

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI GENOVA

Scuola di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea Magistrale in Fisica



Tesi di Laurea Magistrale

Caratterizzazione di una batteria quantistica e sua simulazione su piattaforma IBM

RELATORI:

Dr. **Dario Ferraro**

Dr. **Michele Grossi**

CORRELATORE:

Prof. **Riccardo Ferrando**

CANDIDATO:

Giulia Gemme

Anno accademico 2021 – 2022

Abstract

La presente tesi si pone l'obiettivo di caratterizzare il funzionamento di una batteria quantistica formata da un sistema a due livelli. In questo dispositivo la fase di carica viene indotta mediante l'applicazione di un drive classico dipendente da tempo. Verranno investigati vari possibili profili per tale forzante al fine di minimizzare il tempo di carica, cioè il tempo necessario per passare da un dato stato iniziale del sistema (quale lo stato fondamentale o una generica sovrapposizione lineare) allo stato eccitato. Ciò sarà fatto tenendo opportunamente conto dei vincoli imposti dai parametri di realizzazione dei dispositivi reali.

Saranno riportati risultati teorici ottenuti attraverso opportune approssimazioni analitiche e studi numerici effettuati utilizzando il pacchetto Qiskit Dynamics per la simulazione del comportamento delle macchine quantistiche. Essi verranno comparati con misure reali effettuate su un quantum computer IBM modificando opportunamente il profilo del drive attraverso il pacchetto Qiskit Pulse per il controllo della dinamica di qubit. Un aspetto importante in questa direzione sarà la calibrazione dei dati forniti dalla macchina in modo tale da poter discriminare fra lo stato fondamentale e quello eccitato, caratterizzando di conseguenza tutti i possibili stati intermedi di interesse.

Considerando differenti condizioni iniziali verrà mostrato come già la più semplice piattaforma quantistica a disposizione, la macchina Armonk costituita da un singolo qubit superconduttivo nel regime di trasme, presenti performance di carica in linea con batterie quantistiche di punta discusse recentemente in letteratura, senza alcun tipo di ottimizzazione. Questo lavoro rappresenta il primo esempio di simulazione di una batteria quantistica mediante dispositivi solitamente usati per applicazioni nel contesto della computazione quantistica e apre interessanti nuove prospettive in questo ambito di ricerca.

Indice

1	Elementi di base	8
1.1	Sistemi a due livelli	8
1.1.1	Evoluzione temporale	10
1.2	Qubit	10
1.2.1	Decoerenza del sistema	11
1.2.2	Qubit superconduttivi	12
1.2.3	Alternative al qubit superconduttivo	24
2	Batterie Quantistiche	26
2.1	Modellizzazione del sistema	27
2.2	Figure di merito	27
2.3	Carica con potenziale costante	28
2.3.1	Stato fondamentale	30
2.3.2	Stato Hadamard	33
2.3.3	Stato Left	35
2.4	Sistema analizzato	36
2.4.1	Energia immagazzinata	40
3	Classificazione dello stato della batteria	42
3.1	Introduzione a Qiskit Pulse	42
3.2	Misura dispersiva	45
3.3	Calibrazione	48
4	Processo di carica	53
4.1	Processo di carica dallo stato fondamentale	53
4.1.1	Inviluppo gaussiano	54
4.1.2	Tempo minimo per effettuare la carica	61
4.1.3	Inviluppo lorentziano	67
4.2	Confronto con lo stato dell'arte	69
4.2.1	Ergotropia	73
4.3	Processo di carica da stati sovrapposizione	76
4.3.1	Stato Hadamard	76
4.3.2	Stato Left	79
A	Codice per la calibrazione e la curva di carica	84

Introduzione

Sviluppatesi nell'ultimo decennio le batterie quantistiche rappresentano un ambito di ricerca sia teorico che sperimentale estremamente attivo e interessante [1]. Esse occupano oggi una posizione di rilievo nel contesto delle tecnologie quantistiche [2, 3, 4]. Questo crescente interesse è alimentato principalmente da due fattori. Il primo è la progressiva miniaturizzazione dei dispositivi elettronici, che ha portato alla necessità di riconsiderare le leggi della termodinamica al fine di estenderle a sistemi di dimensioni microscopiche e mesoscopiche dove gli effetti quantistici non possono essere trascurati. La disciplina che persegue questo intento è la termodinamica quantistica [5, 6, 7, 8]. Il secondo fattore è la ricerca di un miglioramento delle performance dei dispositivi, grazie allo sfruttamento di effetti puramente quantistici, come il principio di sovrapposizione e l'entanglement. Le batterie quantistiche si inseriscono all'interno del panorama delle tecnologie quantistiche come metodo per immagazzinare e fornire energia in modo rapido e controllato a dispositivi quantistici più complessi. Esse rappresentano un radicale cambiamento di prospettiva nell'ambito della manipolazione dell'energia rispetto ai principi elettrochimici sviluppati a partire dal XVIII secolo e ancora oggi alla base della nostra tecnologia [9, 10]. L'obiettivo che si pone la ricerca in questo campo è quello di sfruttare le caratteristiche peculiari dei sistemi quantistici per superare le performance della tecnologia tradizionale in termini di energia immagazzinata, tempo di carica, potenza media di carica e lavoro estraibile [11]. Queste grandezze sono le principali figure di merito che vengono prese in considerazione per caratterizzare e ottimizzare il funzionamento di una batteria quantistica e saranno investigate nel dettaglio nel corso di questa tesi [12].

I primi a introdurre un modello teorico di batteria quantistica sono stati M. Fannes ed R. Alicki nel 2013 [13]. Successivamente, ulteriori modelli teorici più orientati ad una possibile implementazione sperimentale sono stati proposti. La maggior parte di questi si basano su sistemi a due livelli (qubit) che vengono promossi dallo stato fondamentale a quello eccitato per mezzo dell'azione di un altro sistema che svolge il ruolo di caricatore [14, 15]. Quest'ultimo può avere natura quantistica, come ad esempio fotoni intrappolati in una cavità risonante, o essere descritto da una forzante classica dipendente dal tempo e applicata direttamente al qubit [16, 17, 18]. Diversi dispositivi sono stati proposti allo scopo di poter essere direttamente implementati su piattaforme già in uso per la computazione quantistica come sistemi di atomi artificiali [16, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25] e circuiti quantistici risonanti [26, 27, 28, 29, 30, 31]. Verso la fine del 2020, è stata riportata la prima evidenza sperimentale di una batteria quantistica costituita da molecole fluorescenti poste in una cavità risonante [32]. Data la configurazione dei livelli energetici di tali molecole, approssimabili a sistemi quantistici a due livelli, è stato possibile condurre tale esperimento a temperatura ambiente. Ancora più recentemente sono state realizzate batterie

quantistiche utilizzando qubit superconduttivi in configurazione di trasmone [33] e quantum dot [34].

Da quando attraverso una piattaforma cloud è stato possibile accedere da remoto alle prime macchine quantistiche messe a disposizione da IBM, si è avuta l'opportunità unica di simulare sistemi quantistici in condizioni controllate. Ciò ha portato ad un numero esponenzialmente crescente di articoli scientifici in rami di ricerca molto diversi tra loro. Vi sono esempi che spaziano dal campo della chimica quantistica a quello delle scienze dei materiali [35, 36, 37], dall'analisi di cluster magnetici molecolari con calcolo di funzioni di correlazione dinamica spin-spin [38], fino alla teoria quantistica dei campi [39, 40], alla fisica delle alte energie [41, 42] e alla materia oscura [43]. Inoltre, uscendo dall'ambito prettamente scientifico sono state considerate anche applicazioni nei campi della finanza e dell'ottimizzazione [44, 45].

L'obiettivo della presente tesi è realizzare la prima simulazione di una batteria quantistica caricata attraverso una forzante classica utilizzando un dispositivo quantistico IBM [46]. Tra i vari chip messi a disposizione sulla piattaforma cloud IBM, è stato utilizzato il processore quantistico Armonk, costituito da un singolo qubit superconduttivo in configurazione di trasmone [47]. Mediante l'uso del pacchetto Qiskit Pulse [48, 49], recentemente reso disponibile su tale macchina, sono stati investigati vari possibili profili per la forzante classica al fine di minimizzare il tempo di carica, cioè il tempo necessario per passare da un dato stato iniziale del sistema (quale lo stato fondamentale o una generica sovrapposizione lineare) allo stato eccitato. Ciò è stato fatto tenendo opportunamente conto dei vincoli imposti dai parametri di realizzazione del dispositivo. Senza implementare alcuna procedura di ottimizzazione ad hoc sui parametri del sistema, le prestazioni in termini di tempo di carica ed energia immagazzinata sono compatibili con esperimenti di riferimento in questo ambito di ricerca [33]. Inoltre, si è osservato che gli errori di inizializzazione del singolo qubit inevitabilmente presenti in questi dispositivi solitamente denominati Noise Intermediate-Scale Quantum (NISQ) [50], possono essere dannosi certamente in una prospettiva di calcolo quantistico, ma possono paradossalmente portare a un miglioramento delle prestazioni quando questi sistemi sono utilizzati come batterie quantistiche.

La tesi è strutturata in quattro capitoli, i primi tre descrivono gli strumenti teorici e di analisi dati necessari per studiare la fase di carica di una batteria quantistica e l'implementazione sulla piattaforma IBM, mentre il quarto riporta i risultati originali ottenuti durante questo lavoro di ricerca. Parte di questi risultati sono inoltre contenuti nell'articolo "IBM Quantum Platforms: A Quantum Battery Perspective" [51], che ha visto la collaborazione del gruppo di fisica mesoscopica del dipartimento di fisica dell'Università di Genova e dell'IBM Quantum Hub del CERN di Ginevra. Nel seguito viene brevemente descritto il contenuto di ciascun capitolo.

Il **Capitolo 1** è dedicato all'introduzione degli elementi di base, sia teorici che sperimentali, necessari allo studio e all'implementazione di sistemi quantistici a due livelli [52]. Nella prima parte viene introdotto il formalismo utilizzato per descrivere la fisica dei sistemi a due livelli e la loro evoluzione temporale [53]. La seconda parte invece è dedicata all'introduzione del concetto di *qubit* [54, 55] e di alcune tra le più comuni piattaforme che vengono utilizzate per realizzare tali dispositivi sperimentalmente [56]. Particolare attenzione è dedicata alla descrizione dei qubit

superconduttivi nella configurazione di trasimone [57], tecnologia usata nei quantum computer IBM fra cui quello utilizzato nel corso della tesi. Per completezza vengono brevemente menzionate le caratteristiche dei qubit basati su ioni intrappolati [58, 59] e quantum dot [60].

Il **Capitolo 2** è incentrato sulla descrizione delle caratteristiche generali delle batterie quantistiche [61]. Viene introdotto il modello teorico utilizzato durante la tesi e le figure di merito principali per caratterizzare il comportamento della batteria. Per guidare meglio il lettore nelle discussioni successive, un ampio spazio è dedicato all'applicazione dei concetti sopracitati al caso semplice di una batteria costituita da un trasimone caricato attraverso un campo elettrico costante. Per questo sistema vengono analizzate le figure di merito di energia e potenza media considerando tre diverse condizioni iniziali. Nello specifico viene discussa la fase di carica della batteria inizializzata nello stato fondamentale e in stati di massima sovrapposizione. Tra gli infiniti stati di massima sovrapposizione possibili sono stati analizzati lo stato Hadamard, avente una differenza di fase nulla tra lo stato fondamentale e lo stato eccitato, e lo stato Left, avente una differenza di fase pari a $-\frac{\pi}{2}$. Il capitolo si conclude con la descrizione del sistema che è stato studiato nel corso della tesi per comprendere quali sono i parametri fondamentali che descrivono l'evoluzione dell'energia immagazzinata al suo interno.

Una volta compreso quali sono gli elementi di base necessari per studiare il processo di carica di una batteria quantistica e descritto dal punto di vista teorico il sistema che è stato preso in esame, si passa alla descrizione degli aspetti rilevanti dell'analisi dati e della simulazione. Nel **Capitolo 3** viene introdotto il pacchetto *Qiskit Pulse* [48, 62], utilizzato per generare gli impulsi usati per caricare la batteria, e il tipo di misura effettuata sui qubit IBM. Si tratta di una *misura dispersiva* [57], che avviene mediante l'accoppiamento del qubit con una cavità risonante. Tale interazione è ben descritta dall'hamiltoniana di Jaynes-Cummings [63] che viene discussa nel dettaglio. Successivamente viene descritto l'algoritmo di calibrazione che è stato implementato per classificare i dati estratti dal dispositivo, determinando la probabilità del sistema di trovarsi nello stato fondamentale o in quello eccitato.

Il **Capitolo 4** contiene i risultati originali ottenuti durante la tesi ed è dedicato all'analisi del processo di carica della batteria. Quando quest'ultima è inizializzata nello stato fondamentale vengono confrontate le curve di carica ottenute mediante un simulatore, contenuto nel modulo *Qiskit Dynamics*, a partire dal modello teorico discusso nel capitolo 2, con quelle ottenute dal dispositivo reale, il chip Armonk. Sono quindi descritti diversi involuppi dell'impulso, di forma gaussiana e lorentziana, in modo da capire quali sono i vincoli che devono essere rispettati per ottenere una buona carica della batteria. Particolare attenzione è dedicata alla ricerca del tempo minimo con cui si può effettuare il passaggio dallo stato fondamentale allo stato eccitato (processo di carica). Partendo dalle curve di carica viene infine caratterizzata l'incertezza con la quale il sistema viene inizializzato nello stato fondamentale. I risultati ottenuti sono compatibili con lo stato dell'arte. Al fine di chiarire meglio questo punto abbiamo introdotto e studiato l'ergotropia, una quantità molto usata per descrivere il comportamento di una batteria quantistica. Questa quantità è definita come la massima energia che può essere estratta da una batteria quantistica a seguito di una trasformazione unitaria e per il sistema analizzato in questa tesi coincide con l'energia immagazzinata. La parte finale del capitolo è infine dedicata alla descrizione del processo di carica della batteria a partire da uno stato di sovrappo-

posizione, in modo da caratterizzare il ruolo svolto dallo stato iniziale. Per condurre questa analisi si è inizializzato il sistema nello stato fondamentale e si è applicata una rotazione che lo porta nello stato di sovrapposizione desiderato. Gli stati che sono stati considerati sono gli stessi introdotti nel capitolo 2 (Hadamard e Left).

Il programma scritto ed utilizzato per la calibrazione e lo studio della fase di carica della batteria quantistica è stato scritto in python e riportato per completezza in appendice A.

Capitolo 1

Elementi di base

L'obiettivo di questo capitolo è quello di introdurre gli elementi teorici e sperimentali necessari per studiare il processo di carica di una batteria quantistica. Nella prima parte verranno descritte le caratteristiche fondamentali dei sistemi a due livelli e successivamente verranno introdotti alcuni dei sistemi fisici utilizzati per realizzarli in laboratorio. Poiché la tesi è incentrata sullo studio di un dispositivo IBM utilizzato come batteria quantistica, particolare attenzione verrà dedicata alla trattazione dei qubit superconduttivi, tecnologia utilizzata nei quantum computer IBM.

1.1 Sistemi a due livelli

Gli elementi alla base delle più semplici batterie quantistiche sono i sistemi a due livelli [12], per prima cosa è quindi necessario discutere le caratteristiche fondamentali di questi sistemi. L'hamiltoniana $\hat{\mathcal{H}}$ che descrive un sistema a due livelli agisce in uno spazio di Hilbert h bidimensionale. Una base possibile per definire gli operatori hermitiani che agiscono in tale spazio è quella degli operatori di Pauli più l'identità:

$$\{\mathbb{I} \equiv \hat{\sigma}_0, \hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z\}. \quad (1.1)$$

Nella base in cui $\hat{\sigma}_z$ è diagonale i suoi autostati sono rappresentati come:

$$|0\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |1\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

La base 1.2, nell'ambito delle tecnologie quantistiche, viene chiamata *base computazionale* e permette di descrivere un generico stato del sistema come:

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle \quad (1.3)$$

con $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

Nella base computazionale gli operatori 1.1 sono rappresentati dalle seguenti matrici [53, 64]:

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \hat{\sigma}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Le principali proprietà di cui godono gli operatori di Pauli sono:

- $\text{Tr } \hat{\sigma}_i = 0$,

- $\det \hat{\sigma}_i = -1$,
- $[\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j] = i\epsilon_{ijk}\hat{\sigma}_k$,
- $\{\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j\} = 2\delta_{ij}$

con $i, j, k = x, y, z$. Poiché 1.1 è una base di \mathcal{h} , l'hamiltoniana di un sistema a due livelli è scrivibile come:

$$\hat{\mathcal{H}} = \lambda_0 \hat{\sigma}_0 + \boldsymbol{\lambda} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} \quad (1.5)$$

dove $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z)$ e $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z)$. Il termine costante, $\lambda_0 \hat{\sigma}_0$, può essere riassorbito ridefinendo opportunamente lo zero dell'energia.

A partire dalla 1.5 è possibile calcolare gli autostati e lo spettro energetico del sistema. Quest'ultimo è dato dagli autovalori dell'hamiltoniana 1.5:

$$E_{\pm} = \lambda_0 \pm |\boldsymbol{\lambda}| = \lambda_0 \pm \sqrt{\sum_{i=1}^3 \lambda_i^2}. \quad (1.6)$$

Gli autostati normalizzati invece sono:

$$|\psi_{\pm}\rangle = \sqrt{\frac{E_{\pm} - \lambda_0}{2E_{\pm}}} |1\rangle + \frac{i\lambda_y - \lambda_x}{\sqrt{2E_{\pm}(E_{\pm} - \lambda_z)}} |0\rangle. \quad (1.7)$$

La rappresentazione in coordinate polari della 1.3 è [52]:

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + e^{i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle \quad (1.8)$$

con $\theta \in [0, \pi]$ e $\phi \in [0, 2\pi]$. Essa porta ad una naturale rappresentazione geometrica dello stato di un sistema a due livelli su una sfera di raggio unitario, la *sfera di Bloch*, mostrata in figura 1.1. Lo stato descritto dall'equazione 1.8 è rappresentato dal vettore unitario $\mathbf{r} = (r_x, r_y, r_z)$ con $r_i = \langle \psi | \hat{\sigma}_i | \psi \rangle$. Nella base 1.1 si ha:

$$r_x = \langle \psi | \hat{\sigma}_x | \psi \rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{pmatrix} = \sin \theta \cos \phi \quad (1.9)$$

$$r_y = \langle \psi | \hat{\sigma}_y | \psi \rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{pmatrix} = \sin \theta \sin \phi \quad (1.10)$$

$$r_z = \langle \psi | \hat{\sigma}_z | \psi \rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{pmatrix} = \cos \theta. \quad (1.11)$$

Il polo nord della sfera rappresenta lo stato $|0\rangle$ e il polo sud lo stato $|1\rangle$. Gli stati rappresentati dagli altri punti della sfera di Bloch vengono chiamati *cat states* [65] e corrispondono agli stati puri di un sistema a due livelli. I punti all'interno della sfera rappresentano invece gli stati misti del sistema e vengono descritti dal formalismo della matrice densità [55, 64].

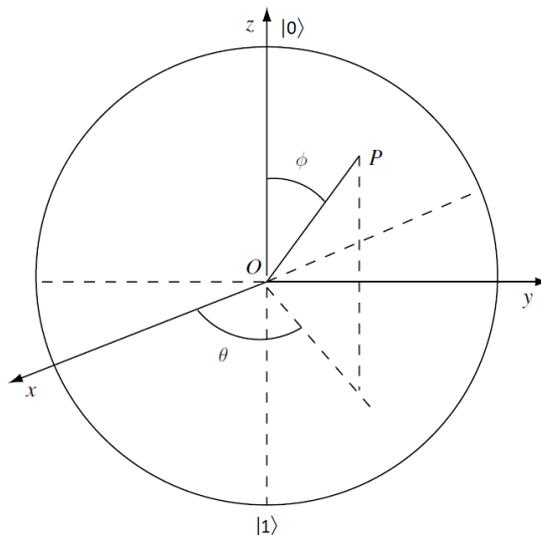


Figura 1.1: Rappresentazione della sfera di Bloch tratta da [54] con modifiche minori. Lo stato rappresentato dal vettore unitario \mathbf{r} che identifica il punto \mathbf{P} è descritto dall'equazione 1.8.

1.1.1 Evoluzione temporale

L'evoluzione temporale di uno stato quantistico è descritta dall'equazione di Schrödinger [53]:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{\mathcal{H}}(t) |\psi(t)\rangle. \quad (1.12)$$

Per un sistema chiuso è sempre possibile definire un operatore $\hat{\mathcal{U}}(t)$ tale per cui:

$$|\psi(t)\rangle = \hat{\mathcal{U}}(t) |\psi(0)\rangle. \quad (1.13)$$

Nel caso in cui $\hat{\mathcal{H}}$ non dipenda esplicitamente dal tempo, sostituendo questa espressione nell'equazione 1.12 si ottiene:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\mathcal{U}}(t) |\psi(0)\rangle &= \hat{\mathcal{H}} \hat{\mathcal{U}}(t) |\psi(0)\rangle \\ i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\mathcal{U}}(t) &= \hat{\mathcal{H}} \hat{\mathcal{U}}(t) \\ \implies \hat{\mathcal{U}}(t) &= e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{\mathcal{H}} t}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Per trattare l'evoluzione temporale è generalmente più conveniente lavorare nella base degli autostati dell'hamiltoniana; in questa base $\hat{\mathcal{H}}$ è diagonale e di conseguenza lo è anche l'operatore $\hat{\mathcal{U}}(t)$.

Nel caso in cui l'hamiltoniana dipenda esplicitamente dal tempo è possibile effettuare un ragionamento analogo all'equazione 1.14 solo nel caso in cui $[\hat{\mathcal{H}}(t_1), \hat{\mathcal{H}}(t_2)] = 0$.

1.2 Qubit

Nella sezione precedente sono state descritte le proprietà fondamentali dei sistemi a due livelli, che costituiscono la base delle tecnologie quantistiche attuali [64]. Lo

spazio di Hilbert in cui vivono i sistemi a due livelli può essere visto come una generalizzazione del noto sistema classico che descrive il bit, definendo il quantum bit o *qubit*. I bit classici possono assumere solo valori 0 e 1, mentre i qubit possono trovarsi in un qualsiasi stato della sfera di Bloch.

L'implementazione fisica di sistemi a due livelli può avvenire seguendo due approcci differenti: partendo da sistemi naturali o da sistemi artificiali, appositamente ingegnerizzati [56]. Nel primo caso vengono utilizzati sistemi esistenti in natura, ad esempio fotoni, atomi o ioni. Questi sistemi sono naturalmente descritti dalla meccanica quantistica, sono tutti uguali tra loro e possono essere ben isolati rispetto all'ambiente. D'altra parte non permettono di scegliere alcuni parametri fondamentali, ad esempio la differenza di energia tra lo stato $|0\rangle$ e lo stato $|1\rangle$. Inoltre può risultare difficile accoppiarli con un sistema esterno in modo da manipolarli e misurarli, condizione necessaria per costruire un computer quantistico [66]. Il secondo approccio consiste nel realizzare artificialmente sistemi con le caratteristiche richieste. I principali vantaggi forniti dai sistemi artificiali sono una maggiore flessibilità nella scelta dei parametri, entro limiti costruttivi, una maggiore facilità ad accoppiarli opportunamente con i sistemi di controllo e la possibilità di studiare gli effetti della meccanica quantistica su scale molto maggiori di quelle atomiche, tipiche della fisica mesoscopica [54]. Questi aspetti sono alla base anche dei principali problemi nell'uso di sistemi artificiali: spesso interagiscono molto fortemente con l'ambiente, devono lavorare a temperature molto basse ($T \sim mK$ [54]) ed è difficile realizzare qubit uguali tra loro. Quest'ultimo aspetto può essere un ostacolo alla scalabilità dei dispositivi basati su sistemi artificiali. Le tecniche di fabbricazione devono essere estremamente precise, così come gli strumenti utilizzati per misurarli e manipolarli.

La qualità di un qubit è quindi determinata da diversi fattori e può essere descritta da alcuni parametri, nella prima parte di questa sezione verranno analizzati i principali meccanismi che causano perdita di coerenza nei qubit. In particolare verranno analizzati il *tempo di rilassamento*, T_1 , e il *tempo di dephasing*, T_2 . Successivamente si passerà alla descrizione dei principali sistemi fisici utilizzati per realizzare qubit: i qubit a superconduttore, gli ioni intrappolati e i quantum dot. Nei quantum computer realizzati da IBM la tecnologia utilizzata è quella dei trasoni, una particolare configurazione dei qubit superconduttivi che verrà descritta con particolare attenzione, mentre le altre tecnologie per realizzare qubit verranno trattate più brevemente.

1.2.1 Decoerenza del sistema

Nella sezione 1.1 sono state descritte le caratteristiche principali di un sistema a due livelli isolato. In particolare nel paragrafo 1.1.1 è stata descritta l'evoluzione temporale di un sistema chiuso e soggetto ad un'hamiltoniana non dipendente dal tempo. Si è visto che essa è completamente determinata noti lo stato iniziale e l'hamiltoniana del sistema. Quando un qubit interagisce con l'ambiente è necessario tenere in considerazione la presenza di gradi di libertà che rendono l'evoluzione temporale dello stato del qubit non completamente deterministica. Questo effetto viene genericamente chiamato rumore e può avere sia contributi sistematici che stocastici. Il rumore sistematico può essere corretto, se vengono identificate le cause. Il rumore stocastico invece dipende dalle fluttuazioni casuali dei parametri accoppiati al qubit e causa la decoerenza del sistema [57]. Per decoerenza si intende qualsiasi

processo che porta a una perdita di informazione sullo stato quantistico del sistema [64]. La decoerenza è associata a una interazione non controllata del sistema con l'ambiente, che porta alla creazione di uno stato entangled. Esistono due tipi principali di processi che portano a decoerenza del sistema, il *rilassamento* e il *dephasing*. Il rilassamento è un processo collegato alla perdita di energia del sistema a favore dell'ambiente. Quando un qubit si trova nello stato eccitato $|1\rangle$, vi è una probabilità non nulla per unità di tempo che esso decada spontaneamente nello stato fondamentale $|0\rangle$. La probabilità di decadimento è esponenziale e caratterizzata dal *tempo di rilassamento* T_1 [64]. Il dephasing invece è un processo non dissipativo e generalmente è legato ad un accoppiamento della fase del qubit con l'ambiente. Si ha quindi una variazione della fase del qubit caratterizzata dal *tempo di dephasing* T_2 [64].

