabla e_j] = \\
 &= \sum_{k=1}^r \left[\sum_{j=1}^r A_{ij} \omega_{jk} + dA_{ik} \right] \otimes e_k.
 \end{aligned}$$

In termini matriciali, tutto questo si traduce in

$$A\Omega' = \Omega A + dA$$

e quindi nell'equazione

$$\Omega' = A^{-1}\Omega A + A^{-1}dA \quad (2.4)$$

Viceversa, si verifica (ulteriori dettagli in [1, p. 364, es. 6.4]) che dato un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ banalizzante per E , con basi di sezioni locali $\{e_i^\alpha\}_{i=1}^r$ e con la famiglia $\{\Omega^\alpha\}_{\alpha \in A}$ di matrici di 1-forme associate che verificano (2.4) su $U_\alpha \cap U_\beta$ per ogni $\alpha, \beta \in A$, esiste un'unica connessione ∇ su E tale che

$$\nabla = (d + \Omega^\alpha)$$

su U_α , per ogni $\alpha \in A$.

2.2.1 La curvatura di una connessione

Andiamo ora nella direzione di sfruttare una connessione per definire *derivate covarianti*, fondamentali per la definizione di *curvatura* di una connessione:

Osservazione 2.19. Se M è una varietà liscia, l'Osservazione 2.7 garantisce

$$T^*M \simeq T^*M \otimes \underline{\mathbb{R}}$$

e il Teorema 2.13 garantisce che

$$\begin{aligned}
 \Omega^1(M) &= \Gamma(M, T^*M) \simeq \\
 &\simeq \Gamma(M, T^*M \otimes \underline{\mathbb{R}}) \simeq \\
 &\simeq \Gamma(M, T^*M) \otimes_{\mathcal{C}_M^\infty(M)} \Gamma(M, \underline{\mathbb{R}}) \simeq \\
 &\simeq \Gamma(M, TM)^* \otimes_{\mathcal{C}_M^\infty(M)} \mathcal{C}_M^\infty(M) \simeq \\
 &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}_M^\infty(M)}(\mathfrak{X}(M), \mathcal{C}_M^\infty(M)) = \\
 &= \mathfrak{X}(M)^*
 \end{aligned}$$

come $\mathcal{C}_M^\infty(M)$ -moduli.

Più generalmente, con gli stessi procedimenti iterati più volte, otteniamo dualità tra sezioni dei campi tensoriali di tipo (r, s) :

$$\Gamma(M, T^{r,s}M) \simeq \Gamma(M, T^{s,r}M)^*$$

come $\mathcal{C}_M^\infty(M)$ -moduli.

Come accennato prima, una connessione permette di definire *derivate covarianti* lungo campi vettoriali: grazie al Teorema 2.13 sappiamo che

$$\Gamma(E \otimes T^*M) \simeq \Gamma(M, E) \otimes \Omega^1(M)$$

e grazie all'Osservazione 2.19 che

$$\Omega^1(M) \simeq \mathfrak{X}(M)^*$$

come $\mathcal{C}_M^\infty(M)$ -moduli, per cui dato $v \in \mathfrak{X}(M)$ possiamo definire una mappa di contrazione sul secondo fattore

$$\begin{aligned}
 \nabla_v: \Gamma(M, E) &\longrightarrow \Gamma(M, E) \\
 e &\longmapsto \nabla_v e := v \cdot \nabla e
 \end{aligned}$$

chiamata *derivata covariante lungo v*.

Proposizione 2.20. *Sia $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrato vettoriale e ∇ una connessione su E . Siano $v, w \in \mathfrak{X}(M)$ due campi vettoriali, $e \in \Gamma(M, E)$ e $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{C}_M^\infty(M)$. Allora vale l'uguaglianza*

$$\nabla_{\alpha v} \nabla_{\beta w} (\gamma e) - \nabla_{\beta w} \nabla_{\alpha v} (\gamma e) - \nabla_{[\alpha v, \beta w]} (\gamma e) = \alpha \beta \gamma (\nabla_v \nabla_w e - \nabla_w \nabla_v e - \nabla_{[v, w]} e)$$

Dimostrazione. Si vede sviluppando i calcoli in coordinate locali, per cui si rimanda a [11, p.23]. \square

La mappa

$$\begin{aligned} R(\nabla): \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \Gamma(M, E) \\ (v, w, e) &\longmapsto \nabla_v \nabla_w e - \nabla_w \nabla_v e - \nabla_{[v, w]} e \end{aligned}$$

è \mathbb{R} -trilineare e antisimmetrica in v, w , e quindi induce la mappa \mathbb{R} -lineare

$$\begin{aligned} R(\nabla): \Gamma(M, \bigwedge^2 TM \otimes E) &\longrightarrow \Gamma(M, E) \\ (v \wedge w) \otimes e &\longmapsto R(\nabla)(v, w, e) \end{aligned}$$

che, grazie alla Proposizione 2.20, sappiamo essere $\mathcal{C}_M^\infty(M)$ -lineare, e il criterio di tensorialità (Teorema 2.14) fornisce una mappa indotta

$$R(\nabla) \in \Gamma(M, \bigwedge^2 T^*M \otimes \text{End}(E)), \quad (2.5)$$

chiamata *curvatura di ∇* .

2.3 Sollevamento parallelo di cammini

Richiamiamo la situazione dell'Osservazione 2.15: consideriamo N, M due varietà lisce, una mappa liscia $G: N \rightarrow M$ e ∇ una connessione su un fibrato $E \xrightarrow{\pi} M$ di rango k .

Il nostro interesse è definire una connessione pullback

$$\nabla^G: \Gamma(N, G^*E) \longrightarrow \Gamma(N, G^*E \otimes T^*N)$$

su G^*E . Grazie all'Osservazione 2.18, possiamo limitarci a definire tale connessione localmente, rispettando opportuni vincoli di transizione, per cui fissiamo $p \in M$ e $q \in G^{-1}(p)$.

Sappiamo che il fibrato E è localmente banale, e cioè che ammette k sezioni locali banalizzanti

$$\{s_i: U \rightarrow E\}_{i=1}^k$$

definite in un intorno $U \subseteq M$ di p .

Il pullback della restrizione banale $G^*E|_U$ rimane ancora banale, poiché i pullback delle sezioni locali

$$\{G^*(s_i):G^{-1}(U) \longrightarrow G^*E|_U\}_{i=1}^k$$

sono ancora una base di sezioni locali banalizzanti. Di conseguenza, grazie all'Osservazione 2.17, non ci rimane che definire ∇^G sulle $\{G^*(s_i)\}_{i=1}^k$.

A tal proposito, richiamiamo le mappe

$$\begin{aligned} G_\bullet^*: \Gamma(M, E \otimes \bigwedge^q T^*M) &\longrightarrow \Gamma(N, G^*E \otimes \bigwedge^q T^*M) \\ s \otimes \eta &\longmapsto G^*s \otimes \delta G(\eta) \end{aligned}$$

definite nell'Osservazione 2.15, e poniamo

$$\nabla^G(G^*(s_i)) = G_\bullet^*(\nabla(s_i))$$

per ogni $i = 1, \dots, n$.

Si verifica facilmente che le condizioni (2.4) (soddisfatte naturalmente da ∇), vengono preservate attraverso le operazioni di pullback, e sono quindi soddisfatte anche da ∇^G , che risulta quindi essere effettivamente una connessione.

Ora che sappiamo costruire il pullback di una connessione, ci concentriamo sul caso particolare in cui $E \xrightarrow{\pi} M$ sia un fibrato vettoriale, ∇ una connessione su E e $\gamma: I \rightarrow M$ una curva liscia.

Il fibrato pullback γ^*E è un fibrato vettoriale su I su cui possiamo definire la connessione pullback ∇^γ .

Una sezione $s \in \Gamma(I, \gamma^*E)$ è detta *parallela* se

$$\nabla_{\frac{d\gamma}{dt}(t)}^\gamma s(t) = 0 \quad \text{per ogni } t \in I. \quad (2.6)$$

L'equazione differenziale (2.6) con il vincolo $s(0) = e \in E_{\gamma(0)}$ costituisce un problema di Cauchy, che ammette un'unica soluzione liscia $s^e: I \rightarrow E$ detta *sollevamento parallelo di γ passante per e* .

Ogni sollevamento parallelo s^e di γ rappresenta un modo per muoversi naturalmente "con il minimo sforzo" a partire dal punto e , e fornisce l'assegnazione

$$e = s^e(0) \longmapsto s^e(1).$$

Resta quindi indotta una mappa tra le fibre degli estremi di γ :

Definizione 2.21. Nella situazione precedente, siano $x = \gamma(0), y = \gamma(1) \in M$. La mappa

$$\begin{aligned} P_\gamma: E_x &\longrightarrow E_y \\ e &\longmapsto P_\gamma(e) := s^e(1) \end{aligned}$$

è chiamata mappa di trasporto parallelo lungo γ .

Il trasporto parallelo di mappe lisce a tratti è definito analogamente, per composizioni.

Ci concentriamo ora sui cammini $\Omega(M, x)$ chiusi in M puntati in $x \in M$.

Dati due punti $e, e' \in E_x$, se $s^e, s^{e'}$ sono i sollevamenti paralleli di γ associati, allora dalla definizione segue che $\lambda s^e + \lambda' s^{e'}$ è il sollevamento parallelo di γ passante per $\lambda e + \lambda' e' \in E_x$ per ogni $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$. Tramite la valutazione in 1 otteniamo la linearità di P_γ :

$$P_\gamma \in \text{End} E_x$$

Il cammino inverso

$$\begin{aligned} \gamma^{-1}: I &\longrightarrow M \\ t &\longmapsto \gamma(1-t) \end{aligned}$$

induce sezioni parallele inverse a quelle di γ : se s^e è la soluzione di

$$\begin{cases} \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}}^\gamma s^e(t) = 0 \\ s^e(0) = e \end{cases}$$

allora

$$\nabla_{\frac{d\gamma^{-1}}{dt}}^\gamma (s^e)^{-1}(t) = \nabla_{-\frac{d\gamma}{dt}(1-t)}^\gamma s^e(1-t) = 0$$

e $(s^e)^{-1}(0) = s^e(1)$. Questo restituisce

$$(P_\gamma)^{-1} = P_{\gamma^{-1}},$$

per cui otteniamo

$$P_\gamma \in \text{GL}(E_x).$$

Inoltre, la concatenazione di due curve lisce $\gamma, \gamma': I \longrightarrow M$ è definita da

$$\begin{aligned} \gamma \cdot \gamma': I &\longrightarrow M \\ t &\longmapsto \begin{cases} \alpha(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(2t-1) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \end{aligned}$$

e, per definizione,

$$P_{\gamma\gamma'} = P_{\gamma'} \cdot P_\gamma \in \text{GL}(E_x)$$

2.3.1 Gruppi di Olonomia su fibrati vettoriali

Abbiamo impiegato molto tempo per costruire gli utensili adatti, ma siamo finalmente arrivati alla definizione dei protagonisti del nostro percorso: i gruppi di Olonomia nel caso dei fibrati vettoriali.

Fissiamo per un po' un fibrato vettoriale $E \xrightarrow{\pi} M$ di rango k e ∇ una connessione su E .

Per quanto visto nei calcoli al termine della precedente sezione, resta indotta una mappa

$$\begin{aligned} \eta: \Omega(M, x) &\longrightarrow \mathrm{GL}(E_x) \\ \gamma &\longmapsto P_\gamma \end{aligned}$$

che ad ogni loop γ in x associa la sua mappa di trasporto parallelo P_γ , la cui immagine è un gruppo. Se ci restringiamo all'insieme dei cammini omotopicamente nulli

$$\Omega^0(M, x) := \{\gamma \in \Omega(M, x) : \underset{htp}{\gamma} \simeq \mathbb{1}_x\} \subseteq \Omega(M, x),$$

otteniamo

$$\eta|_{\Omega^0(M, x)}: \Omega^0(M, x) \longrightarrow \mathrm{GL}(E_x),$$

la cui immagine è ancora un gruppo poiché inverso e concatenazioni di cammini omotopicamente nulli sono ancora omotopicamente nulli.

Definizione 2.22. *Sia $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrato vettoriale e ∇ una connessione su E . Il Gruppo di Olonomia di ∇ nel punto $x \in M$ è*

$$\mathrm{Hol}_x(\nabla) := \mathrm{Im}(\eta) \subseteq \mathrm{GL}(E_x)$$

Analogamente, il Gruppo di Olonomia ristretto di ∇ in x è

$$\mathrm{Hol}_x^0(\nabla) := \mathrm{Im}(\eta|_{\Omega^0(M, x)}) \subseteq \mathrm{Hol}(\nabla)_x$$

Vediamo ora alcune proprietà dei gruppi di Olonomia appena costruiti:

Innanzitutto, ogni scelta di una base \mathcal{B} in E_x fornisce una rappresentazione fedele

$$\rho_{\mathcal{B}}: \mathrm{Hol}_x(\nabla) \longrightarrow \mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$$

attraverso le quali rappresentiamo $\mathrm{Hol}_x(\nabla)$ nei sottogruppi

$$\{\rho_{\mathcal{B}}(\mathrm{Hol}_x(\nabla))\}_{\mathcal{B}}$$

di $\mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$, tutti coniugati tra loro attraverso matrici di cambio base.

Inoltre, se M è connessa, possiamo congiungere due punti qualsiasi $x, y \in M$ attraverso una curva liscia $\alpha: I \rightarrow M$ tale che $\alpha(0) = x, \alpha(1) = y$, che induce la coniugazione

$$\begin{aligned} \alpha^\#: \Omega(M, y) &\longrightarrow \Omega(M, x) \\ \gamma &\longmapsto \alpha^{-1} \cdot \gamma \cdot \alpha \end{aligned}$$

in modo che la mappa di trasporto parallelo

$$P_\alpha: E_x \longrightarrow E_y$$

coniughi i rispettivi gruppi di Olonomia

$$P_\alpha^{-1} \mathrm{Hol}_y(\nabla) P_\alpha = \mathrm{Hol}_x(\nabla)$$

e (poiché le coniugazioni $\alpha^\#$ preservano $\Omega^0(M, x)$) di Olonomia ristretta

$$P_\alpha^{-1} \mathrm{Hol}_y^0(\nabla) P_\alpha = \mathrm{Hol}_x^0(\nabla)$$

Abbiamo ottenuto che, nel caso in cui la varietà M sia connessa, possiamo omettere il punto base parlando semplicemente del *gruppo di Olonomia di M*

$$\mathrm{Hol}(\nabla) \subseteq \mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$$

pensato come gruppo a meno di coniugio.

L'ultimo teorema importante di questa sezione riguarda proprietà importanti dei gruppi di Olonomia, che saranno valide anche nel caso dei fibrati principali, sviluppato in seguito:

Teorema 2.23. *Sia M varietà liscia connessa, $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrato vettoriale k -dimensionale e ∇ una connessione su E . Allora*

(i) $\mathrm{Hol}^0(\nabla)$ è un sottogruppo di Lie connesso di $\mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$, è la componente connessa contenente l'identità in $\mathrm{Hol}(\nabla)$ ed è un sottogruppo normale di $\mathrm{Hol}(\nabla)$;

(ii) E è definito un morfismo suriettivo

$$P: \pi_1(M) \longrightarrow \mathrm{Hol}(\nabla) / \mathrm{Hol}^0(\nabla).$$

Dimostrazione. (i) : Fissiamo $x \in M$. Procediamo nel mostrare che $\text{Hol}_x(\nabla)$ è connesso per archi in modo che un risultato di Yamabe ([16]) garantisca che, in quanto sottogruppo di un gruppo di Lie, $\text{Hol}_x(\nabla)$ sia un sottogruppo di Lie connesso.

Connettiamo ogni elemento $P_\gamma \in \text{Hol}_x(\nabla)$ all'identità nel modo seguente: sia

$$\begin{aligned} F: I \times I &\longrightarrow M \\ (t, s) &\longmapsto F(t, s) \end{aligned}$$

un'omotopia tra $\gamma = F(-, 1)$ e $\mathbb{1}_x = F(-, 0)$, che possiamo supporre liscia a tratti in ciascuna variabile grazie a quanto mostrato in [12, p.73-75].

Di conseguenza le curve lisce a tratti $\gamma_s := F(-, s)$ individuano mappe di trasporto parallelo

$$P_{\gamma_s}: E_x \longrightarrow E_x$$

e l'assegnazione

$$\beta: I \longrightarrow \text{Hol}_x(\nabla) \tag{2.7}$$

$$s \longmapsto P_{\gamma_s} \tag{2.8}$$

è la curva liscia a tratti cercata, poiché

$$\beta(0) = P_{\gamma_0} = P_{\mathbb{1}_x} = Id$$

e

$$\beta(1) = P_{\gamma_1} = P_\gamma.$$

La coniugazione di cammini preserva $\Omega^0(M, x)$ e passando alle mappe di trasporto parallelo questo si traduce esattamente nella normalità di $\text{Hol}_x^0(\nabla)$ in $\text{Hol}_x(\nabla)$.

(ii) : Segue infine dalle definizioni che la mappa

$$\begin{aligned} [P]: \pi_1(M, x) &\longrightarrow \text{Hol}_x(\nabla)/\text{Hol}_x^0(\nabla) \\ [\gamma] &\longmapsto [P_\gamma] \end{aligned}$$

è ben definita ed è un omomorfismo di gruppi suriettivo.

Dalla numerabilità di $\pi_1(M, x)$ ([14, p.189]), segue la numerabilità del quoziente e quindi che $\text{Hol}_x^0(\nabla)$ sia la componente connessa di $\text{Hol}_x^0(\nabla)$ contenente l'identità. \square

Capitolo 3

Olonomia su fibrati principali

In questo capitolo approfondiremo la teoria dei fibrati principali, analizzando in particolare spezzamenti verticali e orizzontali dati dall'introduzione di connessioni. Anche in questo ambito costruiremo e parleremo di gruppi di Olonomia, per poi relazionare la loro costruzione con la costruzione esibita alla fine dello scorso capitolo, nel caso dei fibrati vettoriali.

3.1 Fibrati principali

Nel primo capitolo abbiamo sviluppato la teoria dei gruppi di Lie, che facciamo subito agire su varietà in modo liscio:

Definizione 3.1. *Sia G un gruppo di Lie e M una varietà liscia. Un'azione liscia a destra di G su M è una mappa liscia*

$$\triangleleft: M \times G \longrightarrow M$$

tale che

- (i) $p \triangleleft e = p$ per ogni p in M .
- (ii) $(p \triangleleft g_1) \triangleleft g_2 = p \triangleleft (g_1 g_2)$ per ogni g_1, g_2 in G .

Il simbolo \triangleleft enfatizza molto l'azione, e lo useremo se ci farà comodo pensare ai diffeomorfismi

$$\triangleleft g: M \longrightarrow M$$

ma, siccome è operativamente scomodo, nella maggior parte dei casi utilizzeremo la notazione più contenuta $p.g := p \triangleleft g$, tramite la quale le due condizioni nella definizione si riscrivono come

- (i) $p.e = p$ per ogni p in M .
- (ii) $(p.g_1).g_2 = p.(g_1g_2)$ per ogni g_1, g_2 in G .

Analogamente si definiscono le azioni sinistre e analogamente verrà usata la notazione con il puntino in basso.

Esempio 11. L'azione naturale di $GL_n(\mathbb{R})$ su \mathbb{R}^n è l'azione sinistra definita dalla moltiplicazione matriciale

$$\begin{aligned} GL_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (A, x) &\longmapsto Ax \end{aligned}$$

considerando il vettore x come matrice colonna.

Poiché le componenti di Ax dipendono polinomialmente dalle entrate della matrice A e da x , l'azione è liscia, e poiché ogni vettore non nullo può essere trasformato in un altro non nullo attraverso una trasformazione lineare, le uniche orbite di quest'azione sono $\{0\}$ e $\{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}$.

Esempio 12. Ogni azione di un gruppo discreto G su una varietà liscia M è liscia se e solo se per ogni $g \in G$ le mappe $g \triangleright: M \rightarrow M$ sono lisce.

Per esempio, \mathbb{Z}^n agisce in modo liscio e libero su \mathbb{R}^n attraverso traslazioni:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ ((n_i)_{i=1}^n, (x_i)_{i=1}^n) &\longmapsto (n_i + x_i)_{i=1}^n \end{aligned}$$

Definizione 3.2. Siano P, M due varietà lisce e G un gruppo di Lie. La terna $P \xrightarrow{\pi} M$ è detta fibrato G -principale (o G -fibrato principale) se

- (a) π è una submersione suriettiva.
- (b) esiste un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ di M e diffeomorfismi

$$h_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times G$$

tali che per ogni α il seguente diagramma sia commutativo

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{h_\alpha} & U_\alpha \times G \\ \pi \downarrow & \swarrow pr_1 & \downarrow \\ U_\alpha & & U_\alpha \end{array}$$

- (c) P è dotato di un'azione liscia a destra \triangleleft di G .
- (d) \triangleleft è libera.
- (e) $M \simeq P/G$ è lo spazio delle orbite.

Condenseremo queste informazioni nella comoda scrittura $G \curvearrowright P \xrightarrow{\pi} M$

3.1.1 Il sottofibrato verticale

Per un po', fissiamo un fibrato principale $G \curvearrowright P \xrightarrow{\pi} M$, un punto $p \in P$ e la sua proiezione $m := \pi(p) \in M$. Analizzeremo suddivisioni verticali e orizzontali della varietà ricoprente P , con lo scopo di sollevare orizzontalmente cammini su M .

Osservazione 3.3. *Nel linguaggio precedente, poiché l'azione è libera, ogni orbita $O_p = p.G$ è in bigezione con G ed è quindi naturalmente munita di una struttura di gruppo di Lie che la rende isomorfa a G .*

All'interno del gruppo di Lie G vi è un elemento speciale, ovvero l'identità, il cui spazio tangente ci servirà per individuare direzioni "verticali" tangenti ai punti di P . Cominciamo:

Consideriamo il tangente \mathfrak{g} nell'identità e fissiamo $v \in \mathfrak{g}$.

Il Teorema 1.43 garantisce che il campo vettoriale invariante a sinistra a lui associato \tilde{v} sia completo, e quindi ammetta una curva integrale massimale in G passante per e di dominio \mathbb{R} , che grazie all'Osservazione 1.46 sappiamo essere descritta da un'opportuna restrizione della mappa esponenziale:

$$\exp(tv) \text{ con } t \text{ in } \mathbb{R}.$$

Facciamo adesso agire l'intera curva $\exp(tv)$ su p , ottenendo la curva in P

$$p \cdot \exp(tv), \text{ con } t \text{ in } \mathbb{R},$$

passante per p in $t = 0$ che leggiamo come prodotto liscio nelle variabili t e p . Derivando questo prodotto rispetto a t e valutando in $t = 0$ otteniamo una direzione

$$X_p^v := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} p \cdot \exp(tv) \in T_p P$$

che continua a dipendere in modo liscio da p .

Tramite l'assegnazione di tutte queste direzioni abbiamo costruito un campo vettoriale $X^v \in \mathfrak{X}(P)$, e di conseguenza otteniamo una mappa

$$\iota: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}(P) \quad (3.1)$$

$$v \longmapsto X^v \quad (3.2)$$

che assegna in modo naturale a vettori in \mathfrak{g} direzioni in ogni punto di P . Cerchiamo ora di studiare meglio la mappa ι .

Poiché π è una submersione, il rango di $d\pi$ è costante in ogni punto, e questo determina un *sottofibrato verticale*

$$VP := \text{Ker}(d\pi) \subseteq TP$$

le cui fibre saranno per noi di particolare interesse:

Definizione 3.4. *Nella situazione precedente, il sottospazio*

$$V_pP := \text{Ker}(\pi_{*,p}) = \{X_p \in T_pP : d\pi_p(X) = 0\} \subseteq T_pP$$

è chiamato sottospazio verticale in p .

Ciascun V_pP contiene vettori tangenti di curve passanti per p che una volta proiettate tramite π su M stazionano su m .

Infatti, sappiamo che il differenziale di una mappa liscia F manda il vettore tangente ad una curva γ nel vettore tangente alla curva $F \circ \gamma$, e quindi nel nostro caso preso $X_p \in T_pP$ e $\gamma: I \rightarrow P$ curva per p tale che $\frac{d\gamma}{dt}(0) = X_p$, abbiamo

$$\pi_{*,p}(X_p) = d\pi_p(X_p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \pi(\gamma(t))$$

Grazie a quest'osservazione, riusciamo a dimostrare che tutte le direzioni individuate dai vettori in \mathfrak{g} tramite la mappa ι sono verticali:

Lemma 3.5. *Nella situazione precedente, per ogni $v \in \mathfrak{g}$ vale*

$$\iota(v)_p = X_p^v \in V_pP$$

Dimostrazione. Poiché $p \cdot \exp(tv) \in p \cdot G = \pi^{-1}(m)$ per ogni t in \mathbb{R} , se proiettiamo la curva $p \cdot \exp(tv)$ (che derivata in p in $t = 0$ restituisce proprio X_p^v) tramite π otteniamo la curva costante $\mathbb{1}_m$ in m , per cui

$$0 = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathbb{1}_m(t) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \pi(p \cdot \exp(tv)) = d\pi_p(X_p^v) = \pi_{*,p}(X_p^v)$$

e quindi segue la tesi per definizione di V_pP . □

Abbiamo quindi la garanzia che $\iota(\mathfrak{g})_p \subseteq V_p P$ per ogni p . Ma vale molto di più...

Osservazione 3.6. *Nella situazione precedente, possiamo restringere l'azione libera*

$$\begin{aligned} \triangleleft: P \times G &\longrightarrow P \\ (p, g) &\longmapsto p \triangleleft g \end{aligned}$$

a mappe lisce

$$p \triangleleft: G \longrightarrow P$$

tali che, per definizione,

$$d(p \triangleleft)_e(v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} p \cdot \exp(tv) = \iota(v)_p$$

per ogni $v \in \mathfrak{g}$.

Quest'osservazione giustifica le notazioni

$$\sigma_p := p \triangleleft \quad \text{e} \quad \iota_p := d(\sigma_p) = d(p \triangleleft)$$

che introduciamo per comodità, proprio perché

$$\iota(v)_p = \iota_p(v)$$

per ogni v in \mathfrak{g} e p in P .

Teorema 3.7. *Nella situazione precedente, la mappa*

$$\iota: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}(P)$$

è un omomorfismo di algebre di Lie e

$$\iota_p: \mathfrak{g} \longrightarrow V_p P$$

è un isomorfismo di \mathbb{R} -spazi vettoriali per ogni $p \in P$.

Dimostrazione. Innanzitutto, l'osservazione che precede il teorema garantisce che ι_p sia lineare. Sia ora v in \mathfrak{g} tale che $\iota_p(v) = 0$.

Abbiamo che $p \cdot \exp(tv)$ e la curva costante $\mathbb{1}_p$ in p sono entrambe curve integrali massimali di $\iota(v)$ per p , da cui concludiamo per unicità

$$p \cdot \exp(tv) = p \text{ per ogni } t \in \mathbb{R},$$

e quindi che

$$\exp(tv) = e \text{ per ogni } t \in \mathbb{R}$$

grazie alla libertà dell'azione. Ma allora, per definizione

$$0 = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(tv) = v$$

e quindi ι_p è iniettiva.

La suriettività di ι_p segue dall'uguaglianza dimensionale dei due spazi vettoriali, infatti

$$\begin{aligned} \dim(\mathfrak{g}) &= \dim(G) = \\ &\stackrel{(1)}{=} \dim(P) - \dim(M) = \\ &= \dim(T_p P) - \dim(T_m M) = \\ &\stackrel{(2)}{=} \dim(T_p P) - \dim(\text{Im}(\pi_{*,p})) = \\ &= \dim(\text{Ker}(\pi_{*,p})) = \\ &= \dim(V_p P) \end{aligned}$$

Dove l'uguaglianza in (1) vale poiché la fibra di P è G , mentre l'uguaglianza in (2) è garantita dal fatto che π sia una submersione.

Rimane infine da mostrare che ι sia un omomorfismo di algebre di Lie, che equivale a mostrare

$$\iota_p([v, w]) = [\iota(v), \iota(w)]_p$$

per ogni v, w in \mathfrak{g} e p in P . Procediamo nel modo seguente:

Consideriamo i campi vettoriali invarianti a sinistra associati \tilde{v}, \tilde{w} su G .

Sia $p \in P$. Poiché

$$\begin{aligned}
 d(\sigma_p)_g(\tilde{v}_g) &= d(\sigma_p)_g \circ (dL_g)_e(v) = \\
 &= d(\sigma_p \circ L_g)_e(v) = \\
 &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} p \cdot (g \exp(tv)) = \\
 &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (p \cdot g) \cdot \exp(tv) = \\
 &= \iota(v)_{p \cdot g} = \iota(v)_{\sigma_p(g)}
 \end{aligned}$$

per ogni $g \in G$, abbiamo che il campo $\iota(v)$ è indotto da \tilde{v} tramite σ_p . Analogamente $\iota(w)$ è indotto da \tilde{w} tramite σ_p .

Il Teorema 1.19 ci garantisce allora che $[\iota(v), \iota(w)]$ è indotto da $[\tilde{v}, \tilde{w}]$ tramite σ_p , e questo vuol dire precisamente che

$$d(\sigma_p)_g([\tilde{v}, \tilde{w}]_g) = [\iota(v), \iota(w)]_{p \cdot g}$$

per ogni g in G . In particolare, per $g = e$ otteniamo

$$\iota_p([v, w]) = d(\sigma_p)_e([\tilde{v}, \tilde{w}]_e) = [\iota(v), \iota(w)]_p$$

poiché $[v, w] := [\tilde{v}, \tilde{w}]_e$ per definizione, da cui la tesi. \square

Osservazione 3.8. *Sempre nel linguaggio precedente, la dimostrazione appena vista implica, come è intuibile, che i differenziali*

$$d(p \triangleleft)_p: T_p G \longrightarrow T_p P$$

di un'azione libera

$$\begin{aligned}
 \triangleleft: P \times G &\longrightarrow P \\
 (p, g) &\longmapsto p \triangleleft g
 \end{aligned}$$

sono tutti non singolari!