Un buon qubit è un sistema quantistico attraverso il quale è possibile immagazzinare un'informazione quantistica coerente per il maggior tempo possibile. Inoltre è necessario essere in grado di creare, manipolare e misurare uno stato, prima che il sistema perda coerenza. Questo significa che è necessario avere T_1 e T_2 molto lunghi rispetto al tempo necessario per svolgere un'operazione. In un trasmettitore la durata degli impulsi utilizzati per far compiere la transizione $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$ è dell'ordine di 100 ns, i tempi di decoerenza del sistema sono invece dell'ordine di 100 μ s. Si lavora quindi nel limite di $T_{impulso} \ll T_1, T_2$ dove gli effetti di decoerenza giocano un ruolo marginale. Si noti che per quanto riguarda le batterie quantistiche il rilassamento costituisce un problema fondamentale per il corretto funzionamento dei dispositivi.

1.2.2 Qubit superconduttivi

Il primo passo necessario per descrivere il funzionamento dei qubit a superconduttore è partire dal semplice circuito LC.

Circuito LC

Si consideri un circuito costituito da un induttore L e un condensatore C . La lagrangiana che descrive questo sistema è [67]:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}LI^2 - \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (1.15)$$

con I la corrente che scorre nell'induttore e Q la carica immagazzinata nel condensatore. Per la legge di conservazione della carica, $I = \dot{Q}$, si ha quindi:

$$\mathcal{L} = \frac{L}{2}\dot{Q}^2 - \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}. \quad (1.16)$$

La variabile coniugata alla carica elettrica Q è il flusso attraverso l'induttore, definito come $\Phi(t) = \int_{-\infty}^t d\tau V(\tau)$ con $V = -\frac{Q}{C}$. Si ha quindi:

$$\Phi = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{Q}} = L\dot{Q} = LI \quad (1.17)$$

e l'hamiltoniana del sistema può essere pertanto scritta come:

$$H = \Phi\dot{Q} - \mathcal{L} = \frac{\Phi^2}{2L} + \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}. \quad (1.18)$$

L'evoluzione temporale del sistema è descritta dalle equazioni di Hamilton [67]:

$$\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial \Phi} = \frac{\Phi}{L} \quad (1.19)$$

$$\dot{\Phi} = -\frac{\partial H}{\partial Q} = -\frac{Q}{C}. \quad (1.20)$$

È possibile quindi passare a una descrizione quantistica del sistema promuovendo la coordinata Q e il suo momento coniugato Φ a operatori che soddisfano le regole di commutazione canonica:

$$[\hat{\Phi}, \hat{Q}] = -i\hbar. \quad (1.21)$$

È possibile inoltre fare un parallelismo con le variabili che descrivono usualmente un oscillatore armonico, la posizione e l'impulso:

$$\hat{x} \rightarrow \hat{Q} \quad \hat{p} \rightarrow \hat{\Phi} \quad (1.22)$$

$$m \rightarrow L \quad k \rightarrow \frac{1}{C}. \quad (1.23)$$

Da un punto di vista intuitivo è più naturale operare questa scelta, con il capacitore che porta un contributo di energia potenziale e l'induttore uno di energia cinetica. Nella trattazione della giunzione Josephson, a causa della comparsa di un'induttanza non lineare, sarà più conveniente effettuare la scelta opposta, in cui Φ verrà identificato come coordinata e Q come la sua variabile coniugata. Le due scelte sono formalmente equivalenti.

Grazie alla relazione di commutazione canonica nell'equazione 1.21, si può riscrivere l'hamiltoniana 1.18 in termini di operatori di creazione e distruzione bosonici, \hat{a} e \hat{a}^\dagger tali per cui $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \mathbb{I}$:

$$\hat{H} = \frac{\hbar\Omega}{2} \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \quad (1.24)$$

con $\Omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Essi sono legati agli operatori $\hat{\Phi}$ e \hat{Q} dalle relazioni:

$$\hat{a} = i \frac{1}{\sqrt{2L\hbar\Omega}} \hat{\Phi} + \frac{1}{\sqrt{2C\hbar\Omega}} \hat{Q} \quad (1.25)$$

$$\hat{a}^\dagger = -i \frac{1}{\sqrt{2L\hbar\Omega}} \hat{\Phi} + \frac{1}{\sqrt{2C\hbar\Omega}} \hat{Q}. \quad (1.26)$$

L'equazione 1.24 è l'hamiltoniana di un oscillatore armonico quantistico, il cui spettro è costituito da livelli equispaziati nel quale non è possibile isolare una specifica transizione fra due livelli. Si noti che, affinché un sistema manifesti un comportamento quantistico, è necessario che $k_B T \ll \hbar\Omega$. Nel caso di questi sistemi, assumendo $C \sim \text{pF}$ e $L \sim \text{nH}$, si deve avere $T \sim 10 \text{mK}$ [54]. Per riuscire a identificare un sistema a due livelli che caratterizza un qubit è necessario introdurre un elemento non lineare. Nel caso di qubit superconduttivi si tratta della *giunzione Josephson*.

La giunzione Josephson

Per descrivere il funzionamento della giunzione Josephson è necessario partire dalla descrizione dello stato superconduttivo di un metallo. I principali effetti fisici che si verificano vicino alla transizione di fase metallo-superconduttore possono essere descritti attraverso la teoria di Ginzburg-Landau [68]. Per descrivere la fase superconduttiva nella teoria di Ginzburg-Landau si introduce un parametro d'ordine macroscopico, ψ , che caratterizza il passaggio dalla fase metallica, a $T > T_C$, alla fase superconduttiva, a $T < T_C$. Si assume che il parametro d'ordine ψ , per $T < T_C$, sia legato al numero di coppie di Cooper presenti nel superconduttore attraverso la seguente relazione:

$$n_{pair}(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|^2. \quad (1.27)$$

Questo permette di interpretare il parametro d'ordine come la funzione d'onda macroscopica delle coppie di Cooper presenti nella fase superconduttiva [69].

La teoria di Ginzburg-Landau si basa sull'assunzione che la densità di energia libera, $f_S(T, \psi)$, vicino alla transizione di fase assuma la seguente forma:

$$f_S(T, \psi) = f_N(T) + \alpha(T)|\psi|^2 + \frac{1}{2}\beta(T)|\psi|^4 + \frac{1}{2m^*} \left| \left(\mathbf{p} - \frac{e^*}{c} \mathbf{A} \right) \psi(\mathbf{r}) \right|^2 \quad (1.28)$$

dove $f_N(T)$ è la densità di energia libera nella fase metallica. I parametri $\alpha(T)$ e $\beta(T)$ vengono fissati attraverso osservazioni fenomenologiche:

$$\alpha(T) = \alpha_0(T - T_C) \quad \text{con } \alpha_0 > 0 \text{ per } T \sim T_C \quad (1.29)$$

$$\beta(T) = \beta_0 \quad \text{con } \beta_0 > 0 \text{ per } T \sim T_C. \quad (1.30)$$

Dal confronto con la teoria microscopica BCS, basata sulla descrizione della fase superconduttiva in termini delle coppie di Cooper, si identificano $m^* = 2m_e$ e $e^* = -2e$, con e valore assoluto della carica di un elettrone. Minimizzando l'equazione 1.28 rispetto al parametro d'ordine si trova che ψ deve soddisfare la seguente equazione:

$$\beta(T)|\psi(\mathbf{r})|^2\psi(\mathbf{r}) + \frac{1}{2m^*} \left(\mathbf{p} - \frac{e^*}{c} \mathbf{A} \right) \psi(\mathbf{r}) = -\alpha(T)\psi(\mathbf{r}). \quad (1.31)$$

È inoltre possibile scrivere un'equazione per la supercorrente:

$$\mathbf{J}_S(\mathbf{r}) = -i \frac{\hbar e^*}{2m^*} [\psi^*(\mathbf{r})\nabla\psi(\mathbf{r}) - \psi(\mathbf{r})\nabla\psi^*(\mathbf{r})] - \frac{e^{*2}}{m^*c} |\psi(\mathbf{r})|^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}). \quad (1.32)$$

Scrivendo il parametro d'ordine in coordinate polari, $\psi(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})| e^{i\theta(\mathbf{r})}$, l'equazione 1.32 può essere riscritta come:

$$\mathbf{J}_S(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|^2 \left(\frac{\hbar e^*}{m^*} \nabla\theta(\mathbf{r}) - \frac{e^{*2}}{m^*c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right). \quad (1.33)$$

Si consideri ora un anello superconduttivo come mostrato in figura 1.2. A causa dell'effetto Meissner [69] all'interno del superconduttore si ha:

$$\mathbf{J}_S(\mathbf{r}) = 0. \quad (1.34)$$

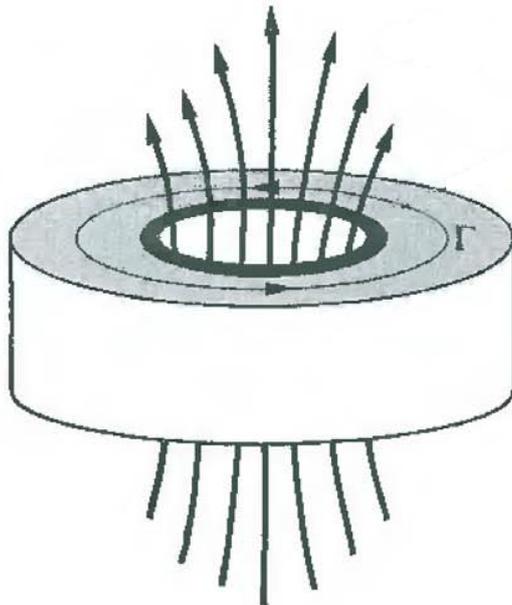


Figura 1.2: Quantizzazione del flusso attraverso un anello superconduttivo. Immagine tratta da [68].

e sostituendo nell'equazione 1.33 si ottiene:

$$\nabla\theta(\mathbf{r}) = \frac{e^*}{\hbar c} \mathbf{A}(\mathbf{r}). \quad (1.35)$$

Integrando l'equazione 1.35 su un percorso chiuso Γ all'interno del superconduttore si ha:

$$\oint_{\Gamma} \nabla\theta(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = \frac{e^*}{\hbar c} \oint_{\Gamma} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = \frac{e^*}{\hbar c} \iint_{\mathcal{S}} \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} \quad (1.36)$$

nel secondo passaggio è stato applicato il teorema di Stokes, con \mathcal{S} la superficie identificata dalla curva Γ . Per il teorema del gradiente, data una curva Γ orientata da un punto \mathbf{p} a un punto \mathbf{q} si ha che:

$$\Delta\theta \equiv \theta(\mathbf{q}) - \theta(\mathbf{p}) = \int_{\mathbf{p},\Gamma}^{\mathbf{q}} \nabla\theta(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l}, \quad (1.37)$$

il primo membro dell'equazione 1.36 rappresenta quindi la variazione $\Delta\theta$ lungo la linea chiusa Γ . Dalla definizione del potenziale vettore \mathbf{A} si ha:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}), \quad (1.38)$$

il membro di destra dell'equazione 1.36 contiene quindi il flusso del campo magnetico $\Phi(\mathbf{B})$ attraverso la superficie \mathcal{S} :

$$\Phi(\mathbf{B}) = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}. \quad (1.39)$$

Sostituendo le equazioni 1.37 e 1.39 nella 1.36 si ha:

$$\Phi(\mathbf{B}) = \frac{\hbar c}{e^*} \Delta\theta. \quad (1.40)$$

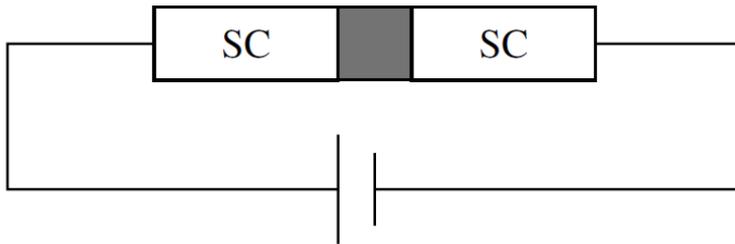


Figura 1.3: Rappresentazione schematica di una giunzione Josephson. In grigio è rappresentato il materiale isolante. Immagine tratta da [54]

Poiché θ è una fase, la sua variazione lungo una linea chiusa deve essere pari a multipli interi di 2π : $\Delta\theta = 2\pi n$, con $n \in \mathbb{Z}$. Questa osservazione porta come risultato la quantizzazione del flusso $\Phi(\mathbf{B})$:

$$\Phi(\mathbf{B}) = \frac{\hbar c}{2e} n \equiv \Phi_0 n \quad (1.41)$$

dove con $\Phi_0 = \frac{\hbar c}{2e}$ è stato definito il *quanto elementare di flusso*.

A questo punto è possibile considerare una giunzione Josephson costituita da due strati di materiale superconduttivo separati da un sottile strato di materiale isolante, come mostrato in figura 1.3. Se il materiale isolante fosse infinitamente spesso, i due materiali superconduttivi sarebbero disaccoppiati e quindi descritti da due parametri d'ordine differenti $\psi_1 = |\psi_1| e^{i\theta_1}$ e $\psi_2 = |\psi_2| e^{i\theta_2}$ con $|\psi_{1/2}|$ e $\theta_{1/2}$ uniformi rispettivamente nel superconduttore $1/2$. Se invece i due superconduttori sono separati da una barriera di spessore b ci si aspetta che i parametri d'ordine decadano esponenzialmente nella regione isolante. È possibile quindi descrivere il sistema attraverso un unico parametro d'ordine:

$$\psi(z) = \psi_1 e^{-\lambda z} + \psi_2 e^{\lambda(z-b)} \quad (1.42)$$

con λ il parametro che caratterizza il decadimento nella regione isolante e z l'asse perpendicolare alle interfacce tra i materiali diversi. L'origine dell'asse z è posta all'interfaccia tra il primo strato superconduttivo e la barriera isolante. Sostituendo nell'equazione 1.33, in assenza di campo magnetico, si ottiene:

$$J_S(z) = \frac{2\hbar e^*}{2m^*} \beta e^{-\lambda b} |\psi_1| |\psi_2| \sin(\theta_2 - \theta_1). \quad (1.43)$$

È importante osservare che la supercorrente tra i due superconduttori è proporzionale alla differenza di fase tra i parametri d'ordine dei due superconduttori. Definendo $\varphi = \theta_2 - \theta_1$ e I_J la corrente dovuta alle proprietà geometriche e fisiche della giunzione si ha:

$$I = I_J \sin \varphi. \quad (1.44)$$

In presenza di una differenza di potenziale V tra i due superconduttori si ha una differenza di energia pari a $2eV$ tra le coppie di Cooper di un superconduttore rispetto all'altro. Riprendendo l'interpretazione di ψ come funzione d'onda è possibile scrivere le equazioni di Schrödinger per ψ_1 e ψ_2 :

$$i\hbar \frac{d\psi_1}{dt} = -eV\psi_1 + K\psi_2 \quad (1.45)$$

$$i\hbar \frac{d\psi_2}{dt} = eV\psi_2 + K\psi_1 \quad (1.46)$$

con K l'ampiezza del tunneling tra i due superconduttori [70]. Sostituendo l'espressione di ψ_1 e ψ_2 in coordinate polari nelle equazioni 1.45 e 1.46 e considerando solo la parte immaginaria si arriva alle seguenti equazioni:

$$\frac{d\theta_1}{dt} = -\frac{K}{\hbar} \sqrt{\frac{|\psi_2|}{|\psi_1|}} \cos \theta + \frac{eV}{\hbar} \quad (1.47)$$

$$\frac{d\theta_2}{dt} = -\frac{K}{\hbar} \sqrt{\frac{|\psi_1|}{|\psi_2|}} \cos \theta - \frac{eV}{\hbar} \quad (1.48)$$

assumendo $|\psi_1| \sim |\psi_2|$ si arriva a:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\theta_2}{dt} - \frac{d\theta_1}{dt} = \frac{2eV}{\hbar}. \quad (1.49)$$

Le equazioni 1.44 e 1.49 sono dette rispettivamente *prima* e *seconda equazione di Josephson* [70]. Derivando la prima equazione di Josephson si ottiene:

$$\dot{I} = I_J \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} \quad (1.50)$$

e ricordando che $\dot{I} = \frac{V}{L}$ si ottiene l'espressione di un'induttanza non lineare:

$$L_J = \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\Phi_0}{2\pi I_J}. \quad (1.51)$$

L'energia immagazzinata da tale elemento circuitale è pari a:

$$E_{J,L} = \int_0^t I(\tau)V d\tau = E_J (1 - \cos \varphi) \quad (1.52)$$

con $E_J = \frac{\Phi_0 I_J}{2\pi}$ l'energia tipica della giunzione Josephson. La giunzione ha anche una capacità C_J , alla quale è associata un'energia pari a:

$$E_{J,C} = \frac{Q^2}{2C_J} \quad (1.53)$$

con Q la carica immagazzinata all'interno della giunzione. Se N_1 e N_2 sono rispettivamente il numero di coppie di Cooper presenti nei due strati di materiale superconduttivo, si definisce $N = N_1 - N_2$ l'eccesso di coppie di Cooper nella giunzione. La carica nella giunzione è quindi pari a $2eN$. A partire da ragionamenti precedenti si può scrivere l'hamiltoniana classica associata a una giunzione Josephson come

$$H_J = \frac{Q^2}{2C_J} - E_J \cos \varphi = 4E_C N^2 - E_J \cos \varphi \quad (1.54)$$

dove $E_C = \frac{e^2}{2C_J}$ e dove si è trascurato il termine costante. Associando il termine $4E_C N^2$ all'energia cinetica e $-E_J \cos \varphi$ all'energia potenziale, l'hamiltoniana di una giunzione Josephson corrisponde a quella di un oscillatore anarmonico, dove le variabili coniugate sono:

$$\varphi \in (0, 2\pi) \rightarrow x \quad N \in (-\infty, +\infty) \rightarrow p. \quad (1.55)$$

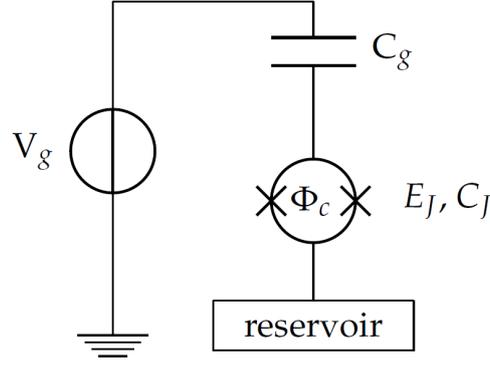


Figura 1.4: Rappresentazione schematica del circuito considerato. In figura al posto di una singola giunzione Josephson è rappresentato uno SQUID composto da due giunzioni. Immagine tratta da [55].

Si noti che, come era stato anticipato, è stata fatta l'identificazione opposta a quella effettuata nella sezione 1.2.2 per l'oscillatore LC. Prima di passare alla trattazione quantistica è utile inserire il sistema in un circuito in cui è presente un gate con potenziale V_g e una capacità C_g in serie alla giunzione, come mostrato in figura 1.4. La presenza di V_g introduce uno shift nel valore di N pari a una quantità $N_g = \frac{C_g V_g}{2e}$ e permette di poter controllare la giunzione, e quindi il qubit, dall'esterno. L'hamiltoniana può quindi essere riscritta come:

$$H_J = 4E_C(N - N_g)^2 - E_J \cos \varphi \quad (1.56)$$

avendo ridefinito $E_C = \frac{e^2}{2(C_J + C_g)}$. A questo punto è possibile elevare φ e N a operatori che soddisfano una relazione di commutazione canonica $[\varphi, N] = i\hbar$ e scrivere l'hamiltoniana quantistica nella forma:

$$\hat{H}_J = 4E_C(\hat{N} - N_g)^2 - E_J \cos \hat{\varphi}. \quad (1.57)$$

Per procedere all'identificazione di due stati energetici che possano essere utilizzati come qubit, è conveniente riscrivere l'hamiltoniana nella base degli autostati $|N\rangle$, stati a numero definito di coppie di Cooper [56]:

$$\hat{N} |N\rangle = N |N\rangle. \quad (1.58)$$

A partire da questa base si può costruire anche la base degli autostati di $\hat{\varphi}$:

$$|\varphi\rangle = \sum_{N=-\infty}^{\infty} e^{iN\varphi} |N\rangle \quad (1.59)$$

e la relazione inversa:

$$|N\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-iN\varphi} |\varphi\rangle d\varphi. \quad (1.60)$$

È utile inoltre definire l'operatore $e^{i\hat{\varphi}}$:

$$e^{i\hat{\varphi}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\hat{\varphi}\varphi'} |\varphi'\rangle \langle\varphi'| d\varphi'. \quad (1.61)$$

Per calcolo diretto si verifica che

$$e^{i\hat{\varphi}} |\varphi\rangle = e^{i\varphi} |\varphi\rangle \quad (1.62)$$

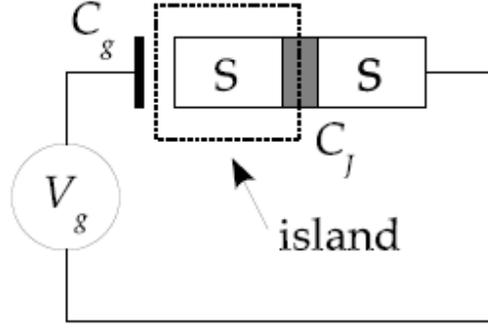


Figura 1.5: Rappresentazione schematica di una Cooper pair box. Giunzione Josephson inserita in un circuito con potenziale V_g e capacità C_g . Nel riquadro tratteggiato è racchiusa un'isola di materiale superconduttivo. Figura tratta da [55].

$$e^{i\hat{\varphi}} |N\rangle = |N-1\rangle. \quad (1.63)$$

Poiché l'equazione 1.63 è valida per tutti gli $|N\rangle$ si ha:

$$e^{i\hat{\varphi}} = \sum_N |N-1\rangle \langle N| \quad e^{-i\hat{\varphi}} = \sum_N |N\rangle \langle N-1|. \quad (1.64)$$

Questo permette di riscrivere l'hamiltoniana 1.57 in termini della base $\{|N\rangle\}$:

$$\begin{aligned} \hat{H}_J &= 4E_C(\hat{N} - N_g)^2 - E_J \cos \hat{\varphi} = 4E_C(\hat{N} - N_g)^2 - \frac{1}{2}E_J(e^{i\hat{\varphi}} + e^{-i\hat{\varphi}}) = \\ &= \sum_{N=-\infty}^{+\infty} [4E_C(N - N_g)^2 |N\rangle \langle N| - \frac{1}{2}E_J(|N-1\rangle \langle N| + |N\rangle \langle N-1|)]. \end{aligned} \quad (1.65)$$

È necessario distinguere due casi in base al rapporto esistente tra i parametri E_J e E_C . Se $E_C \gg E_J$ si ha il regime di *charge qubit*, se invece $E_C \ll E_J$ si ha il regime *transmon qubit* (trasmone) [47, 67]. Quest'ultima è la configurazione utilizzata nei quantum computer dell'IBM.

Charge Qubit - $E_C \gg E_J$

In questo caso il sistema può essere visto come una *Cooper pair box*, mostrata in figura 1.5 [55, 56]. Si ha un elettrodo superconduttivo, l'*isola* (island in figura 1.5), in contatto con un serbatoio superconduttivo attraverso una giunzione Josephson (regione grigia in figura 1.5). La giunzione ha capacità C_J e le coppie di Cooper in eccesso nella giunzione possono passare per effetto tunnel nell'isola in risposta a un campo elettrico applicato attraverso il potenziale V_g e la capacità C_g . In questa situazione il numero di coppie di Cooper all'interno della giunzione è ben definito, la base $\{|N\rangle\}$ è dunque una buona base per descrivere il sistema. Riprendendo l'equazione 1.65 si può osservare che il termine $|N-1\rangle \langle N| + |N\rangle \langle N-1|$ descrive il tunneling di una coppia di Cooper attraverso la giunzione, E_J quindi rappresenta l'accoppiamento attraverso la giunzione. Poiché $E_J \ll E_C$ è possibile trattare il termine induttivo perturbativamente.