Continuiamo lo studio del sottofibrato verticale con quest'ultima proposizione:

Proposizione 3.9. *Nella situazione precedente, il sottofibrato VP è banale ed è banalizzato da*

$$VP = P \times \mathfrak{g}$$

Dimostrazione. Prendiamo una base $\{v_i\}_i$ di \mathfrak{g} . Il Teorema 3.7 garantisce che per ogni p in P i vettori $\{\iota(v_i)_p\}_i$ sono una base di V_pP , e quindi $\{\iota(v_i)\}_i$ è una base di sezioni globali di VP , che è quindi banale.

La banalizzazione nell'enunciato si ottiene attraverso la mappa liscia

$$\begin{aligned} \varphi: VP &\longrightarrow P \times \mathfrak{g} \\ X_p &\longmapsto (p, \iota_p^{-1}(X_p)) \end{aligned}$$

□

3.2 Connessioni su fibrati principali

Fino ad ora abbiamo studiato il sottofibrato verticale $VP \subseteq TP$ e immerso l'algebra di Lie \mathfrak{g} "verticalmente" in ogni spazio tangente T_pP attraverso le mappe ι_p . Vogliamo cercare un modo di far comunicare queste immersioni verticali, introducendo una nozione di spazio orizzontale. Gli spazi orizzontali avranno la funzione di fornire un modo per raccordare quelli verticali e daranno luogo ad una *connessione*. Cominciamo:

Come prima, fissiamo $G \curvearrowright P \xrightarrow{\pi} M$ un fibrato principale.

Poiché π è una submersione, il suo differenziale è suriettivo in ogni punto e la definizione di V_pP restituisce

$$T_pP / V_pP \simeq T_{\pi(p)}M, \quad (3.3)$$

e per immaginare un sottospazio orizzontale di T_pP possiamo pensare ad un'opportuna immersione di $T_{\pi(p)}M$ che completi V_pP ad addendo diretto... però la scelta dell'immersione non è univoca!

Il nostro desiderio è in realtà quello di trovare ovunque immersioni che dipendano in modo liscio dai punti, il che rende il problema globale e quindi sicuramente più complesso.

Per questo, raccogliamo tutte le equazioni (3.3) nella *successione esatta corta di fibrati vettoriali* su P data da

$$0 \longrightarrow VP \xrightarrow{i} TP \xrightarrow{d\pi} \pi^*(TM) \longrightarrow 0 \quad (3.4)$$

A questo punto, scegliere un'immersione di $T_{\pi(p)}M$ in T_pP per ogni $p \in P$ dipendente in modo liscio da p corrisponde a costruire una mappa di fibrati

$$D: \pi^*(TM) \longrightarrow TP \quad (3.5)$$

tale che

$$\pi \circ D = \text{id}.$$

Tale mappa di fibrati avrà come immagine un sottofibrato

$$HP := D(\pi^*(TM)) \subseteq P,$$

su cui è utile imporre opportune condizioni di compatibilità con l'azione del gruppo G . Siamo arrivati alla definizione di connessione su un fibrato principale:

Definizione 3.10. *Una connessione su un fibrato principale $G \curvearrowright P \xrightarrow{\pi} M$ è un sottofibrato $HP \subseteq TP$ tale che $TP = HP \oplus VP$, invariante sotto le azioni dei differenziali dell'azione di G .*

E' importante mettere subito in chiaro che

Proposizione 3.11. *Un fibrato principale ammette sempre una connessione.*

Dimostrazione. Si rimanda a [12, p.67] □

Data una connessione HP su un fibrato principale $G \curvearrowright P \xrightarrow{\pi} M$ abbiamo decomposizioni degli spazi tangenti in ogni punto $p \in P$:

$$T_p P = H_p P \oplus V_p P$$

Inoltre esplicitando la G -invarianza differenziale, abbiamo

$$(\triangleleft g)_*(H_p P) = H_{p \triangleleft g} P$$

per ogni $p \in P, g \in G$.

Le mappe di proiezione tra fibrati

$$\text{hor}: TP \longrightarrow HP \text{ e } \text{ver}: TP \longrightarrow VP$$

hanno la proprietà di selezionare in modo liscio le componenti orizzontali e verticali $\text{hor}(X_p) \in H_p P$ e $\text{ver}(X_p) \in V_p P$ dei vettori X_p tangenti a $p \in P$. Esse sono molto utili, perché permettono di indurre una 1-forma su P a valori nell'algebra di Lie \mathfrak{g} , che condensa tutte le informazioni della connessione HP di partenza, e che sarà per questo chiamata *1-forma di connessione*:

Definizione 3.12. *Nel linguaggio precedente, la 1-forma $\omega \in \Omega^1(\underline{\mathfrak{g}})$ di connessione associata ad HP è*

$$\omega: TP \longrightarrow \mathfrak{g} \quad (3.6)$$

$$X_p \longmapsto \iota_p^{-1}(\text{ver}(X_p)) \quad (3.7)$$

Si ha che ω è ben definita poiché $\iota_p: \mathfrak{g} \longrightarrow V_p P$ è un isomorfismo lineare, come mostrato nel Teorema 3.7, e abbiamo che

$$\text{Ker}(\omega_p) = \{X_p \in T_p P : \text{ver}(X_p) = 0\} = H_p P \subseteq T_p P$$

per cui ricostruiamo

$$HP = \text{Ker}(\omega)$$

Se la mappa D in (3.5) costituiva un modo per spezzare la sequenza di fibrati (3.4) "da destra", allora possiamo vedere ω come un modo equivalente per spezzare la stessa sequenza "da sinistra". Avremmo potuto infatti procedere inversamente e definire una connessione su P come una 1-forma a valori in \mathfrak{g} , per poi ricavare un sottofibrato orizzontale prendendone il nucleo.

Richiamiamo la mappa aggiunta di un gruppo di Lie

$$\begin{aligned} Ad_g: G &\longrightarrow G \\ h &\longmapsto g^{-1}hg \end{aligned}$$

definita in (1.4).

Lemma 3.13. *Nel linguaggio precedente, vale che*

$$(\triangleleft g)_* X_p^v = X_p^{(Ad_{g^{-1}})_*(v)}$$

Dimostrazione. Dall'equazione

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} Ad_{g^{-1}}(\exp(tv)) = (Ad_{g^{-1}})_*(v)$$

segue che $Ad_{g^{-1}}(\exp(tv))$ coincide con $\exp(t(Ad_{g^{-1}})_*(v))$, ovvero la curva integrale massimale di $(Ad_{g^{-1}})_*(v)$ per e , e quindi la tesi segue poiché

$$\begin{aligned}
 (\triangleleft g)_*(X_p^v) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (p \cdot \exp(tv)) \cdot g = \\
 &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} p \cdot (\exp(tv)g) = \\
 &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} p \cdot (gg^{-1} \exp(tv)g) = \\
 &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (p \cdot g) \cdot (Ad_{g^{-1}}(\exp(tv))) = \\
 &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (p \cdot g) \cdot (\exp(t(Ad_{g^{-1}})_*(v))) = \\
 &= X_p^{(Ad_{g^{-1}})_*(v)}
 \end{aligned}$$

□

Concludiamo questa sottosezione con alcune buone proprietà della 1-forma di connessione, derivanti dalla G -invarianza differenziale della connessione da cui deriva:

Teorema 3.14. *Nel linguaggio precedente, la 1-forma ω ha le seguenti proprietà:*

- (i) $\omega_p(X_p^v) = v$ per ogni $v \in \mathfrak{g}, p \in P$.
- (ii) $((\triangleleft g)^*\omega)_p(X_p) = (Ad_{g^{-1}})_*(\omega_p(X_p))$ per ogni $p \in P, X_p \in T_pP, g \in G$.

Dimostrazione. (i) : Poiché $\iota_p(\mathfrak{g}) \subseteq V_p$ grazie al Lemma 3.5,

$$\text{ver}(X_p^v) = X_p^v = \iota_p(v)$$

e la tesi segue dalla definizione di ω .

(ii) : Sfruttando la linearità in ciascun p , lavoriamo sugli addendi diretti H_pP, V_pP che compongono T_pP :

Se $V_pP \ni X_p = X_p^v$ per un certo v , allora

$$\begin{aligned}
 ((\triangleleft g)^*\omega)_p(X_p^v) &= \omega_{p \triangleleft g}((\triangleleft g)_*X_p^v) = \\
 &\stackrel{\text{Lemma 3.13}}{=} \omega_{p \triangleleft g}(X_p^{(Ad_{g^{-1}})_*(v)}) = \\
 &\stackrel{(i)}{=} (Ad_{g^{-1}})_*(v) = \\
 &\stackrel{(i)}{=} (Ad_{g^{-1}})_*(\omega_p(X_p^v))
 \end{aligned}$$

e segue la tesi.

Se invece $X_p \in H_p P$ allora per compatibilità $(\triangleleft g)_* X_p \in H_{p \triangleleft g} P$, e quindi $\text{ver}(X_p) = 0 = \text{ver}(X_{p \triangleleft g})$, da cui

$$((\triangleleft g)^* \omega)_p(X_p) = \underbrace{\omega_{p \triangleleft g}((\triangleleft g)_* X_p)}_{=0} = 0 = \underbrace{(Ad_{g^{-1}})_* \omega_p(X_p)}_{=0}$$

e quindi la tesi segue. □

3.3 Relazioni tra tipologie di fibrati

E' necessario avvicinarsi ad un ponte tra la teoria dell'Olonomia sui fibrati vettoriali, vista nel precedente capitolo, e la teoria dell'Olonomia su fibrati principali, che stiamo costruendo in modo parallelo. Cominciamo associando ad ogni fibrato vettoriale un fibrato principale e viceversa.

3.3.1 Da vettoriale a principale

Innanzitutto, mostriamo come da un fibrato vettoriale di rango k possiamo ricavare un fibrato "dei frame" $GL_k(\mathbb{R})$ -principale: sia $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrato vettoriale di rango k . Definiamo la l'insieme P^E dei *frame* associati

$$P^E := \{(m, e_1, \dots, e_k) : m \in M, (e_1, \dots, e_k) \text{ è una base di } E_m\},$$

dotato della mappa di proiezione

$$\begin{aligned} \varpi: P^E &\longrightarrow M \\ (m, e_1, \dots, e_k) &\longmapsto m \end{aligned}$$

Se $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ è un ricoprimento banalizzante di E per M , allora i diagrammi

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{h_\alpha} & U_\alpha \times \mathbb{R}^k \\ \pi \downarrow & \swarrow pr_1 & \\ U_\alpha & & \end{array}$$

restituiscono basi canoniche

$$\mathcal{B}_m^\alpha = \{h_\alpha^{-1}((m, e_i))\}_{i=1}^k$$

di ciascun E_m , che variano in modo liscio e che ci consentono di esprimere gli elementi di P^E come matrici invertibili rispetto a basi \mathcal{B}_m^α in punti $m \in M$.

Poiché $\mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$ agisce transitivamente e liberamente sui frame f attraverso l'azione destra (che sarà liscia una volta finito di introdurre la struttura liscia su P^E)

$$\begin{aligned} \triangleleft: P^E \times \mathrm{GL}_k(\mathbb{R}) &\longrightarrow P^E, \\ (m, e_1, \dots, e_k) \triangleleft A &:= (m, A^t(e_1), A^t(e_2), \dots, A^t(e_k)) \end{aligned}$$

abbiamo che tali espressioni in coordinate generano isomorfismi:

$$P_m^E = f \cdot \mathrm{GL}_k(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{GL}_k(\mathbb{R}) \text{ e } P^E / \mathrm{GL}_k(\mathbb{R}) \simeq M$$

per ogni frame $f \in P_m^E$.

Ricaviamo quindi delle carte $h_\alpha: \varpi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$, che rendono commutativi i diagrammi

$$\begin{array}{ccc} \varpi^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{h_\alpha} & U_\alpha \times \mathrm{GL}_k(\mathbb{R}) \\ \varpi \downarrow & \swarrow pr_1 & \\ U_\alpha & & \end{array}$$

associati allo stesso ricoprimento banalizzante \mathcal{U} , tramite le quali dotiamo P^E di una struttura di una varietà liscia di dimensione $\dim(M) + \dim(M)^2$.

Tramite le carte è inoltre immediato verificare che ϖ sia una submersione suriettiva, e quindi abbiamo terminato la costruzione del *fibrato principale dei frame*

$$\mathrm{GL}_k(\mathbb{R}) \curvearrowright P^E \xrightarrow{\varpi} M$$

associato al fibrato vettoriale $E \xrightarrow{\pi} M$.

3.3.2 Da principale a vettoriale

Similmente a quanto appena visto, possiamo associare ad un fibrato principale diversi fibrati vettoriali, sfruttando opportune rappresentazioni del gruppo associato. Questo sarà per noi essenziale nella costruzione di fibrati vettoriali particolarmente utili e per descrivere alternativamente i fibrati vettoriali dei tensori di tipo (r, s) su una varietà liscia.

Fissiamo $G \curvearrowright P \xrightarrow{\varpi} M$ un fibrato principale e $\rho: G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ una rappresentazione di G su un \mathbb{R} -spazio vettoriale V k -dimensionale.

Possiamo far agire G a destra in modo liscio su $P \times V$ tramite l'assegnazione

$$(x, v) \triangleleft g := (x.g, g^{-1}.v),$$

e possiamo considerare il quoziente

$$\rho(P) := P \times V / G, \quad (3.8)$$

dotato di una proiezione

$$\begin{aligned} \pi: \rho(P) &\longrightarrow M \\ [(p, v)] &\longmapsto \pi(p) \end{aligned}$$

ben definita grazie alla conservazione delle fibre da parte dell'azione di G su P .

Consideriamo un ricoprimento banalizzante $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ di P su M . Ogni mappa banalizzante

$$h_\alpha: \varpi^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\sim} U_\alpha \times G$$

ci consente di identificare $\varpi^{-1}(U_\alpha)$ con $U_\alpha \times G$, e di poter descrivere l'azione a destra di G su $P \times V$ localmente come

$$(x, a, v).g = (x, a.g, g^{-1}.a) \in U_\alpha \times G \times V$$

A questo punto, quozientare per l'azione di G non influisce sul termine in U_α , e restituisce le carte

$$\begin{aligned} \tilde{h}_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) &= U_\alpha \times G \times V / G \xrightarrow{\simeq} U_\alpha \times V, \\ [(p, a, v)] &\longmapsto (p, v) \end{aligned}$$

che usiamo per indurre su $\rho(P)$ una struttura di fibrato vettoriale di fibra V , con ricoprimento e carte banalizzanti $\{(U_\alpha, \tilde{h}_\alpha)\}_{\alpha \in A}$.

Il fibrato $\rho(P)$ sarà chiamato *fibrato associato* a P di fibra V .

Osservazione 3.15. *Nel linguaggio precedente, le sezioni $\Gamma(M, \rho(P))$ sono in corrispondenza biunivoca con le sezioni G -invarianti in $\Gamma(P, P \times V)$.*

Esempio 13. Un esempio importante è dato dal caso in cui $E = TM$ sia lo spazio tangente su una varietà M k -dimensionale, il cui frame bundle associato è il fibrato $GL_k(\mathbb{R}) \curvearrowright P^{TM} \xrightarrow{\pi} M$.

Consideriamo ora la rappresentazione naturale $\rho: \text{GL}_k(\mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}(\mathbb{R}^k)$ data da

$$\rho(A)(x) = Ax,$$

e il fibrato

$$\rho(P^{TM}) = P^{TM} \times \mathbb{R}^k / G.$$

Con questo procedimento, in ogni classe $[(p, f)]$ recuperiamo un vettore $X \in T_x M$ scritto in componenti (sulla destra della coppia della classe) rispetto ad ogni base possibile (sulla sinistra della coppia nella classe)... abbiamo cioè recuperato il fibrato tangente!

In termini formali, osservando che la mappa liscia di fibrati su M

$$\begin{aligned} \rho(P^{TM}) &\longrightarrow TM \\ [e, f] &\longmapsto \sum_{i=1}^k f^i e_i, \end{aligned}$$

è iniettiva e suriettiva, arriviamo all'identificazione

$$\rho(P^{TM}) \simeq TM,$$

ritrovando un'altra (importante) descrizione del fibrato tangente.

Non è stato tutto inutile: se da un lato abbiamo una visione vettoriale, dall'altro abbiamo la corrispondente visione in coppia (base, componenti), con un importante strumento aggiuntivo: un gruppo G che agisce in modo liscio.

Esempio 14. Un altro importante esempio è il seguente: sia $G \curvearrowright P \xrightarrow{\pi} M$ un fibrato principale e

$$\begin{aligned} \text{ad} : G &\longrightarrow \text{GL}(\mathfrak{g}) \\ g &\longmapsto d(\text{Ad}_g)_e \end{aligned}$$

la rappresentazione aggiunta di G sulla sua algebra di Lie \mathfrak{g} .

Il fibrato ottenuto tramite il procedimento descritto in (3.8) è il *fibrato aggiunto* $\text{ad}(P)$ di fibra \mathfrak{g} , le cui sezioni sono in corrispondenza biunivoca con le sezioni G -invarianti di $P \times \mathfrak{g}$ grazie all'Osservazione 3.15.

3.4 La curvatura di una connessione

Abbiamo visto che possiamo immaginare una connessione come una raccolta di spazi orizzontali, che permetteranno ai sottospazi verticali in VP di raccordarsi. Per immaginare una loro congiunzione, è necessario pensare al concetto di curvatura, che ci apprestiamo a costruire:

Poiché

$$V_p P = \text{Ker}(d\pi_p) \text{ e } d\pi_p: H_p P \xrightarrow{\sim} T_{\pi(p)} M$$

per ogni $p \in P$, otteniamo naturalmente l'isomorfismo di fibrati su P

$$d\pi: HP \longrightarrow \pi^*(TM)$$

(l'isomorfismo inverso della mappa $D: \pi^*(TM) \longrightarrow HP$ in (3.5))

Osservazione 3.16. *Nel linguaggio precedente, l'isomorfismo $d\pi$ induce una bigezione tra le sezioni di $\pi^*(TM)$ e quelle di HP , che corrispondono a loro volta ai campi vettoriali orizzontali su P invarianti sotto l'azione di G , denotati $\mathfrak{X}(P)^{\text{hor}}$.*

Abbiamo quindi messo in luce una bigezione

$$\lambda: \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(P)^{\text{hor}} \quad (3.9)$$

$$X \longrightarrow \lambda(X) \quad (3.10)$$

che ad ogni campo vettoriale $X \in \mathfrak{X}(M)$ assegna il suo sollevamento orizzontale $\lambda(X) \in \mathfrak{X}(P)^{\text{hor}}$.

Il sollevamento orizzontale di cammini fornisce un modo naturale per misurare variazioni di curvatura infinitesime, come da nostro scopo. Fissiamo quindi due campi vettoriali $v, w \in \mathfrak{X}(M)$ su M .

Una buona proprietà dei sollevamenti orizzontali, che segue proprio dalle bigezioni utilizzate per costruire λ , è che inducono i campi vettoriali di partenza tramite la mappa π . Questo ci consente di sfruttare il Lemma 1.19:

$$d\pi([\lambda(v), \lambda(w)]) = [d\pi(\lambda(v)), d\pi(\lambda(w))] = [v, w] = d\pi(\lambda([v, w]))$$

cosicché

$$([\lambda(v), \lambda(w)] - \lambda([v, w]))_p \in \text{Ker}(d\pi_p) = V_p P$$

in ogni p .

Questo evidenzia come

$$R(v, w) := [\lambda(v), \lambda(w)] - \lambda([v, w])$$

sia visibile come sezione del fibrato verticale $VP \simeq P \times \mathfrak{g}$ (Proposizione 3.9).

Sappiamo inoltre che $\lambda([v, w])$, $\lambda(v)$ e $\lambda(w)$ sono G -invarianti, ma allora (sempre per il Lemma 1.19) anche $[\lambda(v), \lambda(w)]$ lo è, e quindi otteniamo la G -invarianza di $R(v, w)$, che induce quindi una sezione di $\text{ad}(P)$ (per chiarimenti si rimanda all'Osservazione 14) denotata sempre

$$R(v, w): M \longrightarrow \text{ad}(P)$$

La mappa

$$R: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \Gamma(M, \text{ad}(P))$$

è ora \mathbb{R} -bilineare e antisimmetrica, e quindi induce la mappa \mathbb{R} -lineare

$$\begin{aligned} R: \Gamma(M, \bigwedge^2 TM) &\longrightarrow \Gamma(M, \text{ad}(P)) \\ v \wedge w &\longmapsto R(v \wedge w) = R(v, w) \end{aligned}$$

Considerando ora due funzioni lisce $\alpha, \beta \in \mathcal{C}_M^\infty(M)$, con una dimostrazione analoga a quella della Proposizione 2.20 si può mostrare che

$$\begin{aligned} R(\alpha v \wedge \beta w) &= R(\alpha v, \beta w) = \\ &= [\lambda(\alpha v), \lambda(\beta w)] - \lambda([\alpha v, \beta w]) = \\ &= \alpha\beta([\lambda(v), \lambda(w)] - \lambda([v, w])) = \\ &= \alpha\beta R(v, w) = \\ &= \alpha\beta R(v \wedge w), \end{aligned}$$

ovvero che R è $\mathcal{C}_M^\infty(M)$ -lineare. Il criterio di tensorialità (Teorema 2.14) fornisce una mappa indotta

$$R \in \Gamma(M, (\bigwedge^2 TM)^* \otimes \text{ad}(P)) = \Gamma(M, \bigwedge^2 T^*M \otimes \text{ad}(P))$$

chiamata *curvatura della connessione HP*.

3.5 Sollevamento orizzontale di cammini

Ci mettiamo sempre nella stessa situazione: consideriamo un fibrato G -principale $G \curvearrowright P \xrightarrow{\pi} M$ e una connessione HP su P .

Il nostro prossimo scopo sarà quello di sollevare cammini in M a cammini su P sfruttando i raccordi rappresentati dagli spazi orizzontali in HP per limitare le direzioni dei vettori tangenti. Cominciamo:

Definizione 3.17. *Nel linguaggio precedente, una curva $\gamma: I \rightarrow P$ è detta orizzontale se $\frac{d\gamma}{dt}(t) \in H_{\gamma(t)}P$ per ogni t in I . Analogamente, una curva liscia a tratti è detta orizzontale se le sue parti lisce lo sono.*

Sia $\gamma: I \rightarrow M$ una curva, $m := \gamma(0)$ e $p \in \pi^{-1}(m)$.

La mappa

$$D: \pi^*(TM) \xrightarrow{\cong} HP \subseteq TP$$

(di cui abbiamo discusso in (3.5)) che ha come immagine la connessione HP si valuta sulla famiglia dei vettori $\{\frac{d\gamma}{dt}(t)\}_{t \in I}$ restituendo i vettori tangenti $\{D(\frac{d\gamma}{dt}(t))\}_{t \in I}$, che insieme al vincolo di passaggio per p in $t = 0$ costituiscono un problema di Cauchy che ammette un'unica soluzione $\gamma'_p: I \rightarrow P$.

La curva γ'_p è chiamata *sollevamento orizzontale di γ passante per p* , e la strada che abbiamo percorso nella sua costruzione fa sì che

- (a) $\pi \circ \gamma'_p = \gamma$
- (b) $\frac{d\gamma'_p}{dt}(t) \in H_{\gamma'_p(t)}P$ per ogni t .
- (c) $\pi_*\left(\frac{d\gamma'_p}{dt}(t)\right) = \frac{d\gamma}{dt}(t)$ per ogni t .

Ci ritroviamo quindi con un'insieme di sollevamenti $\{\gamma'_p\}_{p \in \pi^{-1}(m)}$ individuati dai punti della fibra $\pi^{-1}(m)$, aventi come punti iniziali e finali rispettivamente p e $\gamma'_p(1) \in \pi^{-1}(\gamma(1))$. Come nel caso dei fibrati vettoriali, possiamo pensare che i sollevamenti paralleli "scivolino" lungo gli spazi orizzontali individuati dalla connessione, compiendo il minimo "sforzo" per trasportare parallelamente i punti delle fibre. Siamo arrivati alla definizione di mappe trasporto parallelo:

Definizione 3.18. *Nel linguaggio precedente, la mappa*

$$\tau_\gamma: \pi^{-1}(\gamma(0)) \rightarrow \pi^{-1}(\gamma(1)) \tag{3.11}$$

$$p \mapsto \tau_\gamma(p) := \gamma'_p(1) \tag{3.12}$$

è detta mappa di trasporto parallelo lungo γ . Se la curva γ è liscia a tratti allora si definisce analogamente la mappa di trasporto parallelo per composizioni.

(Queste mappe dipendono fortemente dalla connessione $HP!$)

Consideriamo le mappe bigettive

$$\triangleleft g: \pi^{-1}(x) \longrightarrow \pi^{-1}(x),$$

con $x \in M$, che preservano le fibre.

Lemma 3.19. *Nella situazione precedente, si ha*

$$\tau_\gamma \circ (\triangleleft g) = (\triangleleft g) \circ \tau_\gamma$$

per ogni g in G .

Dimostrazione. Grazie alle condizioni di compatibilità imposte su HP , ogni curva orizzontale è mappata in una curva orizzontale dalle mappe $\triangleleft g$.

La G -invarianza della mappa D assicura inoltre la compatibilità dei vettori tangenti ai sollevamenti, ovvero che il sollevamento di γ passante per $p \triangleleft g$ sia quello passante per p traslato con $\triangleleft g$.

In formule,

$$\gamma'_{p \triangleleft g} = \gamma'_p \triangleleft g$$

e la tesi segue. \square

Grazie al Lemma 3.19, possiamo dimostrare la bigettività di τ_γ : siano $p_1, p_2 \in \pi^{-1}(x)$ distinti. Sappiamo che $p_2 = p_1 \triangleleft g$, per un qualche $g \in G$, con $g \neq e$ poiché l'azione è libera.

Il Lemma 3.19 garantisce allora

$$\tau_\gamma(p_2) = \tau_\gamma(p_1 \triangleleft g) = \tau_\gamma(p_1) \triangleleft g,$$

e quindi di nuovo sfruttiamo la libertà dell'azione, \triangleleft che garantisce $\tau_\gamma(p_1) \neq \tau_\gamma(p_2)$, cioè l'iniettività di τ_γ .

Siano invece $p \in \pi^{-1}(x)$ e $q \in \pi^{-1}(y)$. La bigezione $p \triangleleft G \simeq G$ garantisce l'esistenza di un $g \in G$ tale che

$$\tau_\gamma(p) \triangleleft g = q$$

ma allora, sempre per il Lemma 3.19, abbiamo

$$\tau_\gamma(p \triangleleft g) = q$$

e quindi la suriettività di τ .

Come nel caso dei fibrati vettoriali, abbiamo ottime proprietà che legano le mappe τ_γ tra loro:

Proposizione 3.20. *Nella situazione precedente, vale che*

$$(a) \quad (\tau_\gamma)^{-1} = \tau_{\gamma^{-1}}$$

$$(b) \quad \tau_{\gamma \cdot \alpha} = \tau_\gamma \circ \tau_\alpha$$

per tutte le curve lisce a tratti $\gamma, \alpha: I \rightarrow M$.

Dimostrazione. (i) : Sia $p \in \pi^{-1}(x)$. Il sollevamento orizzontale di γ^{-1} passante per $\tau_\gamma(p) = \gamma'_p(1)$ è γ'^{-1}_p , e quindi la tesi segue grazie alle uguaglianze

$$p = (\gamma'_p)^{-1}(1) = \tau_{\gamma^{-1}}(\gamma'_p(1)) = \tau_{\gamma^{-1}}(\tau_\gamma(p))$$

(ii) : segue dalla definizione di mappa di trasporto parallelo per curve lisce a tratti. \square

Se ci concentriamo su loop γ in $m \in M$, otteniamo mappe

$$\begin{aligned} \tau_\gamma: \pi^{-1}(m) \simeq G &\longrightarrow \pi^{-1}(m) \simeq G \\ p &\longmapsto \gamma'_p(1) = p \triangleleft g_\gamma \end{aligned}$$

con $g_\gamma \in G$ che dipende esclusivamente da γ grazie alla Proposizione 3.19 e alla transitività di $\triangleleft G$.

Possiamo quindi associare ad ogni loop γ in $m \in M$ il corrispettivo elemento $g_\gamma \in G$, ottenendo una mappa

$$\begin{aligned} \eta: \Omega(M, m) &\longrightarrow G \\ \gamma &\longmapsto g_\gamma \end{aligned}$$

la cui immagine è un gruppo grazie alle buone proprietà enunciate nella Proposizione 3.20.

Anche in questo caso possiamo restringerci all'insieme dei cammini omotopicamente nulli

$$\Omega^0(M, m) := \{\gamma \in \Omega(M, m) : \gamma \underset{htp}{\simeq} \mathbb{1}_m\} \subseteq \Omega(M, m),$$

ottenendo

$$\eta|_{\Omega^0(M, m)} : \Omega^0(M, m) \longrightarrow G$$

la cui immagine è ancora un gruppo, poiché inverso e concatenazioni di cammini omotopicamente nulli sono ancora omotopicamente nulli.

3.5.1 Gruppi di Olonomia su fibrati principali

Siamo finalmente arrivati a poter definire i gruppi di Olonomia di una connessione anche nel caso dei fibrati principali!

Ci mettiamo nel caso usuale di un fibrato principale $G \curvearrowright P \xrightarrow{\sim} M$ e di una connessione HP su P .