Per $E_J = 0$ l'hamiltoniana 1.65 è diagonale nella base $\{|N\rangle\}$. In figura 1.6(a) sono riportati i livelli energetici per diversi valori di N , in funzione di N_g . Si noti che

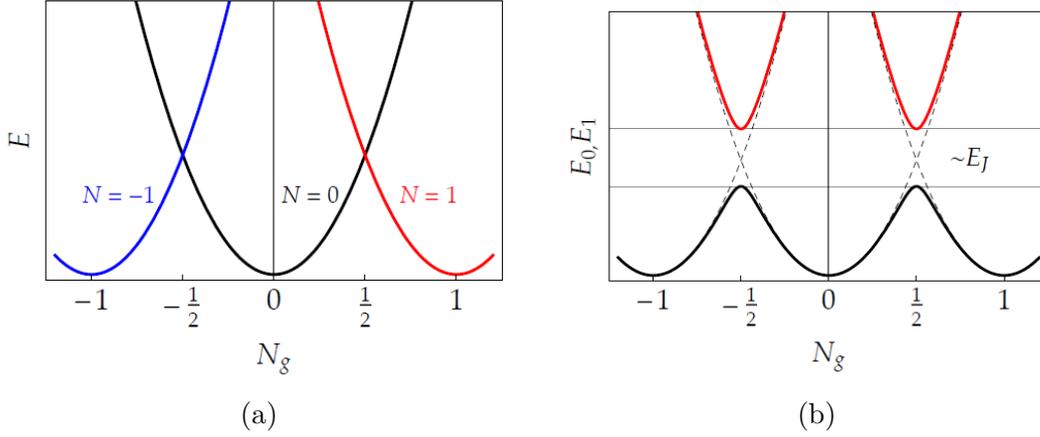


Figura 1.6: Livelli energetici degli stati $|N\rangle$ (a) nel caso $E_J = 0$, (b) nel caso $E_J \ll E_C$. Immagini tratte da [55].

due stati $|N\rangle$ e $|N+1\rangle$ sono degeneri per $N_g = \frac{1}{2} + N$. Nel seguito verrà mostrato che questa degenerazione viene rotta nel caso $E_J \neq 0$. Poiché i livelli energetici sono periodici in N_g è possibile scegliere $N = 0$ senza perdita di generalità. Definendo Δ_g tale per cui $N_g = N + \frac{1}{2} + \Delta_g$ e limitandosi a studiare una regione tale per cui $\Delta_g \ll 1$, lo spettro è costituito da due livelli energetici ($|0\rangle$ e $|1\rangle$ nel caso $N = 0$) molto ben separati da tutti gli altri. È possibile quindi assumere che i livelli ad alta energia abbiano un ruolo trascurabile nella dinamica del sistema a bassa energia. In questo caso si parla di *two-level approximation*. Con queste assunzioni l'hamiltoniana 1.65 può essere riscritta come:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}} &= 4E_C \left[\left(\frac{1}{2} + \Delta_g \right)^2 |0\rangle \langle 0| + \left(\frac{1}{2} - \Delta_g \right)^2 |1\rangle \langle 1| \right] - \frac{E_J}{2} (|0\rangle \langle 1| + |1\rangle \langle 0|) \\ &= 4E_C \left(\frac{1}{4} + \Delta_g^2 \right) (|0\rangle \langle 0| + |1\rangle \langle 1|) + 4E_C \Delta_g (|0\rangle \langle 0| - |1\rangle \langle 1|) - \\ &\quad - \frac{E_J}{2} (|0\rangle \langle 1| + |1\rangle \langle 0|) \end{aligned} \quad (1.66)$$

$$= 4E_C \left(\frac{1}{4} + \Delta_g^2 \right) \mathbb{I} + 4E_C \Delta_g \hat{\sigma}_z - \frac{E_J}{2} \hat{\sigma}_x. \quad (1.67)$$

L'hamiltoniana finale per il sistema a due livelli così ottenuto è quindi:

$$\hat{\mathcal{H}} = 4E_C \left(\frac{1}{4} + \Delta_g^2 \right) \mathbb{I} + \begin{pmatrix} 4E_C \Delta_g & -\frac{E_J}{2} \\ -\frac{E_J}{2} & 4E_C \Delta_g \end{pmatrix}. \quad (1.68)$$

Riprendendo l'equazione 1.6, gli autovalori di questa hamiltoniana sono:

$$E_{\pm} = 4E_C \left(\frac{1}{4} + \Delta_g^2 \right) \pm \frac{E_J}{2} \sqrt{1 + \frac{64E_C^2 \Delta_g^2}{E_J^2}}. \quad (1.69)$$

In figura 1.6(b) sono mostrati i livelli energetici della Cooper pair box in presenza di un piccolo accoppiamento induttivo. Dall'equazione 1.69 è possibile calcolare come viene rotta la degenerazione:

$$\Delta E \equiv E_+ - E_- = E_J \sqrt{1 + \frac{64E_C^2 \Delta_g^2}{E_J^2}}. \quad (1.70)$$

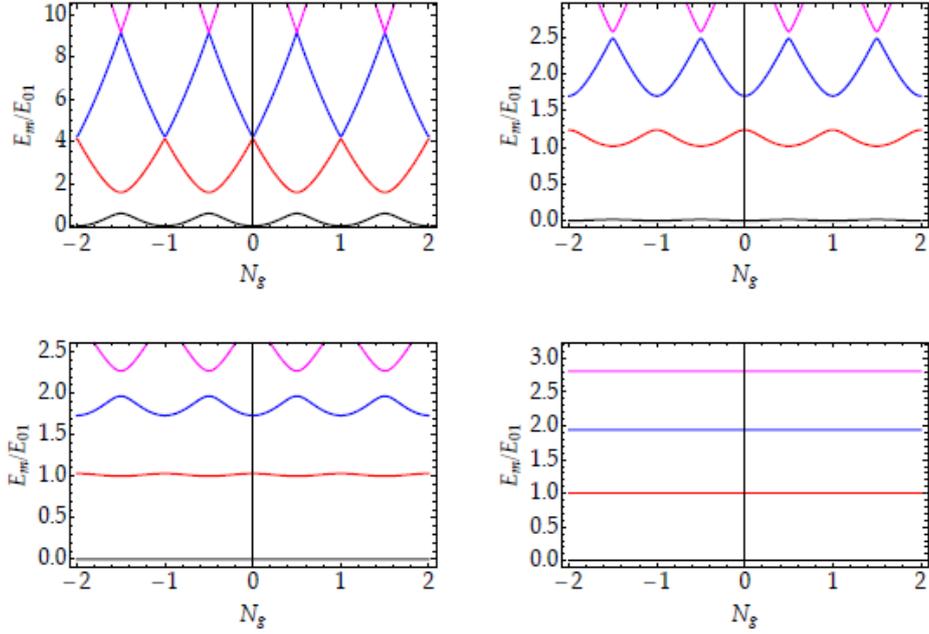


Figura 1.7: In figura sono rappresentati i primi quattro livelli energetici (normalizzati rispetto a $E_{01} = \min_{N_g}(E_1 - E_0)$) per diversi valori del rapporto E_J/E_C . In alto a sinistra $E_J/E_C = 1.0$, In alto a destra $E_J/E_C = 5.0$, in basso a sinistra $E_J/E_C = 10.0$ e in basso a destra $E_J/E_C = 50.0$. Immagine tratta da [55].

Questa espressione si semplifica in due particolari regimi energetici:

$$\begin{cases} \Delta E \simeq E_J & \text{se } \frac{64E_C^2\Delta_g^2}{E_J^2} \ll 1 \\ \Delta E \simeq 2E_C\Delta_g & \text{se } \frac{64E_C^2\Delta_g^2}{E_J^2} \gg 1. \end{cases} \quad (1.71)$$

Nel primo caso l'ampiezza del gap energetico è indipendente da N_g e fa sì che la Cooper pair box sia in parte immune al rumore dovuto a fluttuazioni di N_g per $\Delta_g = 0$, questo punto viene chiamato *sweet spot* [56]. Nel regime opposto invece la separazione tra i livelli è la stessa del caso $E_J = 0$, equazione 1.69. Questo significa che il coupling perturba sensibilmente i livelli solo vicino ai punti di degenerazione. La condizione $\frac{64E_C^2\Delta_g^2}{E_J^2} \simeq 1$ definisce il limite della regione in cui agisce effettivamente la perturbazione. Esplicitandola in termini di Δ_g si ha:

$$\Delta_g \simeq \frac{E_J}{8E_C}. \quad (1.72)$$

Questo evidenzia che il gap che si apre nei punti degeneri e l'ampiezza del regime di accoppiamento sono determinati dal rapporto di E_J e E_C . In figura 1.7 sono mostrati i livelli energetici in funzione di N_g ottenuti risolvendo esattamente l'equazione di Schrödinger associata all'hamiltoniana 1.68 per diversi valori del rapporto $\frac{E_J}{E_C}$ [47]. Si è visto che il gap di energia tra lo stato $|0\rangle$ e lo stato $|1\rangle$ dipende da V_g e questo permette di controllare sperimentalmente la dinamica del sistema. Tuttavia ci sono diversi fattori non controllabili dal punto di vista sperimentale che possono portare a fluttuazioni di V_g e introdurre rumore nel sistema. L'isola superconduttiva di una Cooper pair box deve essere abbastanza piccola in modo tale che la variazione

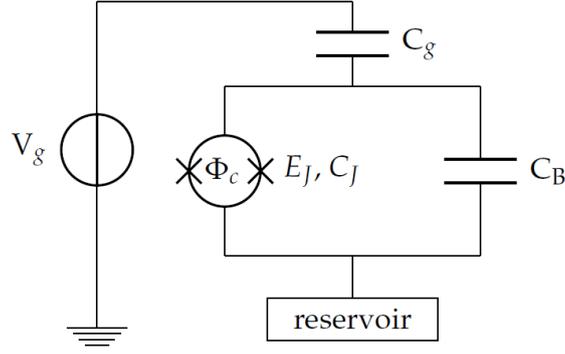


Figura 1.8: Cooper pair box nella configurazione di trasmone. In figura al posto di una singola giunzione Josephson è rappresentato uno SQUID composto da due giunzioni. Immagine tratta da [55]

di una singola coppia di Cooper al suo interno porti a una variazione energetica significativa. La Cooper pair box è quindi estremamente sensibile alle variazioni dell'ambiente circostante. Questo effetto viene comunemente chiamato *charge noise*. Per ovviare a questi problemi spesso si preferisce lavorare nel regime di trasmone, che verrà discusso nel paragrafo successivo.

Trasmone - $E_C \ll E_J$

Fino ad ora si è analizzato il comportamento di una Cooper pair box nel regime $E_J \ll E_C$, altrettanto interessante è il regime nel quale $E_J \gg E_C$. In questo caso si parla di *trasmone* (dall'inglese transmon qubit) [47]. È conveniente introdurre nel sistema una ulteriore capacità, in parallelo alla giunzione Josephson, come mostrato in figura 1.8. Il contributo capacitivo all'energia diventa quindi $E_C = \frac{e^2}{2(C_J + C_g + C_B)}$. Tipicamente il regime $E_C \ll E_J$ si ottiene incrementando la capacità C_B . Dalla figura 1.7 si osserva che all'aumentare del rapporto $\frac{E_J}{E_C}$ si ha un progressivo appiattimento dei livelli energetici in funzione di N_g . Questo significa che la variazione del numero di coppie di Cooper presenti all'interno della giunzione porta a una variazione via via minore dell'energia del sistema. Nel limite di trasmone è possibile sviluppare al quart'ordine il $\cos \varphi$ nell'hamiltoniana 1.57 ottenendo [55]

$$\hat{H}_{tr} = 4E_C \hat{N}^2 + \frac{1}{2} E_J \hat{\varphi}^2 - \frac{1}{24} E_J \hat{\varphi}^4. \quad (1.73)$$

I primi due termini costituiscono l'hamiltoniana di un oscillatore armonico, il termine in $\hat{\varphi}^4$ introduce l'anarmonicità voluta. Lo scopo della trattazione seguente è mostrare che questa anarmonicità è sufficiente per identificare un sistema a due livelli.

Partendo dall'hamiltoniana di un oscillatore armonico introduciamo gli operatori di creazione e distruzione bosonici \hat{b} e \hat{b}^\dagger tali per cui $[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = \mathbb{I}$. Gli operatori \hat{N} e $\hat{\varphi}$ in termini di tali operatori si scrivono:

$$\hat{\varphi} = 2\sqrt{\frac{E_C}{\hbar\omega_p}}(\hat{b}^\dagger + \hat{b}) \quad (1.74)$$

$$\hat{N} = \frac{i}{4}\sqrt{\frac{\hbar\omega_p}{E_C}}(\hat{b}^\dagger - \hat{b}) \quad (1.75)$$

con $\omega_p = \frac{\sqrt{8E_C E_J}}{\hbar}$ la frequenza di Josephson. Sostituendo le relazioni 1.74 e 1.75 nell'equazione 1.73 si ottiene:

$$\hat{H}_{tr} = \hbar\omega_p \left(\hat{b}^\dagger b + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{12} E_C (\hat{b}^\dagger + \hat{b})^4. \quad (1.76)$$

Poiché $E_C \ll E_J$, è possibile calcolare gli autovalori della 1.76 attraverso la teoria delle perturbazioni al prim'ordine ponendo:

$$\hat{H}_{tr}^{(0)} = \hbar\omega_p \left(\hat{b}^\dagger b + \frac{1}{2} \right) \quad (1.77)$$

$$\hat{H}_{tr}^{(1)} = -\frac{1}{12} E_C (\hat{b}^\dagger + \hat{b})^4. \quad (1.78)$$

Gli autovalori dell'hamiltoniana imperturbata sono quelli dell'oscillatore armonico:

$$E_n^{(0)} = \hbar\omega_p \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (1.79)$$

Definendo $|n\rangle$ gli autostati dell'hamiltoniana imperturbata è possibile scrivere la correzione al prim'ordine agli autovalori come:

$$E_n^{(1)} = -\langle n | \left[\frac{1}{12} E_C (\hat{b}^\dagger + \hat{b})^4 \right] | n \rangle = -E_C n - \frac{1}{2} E_C n(n-1) - \frac{1}{4}. \quad (1.80)$$

I livelli energetici dell'hamiltoniana del trasmone al prim'ordine sono quindi:

$$E_n = \left(\sqrt{8E_C E_J} - E_C \right) n - \frac{1}{2} E_C n(n-1) \quad (1.81)$$

avendo trascurato i termini costanti. A questo punto è possibile calcolare la differenza di energia tra due livelli consecutivi:

$$\Delta E_{n,n+1} \equiv E_{n+1} - E_n = \left(\sqrt{8E_C E_J} - E_C \right) - E_C n. \quad (1.82)$$

Si noti che, come atteso, $\Delta E_{n,n+1}$ dipende da n . In particolare si ha:

$$\Delta E_{0,1} - \Delta E_{1,2} = E_C. \quad (1.83)$$

Riassumendo quindi:

- all'aumentare di E_C aumenta l'anarmonicità
- al diminuire di E_C , con E_J fissato, aumenta l'insensibilità al charge noise.

Per avere una anarmonicità sufficientemente alta e un charge noise sufficientemente basso il rapporto energetico ottimale per la realizzazione di un trasmone deve soddisfare la seguente disuguaglianza [47]:

$$20 \lesssim \frac{E_J}{E_C} \ll 5 \cdot 10^4. \quad (1.84)$$

Entro questi limiti, inizializzando il sistema nello stato $|0\rangle$ e fornendo un'energia pari a $\hbar\omega_p$ l'unico stato accessibile è lo stato $|1\rangle$, questo permette di lavorare in two-level approximation. Trascurando i livelli successivi al primo eccitato, l'hamiltoniana 1.76 del sistema a due livelli può essere scritta nella base computazionale a meno di una costante come

$$\hat{H}_{tr} = -\frac{1}{2} \hbar\omega_p \hat{\sigma}_z. \quad (1.85)$$

Giunzioni Josephson variabili

Prima di accennare alla descrizione di sistemi non superconduttivi per realizzare qubit è opportuno fare riferimento a un'ulteriore opportunità offerta dalle giunzioni Josephson. Utilizzando due giunzioni in parallelo è possibile costruire un sistema, lo *SQUID*, i cui parametri possono essere variati in maniera dinamica [70]. Due giunzioni Josephson in parallelo introducono nel circuito un loop superconduttivo, e le proprietà del loop possono essere modificate applicando un campo magnetico esterno. È possibile riscrivere la quantizzazione del flusso tenendo conto del contributo dovuto al campo magnetico esterno:

$$\theta_1 - \theta_2 + 2\varphi_e = 2\pi n, \quad (1.86)$$

dove $\varphi_e = \frac{\pi\Phi_{ext}}{\Phi_0}$. Ponendo $\varphi = \theta_2 - \theta_1$, l'hamiltoniana effettiva di questo sistema è:

$$\hat{\mathcal{H}} = 4E_C N^2 - 2E_J |\cos \varphi_e| \cos \varphi \equiv 4E_C N^2 - E'_J(\varphi_e) \cos \varphi. \quad (1.87)$$

L'ampiezza del contributo induttivo all'energia dipende dal flusso del campo magnetico esterno, e può quindi essere variato tra 0 e $2E_J$. Questa possibilità espone però il sistema a un rumore associato alle fluttuazioni casuali del flusso di campo magnetico esterno, il *flux noise* [57].

1.2.3 Alternative al qubit superconduttivo

Come detto all'inizio della sezione 1.2 esistono diverse tecnologie per realizzare qubit, e ognuna di queste potrebbe essere utilizzata anche per realizzare batterie quantistiche. Senza alcuna pretesa di esaustività, nel seguito verrà fatto brevemente riferimento a due tra le principali alternative che non si basano su sistemi superconduttivi.

Ioni intrappolati

L'idea di utilizzare ioni per costruire qubit è stata proposta per la prima volta da I. Cirac e P. Zoller nel 1995 [58]. In questo caso lo stato fondamentale, $|0\rangle$, e lo stato eccitato, $|1\rangle$, sono identificati tra gli stati elettronici con una vita media molto lunga (~ 1 s). La separazione energetica tra i due stati può essere dell'ordine dei GHz, se gli stati appartengono alla struttura iperfine degli ioni, di decine di MHz, se sono generati dal termine Zeeman in presenza di un campo magnetico, di decine di THz, nel caso in cui siano dovuti alla struttura fine e infine centinaia di THz se si considerano transizioni ottiche [59].

La scelta di utilizzare ioni carichi invece di atomi neutri è giustificata dalla maggior facilità di confinare gli ioni in un volume limitato. Per farlo è necessario usare campi elettromagnetici variabili nel tempo, infatti per il teorema di Earnshaw non è possibile mantenere in equilibrio una carica elettrica attraverso solo campi elettrostatici. Uno dei profili più utilizzati per confinare gli ioni è la trappola di Paul che genera un potenziale efficace della forma [59]:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2} M (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2). \quad (1.88)$$

A temperatura ambiente la differenza di energia tra lo stato fondamentale e lo stato eccitato è tipicamente molto inferiore delle altre energie in gioco. Per raggiungere

un controllo sufficiente sullo stato degli ioni è necessario isolare il sistema e lavorare a temperature tali che l'energia cinetica termica sia molto minore della differenza di energia tra gli stati. Per manipolare lo stato del qubit si utilizza luce laser monocromatica incidente con frequenza tale da indurre la transizione voluta [64]. Inoltre le oscillazioni della trappola possono essere utilizzate per mediare operazioni a due qubit [59].

Quantum dot

Un ulteriore esempio di piattaforme che possono essere utilizzate per realizzare qubit sono i quantum dot: sistemi delle dimensioni variabili tra ~ 10 nm e ~ 1 μ m realizzati con metalli, semiconduttori o a partire da molecole. In questi sistemi gli elettroni sono confinati nelle tre direzioni spaziali e quindi presentano uno spettro energetico discreto. In questo contesto possono essere trattati in modo qualitativamente simile a quello di atomi e molecole. La prima proposta di utilizzare i quantum dot per realizzare qubit è dovuta a D. Loss e D. Di Vincenzo [60]. Essi hanno proposto di utilizzare uno *spin qubit* basato sullo stato dello spin di un elettrone in eccesso presente all'interno del dot. Inoltre utilizzando due quantum dot accoppiati è possibile implementare operazioni a due qubit. L'hamiltoniana del sistema è data da:

$$H_S(t) = J(t)\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2. \quad (1.89)$$

con J accoppiamento modulabile nel tempo. Per una trattazione approfondita di questo sistema rimando alla referenza [71]. Alternativamente i qubit possono essere realizzati variando la carica presente all'interno di un quantum dot [72], in questo caso si parla di *charge qubit*.

Nel capitolo successivo verranno introdotte le batterie quantistiche e le principali grandezze che vengono studiate per caratterizzarle. Inoltre verrà descritto il sistema che è stato analizzato durante la tesi.

Capitolo 2

Batterie Quantistiche

Le batterie oggi sono componenti fondamentali di tutte le tecnologie e hanno dimensioni e capacità molto diverse. Dal punto di vista termodinamico sono dispositivi in grado di immagazzinare energia fornita dall'esterno del sistema. La costante miniaturizzazione dei dispositivi elettronici ha portato alla necessità di costruire batterie di dimensioni sempre inferiori, fino ad arrivare a taglie confrontabili con quelle di molecole e atomi. A queste scale gli effetti quantistici devono essere tenuti in considerazione [61]. Occorre quindi muoversi nell'ambito della *termodinamica quantistica* [9], campo di ricerca che estende le leggi della termodinamica classica e della fisica statistica fuori equilibrio a sistemi di dimensioni tali da dover includere gli effetti quantistici. Parallelamente il progressivo aumento di interesse nello sviluppo delle tecnologie quantistiche ha ulteriormente incrementato l'attenzione nei confronti di sistemi in grado di immagazzinare energia su scala micrometrica e nanometrica.

Una delle domande a cui la termodinamica quantistica cerca di rispondere è se i fenomeni tipici della scala quantistica, come l'entanglement e la sovrapposizione, possano dare origine a dispositivi per immagazzinare energia con performance migliori di quelle raggiunte dalle batterie classiche. Il termine *batteria quantistica* è stato introdotto da R. Alicki e M. Fannes nel 2013 per identificare i più piccoli dispositivi nei quali sia possibile immagazzinare temporaneamente energia allo scopo di trasferirla da un sistema produttore a uno consumatore [13]. Le batterie quantistiche sono quindi sistemi quantistici con livelli non degeneri, nei quali l'energia può essere depositata, (*fase di carica*) e successivamente estratta, (*fase di scarica*). Entrambi questi processi avvengono accoppiando la batteria a un sistema esterno. Nella fase di carica il sistema esterno fornisce energia alla batteria e viene quindi chiamato *caricatore*.

Caricatore e batteria possono essere realizzati in diversi modi, nel corso della tesi è stata studiata la fase di carica di una batteria costituita da un singolo sistema a due livelli. In particolare un qubit costituito da un trasimone, caricato per mezzo di una forzante esterna classica. In letteratura ci sono modelli nei quali il caricatore è un sistema quantistico analogo alla batteria, tipicamente vengono utilizzati oscillatori armonici [16, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25] e sistemi a due livelli [26, 28, 29, 30, 31]. Le piattaforme descritte nel capitolo precedente possono essere utilizzate per realizzare questi sistemi in laboratorio. Negli ultimi anni sono stati fatti progressi dal punto di vista sperimentale. Il primo esempio riportato di batteria quantistica, risalente al 2020, si basa su molecole organiche fluorescenti poste in una cavità [32]. Più recentemente sono state realizzate batterie quantistiche utilizzando trasmoni [33] e

quantum dots [34].

2.1 Modellizzazione del sistema

Il sistema batteria/caricatore che verrà considerata nel seguito può essere descritto da un'hamiltoniana della forma:

$$\hat{\mathcal{H}}_{sys} = \hat{\mathcal{H}}_B + \hat{\mathcal{H}}_C + \hat{\mathcal{H}}_{int}(t) \quad (2.1)$$

con $\hat{\mathcal{H}}_B$ hamiltoniana della batteria, $\hat{\mathcal{H}}_C$ del caricatore e $\hat{\mathcal{H}}_{int}$ termine di interazione tra batteria e caricatore che in generale può dipendere dal tempo. Si noti che l'equazione 2.1 è scritta in una notazione semplificata. Chiamati h_B e h_C rispettivamente gli spazi di Hilbert a cui appartengono gli stati della batteria e del caricatore, si ha che l'hamiltoniana di interazione $\hat{\mathcal{H}}_{int}$ deve essere applicata a stati che appartengono allo spazio di Hilbert $h_{sys} = h_B \otimes h_C$. L'hamiltoniana del sistema appartiene quindi allo spazio h_{sys} , la scrittura più corretta è quindi:

$$\hat{\mathcal{H}}_{sys} = \mathbb{I}_C \otimes \hat{\mathcal{H}}_B + \hat{\mathcal{H}}_C \otimes \mathbb{I}_B + \hat{\mathcal{H}}_{int}(t). \quad (2.2)$$

Per semplicità tuttavia si utilizzerà equivalentemente la notazione riportata nell'equazione 2.1.

L'hamiltoniana di interazione in generale dipende dal tempo, nel seguito verranno considerati casi in cui:

$$\hat{\mathcal{H}}_{int}(t_m) = \hat{\mathcal{H}}_{int}(0) = 0. \quad (2.3)$$

Con t_m viene indicato il tempo durante il quale avviene l'interazione tra la batteria e il caricatore.

2.2 Figure di merito

Le principali grandezze che caratterizzano una batteria sono l'energia media immagazzinata, la potenza media e i tempi necessari per raggiungere il massimo di tali funzioni. L'energia media immagazzinata è definita come la variazione di energia rispetto a quella iniziale:

$$E_{im}(t) = \langle \psi(t) | \hat{\mathcal{H}}_B | \psi(t) \rangle - \langle \psi(0) | \hat{\mathcal{H}}_B | \psi(0) \rangle \quad (2.4)$$

con $|\psi(t)\rangle$ lo stato del sistema ad un generico tempo t . Si parla di fase di carica se presi due istanti di tempo $t_1 < t_2$ si ha $E_{im}(t_2) - E_{im}(t_1) > 0$, di fase di scarica se $E_{im}(t_2) - E_{im}(t_1) < 0$. Questa notazione è conveniente in quanto ponendo $t_1 = 0$ si lega la fase esclusivamente al segno di E_{im} . Nel corso della tesi è stata invece presa in considerazione l'energia media della batteria, definita come:

$$E(t) = \langle \psi(t) | \hat{\mathcal{H}}_B | \psi(t) \rangle \quad (2.5)$$

che si differenzia dalla definizione di energia media immagazzinata per una costante che dipende dallo stato iniziale del sistema. Questa scelta è dovuta al fatto che l'energia dello stato iniziale del sistema reale non è nota a priori con sufficiente precisione a causa degli errori associati all'inizializzazione del sistema, come descritto nei capitoli successivi.