Definizione 3.21. *Nel linguaggio precedente, il Gruppo di Olonomia della connessione HP basato in p è*

$$\text{Hol}(HP)_p := \text{Im}(\eta) \subseteq G$$

Analogamente, il gruppo di Olonomia ristretto di HP in p è

$$\text{Hol}^0(HP)_p := \text{Im}(\eta|_{\Omega^0(M, m)}) \subseteq \text{Hol}(HP)_p$$

Le osservazioni fatte al termine della precedente sezione garantiscono che entrambi gli oggetti appena definiti siano effettivamente dei gruppi, che possiamo descrivere anche nel modo seguente: introduciamo una relazione \sim su P data da

$$p \sim q \iff \text{sono gli estremi di una curva in } P \text{ orizzontale liscia a tratti} \tag{3.13}$$

E' una relazione di equivalenza poiché la riflessività è soddisfatta dall'esistenza dei cammini costanti, la simmetria dall'esistenza delle curve inverse, e la transitività dalla giunzione di cammini.

Con questo formalismo, allora

$$\text{Hol}_p(HP) = \{g \in G : p \sim p.g\}$$

Come nel caso dei fibrati vettoriali, la definizione dei gruppi di Olonomia dipende dal punto $p \in P$, ma vogliamo eliminare questo vincolo il prima possibile, per cui andiamo a cercare l'invarianza rispetto al cambio di punto base, ottenendo risultati uguali a meno di isomorfismo:

Proposizione 3.22. *Nel linguaggio precedente, siano $p, q \in P$ e $g \in G$. Allora*

$$\text{Hol}(HP)_{p,g} = g^{-1} \text{Hol}(HP)_{p,g} \text{ e } \text{Hol}^0(HP)_{p,g} = g^{-1} \text{Hol}^0(HP)_{p,g}$$

Mentre se $p \sim q$ allora

$$\text{Hol}(HP)_p = \text{Hol}(HP)_q \text{ e } \text{Hol}^0(HP)_p = \text{Hol}^0(HP)_q$$

Dimostrazione. (i) : Consideriamo $b \in \text{Hol}(HP)_p$, cosicché $p \sim p.b$.

Allora $p.g \sim (p.b).g = p.(bg) = (p.g).(g^{-1}bg)$ e quindi $g^{-1}bg \in \text{Hol}(HP)_{p.g}$ per definizione, e analogamente con $\text{Hol}^0(HP)$.

(ii) : Se $p \sim q$ allora dato un $b \in \text{Hol}(HP)_p$ tale che $p \sim p.b$, si ha $q \sim p \sim p.b \sim q.b$, e quindi $b \in \text{Hol}(HP)_q$. Analogamente $\text{Hol}(HP)_q \subseteq \text{Hol}(HP)_p$ e l'uguaglianza tra i gruppi ristretti. \square

Il fatto che tutti i gruppi di Olonomia di un fibrato principale P su una varietà connessa M siano coniugati ci permette di alleggerire il formalismo come speravamo e di considerare generalmente il gruppo di Olonomia

$$\text{Hol}(HP) \subseteq G$$

della connessione HP su P , a meno di coniugio.

Analogamente al caso dei fibrati vettoriali, troviamo che

Teorema 3.23. *Sia M varietà liscia connessa, $G \curvearrowright P \xrightarrow{\pi} M$ un fibrato principale su M e HP una connessione su P . Allora*

(i) $\text{Hol}^0(HP)$ è un sottogruppo di Lie connesso di G , è la componente connessa contenente l'identità in $\text{Hol}(HP)$ ed è un sottogruppo normale di $\text{Hol}(HP)$;

(ii) E' definito un morfismo suriettivo

$$P: \pi_1(M) \longrightarrow \text{Hol}(HP) / \text{Hol}^0(HP).$$

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga a quella del Teorema 2.23, svolta in precedenza. \square

Continuiamo nelle seguenti sezioni le relazioni tra i parallelismi portati avanti nel caso dei fibrati vettoriali e principali, procedendo con il relazionare i concetti di connessione e curvatura rispettivamente introdotti:

3.6 Relazioni tra tipologie di connessioni

Sia $G \curvearrowright P \xrightarrow{\pi} M$ un fibrato principale e $\rho: G \rightarrow GL(V)$ una rappresentazione di G su un \mathbb{R} -spazio vettoriale V . Mostriamo che possiamo associare ad ogni connessione HP su P una connessione ∇^{HP} su $\rho(P)$ in modo naturale, per cui: sia $e \in \Gamma(M, \rho(P))$.

Grazie all'Osservazione 3.15, il seguente diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc}
 & P \times V & \\
 & \nearrow & \downarrow \\
 P & \xrightarrow{\rho(P)} & P \times V / G \\
 & \searrow \pi & \downarrow \\
 & & M
 \end{array}$$

assegna ad e una sezione $\pi^*(e): P \rightarrow P \times V / G$ G -invariante, che corrisponde ad una funzione liscia G -invariante

$$\pi^*(e): P \rightarrow V,$$

cioè tale che

$$\pi^*(e)(p.g) = \rho(g)(\pi^*(e)(p)) \text{ per ogni } g \in G, p \in P;$$

i cui differenziali

$$d(\pi^*(e))_p: T_p P \rightarrow V,$$

sono G -equivarianti differenzialmente:

$$d(\pi^*(e))_{p.g} \circ (\triangleleft g)_{*,p} = d\rho_{\pi^*(e)(p)} \circ d(\pi^*(e))_p \text{ per ogni } g \in G, p \in P;$$

e inducono una mappa $\mathcal{C}_P^\infty(P)$ -lineare

$$\Gamma(P, TP) \longrightarrow \Gamma(P, \underline{V})$$

che possiamo vedere come una sezione

$$d(\pi^*(e)) \in \Gamma(P, \underline{V} \otimes T^*P)$$

G -invariante grazie al criterio di tensorialità (Teorema 2.14).

Una connessione HP su P (richiamando l'isomorfismo ι_p visto nel Teorema 3.7) induce decomposizioni G -invarianti

$$T_p P \simeq V_p P \oplus H_p P \stackrel{\iota_p^{-1} \oplus id}{\simeq} \mathfrak{g} \oplus H_p P$$

che decompongono anche

$$\underline{V} \otimes T_p^* P \simeq (\underline{V} \otimes \mathfrak{g}^*) \oplus (\underline{V} \otimes H_p^* P).$$

Ma $HP \simeq \pi^*(TM)$ per definizione, e quindi ritroviamo la decomposizione di fibrati

$$\underline{V} \otimes T^* P \simeq (\underline{V} \otimes \mathfrak{g}^*) \oplus (\underline{V} \otimes \pi^*(T^* M))$$

preservata dall'azione di G , e la mappa G -equivariante di proiezione sulla seconda componente

$$h_2: \underline{V} \otimes T^* P \longrightarrow \underline{V} \otimes \pi^*(T^* M),$$

induce

$$h_2(d(\pi^*(e))) \in \Gamma(P, \underline{V} \otimes \pi^*(T^* M))$$

che è di conseguenza ancora G -invariante poiché lo sono $\pi^*(e)$ e gli spazi $H_p P$.

La G -invarianza ci consente di trasferire questa sezione su M passando al quoziente per l'azione di G : se $\varpi: P \times V \longrightarrow \rho(P)$ è la mappa di proiezione, post-componiamo $h_2(d(\pi^*(e)))$ con

$$\varpi \otimes d\pi: \underline{V} \otimes \pi^*(T^* M) \longrightarrow \rho(P) \otimes T^* M$$

ottenendo

$$\overline{h_2(d(\pi^*(e)))} \in \Gamma(M, \rho(P) \otimes T^* M).$$

Abbiamo quindi ottenuto una mappa

$$\begin{aligned}\nabla^{HP}: \Gamma(M, \rho(P)) &\longrightarrow \Gamma(M, \rho(P) \otimes T^*M) \\ e &\longmapsto \nabla^{HP}(e) = \overline{h_2(d(\pi^*(e)))}\end{aligned}$$

che è sicuramente \mathbb{R} -lineare e che soddisfa la regola di Leibnitz, in quanto

$$\begin{aligned}\nabla^{HP}(fe) &= \overline{h_2(d(\pi^*(fe)))} = \overline{h_2(d(f \circ \pi \cdot \pi^*(e)))} = \\ &= \overline{h_2(d(f \circ \pi) \otimes \pi^*(e) + f \circ \pi \cdot d(\pi^*(e)))} = \\ &= \overline{h_2(\pi^*(df \otimes e)) + h_2(f \circ \pi \cdot d(\pi^*(e)))} \\ &\stackrel{(i)}{=} df \otimes e + f \overline{h_2(d(\pi^*(e)))} \\ &= df \otimes e + f \nabla^{HP}(e)\end{aligned}$$

Dove l'uguaglianza in (i) tra i termini a sinistra segue poiché $\pi^*(df \otimes e)$ è orizzontale per definizione, e quindi viene riproiettato da h_2 in se stesso. Riassumendo, abbiamo ottenuto la seguente proposizione:

Proposizione 3.24. *Sia $G \curvearrowright P \xrightarrow{\pi} M$ un fibrato principale e $\rho: G \longrightarrow \text{GL}(V)$ una rappresentazione di G su un \mathbb{R} -spazio vettoriale V . Allora*

- (i) *Ogni connessione HP su P induce una connessione ∇^{HP} su $\rho(P)$.*
- (ii) *Se $G = \text{GL}_k(\mathbb{R})$ e $\rho: G \longrightarrow \mathbb{R}^k$ è la rappresentazione naturale (in modo che $P = P^{\rho(P)}$ sia il fibrato dei frame di $\rho(P)$) allora quest'assegnazione è biunivoca.*

Dimostrazione. Per maggiori dettagli, si veda [11, p.25]. □

3.6.1 Relazioni tra tipologie di Olonomia

La situazione è la solita: consideriamo $G \curvearrowright P \xrightarrow{\pi} M$ un fibrato principale e $\rho: G \longrightarrow \text{GL}(V)$ una rappresentazione di G su un \mathbb{R} -spazio vettoriale V .

Poiché la rappresentazione $\rho: G \longrightarrow \text{GL}(V)$ è un morfismo di gruppi, abbiamo

$$\rho \circ Ad_g = Ad_{\rho(g)} \circ \rho,$$

e quindi

$$d\rho \circ ad_g = ad_{\rho(g)} \circ d\rho$$

per ogni $g \in G$. Di conseguenza il differenziale indotto

$$d\rho: \mathfrak{g} \longrightarrow \text{End}(V)$$

è G -equivariante e induce un morfismo

$$d\rho: \text{ad}(P) \longrightarrow \text{End}(\rho(P));$$

che possiamo tensorizzare con $\text{id}_{\wedge^2 T^*M}$ per ottenere

$$d\rho \otimes \text{id}_{\wedge^2 T^*M}: \text{ad}(P) \otimes \wedge^2 T^*M \longrightarrow \text{End}(\rho(P)) \otimes \wedge^2 T^*M$$

che lega intrinsecamente le curvature delle connessioni tramite l'equazione

$$(d\rho \otimes \text{id}_{\wedge^2 T^*M})(R(HP)) = R(\nabla^{HP})$$

(per maggiori dettagli, si veda [11, p.25/p31]).

Enunciamo infine un teorema cruciale nel nostro percorso, che permette di legare le due teorie dell'Olonomia costruite fino ad ora nel caso dei fibrati vettoriali e principali:

Teorema 3.25. *Sia $G \curvearrowright P \xrightarrow{\pi} M$ è un fibrato principale dotato di una connessione HP e $\rho: G \longrightarrow \text{GL}(V)$ una rappresentazione di G su un \mathbb{R} -spazio vettoriale V . Allora i gruppi di Olonomia di HP e della connessione indotta ∇^{HP} su $\rho(P)$ sono in relazione mediante l'equazione*

$$\rho(\text{Hol}(HP)) = \text{Hol}(\nabla^{HP})$$

Se invece $E \xrightarrow{\pi} M$ è un fibrato vettoriale di rango k dotato di una connessione ∇ , il fibrato dei frame F^E associato è $GL_k(\mathbb{R})$ -principale e vale

$$\text{Hol}(\nabla) = \text{Hol}(HP^\nabla)$$

dove HP^∇ è la connessione individuata dalla corrispondenza garantita nella Proposizione 3.24.

Dimostrazione. Per maggiori dettagli, si veda [11, p.25/p31]. □

Dopo aver sviluppato la teoria relativa ai gruppi di Olonomia parallelamente nel caso dei fibrati vettoriali e fibrati principali, abbiamo ritrovato che sono legate da legami intrinseci, e in seguito utilizzeremo entrambe le strade di costruzione per sfruttare i teoremi che potranno tornarci più utili.

Capitolo 4

Olonomia riemanniana

Applichiamo quanto studiato nelle sezioni precedenti al caso in cui M sia una "varietà riemanniana". Fissiamo una varietà liscia n -dimensionale M per un po' e consideriamo il fibrato tangente $TM \rightarrow M$. Cominciamo con la prima definizione:

Definizione 4.1. *Una metrica riemanniana g su una varietà liscia M è un tensore liscio*

$$g \in \Gamma(M, T^{0,2}M)$$

tale che per ogni $p \in M$

$$g: T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$$

sia un prodotto scalare su T_pM .

La coppia (M, g) sarà chiamata varietà riemanniana.

Una metrica riemanniana g su M associa ad ogni punto di M un prodotto scalare, ma da essa possiamo anche ricavare una mappa bilineare simmetrica definita positiva

$$g(\cdot, \cdot): \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathcal{C}_M^\infty(M)$$

tale che, se

$$g^\alpha = \sum_{ij} g_{ij}^\alpha dx_\alpha^i \otimes dx_\alpha^j$$

è una scrittura locale di g su un aperto coordinato U_α , allora le

$$g_{ij}^\alpha = g\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}, \frac{\partial}{\partial x_\alpha^j}\right): U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$$

sono funzioni lisce per ogni i, j .

Il fatto che g sia non degenere in ogni punto di M implica le matrici

$$(g_{ij}^\alpha(p))_{ij}$$

siano non degeneri in ogni $p \in U_\alpha$, per ogni $\alpha \in A$.

Esempio 15. (i) La metrica euclidea su \mathbb{R}^n è descritta dal tensore metrico

$$g_n = \sum_{i=1}^n dx^i \otimes dx^i$$

definito globalmente e rappresentato dalla matrice $n \times n$

$$(g_{ij})_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

(ii) Consideriamo $M = \mathbb{H}^m$ lo spazio quaternionico m -dimensionale (abbiamo introdotto \mathbb{H} in 4), di coordinate $(q_1, \dots, q_m) \in M$, dove

$$q_l = x_l^0 + x_l^1 i + x_l^2 j + x_l^3 l.$$

Una metrica su M è descritta dal tensore

$$g = \sum_{l=1}^m \sum_{p=0}^3 dx_l^p \otimes dx_l^p$$

definito globalmente.

Utilizzando le partizioni dell'unità si può mostrare la seguente proposizione, utile per rendere varietà riemanniane le varietà lisce considerate in precedenza:

Proposizione 4.2. *Ogni varietà liscia M ammette una metrica riemanniana.*

Dimostrazione. Ogni varietà liscia M può essere immersa in $\mathbb{R}^{2 \dim M}$ grazie al Teorema di Whitney (si veda [1, p.114]). A questo punto, il pull-back della metrica euclidea attraverso l'immersione fornisce una metrica riemanniana su M . \square

Fissiamo d'ora in avanti una metrica g su M .

Come visto nell'Esempio 13, possiamo vedere il fibrato tangente TM anche come $\rho(P^{TM})$, dove $\rho: \text{GL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}(\mathbb{R}^n)$ è la rappresentazione naturale e P^{TM} è il fibrato $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ -principale dei frame su M .

L'assegnazione biunivoca garantita dalla Proposizione 3.24 ci consente di identificare connessioni HP su P^{TM} con connessioni ∇^{HP} su TM e viceversa.

In particolare, d'ora in poi fisseremo sempre $E = TM$ e parleremo generalmente di una "connessione ∇ " su M pensando di identificare le connessioni corrispondenti ∇ su TM e HP^∇ su P^{TM} individuate dall'assegnazione sopra menzionata, per evitare troppi formalismi e per trarre vantaggio da entrambe le teorie.

4.1 Relazione con i tensori costanti

Vedremo in questa sezione che il gruppo di Olonomia di una connessione sul fibrato tangente è in stretto legame con i suoi *tensori costanti*, che definiremo a breve. Questo sarà la chiave di volta per la classificazione dei *gruppi di Olonomia riemanniani* che introdurremo nelle sezioni successive.

Lemma 4.3. *Una connessione ∇ su TM induce una connessione $\nabla^{k,l}$ sul fibrato dei tensori $T^{k,l}M := \otimes^k TM \otimes \otimes^l T^*M$, per ogni scelta di $k, l \in \mathbb{N}$.*

Dimostrazione. Dalla rappresentazione naturale

$$\rho: \text{GL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}(\mathbb{R}^n)$$

che abbiamo utilizzato per vedere $\rho(P^{TM}) \simeq TM$, otteniamo rappresentazioni naturali duali di precomposizioni

$$(\rho)^t: \text{GL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}((\mathbb{R}^n)^*)$$

da cui ricaviamo $(\rho)^t(P) \simeq T^*M$, e più in generale tensoriali miste

$$\rho_{k,l} := \underbrace{\rho \otimes \dots \otimes \rho}_k \otimes \underbrace{(\rho)^t \otimes \dots \otimes (\rho)^t}_l: \text{GL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}(\underbrace{\mathbb{R}^n \otimes \dots \otimes \mathbb{R}^n}_k \otimes \underbrace{(\mathbb{R}^n)^* \otimes \dots \otimes (\mathbb{R}^n)^*}_l) \quad (4.1)$$

da cui ricaviamo

$$\rho_{k,l}(P) \simeq T^{k,l}M,$$

e la connessione indotta cercata è quella indotta dalla Proposizione 3.24. \square

Connessioni indotte sui fibrati dei tensori sono comode per effettuare derivate covarianti tensoriali. In particolare, come accennato sopra, per il nostro scopo saranno interessanti i *tensori costanti*:

Definizione 4.4. *Sia M una varietà liscia e ∇ una connessione su TM . Un tensore $S \in \Gamma(M, T^{k,l}M)$ è detto costante (o parallelo) se $\nabla^{k,l}S = 0$, dove $\nabla^{k,l}$ è la connessione indotta da ∇ su $T^{k,l}M$.*

I tensori costanti determinano completamente il gruppo di Olonomia, che agisce sulle fibre di $T^{k,l}$ attraverso la rappresentazione $\rho_{k,l}$ definita in (4.1):

$$\begin{aligned} \text{Hol}_x(\nabla) \times T_x^{k,l}M &\longrightarrow T_x^{k,l}M \\ (g, s) &\longmapsto \rho_{k,l}(g)(s) \end{aligned}$$

per ogni $x \in M$.

Tramite quest'azione, il gruppo di Olonomia preserva i tensori costanti. Viceversa, ogni tensore preservato dal gruppo di Olonomia si estende parallelamente su tutta la varietà! Vale infatti il seguente importante teorema, chiamato Principio di Olonomia:

Teorema 4.5 (Principio di Olonomia). *Sia M una varietà liscia, ∇ una connessione su TM e $x \in M$. Allora*

- (i) *Se $S \in \Gamma(M, T^{k,l}M)$ è un tensore costante, allora S_x è fissato dall'azione di $\text{Hol}_x(\nabla)$ su $T_x^{k,l}M$.*
- (ii) *Se $s_x \in E_x$ è un tensore fissato dall'azione di $\text{Hol}_x(\nabla)$, allora può essere esteso ad un tensore parallelo $S \in \Gamma(M, T^{k,l}M)$ (tale che $S(x) = s_x$).*

Dimostrazione. Cominciamo con (i): Sia $\gamma: I \rightarrow M$ un loop in $x \in M$ e $P_\gamma \in \text{Hol}_x(\nabla^{k,l})$ la mappa di trasporto parallelo associata.

Poiché $\nabla^{k,l}S = 0$, il pullback $\gamma^*(S) \in \Gamma(I, \gamma^*(T^{k,l}M))$ di S su I verifica

$$\gamma^*(\nabla^{k,l}S) \frac{d\gamma}{dt} \gamma^*(S) = 0$$

e costituisce quindi una sezione parallela di $\gamma^*(T^{k,l}M)$ su I , di punto iniziale $S(\gamma(0)) = S(x)$. Di conseguenza, la mappa di trasporto parallelo associata a γ valutata in $S(x)$ restituisce proprio il punto finale di $\gamma^*(S)$, che è sempre $S(x)$ poiché γ è un loop. In formule:

$$P_\gamma(S(x)) = P_\gamma(S(\gamma(0))) = S(\gamma(1)) = S(x)$$

e quindi $S(x)$ è fissato da $\text{Hol}_x(\nabla^{k,l})$.

Infine, la Proposizione 3.25 garantisce

$$\rho_{k,l}(\text{Hol}_x(\nabla)) = \text{Hol}_x(\nabla^{k,l}), \quad (4.2)$$

e quindi che $S(x)$ è fissato dall'azione di $\text{Hol}_x(\nabla)$, come volevamo.

Vediamo la dimostrazione di (ii): sia $s_x \in E_x$ fissato da $\text{Hol}_x(\nabla)$ tramite $\rho_{k,l}$ e sia $y \in M$. Poiché M è connessa, possiamo considerare cammini lisci $\alpha, \beta: I \rightarrow M$ da $\alpha(0) = \beta(0) = x$ a $\alpha(1) = \beta(1) = y$, a cui sono associate mappe di trasporto parallelo

$$P_\gamma, P_\beta: E_x \rightarrow E_y$$

In questo modo $\beta^{-1}\alpha$ è un loop in x e quindi $P_{\beta^{-1}\alpha} = P_\beta^{-1}P_\alpha = \rho_{k,l}(h)$ per un certo $h \in \text{Hol}_x(\nabla)$.

Per ipotesi

$$s_x = \rho_{k,l}(h)(s_x) = P_{\beta^{-1}\alpha}(s_x) = P_\beta^{-1}P_\alpha(s_x),$$

da cui il fatto che

$$P_\beta(s_x) = P_\alpha(s_x)$$

non dipende dalla scelta del cammino.

Per ogni $y \in M$ scegliamo quindi un cammino liscio $\alpha_y: I \rightarrow M$ da $\alpha(0) = x$ a $\alpha(1) = y$, e definiamo

$$\begin{aligned} S: M &\rightarrow T^{k,l}M \\ y &\mapsto P_{\alpha_y}(s_x) \end{aligned}$$

Chiaramente $S(x) = s_x$ grazie al cammino costante che induce $\text{id}_{E_x}: E_x \rightarrow E_x$, e se $\gamma: I \rightarrow M$ è un cammino liscio arbitrario, $\gamma^*(S)$ è una sezione parallela, da cui $\nabla^{k,l}S = 0$, come volevamo. \square

Corollario 4.6. *Sia M una varietà liscia, ∇ una connessione su TM e $x \in M$. Se $G \subseteq \text{GL}(T_xM)$ è il sottogruppo di $\text{GL}(T_xM)$ che fissa $S(x)$ per tutti i tensori costanti S su M , allora $\text{Hol}_x(\nabla) \subseteq G$ è un suo sottogruppo.*

Questo risultato restringe notevolmente l'insieme dei possibili gruppi di Olonomia di una connessione su un fibrato vettoriale, a patto di conoscere i tensori costanti... o meglio, il gruppo che li fissa.

4.2 La torsione di una connessione

Oltre alla curvatura, possiamo introdurre un altro invariante di una connessione: la *torsione*. Possiamo farlo solo nel caso specifico in cui $E = TM$, poiché in quest'invariante vi è bisogno di sfruttare in modo diretto le parentesi di Lie di due campi vettoriali:

Proposizione 4.7. *Sia M una varietà liscia e ∇ una connessione su TM . Siano $v, w \in \mathfrak{X}(M)$ due campi vettoriali e $\alpha, \beta \in \mathcal{C}_M^\infty(M)$ due funzioni lisce. Allora vale l'uguaglianza*

$$\nabla_{\alpha v} \beta w - \nabla_{\beta w} \alpha v - [\alpha v, \beta w] = \alpha \beta (\nabla_v w - \nabla_w v - [v, w])$$

Dimostrazione. I conti nella dimostrazione sono simili a quelli in [11, p.23]. \square

Procediamo con un discorso analogo a quello svolto per individuare la sezione di curvatura (2.5): la mappa

$$\begin{aligned} T(\nabla): \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (v, w) &\longmapsto \nabla_v w - \nabla_w v - [v, w] \end{aligned}$$

è puntualmente \mathbb{R} -bilineare e antisimmetrica, per cui induce la mappa

$$\begin{aligned} T(\nabla): \Gamma(M, \bigwedge^2 TM) &\longrightarrow \Gamma(M, TM) \\ (v \wedge w) &\longmapsto T(\nabla)(v, w) \end{aligned}$$

che, grazie alla Proposizione 4.7, sappiamo essere $\mathcal{C}_M^\infty(M)$ -lineare, e il criterio di tensorialità (Teorema 2.14) fornisce una mappa indotta

$$T(\nabla) \in \Gamma(M, \bigwedge^2 T^*M \otimes TM),$$

chiamata *torsione di ∇* .

Definizione 4.8. *Una connessione ∇ è senza torsione se $T(\nabla) = 0$*

Per le connessioni senza torsione vi sono importanti vincoli sulle componenti, dati dalle famose *identità di Bianchi*:

Proposizione 4.9 (1' e 2' identità di Bianchi). *Sia M una varietà liscia, ∇ una connessione su TM senza torsione. Allora la curvatura $R(\nabla)$ (indicata in indici R_{bcd}^a) soddisfa le equazioni tensoriali*

$$\begin{aligned} R_{bcd}^a + R_{cdb}^a + R_{dcb}^a &= 0 \\ \nabla_e R_{bcd}^a + \nabla_c R_{bde}^a + \nabla_d R_{bec}^a &= 0 \end{aligned}$$

per ogni $a, b, c, d, e = 1, \dots, \dim M$.

Dimostrazione. Si rimanda ai conti in [11, p.36] □

4.2.1 La connessione di Levi Civita

In una varietà riemanniana (M, g) esiste una connessione preferita su sul fibrato tangente TM , chiamata *connessione di Levi-Civita*. Tale connessione è senza torsione (e grazie al Lemma 4.3 induce connessioni $\nabla^{k,l}$ sui fibrati dei tensori $T^{k,l}M$) ma che ha anche una proprietà di compatibilità con la metrica: soddisfa $\nabla^{0,2}g = 0$:

Teorema 4.10 (Teorema fondamentale della geometria riemanniana). *Sia (M, g) una varietà riemanniana. Allora esiste un'unica connessione senza torsione su TM che soddisfa $\nabla^{0,2}g = 0$, chiamata connessione di Levi-Civita.*

Dimostrazione. Si rimanda a [11, p.43]. □

Sia (M, g) una varietà riemanniana di dimensione n dotata di connessione di Levi-Civita ∇ . L'equazione $\nabla^{0,2}g = 0$ rende g un tensore costante, e quindi, se $x \in M$, la Proposizione 4.5 garantisce che g_x sia fissato dall'azione di $\text{Hol}_x(\nabla)$, che quindi preserva la metrica in ogni punto.

Ma il gruppo di trasformazioni di $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ che preservano la metrica è $\text{O}(n)$, e dal Corollario 4.6 ricaviamo di conseguenza

$$\text{Hol}(\nabla) \subseteq \text{O}(n)$$

come sottogruppo.

Riusciremo a dare una caratterizzazione migliore di $\text{Hol}_x(\nabla)$ nella seguente sezione, in cui indicheremo per comodità con

$$\text{Hol}(g) := \text{Hol}(\nabla)$$

il gruppo di Ologonia della connessione di Levi-Civita ∇ compatibile con g .

4.3 Riducibilità di una metrica

Se (M_1, g_1) e (M_2, g_2) sono due varietà riemanniane, possiamo dotare lo spazio tangente

$$T_{(m_1, m_2)}M_1 \times M_2 \simeq T_{m_1}M_1 \oplus T_{m_2}M_2$$

in $(m_1, m_2) \in M_1 \times M_2$ del prodotto scalare $g_1(m_1) + g_2(m_2)$, e definire quindi:

Definizione 4.11. *Il prodotto riemanniano $(M_1 \times M_2, g_1 \times g_2)$ è la varietà prodotto $M_1 \times M_2$ dotata della metrica*

$$g_1 \times g_2: M_1 \times M_2 \longrightarrow T^{0,2}(M_1 \times M_2) \quad (4.3)$$

$$(m_1, m_2) \longmapsto g_1(m_1) \oplus g_2(m_2) \quad (4.4)$$

le cui matrici simmetriche definite positive associate ad un aperto coordinato U_α sono

$$((g_1 \times g_2)^\alpha) = \begin{pmatrix} (g_1^\alpha) & 0 \\ 0 & (g_2^\alpha) \end{pmatrix}$$

Definizione 4.12. *Una varietà riemanniana (M, g) (o la metrica g associata) è detta*

- (i) *riducibile se è isometrica ad un prodotto riemanniano $(M_1 \times M_2, g_1 \times g_2)$, con $\dim(M_i) > 0$ per $i = 1, 2$.*
- (ii) *localmente riducibile se ogni punto ha un intorno aperto riducibile.*
- (iii) *irriducibile se non è localmente riducibile.*
- (iv) *simmetrica se per ogni $x \in M$ esiste un'isometria $s_x: M \longrightarrow M$ tale che $s_x^2 = id_M$, in modo che x sia un punto fisso isolato di s_x .*
- (v) *localmente simmetrica se ogni punto $x \in M$ ammette un intorno aperto $U_x \subseteq M$ ed un'isometria involutiva $s_x: U_x \longrightarrow U_x$ con unico punto fisso x .*

La sfera S^2 costituisce un esempio di spazio simmetrico, in quanto per ogni $x \in S^2$ la rotazione di π attorno all'asse individuato da x è un'isometria di cui x è punto fisso, mentre un esempio di varietà riemanniana riducibile è dato dallo spazio euclideo, dove la metrica (Esempio 15) è riducibile attraverso metriche euclidee monodimensionali:

$$(\mathbb{R}^n, g_n) \simeq \overbrace{((\mathbb{R}, g_1) \times \cdots \times (\mathbb{R}, g_1))}^{n \text{ volte}} \quad (4.5)$$

4.4 Il Teorema di Berger

Il nostro ultimo scopo sarà quello di trattare il Teorema di Berger: un teorema di classificazione molto importante, i cui risultati necessari alla sua dimostrazione impiegheranno la parte seguente del nostro percorso. La classificazione si limiterà a varietà irriducibili, e la seguente proposizione consentirà di ricomporre i gruppi di Olonomia di varietà riducibili, che si comportano naturalmente:

Proposizione 4.13. *Siano $(M_1, g_1), (M_2, g_2)$ due varietà riemanniane. Allora*

$$\text{Hol}(g_1 \times g_2) = \text{Hol}(g_1) \times \text{Hol}(g_2)$$

Dimostrazione. Sia $(x, y) \in M$ e $\gamma: I \rightarrow M_1 \times M_2$ un loop in (x, y) e siano $\gamma_1 = pr_1 \circ \gamma: I \rightarrow M_1$ (loop in x), $\gamma_2 = pr_2 \circ \gamma: I \rightarrow M_2$ (loop in y) le due sue componenti lisce.