Per analizzare i processi di carica e scarica di una batteria è essenziale la ricerca dei massimi e minimi dell'energia media contenuta nella batteria. L'obiettivo è infatti quello di raggiungere il massimo dell'energia media immagazzinata nel corso del processo di carica e il minimo durante la fase di scarica. Si possono quindi definire:

$$E^{max} = \max_t[E(t)] = E(t_{max}^{(E)}) \quad (2.6)$$

$$E^{min} = \min_t[E(t)] = E(t_{min}^{(E)}) \quad (2.7)$$

con $t_{max}^{(E)}$ e $t_{min}^{(E)}$ rispettivamente il tempo di carica e scarica dalla batteria.

Nel caso in cui i valori di E^{max} e E^{min} vengano raggiunti più volte nel corso dell'evoluzione temporale si considerano convenzionalmente i tempi minori.

La seconda quantità presa in considerazione è la potenza media della carica, definita come:

$$P(t) = \frac{E_{im}(t)}{t}. \quad (2.8)$$

Essa quantifica quanto varia l'energia immagazzinata nella batteria nell'intervallo di tempo $[0, t]$. Come nel caso dell'energia è importante definire il tempo entro il quale si raggiunge la potenza massima, $t_{max}^{(P)}$:

$$P^{max} = \max_t[P(t)] = P(t_{max}^{(P)}), \quad (2.9)$$

in generale si ha $t_{max}^{(E)} \neq t_{max}^{(P)}$. Per chiarire meglio le quantità definite in questa Sezione è utile analizzare la carica di una batteria nel caso semplice di un potenziale acceso a $t = 0$ e mantenuto costante fino a $t = t_m$.

2.3 Carica con potenziale costante

Consideriamo un trasmone, la cui hamiltoniana è stata ricavata nella Sezione 1.2.2, caricato attraverso un campo elettrico costante \mathbf{E} . Lavorando nella base computazionale e introducendo un termine costante in modo da porre lo zero dell'energia coincidente con l'energia dello stato fondamentale, si ha¹:

$$\hat{\mathcal{H}}_B = \frac{\Delta}{2}(\mathbb{I} - \hat{\sigma}_z). \quad (2.10)$$

Il contributo dominante d'interazione tra il campo elettrico e il trasmone è dipolare [62, 63, 73]. Introduciamo l'*operatore di dipolo*

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_0\hat{\sigma}_+ + \mathbf{d}_0^*\hat{\sigma}_- \quad (2.11)$$

con $\hat{\sigma}_\pm = \frac{\hat{\sigma}_x \mp i\hat{\sigma}_y}{2}$. Si noti che la definizione di $\hat{\sigma}_\pm$ è opposta a quella convenzionale a causa della base computazionale. L'hamiltoniana di interazione è quindi:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_{int} &= -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E} = \\ &= -(\mathbf{d}_0\hat{\sigma}_+ + \mathbf{d}_0^*\hat{\sigma}_-) \cdot \mathbf{E} = \\ &= -\mathbf{d}_0 \cdot \mathbf{E}\hat{\sigma}_+ - \mathbf{d}_0^* \cdot \mathbf{E}\hat{\sigma}_- = \\ &= \tilde{g}\hat{\sigma}_+ - \tilde{g}^*\hat{\sigma}_- \end{aligned} \quad (2.12)$$

¹Si noti che questa equazioni coincide con quella riportata nell'equazione 1.85 ponendo $\omega_p = \Delta$ e introducendo un termine costante.

dove è stato definito $\tilde{g} = \mathbf{d}_0 \cdot \mathbf{E}$. Assumendo che il drive sia reale, $\tilde{g} = \tilde{g}^*$, si ha:

$$\hat{\mathcal{H}}_{int} = -\tilde{g} \left(\frac{\hat{\sigma}_x - i\hat{\sigma}_y}{2} + \frac{\hat{\sigma}_x + i\hat{\sigma}_y}{2} \right) = -\tilde{g}\hat{\sigma}_x. \quad (2.13)$$

Definendo $g = -\tilde{g}$ è possibile scrivere l'hamiltoniana complessiva del sistema caricatore/batteria come

$$\hat{\mathcal{H}}_{sys} = \frac{\Delta}{2}(\mathbb{I} - \hat{\sigma}_z) + g\hat{\sigma}_x \quad (2.14)$$

dove in relazione alla notazione introdotta nell'equazione 1.5 si ha $\lambda_0 = \frac{\Delta}{2}$, $\lambda_x = g$, $\lambda_y = 0$ e $\lambda_z = -\frac{\Delta}{2}$. Come sarà più chiaro successivamente, l'hamiltoniana 2.14 è quella che descrive il sistema utilizzato durante la tesi, dove il parametro g sarà però moltiplicato per una funzione dipendente dal tempo.

È possibile introdurre una dipendenza temporale in modo da accendere l'interazione solo per $t \in (0, t_m)$:

$$\hat{\mathcal{H}}_{int} \rightarrow \hat{\mathcal{H}}_{int}(t) = \lambda(t)\hat{\mathcal{H}}_{int} \quad (2.15)$$

con

$$\lambda(t) = \theta(t) - \theta(t - t_m) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ 1 & \text{se } 0 < t < t_m \\ 0 & \text{se } t \geq t_m. \end{cases} \quad (2.16)$$

Si noti che a livello sperimentale non è possibile accendere o spegnere l'interazione istantaneamente, come descritto invece dalle funzioni di Heaviside. Nelle situazioni reali è sempre presente un transiente δt_t durante il quale l'interazione si accende e si spegne. Affinché l'equazione 2.16 sia una buona approssimazione della situazione reale è necessario che valga la relazione $\delta t_t \ll t_m$.

Gli autovalori e autovettori dell'hamiltoniana 2.14 si possono calcolare partendo dalle equazioni generali 1.6 e 1.7 per un sistema a due livelli. Dopo qualche passaggio algebrico si ottengono gli autovalori:

$$E_{\mp} = \frac{1}{2} \left(\Delta \mp \sqrt{\Delta^2 + 4g^2} \right) \quad (2.17)$$

e gli autostati normalizzati:

$$|\psi_{-}\rangle = -\frac{\Delta + \sqrt{\Delta^2 + 4g^2}}{\sqrt{2\Delta(\Delta + \sqrt{\Delta^2 + 4g^2}) + 8}} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{\frac{\Delta(\Delta + \sqrt{\Delta^2 + 4g^2})}{2g^2} + 2}} |1\rangle \quad (2.18)$$

$$|\psi_{+}\rangle = \frac{\sqrt{2}g}{\sqrt{\Delta(\Delta + \sqrt{\Delta^2 + 4g^2}) + 4g^2}} |0\rangle + \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{\Delta}{\sqrt{\Delta^2 + 4g^2}} + 1 \right)} |1\rangle. \quad (2.19)$$

Supponendo che il sistema al tempo $t = 0$ si trovi in uno stato di sovrapposizione:

$$|\psi(0)\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle \quad (2.20)$$

partendo dall'equazione 1.13 si ottiene l'evoluzione dello stato per un generico tempo $t \in (0, t_m)$:

$$\begin{aligned}
 |\psi(t)\rangle = & e^{-\frac{1}{2}i\Delta t} \left(\alpha \cos\left(\frac{\sqrt{\Delta^2 + 4g^2}}{2}t\right) - i \frac{2\beta g - \alpha\Delta}{\sqrt{\Delta^2 + 4g^2}} \sin\left(\frac{\sqrt{\Delta^2 + 4g^2}}{2}t\right) \right) |0\rangle + \\
 & + e^{-\frac{1}{2}i\Delta t} \left(\beta \cos\left(\frac{\sqrt{\Delta^2 + 4g^2}}{2}t\right) - i \frac{2\alpha g + \beta\Delta}{\sqrt{\Delta^2 + 4g^2}} \sin\left(\frac{\sqrt{\Delta^2 + 4g^2}}{2}t\right) \right) |1\rangle.
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

A questo punto è possibile calcolare le figure di merito introdotte nella Sezione 2.2. Per semplificare la notazione è utile riparametrizzare lo stato iniziale come:

$$|\psi(0)\rangle = \sqrt{a}|0\rangle + \sqrt{1-a}e^{-i\phi}|1\rangle \tag{2.22}$$

con $a \in [0, 1]$ e $\phi \in [0, 2\pi)$ e definire il parametro

$$\Omega = \sqrt{\Delta^2 + 4g^2}. \tag{2.23}$$

Energia media

Utilizzando la definizione riportata nell'equazione 2.5 si ha:

$$\begin{aligned}
 E(t) = & \frac{\Delta}{\Omega^2} \left[4g\sqrt{a(1-a)} \left(\frac{\Omega}{2} \sin\phi \sin\Omega t + \Delta \cos\phi \sin^2\frac{\Omega t}{2} \right) + \right. \\
 & \left. + \Omega^2(1-a) + 4g^2(2a-1) \sin^2\frac{\Omega t}{2} \right].
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

Potenza media

Utilizzando la definizione riportata nell'equazione 2.8 si ha:

$$\begin{aligned}
 P(t) = & \frac{\Delta}{t\Omega^2} \left[4g\sqrt{a(1-a)} \left(\frac{\Omega}{2} \sin\phi \sin\Omega t + \Delta \cos\phi \sin^2\frac{\Omega t}{2} \right) + \right. \\
 & \left. + 4g^2(2a-1) \sin^2\frac{\Omega t}{2} \right].
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

I tempi nei quali si raggiunge l'energia massima e la potenza massima verranno calcolati nei casi particolari riportati in seguito. Questa sezione ha lo scopo di introdurre gli elementi fondamentali che verranno discussi nei capitoli successivi, verranno quindi calcolate le figure di merito utilizzando come stati iniziali quelli che sono stati analizzati nel corso della tesi.

2.3.1 Stato fondamentale

È opportuno considerare l'evoluzione del sistema partendo dallo stato fondamentale. Utilizzando la parametrizzazione introdotta nell'equazione 2.22:

$$|\psi^{(g)}(0)\rangle = |0\rangle \quad \rightarrow \quad a = 1, \quad \phi \tag{2.26}$$

l'equazione 2.21 si riduce a:

$$|\psi^{(g)}(t)\rangle = e^{-\frac{1}{2}i\Delta t} \left(\cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) + \frac{i\Delta \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right)}{\Omega} \right) |0\rangle - \frac{2ig e^{-\frac{1}{2}i\Delta t} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right)}{\Omega} |1\rangle. \quad (2.27)$$

Sostituendo nell'equazione 2.24 si trova che l'energia media vale

$$E^{(g)}(t) = \frac{4\Delta g^2}{\Omega^2} \sin^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \quad (2.28)$$

e sostituendo nella 2.25 si ottiene la potenza media

$$P^{(g)}(t) = \frac{4\Delta g^2}{t\Omega^2} \sin^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right). \quad (2.29)$$

Per calcolare $t_{max}^{(E^{(g)})}$ e $t_{max}^{(P^{(g)})}$ è necessario imporre che le derivate prime delle equazioni 2.28 e 2.29 siano nulle. Dalla prima si ottiene che $t_{max}^{(E^{(g)})}$ deve soddisfare l'equazione:

$$\sin\left(\Omega t_{max}^{(E^{(g)})}\right) = 0 \quad (2.30)$$

e quindi si ha:

$$t_{max}^{(E^{(g)})} = \frac{\pi}{\Omega} = \frac{\pi}{\sqrt{\Delta^2 + 4g^2}}. \quad (2.31)$$

Sostituendo tale valore nell'equazione 2.28 si ottiene:

$$E_{max}^{(g)} = \frac{4\Delta g^2}{\Delta^2 + 4g^2}. \quad (2.32)$$

Imponendo che si annulli da derivata dell'equazione 2.29 si ottiene invece che il tempo $t_{max}^{(P^{(g)})}$ deve soddisfare l'equazione:

$$\frac{4\Delta g^2}{\Omega^2 (t_{max}^{(P^{(g)})})^2} \left(\Omega t_{max}^{(P^{(g)})} \sin\frac{\Omega t_{max}^{(P^{(g)})}}{2} \cos\frac{\Omega t_{max}^{(P^{(g)})}}{2} - \sin^2\frac{\Omega t_{max}^{(P^{(g)})}}{2} \right) \quad (2.33)$$

attraverso qualche passaggio algebrico questa espressione si riduce all'equazione trascendente:

$$\Omega t_{max}^{(P^{(g)})} = \tan\left(\frac{\Omega t_{max}^{(P^{(g)})}}{2}\right). \quad (2.34)$$

Questa equazione deve essere risolta numericamente, ma permette immediatamente di notare che in generale $t_{max}^{(E)} \neq t_{max}^{(P)}$. In figura 2.1 è riportato l'andamento dell'energia e della potenza medie per alcuni valori del rapporto $\frac{g}{\Delta}$. Dal grafico è possibile osservare che per ottenere una buona carica della batteria è necessario avere $g \gtrsim \Delta$. Questo vincolo è cruciale poiché nei sistemi IBM si ha $g \ll \Delta$ (in particolare per il dispositivo utilizzato $\frac{g}{\Delta} \simeq 0.03$), sarà quindi necessario scegliere accuratamente la dipendenza temporale della forzante per riuscire a caricare il sistema.

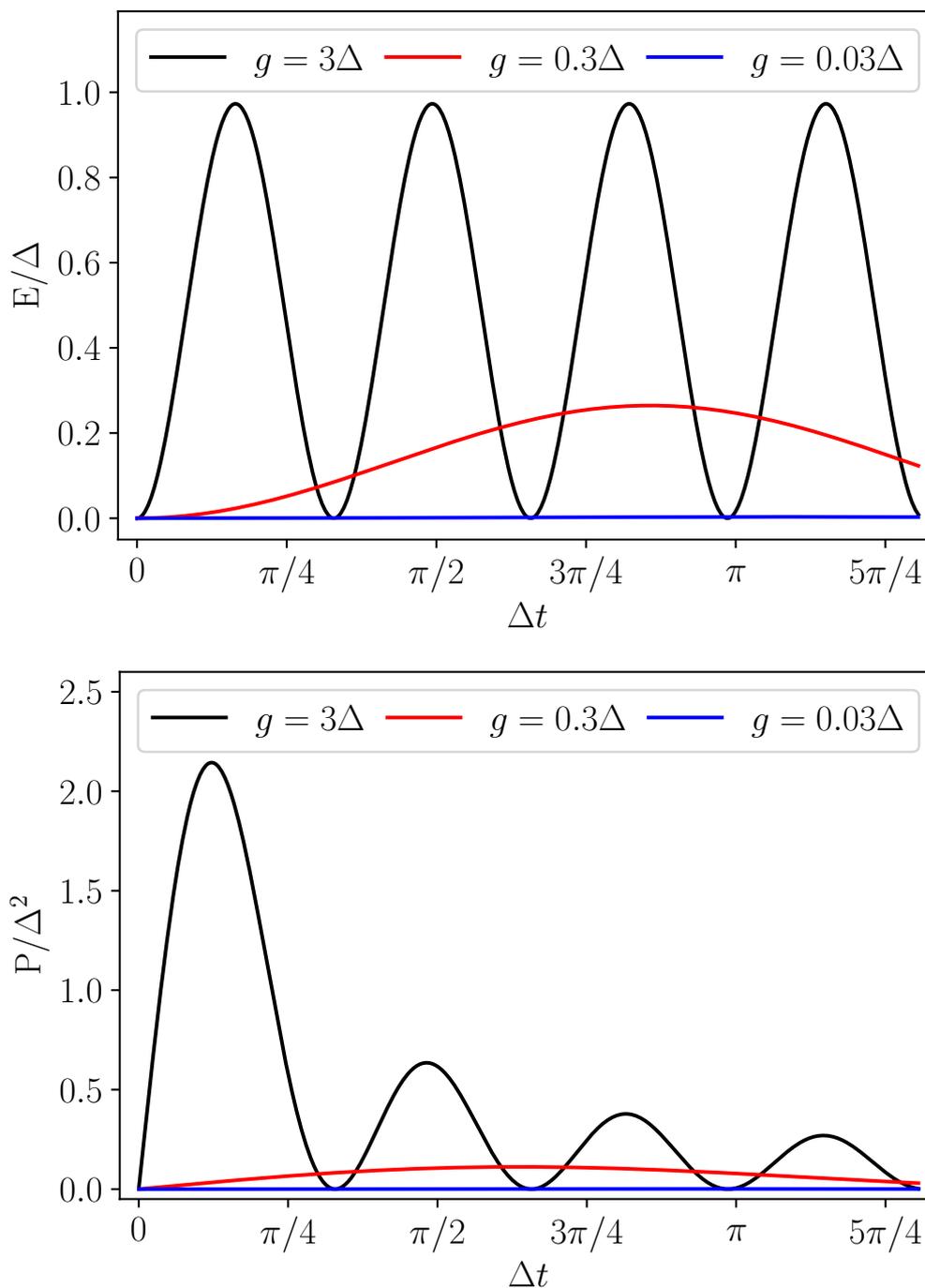


Figura 2.1: Energia (sopra) e potenza media (sotto) della batteria in funzione del tempo. Il sistema è inizializzato nello stato fondamentale $|0\rangle$ e soggetto a un drive costante con $g = 3\Delta$ (curve nere), $g = 0.3\Delta$ (curve rosse) e $g = 0.03\Delta$ (curve blu).

2.3.2 Stato Hadamard

Il secondo stato iniziale considerato si ottiene applicando una rotazione allo stato fondamentale. La matrice di rotazione è quella di Hadamard, definita come:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\sigma}_z + \hat{\sigma}_x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

Lo stato iniziale è quindi:

$$|\psi^{(H)}(0)\rangle = H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \quad \rightarrow \quad a = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \phi = 0. \quad (2.36)$$

In questo caso l'evoluzione dello stato risulta essere:

$$\begin{aligned} |\psi^{(H)}(t)\rangle = & \frac{e^{-\frac{1}{2}i\Delta t} \left(\Omega \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) - i(2g - \Delta) \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \right)}{\sqrt{2}\Omega} |0\rangle + \\ & + \frac{e^{-\frac{1}{2}i\Delta t} \left(\Omega \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) - i(2g + \Delta) \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \right)}{\sqrt{2}\Omega} |1\rangle. \end{aligned} \quad (2.37)$$

L'energia media della batteria è:

$$E^{(H)}(t) = \frac{\Delta}{2} + \frac{2\Delta^2 g}{\Omega^2} \sin^2 \frac{\Omega t}{2} \quad (2.38)$$

e la potenza media è quindi:

$$P^{(H)}(t) = \frac{2\Delta^2 g}{\Omega^2 t} \sin^2 \frac{\Omega t}{2}. \quad (2.39)$$

Dall'equazione 2.38 si ricava che il tempo $t_{max}^{(E^{(H)})}$ deve soddisfare l'equazione:

$$\sin\left(\Omega t_{max}^{(E^{(H)})}\right) = 0 \quad (2.40)$$

e quindi si ha:

$$t_{max}^{(E^{(H)})} = \frac{\pi}{\Omega} = \frac{\pi}{\sqrt{\Delta^2 + 4g^2}} \quad (2.41)$$

come nel caso di partenza dallo stato fondamentale. Sostituendo tale valore nell'equazione 2.38 si ottiene che l'energia media massima è pari a:

$$E_{max}^{(H)} = \frac{\Delta}{2} + \frac{2\Delta^2 g}{\Omega^2}. \quad (2.42)$$

Per quanto riguarda la ricerca del tempo il quale viene raggiunta la potenza massima si procede in maniera totalmente analoga al caso precedente. Imponendo che si annulli la derivata prima dell'equazione 2.39 si ottiene che il tempo $t_{max}^{(P^{(H)})}$ deve soddisfare l'equazione:

$$\frac{2\Delta g^2}{\Omega^2 (t_{max}^{(P^{(H)})})^2} \left(\Omega t_{max}^{(P^{(H)})} \sin \frac{\Omega t_{max}^{(P^{(H)})}}{2} \cos \frac{\Omega t_{max}^{(P^{(H)})}}{2} - \sin^2 \frac{\Omega t_{max}^{(P^{(H)})}}{2} \right) = 0 \quad (2.43)$$

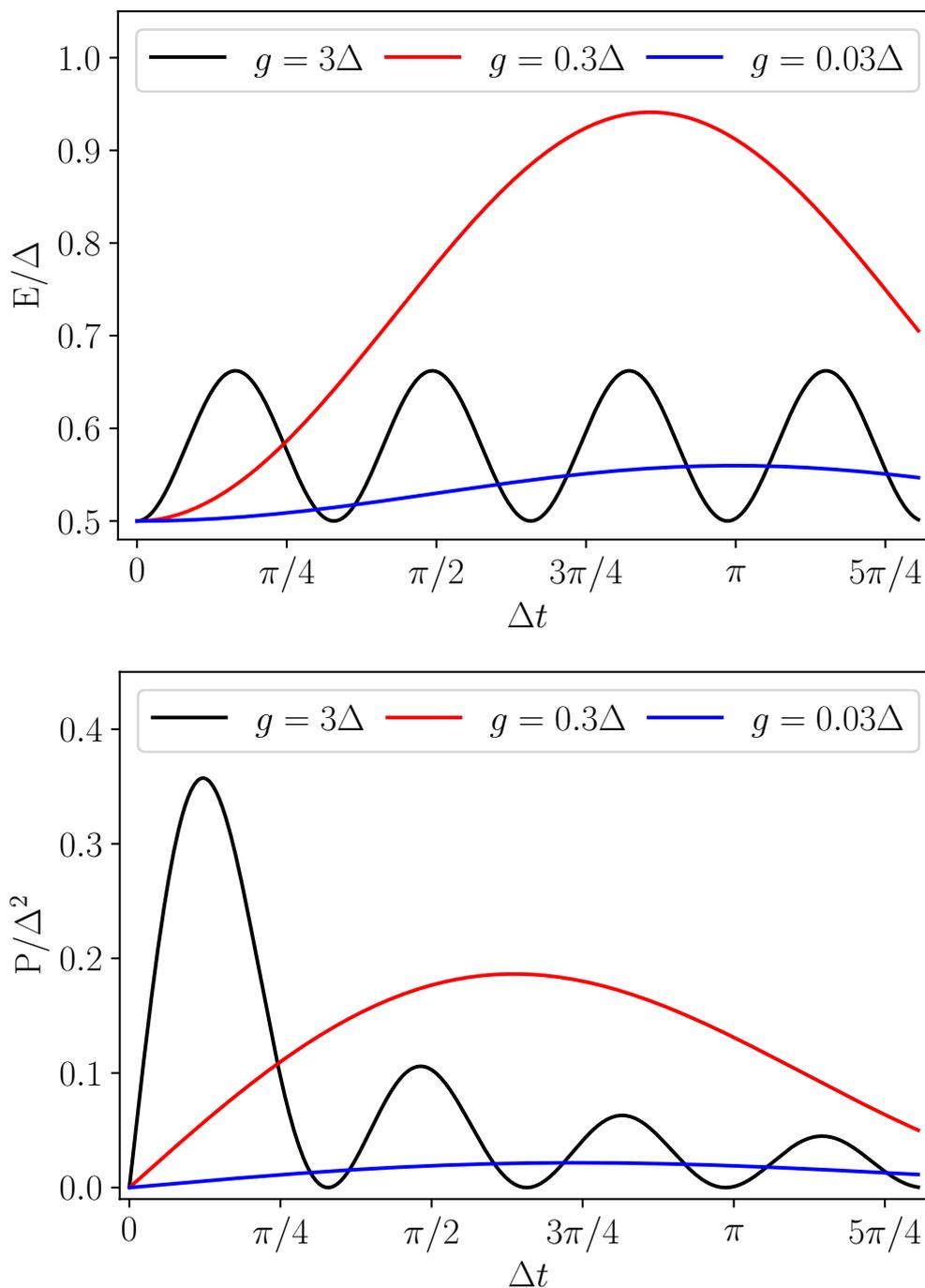


Figura 2.2: Energia (sopra) e potenza media (sotto) della batteria in funzione del tempo. Il sistema è inizializzato nello stato Hadamard e soggetto a un drive costante con $g = 3\Delta$ (curve nere), $g = 0.3\Delta$ (curve rosse) e $g = 0.03\Delta$ (curve blu).

attraverso qualche passaggio algebrico questa espressione si riduce nuovamente all'equazione trascendente:

$$\Omega t_{max}^{(P(H))} = \tan\left(\frac{\Omega t_{max}^{(P(H))}}{2}\right) \quad (2.44)$$

che deve essere risolta numericamente. L'andamento dell'energia e della potenza media per alcuni valori del rapporto $\frac{g}{\Delta}$ sono mostrati in figura 2.2. Dai grafici si osserva che l'energia maggiore si raggiunge con $g = 0.3\Delta$, ma su una scala di tempo molto maggiore rispetto alla carica riferita allo stato fondamentale con $g = 3\Delta$. Questa osservazione suggerisce che l'inizializzazione del sistema è un passaggio cruciale per ottenere una carica della batteria.

2.3.3 Stato Left

Il terzo stato iniziale considerato è ottenuto applicando la matrice di rotazione:

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -i & -i \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

allo stato fondamentale. Lo stato iniziale è quindi:

$$|\psi^{(L)}(0)\rangle = V|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle \quad \rightarrow \quad a = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \phi = \frac{\pi}{2}. \quad (2.46)$$

Analogamente ai casi precedenti si ricava lo stato evoluto nel tempo:

$$\begin{aligned} |\psi^{(L)}(t)\rangle = & \frac{e^{-\frac{1}{2}i\Delta t} \left(\Omega \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) - (2g - i\Delta) \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \right)}{\sqrt{2}\Omega} |0\rangle - \\ & - \frac{ie^{-\frac{1}{2}i\Delta t} \left(\Omega \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) + (2g - i\Delta) \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \right)}{\sqrt{2}\Omega} |1\rangle \end{aligned} \quad (2.47)$$

l'energia media nella batteria:

$$E^{(L)}(t) = \frac{\Delta}{2} + \frac{\Delta g}{\Omega} \sin t\Omega \quad (2.48)$$

e la potenza media è:

$$P^{(L)}(t) = \frac{\Delta g}{t\Omega} \sin t\Omega. \quad (2.49)$$

Dall'equazione 2.48 si ricava che il tempo $t_{max}^{(E(L))}$ deve soddisfare l'equazione:

$$\cos\left(\Omega t_{max}^{(E(L))}\right) = 0 \quad (2.50)$$

e quindi si ha:

$$t_{max}^{(E(L))} = \frac{\pi}{2\Omega} = \frac{\pi}{2\sqrt{\Delta^2 + 4g^2}}. \quad (2.51)$$

Si noti che $t_{max}^{(E(L))} = \frac{t_{max}^{(E(g))}}{2} = \frac{t_{max}^{(E(H))}}{2}$, il processo di carica avviene quindi nella metà del tempo richiesto dai due casi precedentemente discussi. Sostituendo $t_{max}^{(E(L))}$ nell'equazione 2.48 si ottiene che l'energia media massima è pari a:

$$E_{max}^{(L)} = \frac{\Delta}{2} + \frac{g\Delta}{\Omega}. \quad (2.52)$$

Infine è nuovamente possibile scrivere un'equazione trascendente per il tempo dopo il quale viene raggiunta la potenza massima. Imponendo che la derivata prima dell'equazione 2.49 si annulli si ottiene:

$$\frac{\Delta g}{\Omega} \frac{\Omega t \cos \Omega t - \sin \Omega t}{t} = 0 \quad (2.53)$$

che può essere ridotta all'equazione trascendente

$$\Omega t = \tan \Omega t \quad (2.54)$$

L'andamento dell'energia e della potenza media per alcuni valori del parametro g sono mostrati in figura 2.3. In questo caso l'andamento qualitativo è simile a quello che si ottiene con la partenza dallo stato fondamentale. L'energia immagazzinata nella batteria è la metà di quella immagazzinata con $|\psi(0)\rangle = |0\rangle$, ma l'energia massima è raggiunta in metà del tempo. Si noti che la probabilità di occupazione dello stato fondamentale e dello stato eccitato per lo stato 2.36 e 2.46 è la stessa e la differenza è data solo dalla presenza di un fattore di fase. Nonostante questo, l'evoluzione del sistema è molto diversa nei due casi. Questo pone l'attenzione sull'importanza delle fasi nel corso dell'evoluzione temporale, aspetto che svolgerà un ruolo importante nel proseguo della tesi.

2.4 Sistema analizzato

Questa sezione è dedicata alla descrizione del modello di batteria utilizzato nel corso della tesi: un qubit costituito da un trasimone caricato mediante una forzante esterna classica dipendente dal tempo. L'hamiltoniana del sistema è data da [62]:

$$\hat{\mathcal{H}}(t) = \hat{\mathcal{H}}_B + \hat{\mathcal{H}}_{int}(t) = \frac{\Delta}{2}(\mathbb{I} - \hat{\sigma}_z) + gD(t)\hat{\sigma}_x. \quad (2.55)$$

$\hat{\mathcal{H}}_B$ è l'hamiltoniana libera del qubit ricavata come descritto nella Sezione 2.3, $\hat{\mathcal{H}}_{int}(t)$ rappresenta la forzante esterna utilizzata per caricare la batteria, $\hat{\sigma}_{x,z}$ sono le matrici di Pauli introdotte nell'equazioni 1.4, g è, come in precedenza, l'intensità dell'accoppiamento tra la forzante e la batteria e $D(t)$ è una funzione adimensionale dipendente dal tempo che descrive la forma della forzante². La scelta della forma di $D(t)$ e i vincoli che deve soddisfare saranno discussi nel dettaglio in seguito, mentre i parametri Δ e g sono legati al qubit.

Nel corso della tesi si è utilizzato uno dei quantum computer IBM, in particolare è stato scelto Armonk, un chip costituito da un solo qubit. Come anticipato, le macchine IBM sono costituite da trasimoni con valori di Δ e g fissati per costruzione ($g \ll \Delta$). Nel caso di Armonk si ha³:

$$\Delta \approx 31,238 \text{ GHz} \quad (2.56)$$

$$g \approx 0,105 \text{ GHz}. \quad (2.57)$$

²Si noti che nell'hamiltoniana 2.55 non è riportato il termine $\hat{\mathcal{H}}_C$ in quanto non influenza la trattazione.

³Il valore dei parametri riportato è da ritenersi indicativo in quanto vengono ricalibrati ogni 24 ore.

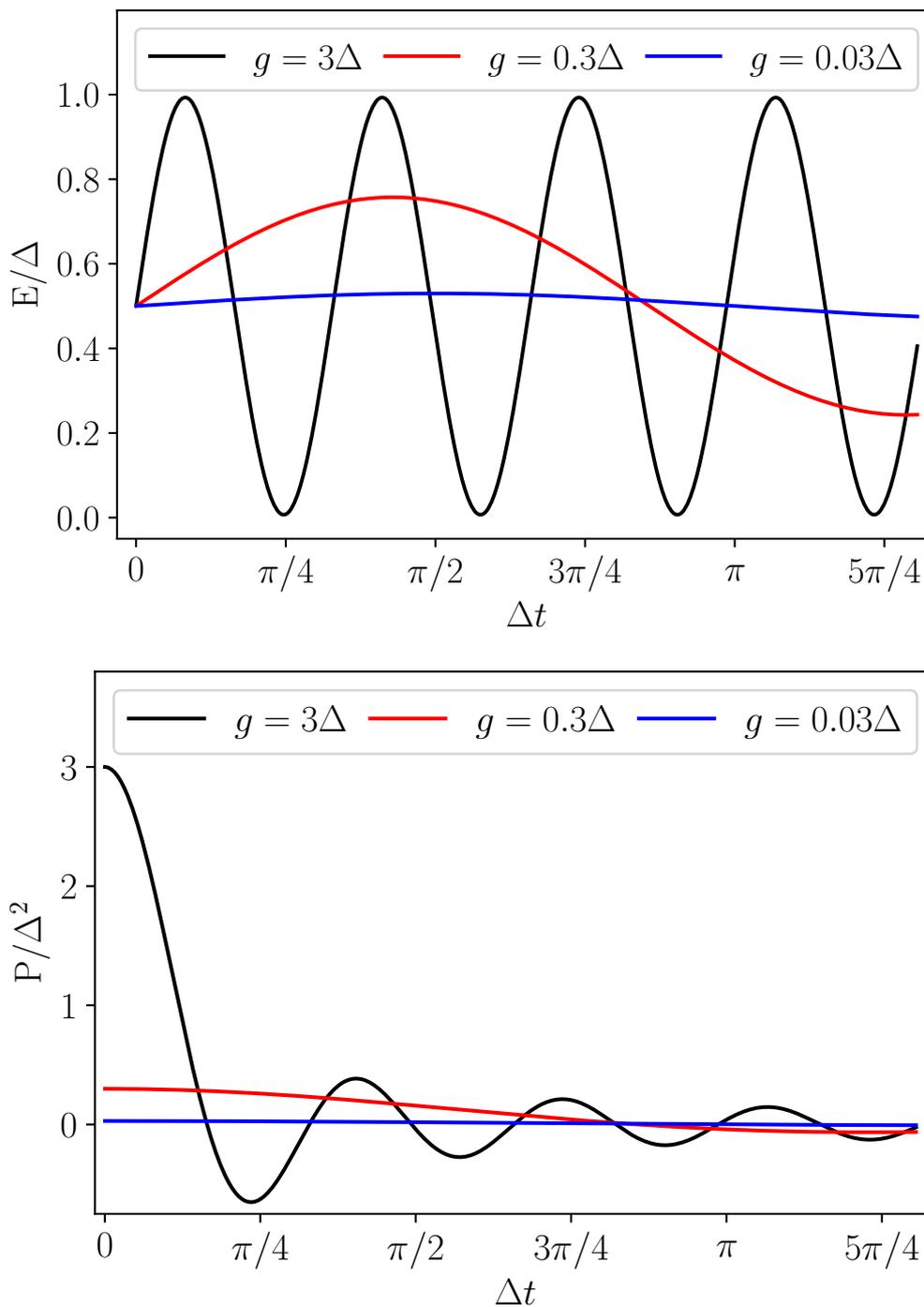


Figura 2.3: Energia (sopra) e potenza media (sotto) della batteria in funzione del tempo. Il sistema è inizializzato nello stato Left e soggetto a un drive costante con $g = 3\Delta$ (curve nere), $g = 0.3\Delta$ (curve rosse) e $g = 0.03\Delta$ (curve blu).

Questo pone un primo vincolo alla forma di $D(t)$: per riuscire a caricare il sistema è necessario scegliere

$$D(t) = f(t) \cos(\omega t) \quad (2.58)$$

e portare il sistema in risonanza ponendo $\omega = \Delta$. Il motivo di questa scelta emerge più chiaramente applicando una rotazione definita dalla matrice \hat{S} data da

$$\hat{S}(t) = e^{-i\frac{\Delta}{2}t\hat{\sigma}_z} = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\Delta}{2}t} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\Delta}{2}t} \end{pmatrix} \quad (2.59)$$

all'hamiltoniana 2.55. Ciò porta alla nuova hamiltoniana

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}' &= \hat{S}\hat{\mathcal{H}}\hat{S}^\dagger - i\hat{S}\frac{d\hat{S}^\dagger}{dt} = \\ &= \hat{S} \left(\frac{\Delta}{2}(\mathbb{I} - \hat{\sigma}_z) + gD(t)\hat{\sigma}_x \right) \hat{S}^\dagger - i\hat{S}\frac{d\hat{S}^\dagger}{dt}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Effettuando il calcolo esplicito si ricava che:

$$\hat{S}\mathbb{I}\hat{S}^\dagger = \mathbb{I} \quad (2.61)$$

$$\hat{S}\hat{\sigma}_z\hat{S}^\dagger = \hat{\sigma}_z \quad (2.62)$$

$$\hat{S}\hat{\sigma}_x\hat{S}^\dagger = e^{\Delta\hat{\sigma}_y t} \quad (2.63)$$

$$\hat{S}\frac{d\hat{S}^\dagger}{dt} = \frac{i\Delta}{2}\hat{\sigma}_z. \quad (2.64)$$

Sostituendo nella 2.60 si ottiene:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}' &= \frac{\Delta}{2}\mathbb{I} - \frac{\Delta}{2}\hat{\sigma}_z + gf(t)\cos(\Delta t)e^{\Delta\hat{\sigma}_y t} - i\frac{i\Delta}{2}\hat{\sigma}_z = \\ &= \frac{\Delta}{2}\mathbb{I} + gf(t)\frac{e^{i\Delta t} + e^{-i\Delta t}}{2} \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\Delta t} \\ e^{i\Delta t} & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{\Delta}{2}\mathbb{I} + \frac{gf(t)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 + e^{-2i\Delta t} \\ 1 + e^{2i\Delta t} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.65)$$

I parametri in gioco permettono di lavorare in *rotating wave approximation* [63, 74], e quindi trascurare i termini che oscillano maggiormente. L'hamiltoniana del sistema può quindi essere approssimata come:

$$\hat{\mathcal{H}}'' = \frac{\Delta}{2}\mathbb{I} + \frac{gf(t)}{2}\hat{\sigma}_x. \quad (2.66)$$

Si noti che questa espressione estremamente semplice dell'hamiltoniana del sistema è stata ottenuta grazie alla scelta di un drive esterno in risonanza con il sistema a due livelli. La grandezza su cui è possibile agire in modo da ottimizzare la carica è la forma dell'*inviluppo* della forzante $f(t)$.

Lo stato iniziale della batteria può essere scritto come una generica sovrapposizione nella forma

$$|\psi(0)\rangle = \sqrt{a}|0\rangle + \sqrt{1-a}e^{-i\phi}|1\rangle \quad (2.67)$$

utilizzando la parametrizzazione introdotta nell'equazione 2.22. Lo stato iniziale del sistema non subisce variazioni a seguito della rotazione poiché:

$$|\psi'(0)\rangle = \hat{S}(0)|\psi(0)\rangle = |\psi(0)\rangle. \quad (2.68)$$

Per risolvere analiticamente il problema è più conveniente lavorare nella base degli autostati di $\hat{\sigma}_x$:

$$|\pm\rangle = \frac{|0\rangle \pm |1\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (2.69)$$

Nella base in cui $\hat{\sigma}_x$ è diagonale i suoi autostati sono rappresentati come:

$$|+\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |-\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.70)$$

Si noti che nonostante la notazione coincida formalmente con quella utilizzata per scrivere la base computazionale, le due basi sono differenti. Per esprimere lo stato iniziale in termini della base $\{|\pm\rangle\}$ è necessario ricavare le relazioni inverse all'equazione 2.69:

$$|0/1\rangle = \frac{|+\rangle \pm |-\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (2.71)$$

In questo modo si ottiene:

$$\begin{aligned} |\psi'(0)\rangle &= \sqrt{a}|0\rangle + \sqrt{1-a}e^{-i\phi}|1\rangle = \\ &= \frac{\sqrt{a} + \sqrt{1-a}e^{-i\phi}}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{\sqrt{a} - \sqrt{1-a}e^{-i\phi}}{\sqrt{2}}|-\rangle \equiv \\ &\equiv c_+(0)|+\rangle + c_-(0)|-\rangle = \begin{pmatrix} c_+(0) \\ c_-(0) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.72)$$

L'evoluzione temporale dello stato è governata dall'equazione di Schrödinger:

$$i|\dot{\psi}'(t)\rangle = \hat{\mathcal{H}}''|\psi'(t)\rangle. \quad (2.73)$$

Sostituendo l'hamiltoniana nell'equazione 2.66 si ha:

$$\begin{aligned} i|\dot{\psi}'(t)\rangle &= \frac{gf(t)}{2}\hat{\sigma}_x|\psi'(t)\rangle \\ i\begin{pmatrix} \dot{c}_+(t) \\ \dot{c}_-(t) \end{pmatrix} &= \frac{gf(t)}{2}\begin{pmatrix} c_+(t) \\ -c_-(t) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.74)$$

dove si è trascurato il termine costante in quanto non influenza l'evoluzione temporale. L'equazione 2.74 è costituita da due equazioni differenziali disaccoppiate:

$$\begin{cases} \dot{c}_+(t) = -i\frac{gf(t)}{2}c_+(t) \\ \dot{c}_-(t) = i\frac{gf(t)}{2}c_-(t) \end{cases} \quad (2.75)$$

la cui soluzione è data da:

$$\begin{cases} c_+(t) = c_+(0)e^{-i\frac{g}{2}\int_0^t f(\tau)d\tau} \\ c_-(t) = c_-(0)e^{i\frac{g}{2}\int_0^t f(\tau)d\tau}. \end{cases} \quad (2.76)$$

Si ottiene quindi:

$$|\psi'(t)\rangle = \begin{pmatrix} c_+(0)e^{-i\frac{g}{2}\int_0^t f(\tau)d\tau} \\ c_-(0)e^{i\frac{g}{2}\int_0^t f(\tau)d\tau} \end{pmatrix} = e^{-i\frac{g}{2}\int_0^t f(\tau)d\tau} \begin{pmatrix} c_+(0) \\ c_-(0)e^{ig\int_0^t f(\tau)d\tau} \end{pmatrix}. \quad (2.77)$$

Per semplificare la notazione è utile definire la fase associata all'involuppo della forzante:

$$\theta(t) = g \int_0^t f(\tau) d\tau \quad (2.78)$$

che, sostituita nella 2.77, porta a:

$$\begin{aligned} |\psi'(t)\rangle &= e^{-i\frac{\theta(t)}{2}} \begin{pmatrix} c_+(0) \\ c_-(0)e^{i\theta(t)} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{e^{-i\frac{\theta(t)}{2}} c_+(0) + e^{i\frac{\theta(t)}{2}} c_-(0)}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{e^{-i\frac{\theta(t)}{2}} c_+(0) - e^{i\frac{\theta(t)}{2}} c_-(0)}{\sqrt{2}} |1\rangle. \end{aligned} \quad (2.79)$$

A questo punto è possibile tornare nella base originale applicando la matrice di rotazione $\hat{S}^\dagger(t)$:

$$|\psi(t)\rangle = \hat{S}^\dagger(t) |\psi'(t)\rangle = \begin{pmatrix} \frac{e^{-i\frac{\theta(t)}{2}} c_+(0) + e^{i\frac{\theta(t)}{2}} c_-(0)}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\Delta}{2}t} \\ \frac{e^{-i\frac{\theta(t)}{2}} c_+(0) - e^{i\frac{\theta(t)}{2}} c_-(0)}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\Delta}{2}t} \end{pmatrix} \quad (2.80)$$

definendo:

$$\varphi(t) = \frac{\Delta}{2}t, \quad (2.81)$$

si ha:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\varphi(t)} \left(\cos \frac{\theta(t)}{2} (c_+(0) + c_-(0)) - i \sin \frac{\theta(t)}{2} (c_+(0) - c_-(0)) \right) \\ e^{-i\varphi(t)} \left(-i \sin \frac{\theta(t)}{2} (c_+(0) + c_-(0)) + \cos \frac{\theta(t)}{2} (c_+(0) - c_-(0)) \right) \end{pmatrix}. \quad (2.82)$$

Questa espressione può essere semplificata riprendendo le definizioni di $c_\pm(0)$ dall'equazione 2.72 e osservando che:

$$c_+(0) + c_-(0) = \sqrt{2}\sqrt{a} \quad (2.83)$$

$$c_+(0) - c_-(0) = \sqrt{2}\sqrt{1-ae^{-i\phi}}. \quad (2.84)$$

Si ha quindi che l'evoluzione temporale dello stato nella base degli autostati di $\hat{\sigma}_z$ è:

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= e^{i\varphi(t)} \left(\cos \frac{\theta(t)}{2} \sqrt{a} - i \sin \frac{\theta(t)}{2} \sqrt{1-ae^{-i\phi}} \right) |0\rangle + \\ &+ e^{-i\varphi(t)} \left(\cos \frac{\theta(t)}{2} \sqrt{1-ae^{-i\phi}} - i \sin \frac{\theta(t)}{2} \sqrt{a} \right) |1\rangle. \end{aligned} \quad (2.85)$$

2.4.1 Energia immagazzinata

Una volta studiata l'evoluzione temporale dello stato del trasmettente è possibile calcolare l'energia media nella batteria, data da:

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{\Delta}{2} \langle \psi(t) | (\hat{\mathbb{I}} - \hat{\sigma}_z) | \psi(t) \rangle = \\ &= \Delta \langle \psi(t) | 1 \rangle \langle 1 | \psi(t) \rangle = \\ &= \Delta |\langle \psi(t) | 1 \rangle|^2 = \\ &= \Delta \mathcal{P}_1(\theta(t)) \end{aligned} \quad (2.86)$$

dove $\mathcal{P}_1(\theta(t))$ indica la probabilità che il trasmone si trovi nello stato eccitato. Questa convenzione è quella che verrà utilizzata per calcolare l'energia del trasmone nel capitolo 3. Per un generico istante di tempo si ha

$$\begin{aligned}
 E(t) &= \Delta \left(\cos \frac{\theta(t)}{2} \sqrt{1-a} e^{i\phi} + i \sin \frac{\theta(t)}{2} \sqrt{a} \right) \left(\cos \frac{\theta(t)}{2} \sqrt{1-a} e^{-i\phi} - i \sin \frac{\theta(t)}{2} \sqrt{a} \right) = \\
 &= \Delta \left((1-a) \cos^2 \frac{\theta(t)}{2} - i \sqrt{a} \sqrt{1-a} e^{i\phi} \cos \frac{\theta(t)}{2} \sin \frac{\theta(t)}{2} + \right. \\
 &\quad \left. + i \sqrt{a} \sqrt{1-a} e^{-i\phi} \cos \frac{\theta(t)}{2} \sin \frac{\theta(t)}{2} + a \sin^2 \frac{\theta(t)}{2} \right). \tag{2.87}
 \end{aligned}$$

Nel seguito saremo interessati soprattutto all'energia presente all'interno della batteria al termine dell'impulso utilizzato per caricarla. Chiamata t_m la durata dell'impulso, e quindi il tempo dopo il quale si effettua la misura sul sistema, è conveniente riscrivere l'energia esplicitando la dipendenza dalla fase associata all'involuppo della forzante, con t_m fissato. L'equazione 2.87 diventa quindi:

$$\begin{aligned}
 E(a, \phi, \theta) &= 2\Delta \sqrt{a} \sqrt{1-a} \sin \phi \cos \frac{\theta(t_m)}{2} \sin \frac{\theta(t_m)}{2} + \\
 &\quad + \Delta a \sin^2 \frac{\theta(t_m)}{2} + \Delta (1-a) \cos^2 \frac{\theta(t_m)}{2}. \tag{2.88}
 \end{aligned}$$

Capitolo 3

Classificazione dello stato della batteria

Il processo di classificazione dello stato della batteria inizia con la descrizione dei dati analizzati, estratti dai quantum computer IBM. Per farlo è necessario introdurre il pacchetto *Qiskit Pulse* [48, 49], utilizzato per generare gli impulsi utilizzati per caricare la batteria, e il tipo di misura applicata sui qubit IBM. Successivamente verrà descritto l'algoritmo di calibrazione che è stato implementato per classificare i dati estratti dal dispositivo.

3.1 Introduzione a Qiskit Pulse

L'esecuzione di algoritmi quantistici richiede che i qubit a disposizione rispecchino caratteristiche di qualità tali da renderli utilizzabili nel caso di interesse. Essi devono essere protetti dal rumore ambientale che induce la decoerenza ma, allo stesso tempo, deve essere possibile manipolare lo stato del qubit attraverso un controllo esterno. Come descritto nella Sezione 1.2.1 gli accoppiamenti con l'esterno sono una delle cause che porta alla decoerenza del sistema. È possibile limitare gli effetti del rumore sviluppando protocolli di correzione, chiamati Quantum Error Correction (QEC) [64]. La maggior parte degli algoritmi QEC richiedono dispositivi costituiti da $\mathcal{O}(10^6)$ qubit, mentre quelli esistenti raggiungono i $\mathcal{O}(10^2)$ qubit. I quantum computer che abbiamo a disposizione oggi sono indicati come dispositivi NISQ [50], per sottolineare che i loro qubit e le operazioni quantistiche non sono soggette a QEC. In questo contesto è utile distinguere tra *qubit logici* e *qubit fisici*. I primi rappresentano come dovrebbe comportarsi un qubit, in assenza di errori, i secondi sono i qubit che effettivamente costituiscono i dispositivi NISQ. Negli algoritmi di QEC, a causa dei tassi di errore dei qubit fisici che vengono oggi utilizzati, ciascun qubit logico deve essere formato da $\mathcal{O}(10^3)$ qubit fisici.

Si hanno dunque due sfide: realizzare quantum computer con un numero sempre maggiore di qubit di qualità e fedeltà sufficientemente elevate ed ottimizzare le performance dei dispositivi attuali. L'evoluzione nella costruzione dei chip è evidenziata dal cambio nella disposizione dei qubit (topologia), che è passata da una logica di alta connettività a quella di topologie favorevoli all'implementazione di algoritmi QEC, detta *heavy-hex topology* [75]. Lo sviluppo di quantum computer disponibili in cloud, ad esempio tramite l'IBM Quantum Lab, ha generato un crescente interesse nello sviluppare algoritmi per i dispositivi NISQ [76].

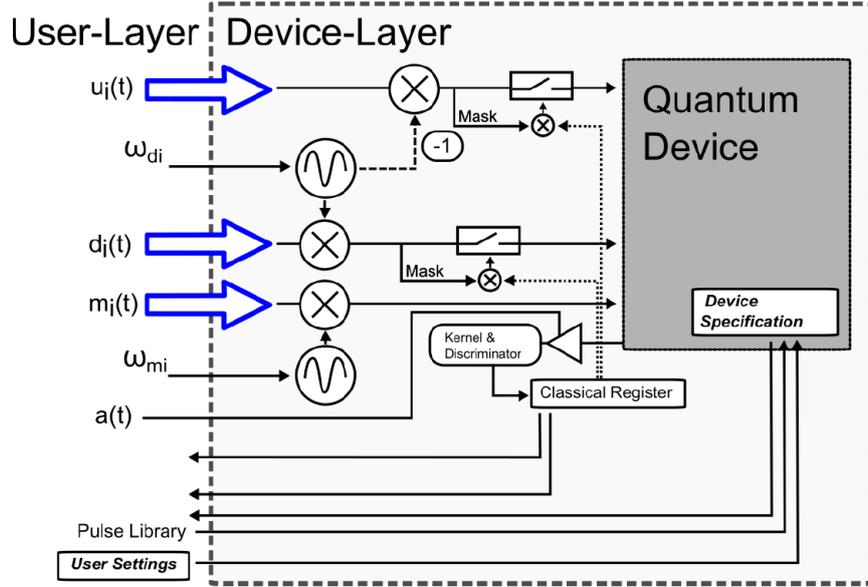


Figura 3.1: Schema dell'interfaccia di un dispositivo che è possibile utilizzare con Qiskit Pulse. Le grandezze a sinistra dell'immagine possono essere fissate dall'utente e sono (dall'alto verso il basso): $u_i(t)$ involuppo dell'impulso del canale di controllo, ω_{d_i} frequenza portante del drive channel, $d_i(t)$ (nel testo è indicato con $f_i(t)$) involuppo dell'impulso del drive channel, $m_i(t)$ involuppo dell'impulso del measurement channel, ω_{m_i} frequenza portante del measurement channel, $a(t)$ involuppo dell'impulso in uscita dalla misura. Immagine tratta da [49].