Grazie agli isomorfismi di spazi di sezioni

$$\begin{aligned} \Gamma(I, \gamma^*(TM)) &\simeq \Gamma(I, \gamma^*(TM_1 \oplus TM_2)) \simeq \\ &\simeq \Gamma(I, \gamma^*(TM_1) \oplus \gamma^*(TM_2)) \simeq \\ &\simeq \Gamma(I, \gamma^*(TM_1)) \oplus \Gamma(I, \gamma^*(TM_2)) \end{aligned}$$

possiamo decomporre ogni sezione parallela $s^{(x,y)} \in \Gamma(I, \gamma^*TM)$ scrivendo

$$s^{(x,y)} = (s_1^{(x,y)}, s_2^{(x,y)}),$$

con $s_i^{(x,y)} \in \Gamma(I, \gamma^*(TM_i))$ per $i = 1, 2$.

Si verifica facilmente (per esempio osservandone l'azione su campi coordinati locali) che la connessione di Levi-Civita ∇ su $M_1 \times M_2$ è la somma diretta (in matrice associata, a blocchi) delle connessioni di Levi-Civita ∇_1, ∇_2 su M_1 e M_2 rispettivamente, da cui ricaviamo

$$\begin{aligned} 0 &= (\gamma^* \nabla)_{\frac{d\gamma}{dt}} s = (\gamma_1^* \nabla_1 \oplus \gamma_2^* \nabla_2)_{\left(\frac{d\gamma_1}{dt}, \frac{d\gamma_2}{dt}\right)} (s_1^{(x,y)}, s_2^{(x,y)}) \\ &= \left((\gamma_1^* \nabla_1)_{\frac{d\gamma_1}{dt}} s_1^{(x,y)}, (\gamma_2^* \nabla_2)_{\frac{d\gamma_2}{dt}} s_2^{(x,y)} \right) \end{aligned}$$

sfruttando la scrittura in componenti in somma diretta.

Da questo ricaviamo

$$(\gamma_i^* \nabla_i)_{\frac{d\gamma_i}{dt}} s_i^{(x,y)} = 0$$

per $i = 1, 2$ e quindi che $s_1^{(x,y)}$ e $s_2^{(x,y)}$ sono soluzione dei rispettivi problemi di Cauchy

$$\begin{cases} (\gamma_1^* \nabla_1) \frac{d\gamma_1}{dt} s = 0 \\ s(0) = x \end{cases} \quad \begin{cases} (\gamma_2^* \nabla_2) \frac{d\gamma_2}{dt} s = 0 \\ s(0) = y \end{cases}$$

Per definizione, allora,

$$s_1^{(x,y)} = s^x \text{ e } s_2^{(x,y)} = s^y$$

dove s^x e s^y sono i sollevamenti paralleli di γ_1 e γ_2 passanti per x e y rispettivamente.

Cioè abbiamo appena evidenziato le scritte in componenti

$$s^{(x,y)} = (s^x, s^y),$$

che attraverso la valutazione in 1 inducono l'isomorfismo di gruppi cercato, scrivibile come

$$\begin{aligned} \text{Hol}_{(x,y)}(g_1 \times g_2) &\xrightarrow{\sim} \text{Hol}_x(g_1) \times \text{Hol}_y(g_2) \\ P_\gamma &\longmapsto (P_{\gamma_1}, P_{\gamma_2}) \end{aligned}$$

□

Tra gli ingredienti che ci servono per la classificazione vi è la relazione tra irriducibilità della metrica e riducibilità della rappresentazione del gruppo di Olonomia. Sorprendentemente (o forse no...), vi sono degli stretti legami, come mostrano le seguenti proposizioni:

Proposizione 4.14. *Sia (M, g) una varietà riemanniana connessa e $x \in M$. Supponiamo di avere una decomposizione in sottospazi propri $T_x M = V_x \oplus W_x$ preservati dall'azione di $\text{Hol}_x(g)$ e ortogonali rispetto a g (cioè che la rappresentazione naturale di $\text{Hol}_x(g)$ sia riducibile).*

*Allora restano indotti due sottofibrati $V, W \subseteq TM$ ortogonali rispetto a g e chiusi rispetto al trasporto parallelo, che soddisfano $TM = V \oplus W$, $T^*M = V^* \oplus W^*$.*

Dimostrazione. Sia $y \in M$. Poiché M è connessa, troviamo un cammino $\gamma_y: I \rightarrow M$ da $x = \gamma(0)$ a $y = \gamma_y(1)$ a cui è associata la mappa di trasporto parallelo

$$P_{\gamma_y}: T_x M \rightarrow T_y M$$

tra spazi tangenti.

Le immagini $P_{\gamma_y}(V_x), P_{\gamma_y}(W_x) \subseteq T_y M$ dei sottospazi $V_x, W_x \subseteq T_x M$ sono indipendenti dal cammino γ_y scelto: se $\mu_y: I \rightarrow M$ è un altro cammino da $x = \mu_y(0)$ a $y = \mu_y(1)$, il cammino $\mu_y^{-1}\gamma_y$ è un loop in x e quindi, poiché $Hol_x(\nabla)$ per ipotesi preserva i due spazi,

$$P_{\mu_y}^{-1}P_{\gamma_y}(V_x) = P_{\mu_y^{-1}\gamma_y}(V_x) = V_x \text{ e } P_{\mu_y}^{-1}P_{\gamma_y}(W_x) = P_{\mu_y^{-1}\gamma_y}(W_x) = W_x,$$

da cui otteniamo l'invarianza

$$V_y := P_{\mu_y}(V_x) = P_{\gamma_y}(V_x) \text{ e } W_y := P_{\mu_y}(W_x) = P_{\gamma_y}(W_x)$$

delle immagini di V_x e W_x per trasporto parallelo.

A questo punto raccogliamo questi sottospazi nei due sottofibrati

$$V := \bigsqcup_{y \in M} V_y \text{ e } W := \bigsqcup_{y \in M} W_y,$$

invarianti rispetto a trasporti paralleli per costruzione.

Poiché le mappe di trasporto parallelo sono isomorfismi, abbiamo

$$T_y M = V_y \oplus W_y \text{ e } T_y^* M = V_y^* \oplus W_y^*$$

in ogni $y \in M$, da cui

$$TM = V \oplus W \text{ e } T^*M = V^* \oplus W^*.$$

L'ortogonalità rispetto a g segue dall'ortogonalità di V_x e W_x e dal fatto che i prodotti scalari tra vettori vengono preservati dai trasporti paralleli grazie alla compatibilità della connessione di Levi-Civita con la metrica (per ulteriori dettagli, si veda [1, p.344]). \square

I sottofibrati $V, W \subseteq TM$ del fibrato tangente appena ottenuti si integrano localmente per fornire varietà prodotto locali, che rendono g una metrica (almeno) localmente riducibile:

Proposizione 4.15. *Nel linguaggio della Proposizione 4.14, vi è un intorno connesso $N \subseteq M$ di x , varietà riemanniane $(X, g_X), (Y, g_Y)$ e un'isometria*

$$(N, g) \simeq (X \times Y, g_X \times g_Y)$$

tale che

$$T(X \times Y) \simeq TX \oplus TY, \quad V|_N = TX \text{ e } W|_N = TY$$

Quindi, g è localmente riducibile.

Dimostrazione. La connessione di Levi-Civita è compatibile con la metrica g definita a blocchi sui vari V_x, W_x , con $x \in M$, e la sua matrice associata si spezza di conseguenza in blocchi di matrici di connessioni ∇_V, ∇_W tali che

$$\nabla v = (\nabla_V + \nabla_W)v = (\nabla_V)v + \cancel{(\nabla_W)v} = \nabla_V v \in \Gamma(M, V \otimes T^*M)$$

per ogni $v \in \Gamma(M, V)$. Segue dunque che per ogni $u \in \Gamma(M, V)$

$$\nabla_u v = (\nabla_V)_u v \in \Gamma(M, V).$$

Analogamente $\nabla_v u \in \Gamma(M, V)$.

Ma la connessione di Levi-Civita ∇ è senza torsione, per cui

$$[v, v'] = \nabla_{v'} v - \nabla_v v' \in \Gamma(M, V)$$

per ogni coppia $v, v' \in \Gamma(M, V)$. Un discorso analogo vale per W .

Questo dimostra che V e W sono distribuzioni involutive, e il Teorema di Frobenius (Teorema 1.23) garantisce la loro completa integrabilità, che si traduce nell'esistenza di sottovarietà integrali $\{(X_i, g_i)\}_{i \in A}$ riemanniane, $\{(Y_j, g_j)\}_{j \in B}$ aventi spazi tangenti V e W rispettivamente, per ogni i, j .

Il vincolo di essere addendi diretti $V \oplus W = TM$ dei tangenti alle varietà integrali ci consente, concentrandoci su un intorno N di x , di incollare opportunamente le due famiglie di varietà integrali, fornendo isometricamente una struttura di prodotto locale

$$(N, g|_N) \simeq (X, g_X) \times (Y, g_Y),$$

come volevamo dimostrare (per maggiori dettagli, si rimanda a [12, p.182]).

□

La riducibilità della metrica vincola quindi la riducibilità del gruppo di Olonomia corrispondente. Abbiamo quindi raggiunto questo importante risultato:

Corollario 4.16. *Sia M una varietà liscia n -dimensionale e g una metrica riemanniana irriducibile su M . Allora le rappresentazioni di $\text{Hol}(g)$ e $\text{Hol}^0(g)$ su \mathbb{R}^n sono irriducibili.*

4.4.1 Riducibilità della rappresentazione di Olonomia

E' possibile legare i risultati appena ottenuti con restrizioni sulla curvatura di ∇ per ottenere informazioni sulla decomposizione della rappresentazione di Olonomia ridotta:

Proposizione 4.17. *Sia (M, g) una varietà riemanniana n -dimensionale. Allora $\text{Hol}^0(g)$ è un sottogruppo di Lie di $\text{SO}(n)$ che agisce su \mathbb{R}^n , ed esiste uno spezzamento*

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{R}^{n_k},$$

con $n_j > 0$ per ogni $j = 1, \dots, k$, e un isomorfismo corrispondente

$$\text{Hol}^0(g) = H_1 \times \dots \times H_k,$$

dove H_j è un sottogruppo di Lie connesso di $\text{SO}(n_j)$ che agisce irriducibilmente su \mathbb{R}^{n_j} .

Dimostrazione. Si rimanda a [11, p.42,p.48] □

La precedente proposizione mostra che se la rappresentazione naturale di $\text{Hol}^0(\nabla)$ è riducibile allora anche $\text{Hol}^0(\nabla)$ è riducibile e la rappresentazione di Olonomia è la somma diretta di rappresentazioni irriducibili su ciascun fattore.

Nel nostro scopo di classificazione, se gli H_j fossero stati gruppi di Olonomia di dimensioni inferiori, avremmo potuto concentrare la nostra attenzione solo su rappresentazioni irriducibili di essi.

Questo non è sempre possibile, ma in questa direzione vale un risultato di De Rham, in cui si richiede la completezza della metrica, che viene usata per rendere globale lo spezzamento nella Proposizione 4.15, rendendo (M, g) globalmente riducibile:

Teorema 4.18 (De Rham). *Se (M, g) è una varietà riemanniana semplicemente connessa, con g una metrica completa, allora esistono varietà riemanniane complete e semplicemente connesse $(M_1, g_1), \dots, (M_k, g_k)$ tali che*

$$(M, g) \text{ è isometrica a } (M_1 \times \dots \times M_k, g_1 \times \dots \times g_k),$$

$$\text{Hol}(g) \simeq \text{Hol}(g_1) \times \dots \times \text{Hol}(g_k)$$

e le rappresentazioni di Olonomia di $\text{Hol}(g_j)$ sono irriducibili per ogni $j = 1 \dots k$.

Potremmo usare questo teorema per ottenere nuovamente la decomposizione in (4.5), ottenendo

$$(\mathbb{R}^n, g_n) \simeq \underbrace{((\mathbb{R}, g_1) \times \cdots \times (\mathbb{R}, g_1))}_{n \text{ volte}}$$

e

$$\text{Hol}(g_n) = (\text{Hol}(g_1))^n = 0^n = 0$$

Ci rimettiamo ora in un caso generale, in cui la metrica g non è necessariamente completa, e vediamo subito che $\text{Hol}^0(g)$ è dotato di altre buone proprietà:

Teorema 4.19. *Sia (M, g) una varietà riemanniana n -dimensionale. Allora $\text{Hol}^0(g)$ è un sottogruppo di Lie chiuso e connesso di $\text{SO}(n)$.*

Dimostrazione. Grazie alla Proposizione 4.17 sappiamo che $\text{Hol}^0(g)$ è un sottogruppo di Lie di $\text{SO}(n)$ che è prodotto di sottogruppi connessi, ed è quindi connesso.

Poiché tali sottogruppi agiscono in modo irriducibile sui rispettivi fattori, sono anche chiusi in $\text{SO}(n)$ grazie ad un risultato di Kobayashi-Nomizu ([12, p.277]). Da questo segue che anche il loro prodotto, cioè $\text{Hol}^0(g)$, è chiuso. \square

4.4.2 Il Teorema di Berger

Siamo arrivati alla fine del nostro percorso, ovvero al teorema di classificazione di Berger, che come accennato in precedenza rappresenta un risultato con importanti conseguenze matematiche:

Teorema 4.20 (Teorema di Berger). *Sia M una varietà liscia semplicemente connessa n -dimensionale, g una metrica su M irriducibile e non localmente simmetrica. Allora vale esattamente uno dei seguenti sette casi:*

1. $\text{Hol}(g) = \text{SO}(n)$
2. $n = 2m$, con $m \geq 2$ e $\text{Hol}(g) = \text{U}(m)$ in $\text{SO}(2m)$.
3. $n = 2m$, con $m \geq 2$ e $\text{Hol}(g) = \text{SU}(m)$ in $\text{SO}(2m)$.
4. $n = 4m$, con $m \geq 2$ e $\text{Hol}(g) = \text{Sp}(m)$ in $\text{SO}(4m)$.
5. $n = 4m$, con $m \geq 2$ e $\text{Hol}(g) = \text{Sp}(m)\text{Sp}(1)$ in $\text{SO}(4m)$.

6. $n = 7$ e $\text{Hol}(g) = G_2$ in $\text{SO}(7)$.

7. $n = 8$ e $\text{Hol}(g) = \text{Spin}(7)$ in $\text{SO}(8)$.

Dimostrazione. Poiché M è semplicemente connessa abbiamo $\text{Hol}(g) = \text{Hol}^0(g)$, e il Teorema 4.19 garantisce che $\text{Hol}(g)$ sia un sottogruppo di Lie chiuso e connesso di $\text{SO}(n)$. L'irriducibilità della metrica g ci consente di sfruttare il Corollario 4.16 che garantisce l'irriducibilità della rappresentazione di $\text{Hol}(g)$ su \mathbb{R}^n .

Berger considerò a questo punto la lista di tutti i possibili sottogruppi di Lie di $\text{SO}(n)$ chiusi, connessi con rappresentazione irriducibile su \mathbb{R}^n , la cui classificazione segue dalla classificazione dei gruppi di Lie, e sfruttò la non simmetria di M e l'applicazione delle ulteriori restrizioni imposte dalle identità di Bianchi (Proposizione 4.9) sulla curvatura $R(\nabla)$ per ricavare la lista dell'enunciato. \square

Anche se ad oggi per ogni gruppo nella lista di Berger è presente almeno un esempio di varietà riemanniana che lo realizzi, essa afferma solo che quei gruppi sono gli unici che *possano* essere realizzati come Olonomia di varietà riemanniane: non ne garantisce, a priori, la realizzazione. Inoltre, il teorema fa riferimento a varietà semplicemente connesse, ma rimuovendo tale ipotesi si ottiene l'analoga tesi per $\text{Hol}^0(g)$.

4.4.3 Esempi e conseguenze

Vedremo in quest'ultima parte come l'Olonomia di una varietà liscia sia sorprendentemente legata con la presenza di (una o più) strutture complesse su di essa, tali da renderla per esempio Kähler o HyperKähler.

Il caso $\text{Hol}(g) = \text{SO}(n)$ è realizzato da una varietà riemanniana generica, mentre il caso di metriche con gruppo di Olonomia $\text{Hol}(g) \subseteq \text{Sp}(m)\text{Sp}(1)$, con $m \geq 2$, è realizzato da varietà riemanniane chiamate *Kähler quaternioniche*, e un esempio è fornito dagli spazi proiettivi quaternionici

$$\mathbb{H}\mathbb{P}^n := \mathbb{H}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim,$$

in cui

$$\underline{q} = (q_1, \dots, q_{n+1}) \sim \underline{q}' = (q'_1, \dots, q'_{n+1}) \iff \text{esiste } q \in \mathbb{H} \text{ tale che } \underline{q}' = \underline{q} \cdot q,$$

discussi in [5].

I gruppi G_2 e $\text{Spin}(7)$ sono chiamati *eccezionali*, e le varietà riemanniane che li realizzano sono più rare. Esempi di varietà di Olonomia $\text{Spin}(7)$ sono stati esibiti da Joyce in [10], mentre un esempio di varietà avente come Olonomia il gruppo G_2 è stato trovato da Bryant-Salamon nel 1989 ed è dato dallo spazio 7-dimensionale delle 2-forme self-duali $\Omega_+^2(S^4)$ su S^4 , ovvero le due forme $\omega \in \Omega^2(S^4)$ tali che $\star(\omega) = \omega$, dove

$$\star: \Omega^2(S^4) \longrightarrow \Omega^2(S^4)$$

è l'operatore star di Hodge. Per ulteriori approfondimenti si rimanda a [15].

Gli altri casi presenti nella lista meritano più attenzione. Li analizzeremo uno ad uno, ritrovando le corrispondenze con le strutture complesse di cui abbiamo accennato. Alla base di queste corrispondenze vi è il Principio di Olonomia (Teorema 4.5), che permette di estendere nei casi opportuni strutture quasi complesse a tutta la varietà riemanniana.

Esempio 16 (Il caso $U(m)$, con $n = 2m$). Cominciamo studiando il caso in cui $\text{Hol}(g) \subseteq U(m)$, con $n = 2m$.

Una struttura complessa $J' \in O(n)$ su \mathbb{R}^n individua due autospazi

$$V_i, V_{-i} \subseteq \mathbb{R}^n \text{ tali che } \mathbb{R}^n = V_i \oplus V_{-i},$$

di basi rispettivamente

$$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_s\}, \mathcal{B}_2 = \{w_1, \dots, w_l\} \text{ tali che } \mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \text{ sia una base di } \mathbb{R}^n,$$

e ad ogni matrice complessa $Z = A + iB \in U(m)$, con $A, B \in M_m(\mathbb{R})$, possiamo quindi associare la matrice reale

$$\rho(Z) = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$$

scritta rispetto alla base \mathcal{B} .

L'unitarietà di Z si traduce nelle condizioni

$$\begin{cases} A^t A + B^t B = I_n \\ A^t B - B^t A = 0 \end{cases}$$

che si traducono a loro volta in $\rho(Z)\rho(Z)^t = I_n$, cioè in $\rho(Z) \in O(n)$.

Osserviamo inoltre che per ogni matrice $Z \in U(m)$, $\rho(Z)$ commuta con la struttura complessa

$$J' = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

scritta rispetto alla base \mathcal{B} . Infatti, se $Z = A + iB$ con $A, B \in M_m(\mathbb{R})$, vale

$$\begin{aligned} \rho(Z)J' &= \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} B & A \\ -A & B \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = \\ &= J'\rho(Z) \end{aligned}$$

Abbiamo quindi un morfismo di gruppi

$$\rho: U(m) \longrightarrow O(n)$$

che identifica $U(m)$ con il sottogruppo di $O(n)$ che preserva la struttura complessa J' .

Di conseguenza $\text{Hol}(g) \subseteq U(m)$ se e solo se $\text{Hol}(g)$ preserva J' , e Il Principio di Olonomia (Teorema 4.5) garantisce allora l'equivalenza con l'estensione di J' a tutto M , e cioè all'esistenza su M di una struttura quasi complessa parallela per cui g è hermitiana. Si verifica che tale struttura è integrabile e che dia origine all'estensione globale di $\omega_{J'}$ (forma simplettica standard definita in (1.13)), e che la condizione "parallela" implichi che la metrica sia Kähleriana ([12, p.148]). Un esempio di varietà riemanniana che realizza $SO(n)$ in olonomia è dato dagli spazi proiettivi complessi $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$.

Per ulteriori dettagli su questo argomento si rimanda a [9, p.215].

Esempio 17 (Il caso $SU(m)$, con $n = 2m$). Studieremo ora il caso di varietà riemanniane che realizzano $\text{Hol}(g) \subseteq SU(m)$, dove $n = 2m$, trovando che presentano necessariamente una struttura di varietà Calabi-Yau.

Se la varietà è Kähler, una trasformazione lineare $A \in U(m)$ preserva una forma m -lineare alternante su \mathbb{C}^m

$$\alpha = \beta dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_m$$

con $\beta \in \mathbb{C}$, se e solo se

$$\begin{aligned}\beta dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_m &= \beta \left(\sum_{j=1}^m (A_{1,j}) dz_j \wedge \cdots \wedge \sum_{j=1}^m (A_{m,j}) dz_j \right) = \\ &= \beta \det(A) dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_m,\end{aligned}$$

cioè se e solo se $\det(A) = 1$ e cioè se e solo se $A \in \text{SU}(m)$.

Di conseguenza, sempre per il Principio di Olonomia (Teorema 4.5), $\text{Hol}(g) \subseteq \text{SU}(m)$ se e solo se esiste una forma liscia di tipo $(m, 0)$ (in scrittura di Hodge) costante e non nulla. Una tale forma è chiusa poiché non vi sono $(m+1, 0)$ forme su una varietà di dimensione reale n , ed è quindi olomorfa (per ulteriori dettagli si rimanda a [3, p.758]).

Si verifica inoltre che vale il seguente risultato, che inseriamo per completezza e che ci limitiamo solo ad enunciare:

Corollario 4.21. *Sia X una varietà Kähleriana compatta di dimensione m . Sono equivalenti:*

- (i) *Esiste una metrica Kähleriana g su X tale che $\text{Hol}(g) = \text{SU}(m)$.*
- (ii) *Il fibrato canonico di X è banale e ogni rivestimento étale finito Y di X è tale che $H^0(Y, \Omega_Y^p) = 0$ per ogni $0 < p < m$.*

Di conseguenza, tutte le ipersuperfici lisce in \mathbb{P}^n di grado $n+1$ sono Calabi-Yau.

Per maggiori dettagli sul precedente Corollario, si rimanda a [3, p.761].

Esempio 18 (Il caso $\text{Sp}(m)$, con $n = 4m$). Le metriche che verificano $\text{Hol}(g) \subseteq \text{Sp}(m) \subseteq \text{M}_m(\mathbb{H})$ (si veda la Definizione 1.8), con $n = 4m$, equipagiano varietà dotate di tre strutture complesse compatibili tra loro secondo regole quaternioniche, chiamate HyperKähler.

Infatti, l'Esempio 16 ci garantisce che $\text{Hol}(g) \subseteq \text{U}(2m)$ se e solo se (sempre nel linguaggio dell'Esempio 16) la forma simplettica standard $\omega_{J'}$ viene preservata, insieme all'estensione della struttura complessa J' .

Possiamo inoltre vedere \mathbb{H}^m come \mathbb{R} -spazio vettoriale di base

$$\mathcal{B} := \{e_1, \dots, e_m, e_{m+1}i, \dots, e_{2m}i, e_{2m+1}j, \dots, e_{3m}j, e_{3m+1}k, \dots, e_{4m}k\},$$

e rappresentare le moltiplicazioni per $1, i, j, k$ con le matrici $I_{4m}, I, J, K \in O(4m)$ scritte rispetto alla base \mathcal{B} :

$$I_{4m} = \begin{pmatrix} I_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_m \end{pmatrix}; \quad I = \begin{pmatrix} 0 & -I_m & 0 & 0 \\ I_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_m \\ 0 & 0 & I_m & 0 \end{pmatrix};$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -I_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_m \\ I_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_m & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -I_m \\ 0 & 0 & -I_m & 0 \\ 0 & I_m & 0 & 0 \\ I_m & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

Otteniamo quindi una rappresentazione fedele

$$\begin{aligned} Sp(m) &\longrightarrow O(4m) \\ M = M_0 + M_1 i + M_2 j + M_3 k &\longmapsto M_0 \cdot I_{4m} + M_1 \cdot I + M_2 \cdot J + M_3 \cdot K, \end{aligned}$$

dove $M_0, M_1, M_2, M_3 \in M_m(\mathbb{R})$ e

$$M_0 \cdot I_{4m} + M_1 \cdot I + M_2 \cdot J + M_3 \cdot K := \begin{pmatrix} M_0 & -M_1 & -M_2 & -M_3 \\ M_1 & M_0 & -M_3 & M_2 \\ M_2 & M_3 & M_0 & M_1 \\ M_3 & -M_2 & -M_1 & M_0 \end{pmatrix},$$

che identifica $Sp(m)$ con il sottogruppo di $O(4m)$ che preserva le tre strutture quasi complesse I, J, K . L'Osservazione 15 ci dice in realtà che lo spazio delle strutture preservate da $\text{Hol}(g)$ costituisce una sfera tridimensionale.

Di conseguenza, di nuovo per il Principio di Olonomia (Teorema 4.5) otteniamo che $\text{Hol}(g) \subseteq Sp(m)$ se e solo se M ammette una struttura di varietà Kähler e tre (...una sfera di) strutture quasi complesse I, J, K parallele compatibili tra loro attraverso regole quaternioniche, che si può mostrare essere integrabili.

Ciascuna struttura complessa I, J, K induce una forma Kähler $\omega_I, \omega_J, \omega_K$, e (scegliendo I come struttura complessa privilegiata) si può dimostrare che la 2-forma complessa $\omega_J + i\omega_K$ è una *forma simplettica olomorfa*, ovvero una 2-forma olomorfa chiusa non degenera in ogni punto.

Si verifica che vale il seguente risultato, che di nuovo inseriamo per completezza e che ci limitiamo solamente ad enunciare:

Corollario 4.22. *Sia X una varietà Kähleriana compatta di dimensione $2m$. Sono equivalenti:*

- (i) *Esiste una metrica Kähleriana g su X tale che $\text{Hol}(g) = \text{Sp}(m)$.*
- (ii) *X ha fibrato canonico banale, è semplicemente connessa e $H^0(X, \Omega_X^2)$ ha dimensione 1, generato dalla classe di una forma simplettica olo-morfa.*

Un esempio di queste varietà sono le Superfici K3, che si verifica essere le uniche superfici complesse compatte semplicemente connesse con fibrato canonico banale.

Per ulteriori dettagli sul precedente Corollario si rimanda a [3, p.762].

Bibliografia

- [1] Abate M., Tovena F., *Geometria Differenziale*, Springer, Unitext, 2011.
- [2] Alekseevsky D.V.: *Riemannian spaces with exceptional holonomy*, Functional Analysis and its Applications, **2** (1968), 97-105.
- [3] Beauville A.: *Variétés käeleherienne don la première classe de Chern est nulle*, J. Differ. Geom. **18** (1983), 755–782.
- [4] Berger M.: *Sur les groupes d'holonomie homogène des variétés à connexion affines et des variétés riemanniennes*, Bull. Soc. Math. France **83** (1955), 279-330.
- [5] Berndt J.: *Riemmanian geometry of complex two-plane grassmannians*, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino, Vol. 55, **1** (1997).
- [6] Brown R, Gray A., *Riemannian manifolds with holonomy group $Spin(9)$* , S. Kobayashi et al., editors, Differential Geometry (in honour of Kentauro Yano) (1972), 41-59.
- [7] Hall B.C.: *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations*, Springer, Graduate Text in Mathematics **222**, 2015.
- [8] Hartshorne R.: *Algebraic Geometry*, Springer, Graduate text in Mathematics **52**, 1977.
- [9] Huybrechts D.: *Complex Geometry*, Springer, Universitext, 2005.
- [10] Joyce D.D.: *A new construction of compact 8-manifolds with holonomy $Spin(7)$* , J. Differ. Geom. **53** (1999), 89-130
- [11] Joyce D.D.: *Compact Manifolds with Special Holonomy*, Oxford University Press, 2000.

- [12] Kobayashi S., Nomizu K.: *Foundations of Differential Geometry, Vol.1*, Wiley-Interscience, 1963.
- [13] Lee, J. M.: *Introduction to Smooth manifolds, Second Edition*, Springer, Graduate Text in Mathematics **218**, 2003.
- [14] Lee, J. M.: *Introduction to Topological Manifolds*, Springer, Graduate Texts in Mathematics **202**, 2011.
- [15] Salamon S. M.: *Self-duality and Exceptional Geometry*, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino, Vol. 74, **1** (2016), 291-298.
- [16] Yamabe H.: *On an arcwise connected subgroup of a Lie Group*, Osaka J. Math., Vol.2 (1950), 13-14.