Ci sono diversi software che permettono di codificare algoritmi quantistici ed alcuni implementano interfacce per utilizzare i quantum computer via cloud. Uno di questi è Qiskit, un pacchetto open-source che permette di realizzare ed eseguire circuiti quantistici sia su simulatori che su dispositivi quantistici reali [62]. I programmi possono essere scritti utilizzando due diversi linguaggi:

- *OpenQASM*: permette di scrivere algoritmi realizzando circuiti in termini di gate, misure e condizioni utilizzando un'interfaccia "Drag & Drop" [49];
- *Qiskit Pulse*: dà la possibilità di definire la dinamica temporale delle operazioni e delle misure esplicitando la forma degli impulsi con cui viene manipolato ciascun qubit [48, 49].

Tutti i dispositivi IBM sono programmabili utilizzando OpenQASM, mentre l'utilizzo di Qiskit Pulse è limitato solo ad alcune macchine e richiede maggiori autorizzazioni in quanto permette un accesso diretto alla fisica del qubit. Durante la tesi è stato utilizzato questo secondo linguaggio.

In figura 3.1 è rappresentato uno schema dell'interfaccia di un dispositivo che è possibile utilizzare con Qiskit Pulse. Ogni qubit ha due canali, il *drive channel*, dedicato agli impulsi associati a operazioni, e il *measurement channel*, per effettuare misure sul qubit. Il segnale del drive channel interagisce con il qubit i -esimo attraverso l'hamiltoniana $\hat{\mathcal{H}}_{int}(t)$ definita nell'equazione 2.55. In questo contesto è generalmente utilizzata la notazione esponenziale per descrivere la forma degli impulsi sul qubit i -esimo:

$$D_i(t) = \Re\left(f_i(t)e^{i\omega_{d_i}t}\right). \quad (3.1)$$

Analogamente i segnali per il measurement channel sono descritti come:

$$M_i(t) = \Re(m_i(t)e^{i\omega_{m_i}t}) \quad (3.2)$$

dove $f_i(t)$ e $m_i(t)$ sono gli involucri degli impulsi e hanno ampiezza massima pari a 1, e ω_{d_i} e ω_{m_i} sono le rispettive frequenze portanti. Queste ultime possono essere fissate dall'utente entro un range caratteristico per ogni dispositivo. Nel caso del dispositivo Armonk utilizzato per la maggior parte del mio lavoro di tesi si ha:

$$4,47 \text{ GHz} \lesssim \frac{\omega_d}{2\pi} \lesssim 5,47 \text{ GHz} \quad (3.3)$$

$$6,49 \text{ GHz} \lesssim \frac{\omega_m}{2\pi} \lesssim 7,49 \text{ GHz} \quad (3.4)$$

dove si è ommesso l'indice i in quanto Armonk è costituito da un solo qubit. Si noti che il range di frequenze disponibili per drive channel è centrato intorno alla frequenza di risonanza del qubit $\frac{\Delta}{2\pi} = 4,92 \text{ GHz}$, mentre con il measurement channel si lavora fuori risonanza, come verrà chiarito meglio nella sezione 3.2. Nel caso di chip con almeno due qubit, è presente un ulteriore canale, il *control channel*, per effettuare operazioni a multi qubit.

Gli involucri degli impulsi sono descritti da vettori che contengono l'ampiezza campionata a intervalli di tempo fissato. Il tempo con cui viene campionato l'involucro è un parametro che dipende dal dispositivo utilizzato e non può essere scelto dall'utente. Il tempo di campionamento degli involucri del drive channel viene indicato con dt , per il measurement channel con dtm . Nel caso di Armonk si ha:

$$dt = dtm = 0,222 \text{ ns}. \quad (3.5)$$

Introdotte queste notazioni è possibile passare alla descrizione dei dati che possono essere ottenuti effettuando una misura. Qiskit Pulse supporta tre diversi formati, chiamati *livelli di misura*.

Livello di misura 0

Se si estraggono i dati utilizzando il livello di misura 0 la macchina restituisce all'utente un vettore contenente il segnale $a(t)$, mostrato in figura 3.1. Esso è il segnale in uscita dal dispositivo dopo l'interazione con l'impulso di misura. Il campionamento avviene con la frequenza fissata dal tempo dtm , introdotto in precedenza. Questo tipo di misura richiede una grande disponibilità di memoria e non viene frequentemente utilizzato. Nel corso della tesi non è stata utilizzata in quanto su Armonk non è disponibile.

Livello di misura 1

Utilizzando il livello di misura 1 il risultato di ciascuna misura è codificata mediante un numero complesso che nella sezione 3.2 verrà indicato come $I + iQ$. Esso viene ottenuto manipolando opportunamente il segnale $a(t)$ introdotto nel livello di misura 0. Nello schema in figura 3.1 questo passaggio avviene nel *kernel*. La conversione del segnale $a(t)$ in un numero complesso può avvenire in diversi modi, la scelta è lasciata all'utente entro una lista di possibilità definite per ciascun dispositivo. Per Armonk si ha una sola opzione che effettua una media di tutto il segnale. Nel corso della tesi è stato usato questo livello di misura.

Livello di misura 2

Infine nel caso delle misure di livello 2 si ottiene come risultato un bit classico (che può assumere i valori 0 o 1). In questo caso possono essere selezionati diversi *discriminatori* che, a partire dalle misure di livello 1, calcolano il valore del bit. Come nel caso dei kernel per le misure di livello 1, la scelta del discriminatore avviene tra quelli disponibili per il dispositivo che si sta utilizzando. Per Armonk è disponibile un discriminatore lineare e uno quadratico. Utilizzando questo livello di misura è possibile utilizzare i risultati di una misura per imporre condizioni sull'applicazione o meno di impulsi successivi.

Nella prossima sezione verrà descritto più nel dettaglio il processo fisico su cui si basa la misura effettuata sui qubit superconduttori.

3.2 Misura dispersiva

La più comune misura effettuata per determinare lo stato qubit superconduttivo (readout) è la cosiddetta *misura dispersiva*, che viene fatta accoppiando il qubit ad una cavità risonante [57]. Se un qubit e una cavità risonante accoppiati sono tenuti lontani dalla risonanza, lo stato in cui si trova il qubit influenza la frequenza della cavità senza che ci sia trasferimento di energia fra i due. Dalla misura di quest'ultima è quindi possibile ottenere informazioni sullo stato del qubit. La relazione 3.4 garantisce che le misure sui qubit IBM siano effettivamente realizzate fuori risonanza.

L'interazione tra il qubit e la cavità risonante è descritta dall'*hamiltoniana di Jaynes-Cummings* [63]:

$$\hat{\mathcal{H}}_{JC} = \hat{\mathcal{H}}_B + \hat{\mathcal{H}}_R + \hat{\mathcal{H}}_I = \frac{\Delta}{2}(\hat{\mathbb{I}} - \hat{\sigma}_z) + \omega_R \left(\hat{A}^\dagger \hat{A} + \frac{1}{2} \right) + \lambda (\hat{A}^\dagger \hat{\sigma}_- + \hat{\sigma}_+ \hat{A}) \quad (3.6)$$

con \hat{A}^\dagger/\hat{A} e $\hat{\sigma}_+/\hat{\sigma}_-$ operatori di creazione e distruzione rispettivamente dell'oscillatore armonico e del qubit, ω_R la frequenza della cavità risonante e λ l'intensità dell'accoppiamento. Si noti che lavorando nella base computazionale si ha $\hat{\sigma}_\pm = (\hat{\sigma}_x \mp i\hat{\sigma}_y)/2$. Nel caso di accoppiamento debole, definito *limite dispersivo*:

$$|\Delta - \omega_R| \gg \lambda \quad (3.7)$$

è possibile approssimare l'hamiltoniana al second'ordine in $\frac{\lambda}{|\Delta - \omega_R|}$ attraverso una trasformazione di Schrieffer-Wolff [63]. In questa direzione possiamo definire $\hat{\mathcal{H}}_0$ e $\hat{\mathcal{H}}_1$ come:

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \frac{\Delta}{2}(\hat{\mathbb{I}} - \hat{\sigma}_z) + \omega_R \left(\hat{A}^\dagger \hat{A} + \frac{1}{2} \right) = \Delta \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_- + \omega_R \hat{A}^\dagger \hat{A} + \frac{\omega_R}{2} \quad (3.8)$$

$$\hat{\mathcal{H}}_1 = \lambda (\hat{A}^\dagger \hat{\sigma}_- + \hat{\sigma}_+ \hat{A}) \quad (3.9)$$

e introdurre un operatore hermitiano \hat{W} , con $\hat{W} = \hat{W}^\dagger$, non dipendente dal tempo. È quindi possibile trasformare l'hamiltoniana del sistema come:

$$\hat{\mathcal{H}}_{eff} = e^{i\hat{W}} \hat{\mathcal{H}} e^{-i\hat{W}}. \quad (3.10)$$

Sviluppando questa espressione al second'ordine in \hat{W} si ha:

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}}_{eff} &= e^{i\hat{W}}\hat{\mathcal{H}}e^{-i\hat{W}} \simeq \\ &\simeq \left(\hat{\mathbb{I}} + i\hat{W} - \frac{1}{2}\hat{W}^2\right)\hat{\mathcal{H}}\left(\hat{\mathbb{I}} - i\hat{W} + \frac{1}{2}\hat{W}^2\right) \simeq \\ &\simeq \hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{\mathcal{H}}_1 + i[\hat{\mathcal{H}}_0, \hat{W}] - i[\hat{\mathcal{H}}_1, \hat{W}] - \frac{1}{2}[\hat{W}, [\hat{W}, \hat{\mathcal{H}}_0]].\end{aligned}\quad (3.11)$$

Scegliendo \hat{W} in modo che soddisfi la relazione:

$$\hat{\mathcal{H}}_1 = i[\hat{\mathcal{H}}_0, \hat{W}] \quad (3.12)$$

e sostituendo nella 3.11 si ha:

$$\hat{\mathcal{H}}_{eff} = \hat{\mathcal{H}}_0 - \frac{i}{2}[\hat{\mathcal{H}}_1, \hat{W}]. \quad (3.13)$$

È necessario quindi trovare esplicitamente il generatore della trasformazione \hat{W} . Per farlo è conveniente lavorare nella base in cui $\hat{\mathcal{H}}_0$ è diagonale. È sufficiente lavorare nel sottospazio che descrive la carica della batteria, la base utilizzata è quindi:

$$\{|p\rangle\} \equiv \{ |(\mathcal{N} + 1), 0\rangle; |\mathcal{N}, 1\rangle \}. \quad (3.14)$$

In questa base si ha:

$$\langle p|\hat{W}|p'\rangle = -i\frac{\langle p|\hat{\mathcal{H}}_1|p'\rangle}{E_p^{(0)} - E_{p'}^{(0)}} \quad (3.15)$$

e quindi in forma matriciale è possibile scrivere:

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \begin{pmatrix} (\mathcal{N} + 1)\omega_R & 0 \\ 0 & \mathcal{N}\omega_R + \Delta \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

$$\hat{\mathcal{H}}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \lambda\sqrt{\mathcal{N} + 1} \quad (3.17)$$

$$\hat{W} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \frac{\lambda\sqrt{\mathcal{N} + 1}}{\omega_R - \Delta}. \quad (3.18)$$

Effettuando il calcolo esplicito si verifica la condizione 3.12. Sostituendo nell'equazione 3.13 si ha:

$$\hat{\mathcal{H}}_{eff} = \begin{pmatrix} (\mathcal{N} + 1)\omega_R + \frac{\lambda^2(\mathcal{N} + 1)}{\omega_R - \Delta} & 0 \\ 0 & \mathcal{N}\omega_R + \Delta - \frac{\lambda^2(\mathcal{N} + 1)}{\omega_R - \Delta} \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

In termini di operatori è possibile riscrivere l'hamiltoniana efficace come:

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}}_{eff} &= \omega_R \left(\hat{A}^\dagger \hat{A} + \frac{1}{2}\right) + \frac{\Delta}{2}(\hat{\mathbb{I}} - \hat{\sigma}_z) + \frac{\lambda^2}{\omega_R - \Delta} \hat{\sigma}_z \hat{A}^\dagger \hat{A} - \frac{\lambda^2}{2(\omega_R - \Delta)}(\hat{\mathbb{I}} - \hat{\sigma}_z) = \\ &= \omega_R \left(\hat{A}^\dagger \hat{A} + \frac{1}{2}\right) + \frac{\Delta}{2}(\hat{\mathbb{I}} - \hat{\sigma}_z) + \frac{\lambda^2}{\omega_R - \Delta} \hat{\sigma}_z \left(\hat{A}^\dagger \hat{A} + \frac{1}{2}\right)\end{aligned}\quad (3.20)$$

dove nel secondo passaggio si è trascurato un termine costante. Il fattore $\chi = \frac{\lambda^2}{|\Delta - \omega_R|}$ è chiamato *spostamento dispersivo*. Si noti che l'hamiltoniana 3.20 è stata ricavata

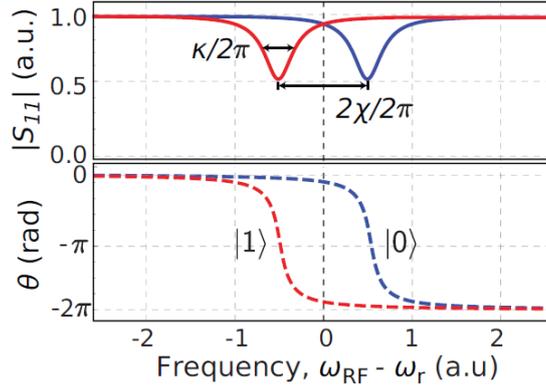


Figura 3.2: Intensità riflessa $|S_{11}| \equiv A_{RO}$ e fase $\theta \equiv \theta_{RO}$ del segnale di risposta della cavità risonante di larghezza κ se il qubit si trova nello stato $|0\rangle$ (blu) o $|1\rangle$ (rosso). Si noti che la distanza in frequenza tra i picchi del segnale è $\frac{2\chi}{2\pi}$. Immagine tratta da [57].

nell'approssimazione di trasimone come sistema a due livelli, ma può essere eventualmente estesa in modo da tenere in conto più livelli. La presenza dello spostamento dispersivo permette di distinguere i due stati del qubit. Riordinando i termini dell'hamiltoniana 3.20 si può scrivere infatti

$$\hat{\mathcal{H}}_{eff} = \left(\omega_R + \frac{\lambda^2}{\omega_R - \Delta} \hat{\sigma}_z \right) \left(\hat{A}^\dagger \hat{A} + \frac{1}{2} \right) + \frac{\Delta}{2} (\hat{\mathbb{I}} - \hat{\sigma}_z). \quad (3.21)$$

In questa forma è evidente la presenza di una variazione della frequenza efficace della cavità risonante dipendente dallo stato del qubit. In figura 3.2 è mostrato un esempio di misura effettuata con il circuito in figura 3.3. Si noti che il termine di interazione nell'hamiltoniana 3.20 commuta con $\hat{\sigma}_z$, questo significa che la misura dispersiva è, entro i limiti imposti dall'approssimazione, *non distruttiva* [77]. Questa proprietà è essenziale in molte applicazioni in quanto permette di utilizzare il qubit anche dopo aver effettuato una misura. Nelle misure non distruttive non si effettua una misura direttamente sul qubit, ma su un sistema ad esso accoppiato. Questo fa sì che la funzione d'onda del qubit non collassi in uno degli autostati della base a causa della misura, ma rimanga nello stato di sovrapposizione. Se si esegue una seconda misura dopo una misura non distruttiva, la probabilità di ottenere i valori di (I, Q) associati allo stato $|0\rangle$ o allo stato $|1\rangle$ è la stessa della prima misura. Se invece si effettua una misura direttamente sul qubit, la funzione d'onda di quest'ultimo collassa in uno degli autostati della base, rendendo vane misure successive.

Il problema a questo punto si riduce nel misurare la frequenza della cavità risonante. Nei quantum computer IBM è possibile effettuare la misura sia in riflessione sia in trasmissione. Uno schema di un possibile circuito utilizzato per effettuare la misura è mostrato in figura 3.3. L'obiettivo è quello di massimizzare la separazione tra i due stati nel piano (I, Q) delle componenti in fase e in quadratura del voltaggio. In generale il segnale riflesso (o quello trasmesso) può essere scritto come:

$$s(t) = A_{RO} \cos(\omega_m t + \theta_{RO}) \quad (3.22)$$

dove ω_m è la frequenza portante del segnale che entra nel modulo di misura e A_{RO} e θ_{RO} sono rispettivamente l'ampiezza e la fase che dipendono dallo stato del qubit.

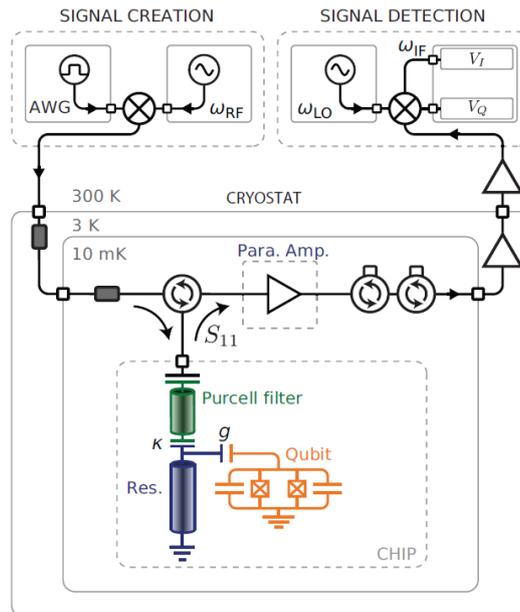


Figura 3.3: Schema di un possibile set-up utilizzato per effettuare una misura dispersiva. Il qubit è rappresentato in arancione, la cavità risonante in blu (l'accoppiamento tra qubit e cavità nel testo è indicato con la lettera λ invece di g .) Immagine tratta da [57].

È conveniente riscrivere l'equazione 3.22 utilizzando la notazione complessa:

$$\begin{aligned} s(t) &= \Re\left(A_{RO}e^{i(\omega_m t + \theta_{RO})}\right) = \\ &= \Re\left(A_{RO}e^{i\theta_{RO}}e^{i\omega_m t}\right) \end{aligned} \quad (3.23)$$

il termine $A_{RO}e^{i\theta_{RO}}$ viene chiamato *fasore* e contiene tutte le informazioni del segnale nota la portante ω_m . Per effettuare la lettura del qubit è quindi necessario misurare le componenti in fase I e in quadratura Q del fasore:

$$A_{RO}e^{i\theta_{RO}} = A_{RO} \cos \theta_{RO} + iA_{RO} \sin \theta_{RO} \equiv I + iQ. \quad (3.24)$$

La misura di I e Q può essere fatta utilizzando un mixer (I, Q) [57, 78]. Il valore assoluto di tali parametri non è di particolare interesse, l'elemento essenziale è la variazione di queste quantità a seconda dello stato del qubit.

Poiché durante la tesi è stato sempre utilizzato il livello di misura 1, ogni misura dello stato del qubit è un numero complesso riportato nel piano (I, Q) , convenzione che verrà adottata nel seguito.

3.3 Calibrazione

Al fine di accumulare una statistica adeguata sfruttiamo la possibilità di effettuare misure multiple sulle macchine IBM. Tipicamente le misure sono sparse nel piano (I, Q) ed è necessaria una fase di calibrazione.

Per prima cosa è necessario caratterizzare lo stato fondamentale. In questo caso il qubit viene inizializzato e subito dopo viene fatta la misura. Successivamente

si caratterizza lo stato eccitato. Come descritto nella sezione 2.4 per effettuare la transizione $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$ è necessario applicare un impulso che rispetti la condizione:

$$\theta(t_m) = \pi. \quad (3.25)$$

In questa fase è stato utilizzato un involuppo gaussiano, forma standard utilizzata da IBM, descritto dalla seguente equazione:

$$f(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2g^2\sigma^2}} e^{-\frac{(t-\frac{t_m}{2})^2}{2\sigma^2}} \quad (3.26)$$

con $t_m = 600$ ns la durata dell'impulso e $\sigma = \frac{t_m}{8}$. Dal punto di vista teorico si ha:

$$|\psi(0)\rangle = |0\rangle \rightarrow a = 1. \quad (3.27)$$

Si noti che il valore di ϕ è ininfluenza nella definizione dello stato fondamentale. Sostituendo nell'equazione 2.85 si ha quindi:

$$|\psi(t_m)\rangle = -ie^{-i\varphi(t_m)} |1\rangle \equiv |1\rangle \quad (3.28)$$

e riprendendo l'equazione 2.86 si ha:

$$\mathcal{P}_0(0) = 1 \quad (3.29)$$

$$\mathcal{P}_1(t_m) = 1. \quad (3.30)$$

Un esempio di distribuzione dei punti ottenuta effettuando 1024 ripetizioni della misura è riportata in figura 3.4, mentre effettuando 8192 ripetizioni in figura 3.5.

Per discriminare i due stati del sistema è stato scritto un algoritmo in Python in grado di separare il piano (I, Q) in due regioni, una associata allo stato $|0\rangle$ e una allo stato $|1\rangle$ (si veda il listato del programma in appendice A). La retta che separa le due regioni è l'asse del segmento congiungente i centri delle due distribuzioni (punti neri in figura 3.4(c) e 3.5(c))¹. La scelta di considerare la retta passante per il punto medio del segmento congiungente i centri delle due distribuzioni assume implicitamente che queste ultime abbiano la stessa dispersione, in caso contrario sarebbe necessario operare una media pesata. Tale assunzione si è rivelata a posteriori coerente con la descrizione dei dati sperimentali. L'efficienza con cui questo algoritmo è in grado di classificare i due stati è calcolata come il rapporto tra i punti classificati correttamente e i punti totali:

$$\eta_i = \frac{n_{|i\rangle}^{(i)}}{n_{tot}^{(i)}} \quad (3.31)$$

con $n_{tot}^{(i)}$ il numero di punti del campione i -esimo e $n_{|i\rangle}^{(i)}$ i punti del campione i -esimo che si trovano nella regione $|i\rangle$. Nel caso in figura 3.4 si ha:

$$\eta_0^{(1024)} \simeq 0.974 \quad (3.32)$$

$$\eta_1^{(1024)} \simeq 0.927. \quad (3.33)$$

¹Si noti che in figura la retta non sembra essere perpendicolare al segmento in quanto sono state utilizzate due scale differenti sull'asse I e Q .

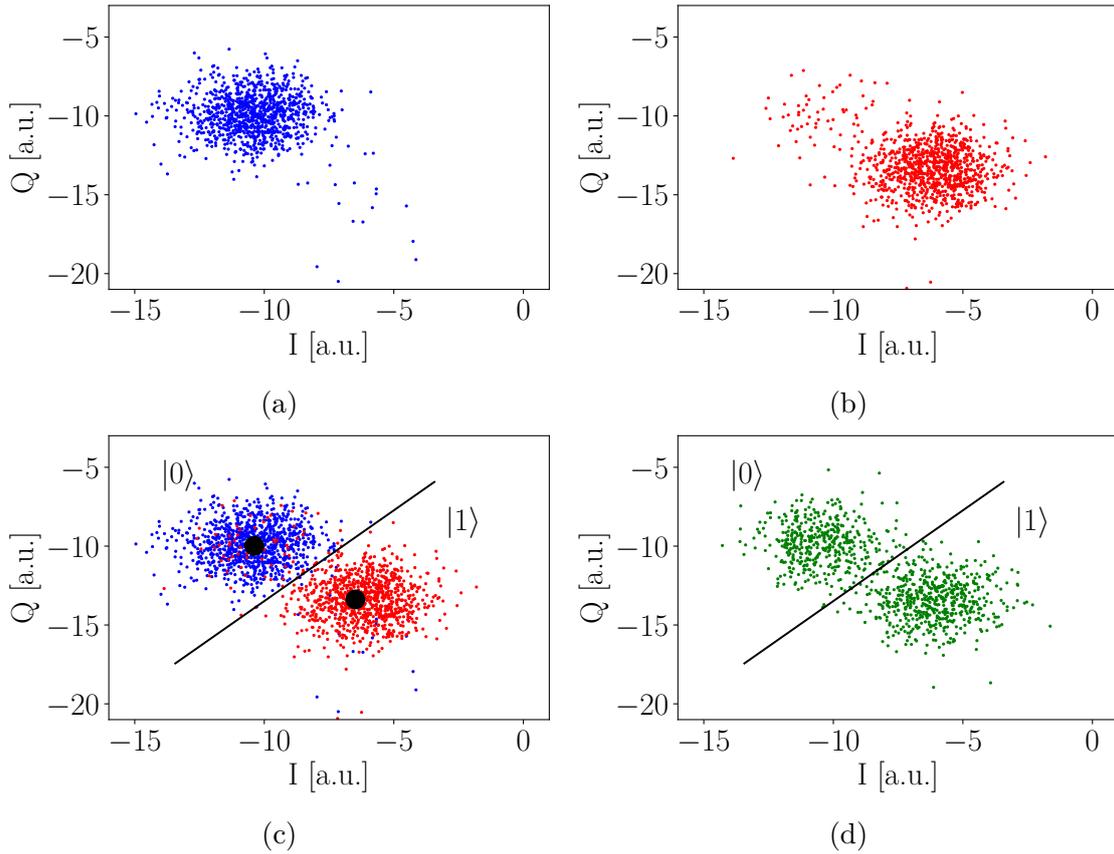


Figura 3.4: dispersione dei punti per 1024 campionamenti: (a) punti (in blu) relativi alle misure effettuate per caratterizzare lo stato fondamentale, $|0\rangle$, (b) punti (in rosso) relativi alle misure dopo l'impulso descritto dall'equazione 3.26 per realizzare lo stato $|1\rangle$. (c) sovrapposizione dei punti delle figure (a) e (b). I punti neri indicano il centroide delle due distribuzioni ed è stata introdotta la retta che separa il piano in due regioni. (d) esempio della distribuzione dei dati associati a una misura con $\theta(t_m) = \frac{\pi}{2}$ (punti verdi). La retta è quella calcolata grazie alla calibrazione presentata in figura (c). Tutti i grafici nel piano (I, Q) sono in unità arbitrarie

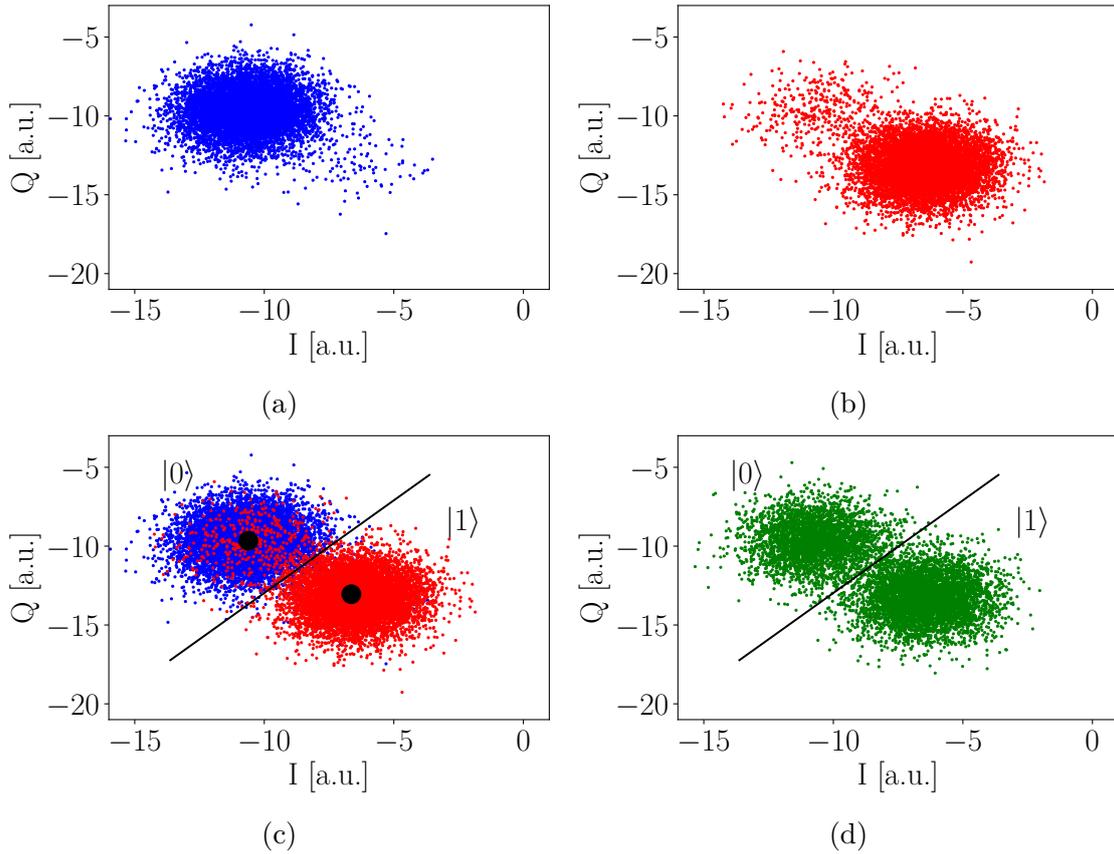


Figura 3.5: dispersione dei punti per 8192 campionamenti: (a) punti (in blu) relativi alle misure effettuate per caratterizzare lo stato fondamentale, $|0\rangle$, (b) punti (in rosso) relativi alle misure dopo l'impulso descritto dall'equazione 3.26 per realizzare lo stato $|1\rangle$. (c) sovrapposizione dei punti delle figure (a) e (b). I punti neri indicano il centroide delle due distribuzioni ed è stata introdotta la retta che separa il piano in due regioni. (d) esempio della distribuzione dei dati associati a una misura con $\theta(t_m) = \frac{\pi}{2}$ (punti verdi). La retta è quella calcolata grazie alla calibrazione presentata in figura (c). Tutti i grafici nel piano (I, Q) sono in unità arbitrarie

Nel caso in figura 3.5 si ha:

$$\eta_0^{(8192)} \simeq 0.961 \quad (3.34)$$

$$\eta_1^{(8192)} \simeq 0.930 \quad (3.35)$$

Poiché non si osserva un significativo aumento delle efficienze ottenute nella discriminazione dei due stati aumentando il numero di ripetizioni, tutte le misure successivamente riportate sono state fatte utilizzando 1024 ripetizioni della misura.

I valori trovati nelle equazioni 3.32, 3.33, 3.34 e 3.35 si allontanano dal caso ideale perché ad ogni operazione effettuata sul qubit, ad esempio l'inizializzazione, è associato un errore. In figura 3.4(d) e 3.5(d) sono rappresentati il risultato di misure su uno stato di sovrapposizione ottenuto applicando un impulso con $\theta(t_m) = \frac{\pi}{2}$ al qubit inizializzato nello stato fondamentale $|0\rangle$. Sostituendo nell'equazione 2.85 si ha:

$$|\psi(t_m)\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\varphi(t)} (|0\rangle - i e^{-2i\varphi(t)} |1\rangle). \quad (3.36)$$

Teoricamente si ha quindi:

$$\mathcal{P}_1(\theta(t_m)) = \mathcal{P}_0(\theta(t_m)) = 0.5. \quad (3.37)$$

Nel caso in figura 3.4(d) abbiamo:

$$\eta_1^{(1024)} \simeq 0.567, \quad (3.38)$$

mentre in quello in figura 3.5(d):

$$\eta_1^{(8192)} \simeq 0.586. \quad (3.39)$$

Si noti che in entrambi i casi si ha un valore maggiore di quello atteso. Una possibile giustificazione a questo fenomeno sarà discussa nel capitolo 4.

L'algoritmo di classificazione descritto in questo capitolo permette di quantificare l'energia presente nel qubit al momento della misura. In questo modo è possibile costruire le curve di carica che descrivono la variazione di energia presente nel qubit in funzione della fase associata all'involuppo θ . Questo aspetto è fondamentale nell'ottica della tesi che mira a caratterizzare il processo di carica di una batteria quantistica attraverso lo studio dell'evoluzione dello stato di un qubit. Il capitolo 4 è dedicato allo studio della carica, nella prima parte inizializzando il sistema nello stato fondamentale e nella seconda in uno stato di sovrapposizione. Verranno confrontate le performance della carica mediata attraverso impulsi definiti da diversi involuppi e verranno commentati i limiti nella scelta dei parametri liberi.

Capitolo 4

Processo di carica

In questo capitolo verrà analizzata la fase di carica del chip Armonk. Inizialmente il qubit sarà inizializzato nello stato fondamentale e le curve di carica ottenute attraverso un simulatore saranno comparate con le misure effettuate sul dispositivo reale. Il simulatore scelto è implementato nel modulo *Qiskit Dynamics*, rilasciato a Ottobre 2021 e sviluppato per studiare la dinamica di sistemi quantistici. Questo simulatore permette di definire gli impulsi come sul dispositivo reale e confrontare pertanto direttamente i risultati ottenuti, come descritti nell'equazione 2.88.

Saranno presentati diversi profili dell'involuppo $f(t)$ con l'obiettivo di capire quali sono i vincoli che tale funzione deve rispettare per garantire una buona carica della batteria. Particolare attenzione verrà poi dedicata alla ricerca del tempo minimo con cui si può effettuare il passaggio dallo stato fondamentale allo stato eccitato (processo di carica). Verranno considerate prevalentemente funzioni gaussiane e, in misura minore, lorentziane. Partendo dalle curve di carica verrà inoltre determinata l'incertezza con la quale il sistema viene inizializzato nello stato fondamentale [51].

Infine, l'obiettivo dell'ultima parte analisi sarà quello di capire quale ruolo svolge lo stato iniziale del sistema nel processo di carica. Per raggiungere questo scopo il sistema sarà sollecitato con una rotazione che lo porterà in uno stato di sovrapposizione, prima di sollecitarlo con un impulso volto a completare il processo di carica. In particolare, ci siamo concentrati sullo studio del processo di carica del sistema partendo da stati di massima sovrapposizione, lo stato Hadamard e lo stato Left, già introdotti nel capitolo 2.

4.1 Processo di carica dallo stato fondamentale

Supponendo che il sistema si trovi al tempo $t = 0$ nello stato fondamentale ($a = 1$), dall'equazione 2.88 si ricava che la curva di carica ideale è data da:

$$E(1, \phi, \theta) = \Delta \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (4.1)$$

Si noti che avendo posto $a = 1$, l'energia immagazzinata nel sistema non dipende più esplicitamente da ϕ . Se si sceglie $f(t)$ in modo che rispetti la condizione:

$$\theta = \int_0^{t_m} f(t) dt = \pi \quad (4.2)$$

sostituendo nell'equazione 4.1 si ha:

$$E(1, \phi, \pi) = \Delta. \quad (4.3)$$

Partendo dallo stato fondamentale è quindi teoricamente possibile raggiungere la completa carica della batteria.

Come anticipato, la scelta delle forme di involuppo da analizzare è ristretta a due classi di funzioni molto utilizzate per modellizzare segnali che rispettino la condizione $f(0) = f(t_m) \simeq 0$, gaussiane e lorentziane. Infatti, dal punto di vista sperimentale, essa non è soddisfatta esattamente poiché non si lavora con impulsi di durata infinita. Per compensare ciò i parametri che definiscono la forma degli involuppi sono fissati in modo che l'effetto della durata finita degli impulsi sia trascurabile. L'analisi che è stata condotta può essere divisa in due fasi: inizialmente è stato fatto un studio utilizzando involuppi gaussiani con l'obiettivo di trovare le migliori combinazioni di parametri per completare il processo di carica nel minor tempo. Successivamente sono state fatte alcune prove con funzioni lorentziane per verificare se è presente una dipendenza, non attesa teoricamente, dalla forma funzionale dell'involuppo.

Per costruire le curve di carica sono state effettuate misure, come descritto nel capitolo 3, sul sistema dopo averlo sollecitato con impulsi corrispondenti a 16 valori di θ equispaziati tra 0 (sistema nello stato fondamentale) e π (sistema nello stato eccitato). La routine per lo svolgimento di tale misure sulla macchina Armonk è riportata in appendice A. In particolare, i punti corrispondenti a $\theta = 0$ sono stati ottenuti effettuando una misura sul qubit subito dopo l'inizializzazione, senza sollecitarlo con alcun impulso, così come descritto anche nella sezione 3.3. Ogni curva di carica è stata costruita utilizzando impulsi aventi stessa durata t_m . È opportuno ricordare che gli impulsi vengono descritti come funzioni continue del tempo, ma all'interno delle macchine sono costituiti da vettori di punti campionati a una distanza temporale di dt , parametro introdotto nella sezione 3.1.

4.1.1 Inviluppo gaussiano

La forma di involuppo gaussiano è una delle funzioni standard definite nel pacchetto Qiskit Pulse¹:

$$f^{(g)}(t) = \mathcal{A} e^{-\frac{(t-t_m/2)^2}{2\sigma^2}} \quad (4.4)$$

dove \mathcal{A} è l'ampiezza adimensionale dell'involuppo, con vincolo $\mathcal{A} < 1$, t_m è la durata dell'impulso ed è vincolata ad essere un multiplo intero di $16dt$ e σ è la deviazione standard e vincolata ad essere un multiplo intero di dt . Questi vincoli sono imposti dal software e non possono essere modificati dall'utente. Nel seguito i valori saranno riportati in ns, approssimati nella macchina al multiplo intero di dt o $16dt$ più vicino.

Dai ragionamenti svolti nella sezione 2.4 è chiaro che la quantità a cui siamo interessati è:

$$\theta = g \int_0^{t_m} f^{(g)}(t) dt = \sqrt{2}\sigma \mathcal{A} g \int_{-\frac{t_m}{2\sqrt{2}\sigma}}^{\frac{t_m}{2\sqrt{2}\sigma}} e^{-x^2} dx \quad (4.5)$$

dove è stato effettuato un cambio di variabile ponendo $\frac{t-t_m/2}{\sqrt{2}\sigma} = x$. Poiché l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad (4.6)$$

¹Dopo la fine delle misure condotte nel corso della tesi la definizione dell'involuppo gaussiano è stata modificata in $f^{(g)}(t) = \mathcal{A} \frac{f_1(t) - f_1(-1)}{1 - f_1(-1)}$ con $f_1(t) = e^{-\frac{(t-t_m/2)^2}{2\sigma^2}}$. Resta possibile utilizzare la forma funzionale descritta dall'equazione 4.4 definendola esplicitamente.

è noto, nel limite $\frac{t_m}{2\sqrt{2}\sigma} \gg 1$ è possibile approssimare l'integrale 4.5 come:

$$\theta = g \int_0^{t_m} f^{(g)}(t) dt = \sqrt{2\pi}\sigma \mathcal{A}g. \quad (4.7)$$

Si noti che questa approssimazione si traduce nel trascurare il contributo delle code all'area sottesa all'involuppo e garantisce che sia rispettato il vincolo sugli estremi riportato nell'equazione 2.3.

I parametri su cui è possibile agire sono pertanto \mathcal{A} e σ e t_m . Inizialmente verranno considerati impulsi di durata $t_m = 600$ ns, in modo da comprendere il contributo degli altri parametri liberi nella carica del sistema, quali l'ampiezza e la larghezza delle gaussiane. Successivamente nella sezione 4.1.2 verrà determinato il tempo minimo per effettuare la carica in funzione dei diversi parametri analizzati. Per generare set di impulsi con θ variabile tra 0 e π si è inoltre scelto di lavorare mantenendo fisso un parametro tra \mathcal{A} , σ e variare opportunamente l'altro. Nel seguito verranno descritti i due approcci, che in condizioni ideali risultano equivalenti.

Ampiezza costante

La prima possibilità è quella di utilizzare impulsi con ampiezza \mathcal{A} fissa per tutti i valori di θ . Dall'equazione 4.7 si ricava che σ deve soddisfare la relazione:

$$\sigma = \frac{\theta}{\sqrt{2\pi}\mathcal{A}g}. \quad (4.8)$$

Sostituendo questa espressione per σ nell'equazione 4.4 si ha:

$$f^{(g)}(t) = \mathcal{A}e^{-\pi\left(\frac{\mathcal{A}g}{\theta}\left(t - \frac{t_m}{2}\right)\right)^2}. \quad (4.9)$$

In figura 4.1 sono riportati i punti ottenuti con il simulatore Qiskit Dynamics confrontati con la curva teorica riportata nell'equazione 4.1. Si nota un ottimo accordo tra i dati generati dal simulatore a diversi valori dell'ampiezza e la curva teorica. Questo garantisce la possibilità di utilizzare l'approssimazione di gaussiana infinita per il calcolo dell'integrale. Inoltre, questo risultato è una conferma del fatto che la rotating wave approximation utilizzata nell'equazione 2.66, e quindi alla base dell'equazione 4.1, è valida dati i parametri del sistema.

Successivamente si è passati all'analisi dei dati raccolti utilizzando il dispositivo reale, il chip Armonk. In figura 4.2 sono quindi riportati i dati ottenuti sollecitando il qubit con impulsi gaussiani ad ampiezza costante, come descritti dall'equazione 4.9. In particolare in figura 4.2(a) si è scelto $\mathcal{A} = 0.1$, in figura 4.2(b) $\mathcal{A} = 0.5$ e infine in figura 4.2(c) $\mathcal{A} = 1$. Sono state effettuate 10 prove per ciascun valore di θ , ciascuna con 1024 ripetizioni. I punti riportati nei grafici sono stati calcolati come descritto nella sezione 3.3 e in particolare attraverso l'equazione 3.31. Per facilitare l'analisi, in figura 4.2(d) sono state sovrapposte le tre serie di dati. Complessivamente i dati mostrano un buon accordo con la curva teorica. Si può notare però una dipendenza non attesa dall'ampiezza utilizzata: a fissato θ all'aumentare dell'ampiezza il sistema sembra avere un'energia minore. Per giustificare questo effetto è necessario calcolare la deviazione standard delle funzioni gaussiane che sono state utilizzate e per farlo è sufficiente ricorrere all'equazione 4.8. Nella tabella 4.1 è riportata la deviazione standard degli impulsi corrispondenti a $\theta = \frac{\pi}{15}$ (il più piccolo valore considerato

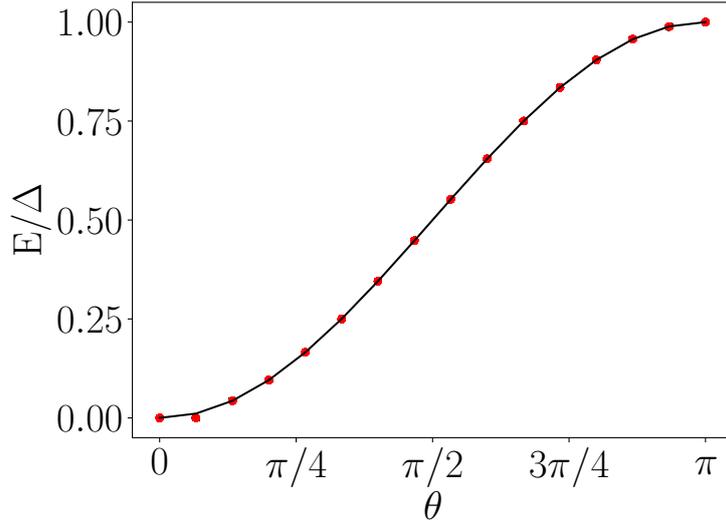


Figura 4.1: punti generati con il simulatore Qiskit Dynamics utilizzando impulsi gaussiani a diverse ampiezze, confrontati con la curva teorica riportata nell'equazione 4.1. I parametri utilizzati sono $\mathcal{A} = 0.1$, $\mathcal{A} = 0.5$ e $\mathcal{A} = 1$. Si noti nei tre casi i punti sono perfettamente sovrapposti.

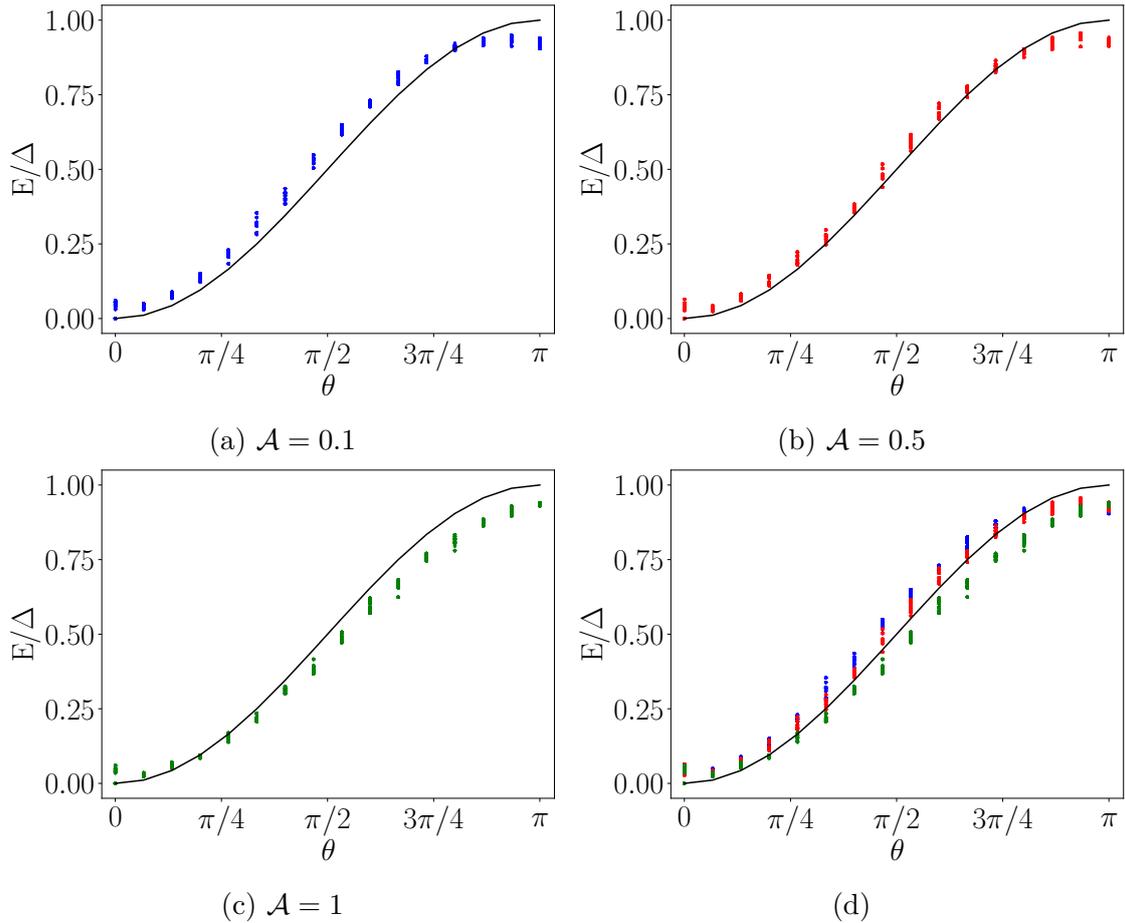


Figura 4.2: curve di carica ottenute applicando impulsi gaussiani ed effettuando 10 prove per ciascun valore di θ . I parametri scelti sono: (a) $\mathcal{A} = 0.1$, (b) $\mathcal{A} = 0.5$, (c) $\mathcal{A} = 1$ e (d) sovrapposizione dei dati riportati nelle figure (a), (b), (c). La curva nera è quella teorica descritta dall'equazione 4.1.

\mathcal{A}	$\sigma\left(\frac{\pi}{15}\right) [ns]$	$\sigma\left(\frac{\pi}{15}\right) /dt$	$\sigma(\pi) [ns]$	$\sigma(\pi) /dt$
0.1	7.958	36	119.4	538
0.5	1.592	7	23.88	108
1	0.7958	4	11.94	54

Tabella 4.1: deviazione standard (in ns e in unità di dt) degli impulsi gaussiani corrispondenti a $\theta = \frac{\pi}{15}$ e $\theta = \pi$ in funzione dell'ampiezza \mathcal{A} . I valori in unità di dt sono approssimati all'intero più vicino.

diverso da zero) e $\theta = \pi$ (valore massimo considerato) in funzione dell'ampiezza \mathcal{A} . La regione di interesse statistico per questa funzione è data dall'intervallo $[-3\sigma, 3\sigma]$. Dai dati riportati nella tabella 4.1 si ha che per $\mathcal{A} = 0.1$ tale intervallo varia tra $\sim 200dt$ e $\sim 3200dt$, per $\mathcal{A} = 0.5$ varia tra $\sim 40dt$ e $\sim 600dt$ e infine per $\mathcal{A} = 1$ varia tra $\sim 20dt$ e $\sim 300dt$. All'aumentare dell'ampiezza aumentano quindi gli errori associati alla discretizzazione degli impulsi e di conseguenza la discrepanza tra il valore di θ reale e quello atteso.

Questa osservazione fornisce un primo vincolo alla forma degli impulsi: l'utilizzo di impulsi prossimi a una delta di Dirac è un ostacolo al raggiungimento dello stato eccitato. Si è tenuto conto di questa osservazione nella scelta delle deviazioni standard degli impulsi descritti nella prossima sezione.

Deviazione standard costante

La seconda possibilità è quella di tenere la larghezza dell'impulso costante e variare l'ampiezza che in questo caso deve soddisfare la relazione:

$$\mathcal{A} = \frac{\theta}{\sqrt{2\pi}\sigma g}. \quad (4.10)$$

La funzione che descrive l'involuppo dell'impulso è quindi data da:

$$f^{(g)}(t) = \frac{\theta}{\sqrt{2\pi}\sigma g} e^{-\frac{(t-t_m/2)^2}{2\sigma^2}}. \quad (4.11)$$

Si noti che la condizione $\mathcal{A} < 1$ sull'ampiezza si riflette su σ come:

$$\sigma > \frac{\theta}{\sqrt{2\pi}g}. \quad (4.12)$$

Poiché questo deve essere vero per tutti i θ , deve esserlo anche per $\theta = \pi$, il massimo utilizzato, da cui:

$$\sigma > \frac{\pi}{\sqrt{2\pi}g} \simeq 11,94 \text{ ns}. \quad (4.13)$$

Lavorare con impulsi a larghezza fissata impedisce quindi di sollecitare il sistema con impulsi troppo stretti e permette altresì di non incorrere nei problemi dovuti alla discretizzazione riscontrati nella sezione precedente. In figura 4.3 sono riportati i punti ottenuti con il simulatore Qiskit Dynamics confrontati con la curva teorica riportata nell'equazione 4.1. Come nel caso precedente si ha un ottimo accordo tra i dati generati dal simulatore per diversi valori di σ e la curva teorica. È quindi possibile utilizzare l'approssimazione di gaussiana infinita per il calcolo dell'integrale.

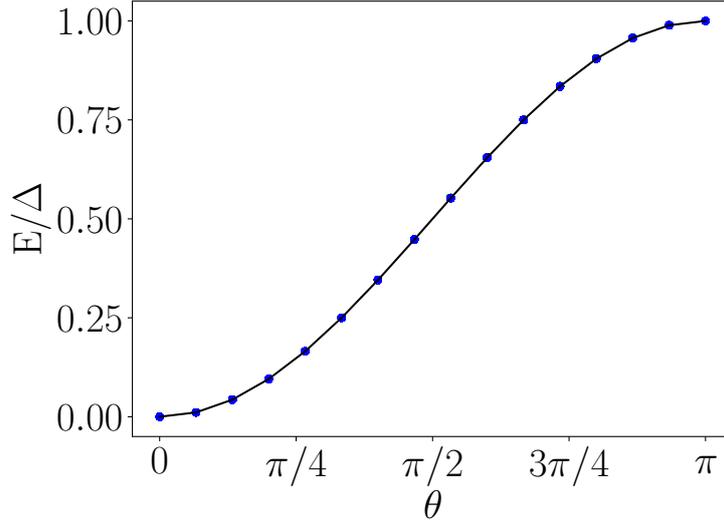


Figura 4.3: punti generati con il simulatore Qiskit Dynamics utilizzando impulsi gaussiani a diverse deviazioni standard, confrontati con la curva teorica riportata nell'equazione 4.1. I parametri utilizzati sono $\sigma = \frac{t_m}{8}$, $\sigma = \frac{t_m}{12}$ e $\sigma = \frac{t_m}{20}$. Si noti che nei tre casi i punti sono perfettamente sovrapposti.

σ [ns]	$\mathcal{A}\left(\frac{\pi}{15}\right)$	$\mathcal{A}(\pi)$
75	0.0106	0.159
50	0.0159	0.239
30	0.0265	0.398

Tabella 4.2: ampiezza \mathcal{A} degli impulsi corrispondenti a $\theta = \frac{\pi}{15}$ e $\theta = \pi$ in funzione della deviazione standard σ .

In figura 4.4 sono riportati i dati ottenuti sollecitando il qubit con impulsi gaussiani a larghezza fissata, come descritti dall'equazione 4.11. In tutti i casi $t_m = 600$ ns e sono state effettuate 10 prove per ciascun valore di θ , ciascuna caratterizzata da 1024 ripetizioni. In particolare in figura 4.4(a) si è scelto $\sigma = t_m/8 = 75$ ns ($338dt$), in figura 4.4(b) $\sigma = t_m/12 = 50$ ns ($225dt$) e infine in figura 4.4(c) $\sigma = t_m/20 = 30$ ns ($135dt$). Come nei grafici riportati in figura 4.2, i punti sono stati calcolati attraverso l'equazione 3.31. Per facilitare l'analisi, in figura 4.4(d) sono state sovrapposte le tre serie di dati. Si noti che i valori di σ scelti rispettano ampiamente la condizione 4.13. I dati mostrano un buon accordo con la curva teorica e, dalla figura 4.4(d), emerge che per i valori analizzati non si ha una dipendenza della curva di carica da σ . In analogia a quanto fatto nel caso precedente, dall'equazione 4.10 è possibile calcolare l'ampiezza delle gaussiane che descrivono l'involuppo degli impulsi utilizzati in funzione di \mathcal{A} . Come nel caso precedente i primi punti con $\theta > 0$ corrispondono a $\theta = \frac{\pi}{15}$. Nella tabella 4.2 sono riportati i valori ottenuti per $\theta = \frac{\pi}{15}$ e $\theta = \pi$. Si noti che l'ampiezza degli impulsi utilizzati in questa sezione è sempre minore di 0.5.

A conferma del fatto che l'approccio ad ampiezza costante e a deviazione standard costante sono equivalenti, a patto di rimanere nella corretta regione di parametri, è utile confrontare i dati riportati in figura 4.2 e in figura 4.4. In figura 4.5 sono sovrapposte le sei serie di dati e la curva teorica descritta dall'equazione 4.1. Per

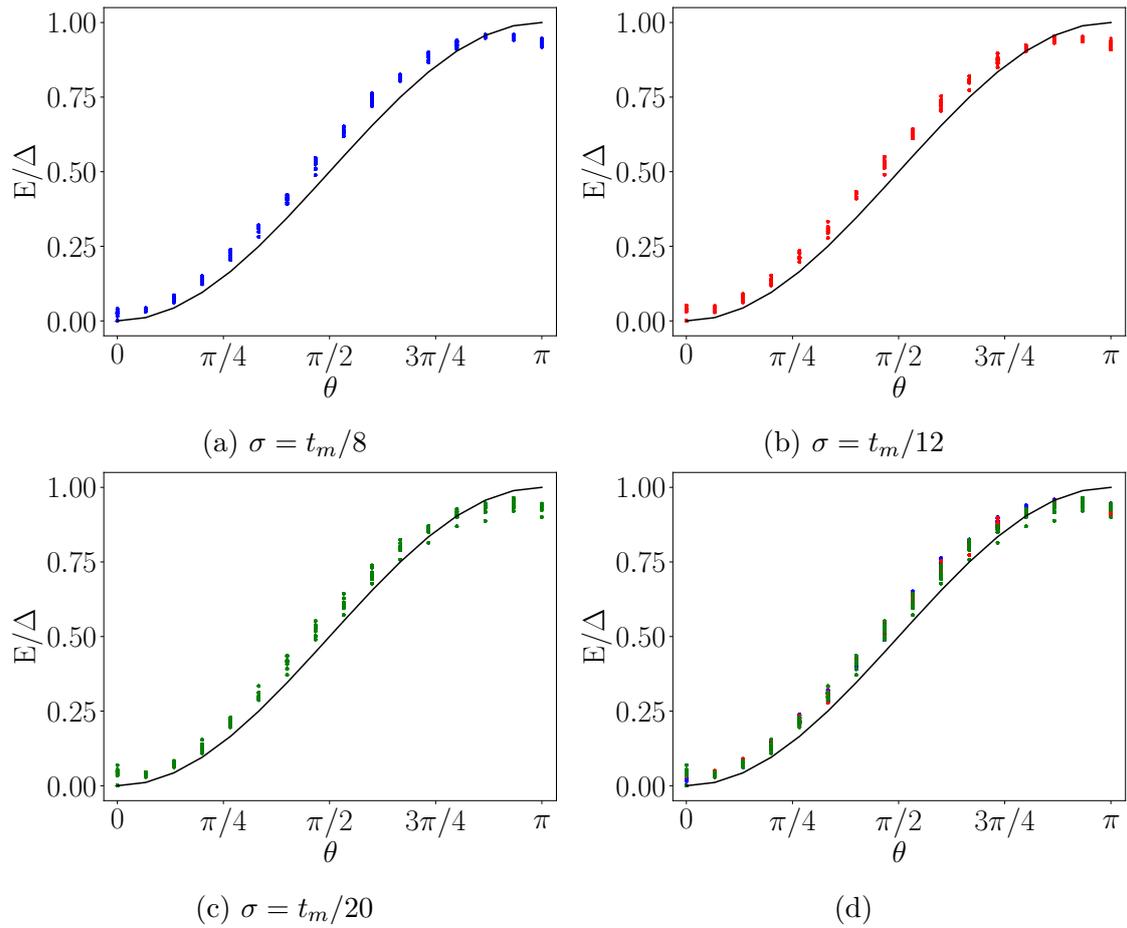


Figura 4.4: curve di carica ottenute applicando impulsi gaussiani ed effettuando 10 prove per ciascun valore di θ . I parametri scelti sono: (a) $\sigma = t_m/8$, (b) $\sigma = t_m/12$, (c) $\sigma = t_m/20$ e (d) sovrapposizione dei dati riportati nelle figure (a), (b), (c). La curva nera è quella teorica descritta dall'equazione 4.1.

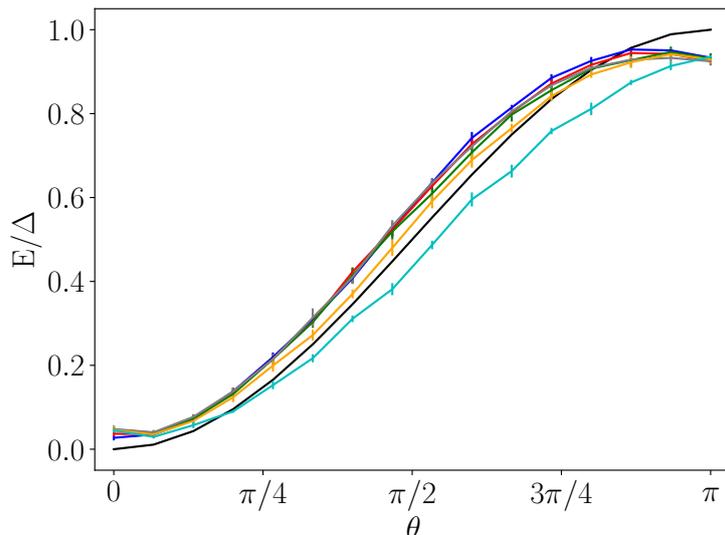


Figura 4.5: valor medio ed errore standard delle curve di carica ottenute con impulsi gaussiani caratterizzati dai seguenti parametri: (blu) $\sigma = t_m/8$, (rosso) $\sigma = t_m/12$, (verde) $\sigma = t_m/20$, (grigio) $\mathcal{A} = 0.1$, (arancione) $\mathcal{A} = 0.5$, (azzurro) $\mathcal{A} = 1$. In nero è rappresentata la curva teorica descritta dall'equazione 4.1

una maggiore chiarezza sono riportati solamente il valor medio e l'errore standard delle dieci misure effettuate. Si osserva che tutte le curve sperimentali si concentrano in una stessa regione, ad eccezione della curva ottenuta sollecitando il sistema con impulsi gaussiani con ampiezza $\mathcal{A} = 1$ (curva azzurra), ma tale regione non coincide con quanto visto dall'equazione 4.1 (curva nera). In particolare è evidente che per $\theta = 0$ le curve sperimentali si trovano a un'energia maggiore di zero e che non viene raggiunta la carica totale per $\theta = \pi$. Questo suggerisce che il sistema non si trovi esattamente nello stato fondamentale a seguito dell'inizializzazione. Per questo motivo nella sezione successiva verranno effettuati dei fit, in modo da trovare la miglior stima dello stato fondamentale.

Determinazione dello stato iniziale

Come si è osservato nel capitolo precedente, la procedura di inizializzazione del qubit è affetta da un errore non trascurabile, il processo di carica non ha quindi inizio dallo stato fondamentale ma da uno stato di sovrapposizione. Per caratterizzare l'effettivo stato iniziale del sistema, è stato eseguito un fit utilizzando le librerie di *ROOT* [79]. L'equazione che è stata utilizzata per descrivere i dati sperimentali è quella dell'energia immagazzinata nella batteria in funzione dei parametri a e ϕ , caratterizzanti lo stato iniziale del sistema, e θ , fase associata all'involuppo dell'impulso attraverso il quale è stato sollecitato il sistema:

$$E(a, \phi, \theta) = 2\Delta\sqrt{a}\sqrt{1-a} \sin\phi \cos\frac{\theta(t_m)}{2} \sin\frac{\theta(t_m)}{2} + \Delta a \sin^2\frac{\theta(t_m)}{2} + \Delta(1-a) \cos^2\frac{\theta(t_m)}{2}. \quad (4.14)$$

ricavata nella sezione 2.4.1. Il risultato della procedura di fit è l'insieme dei valori dei parametri liberi, a e ϕ , per cui la curva restituisce il migliore accordo con i dati

	a	ϕ	χ^2/ndf
$\mathcal{A} = 0.1$	0.968 ± 0.003	0.36 ± 0.02	7.464
$\mathcal{A} = 0.5$	0.969 ± 0.003	0.11 ± 0.03	3.006
$\mathcal{A} = 1$	0.951 ± 0.002	-0.33 ± 0.02	3.415
$\sigma = \frac{t_m}{8}$	0.975 ± 0.002	0.42 ± 0.03	6.153
$\sigma = \frac{t_m}{12}$	0.965 ± 0.002	0.32 ± 0.02	2.584
$\sigma = \frac{t_m}{20}$	0.973 ± 0.003	0.28 ± 0.04	7.085

Tabella 4.3: parametri ottenuti dai fit riportati nelle figure 4.6 e 4.7 caratterizzanti lo stato iniziale del sistema definito come nell'equazione 2.22 e il valore del χ^2/ndf , parametro che quantifica la bontà del fit. I diversi casi sono identificati attraverso il valore del parametro mantenuto costante.

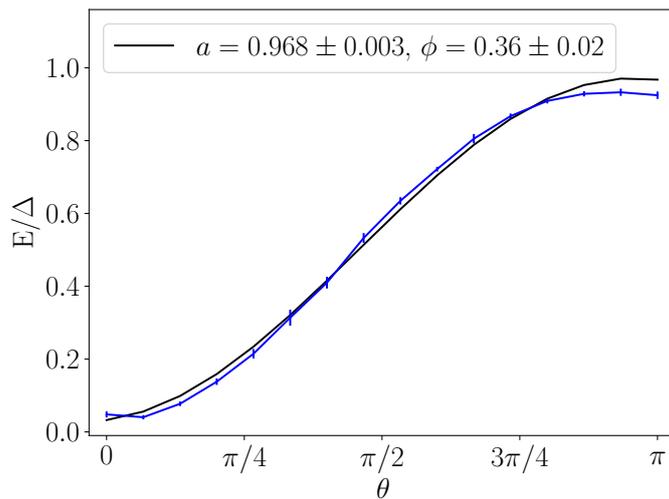
sperimentali. Si noti che a e ϕ rappresentano rispettivamente la probabilità che il sistema si trovi nello stato fondamentale e la fase relativa tra lo stato fondamentale e lo stato eccitato al tempo $t = 0$ (vedere equazione 2.22). La procedura attraverso cui ROOT restituisce i parametri della funzione, detta di best fit, è svolta dall'algoritmo di minimizzazione *MINUIT* che, nella modalità default, minimizza la funzione χ^2 .

In figura 4.6 sono riportati i risultati per gli impulsi ad ampiezza costante descritti nella sezione 4.1.1, mentre in figura 4.7 sono riportati i risultati ottenuti per gli impulsi con deviazione standard costante descritti nella sezione 4.1.1. L'accordo tra i dati e la curva ottenuta grazie al fit è complessivamente molto buono, come testimoniano i valori del χ^2/ndf riportati nella tabella 4.3, dove ndf è il numero dei gradi di libertà del fit. Inoltre, in tutti i casi, ad eccezione di quello con $\mathcal{A} = 1$, si osserva una fase $\phi > 0$. Non stupisce il diverso comportamento del caso con $\mathcal{A} = 1$ a causa dei problemi di discretizzazione evidenziati nella sezione 4.1.1. La presenza di una fase positiva è particolarmente rilevante dal momento che da origine a un anticipo della carica rispetto al caso ideale. Se nell'ambito della computazione quantistica la mancanza di controllo sulla fase ha effetti negativi, in questo contesto porta un vantaggio in quanto permette di caricare la batteria utilizzando un θ minore e quindi, a parità di $f(t)$, in meno tempo. Questo fatto risulta più chiaro dall'analisi della tabella 4.4, nella quale sono riportati i massimi valori di energia raggiunti (in unità di Δ) e il valore di θ , tra quelli testati, per cui essi vengono osservati. Si noti che in tutti i casi, ad eccezione di quello con $\mathcal{A} = 1$, il massimo viene raggiunto per $\theta = \frac{13}{15}\pi$ o $\theta = \frac{14}{15}\pi$, cioè prima di $\theta = \pi$. Nella tabella 4.4, i diversi casi sono identificati attraverso il valore del parametro mantenuto costante. Da questa analisi il profilo migliore risulta essere quello con deviazione standard pari a $\sigma = \frac{t_m}{8}$, che supera il 95% di carica della batteria.

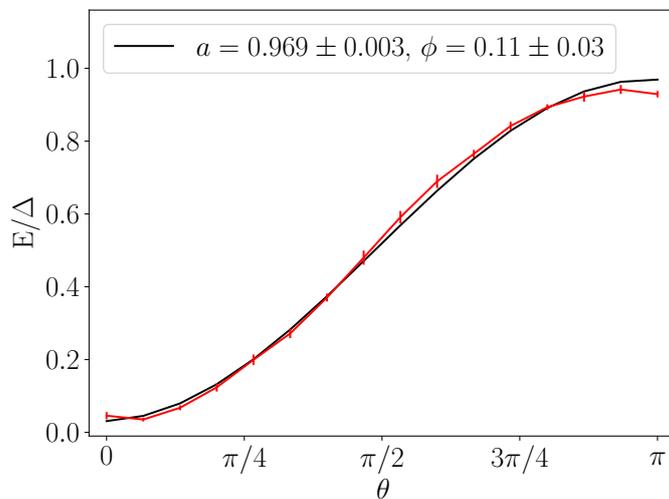
Per quanto riguarda la determinazione dello stato iniziale, i valori dei parametri ottenuti attraverso i fit sono riportati nella tabella 4.3.

4.1.2 Tempo minimo per effettuare la carica

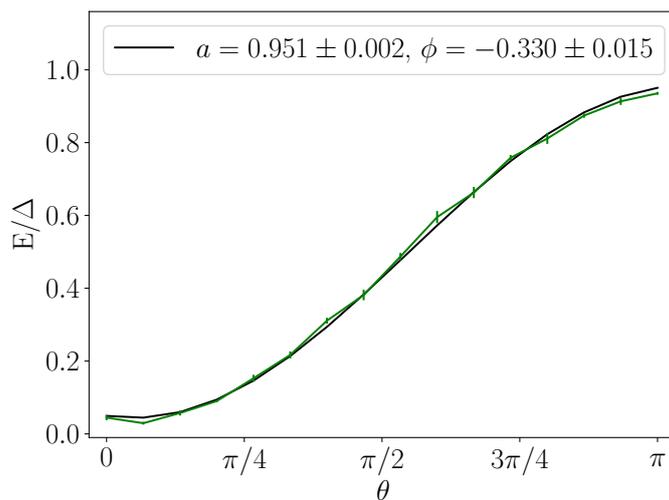
L'ultimo aspetto che è stato analizzato attraverso l'utilizzo di impulsi descritti da un involuppo gaussiano è la possibilità di ridurre il tempo necessario per raggiun-



(a) $\mathcal{A} = 0.1$

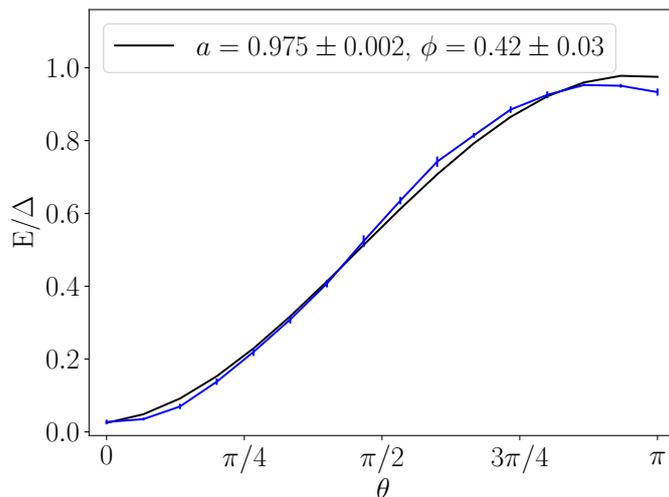


(b) $\mathcal{A} = 0.5$

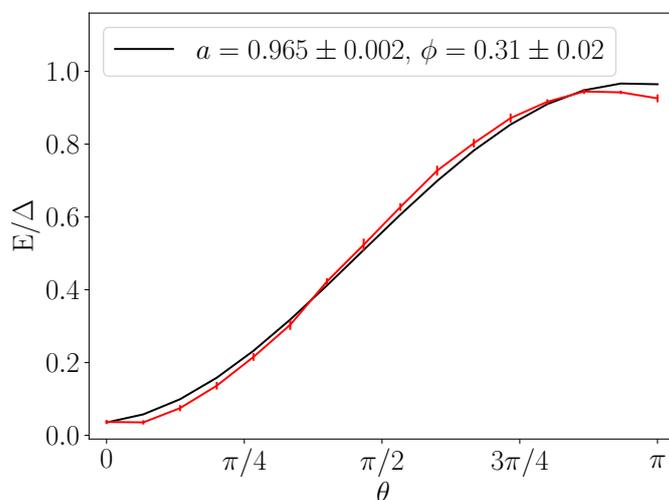


(c) $\mathcal{A} = 1$

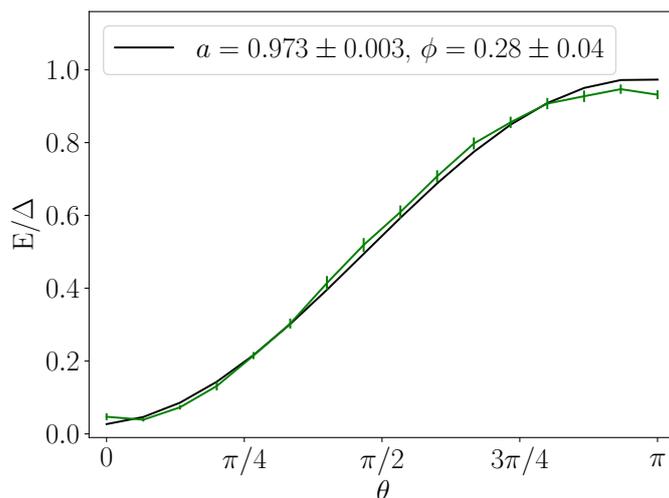
Figura 4.6: best fit dei dati in figura 4.2 in funzione dei parametri a e ϕ caratterizzanti lo stato iniziale del sistema. In nero è rappresentata la curva ottenuta sostituendo i parametri del fit nell'equazione 2.88.



(a) $\sigma = t_m/8$



(b) $\sigma = t_m/12$



(c) $\sigma = t_m/20$

Figura 4.7: best fit dei dati in figura 4.4 in funzione dei parametri a e ϕ caratterizzanti lo stato iniziale del sistema. In nero è rappresentata la curva ottenuta sostituendo i parametri del fit nell'equazione 2.88.

	E_{max}/Δ	θ_{max}
$\mathcal{A} = 0.1$	0.933 ± 0.009	$\frac{14}{15}\pi$
$\mathcal{A} = 0.5$	0.941 ± 0.012	$\frac{14}{15}\pi$
$\mathcal{A} = 1$	0.935 ± 0.004	π
$\sigma = \frac{t_m}{8}$	0.953 ± 0.003	$\frac{13}{15}\pi$
$\sigma = \frac{t_m}{12}$	0.945 ± 0.007	$\frac{13}{15}\pi$
$\sigma = \frac{t_m}{20}$	0.947 ± 0.013	$\frac{14}{15}\pi$

Tabella 4.4: massimi valori di energia raggiunti E_{max} (in unità di Δ) per uno dei valori di θ analizzati e valore di θ per cui viene raggiunto il massimo. I diversi casi sono identificati attraverso il valore del parametro mantenuto costante.

gere la carica, riducendo la durata complessiva dell'impulso nei diversi casi fin qui presentati.

Caso $\mathcal{A} = 0.1$

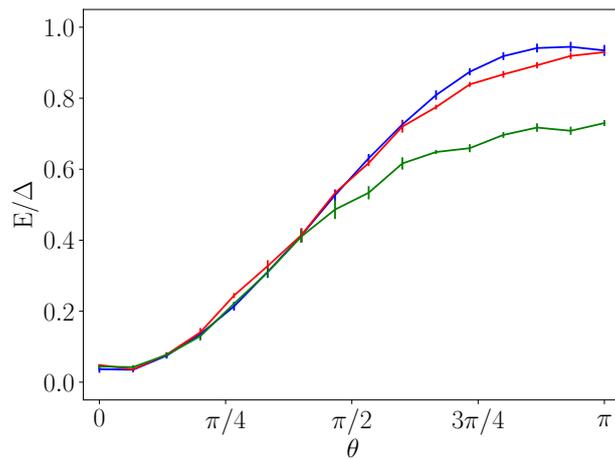
Riprendendo i valori di σ riportati nella tabella 4.1 si osserva che per $\theta = \pi$ con $t_m = 600$ ns si ha $\frac{t_m}{\sigma} \simeq 5$. Riducendo il tempo di carica si tende ad uscire immediatamente dalla regione di parametri in cui la gaussiana può essere approssimata come infinita. In figura 4.8(a) sono sovrapposte le curve di carica utilizzando impulsi con $\mathcal{A} = 0.1$ e $t_m = 600$ ns (blu) e $t_m = 450$ ns (rosso) e $t_m = 300$ ns (verde). Come atteso già a partire da $t_m = 450$ ns non si raggiunge il massimo della carica.

Caso $\mathcal{A} = 0.5$

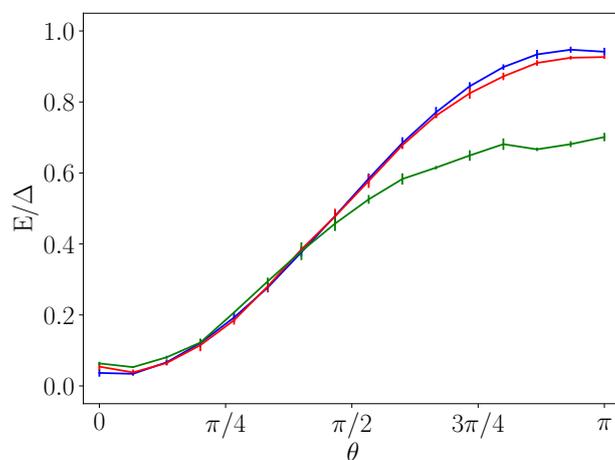
Riprendendo i valori di σ riportati nella tabella 4.1, per avere $t_m > 5\sigma$, con $\theta = \pi$ si deve scegliere $t_m > 119$ ns. In figura 4.8(b) sono sovrapposte le curve di carica utilizzando impulsi con $\mathcal{A} = 0.5$ e $t_m = 600$ ns (blu) e $t_m = 119$ ns (rosso) e $t_m = 60$ ns (verde). Come atteso, nei primi due casi si raggiunge una buona carica, mentre nel terzo caso la curva raggiunge al massimo il $\sim 70\%$ della carica.

Caso $\mathcal{A} = 1$

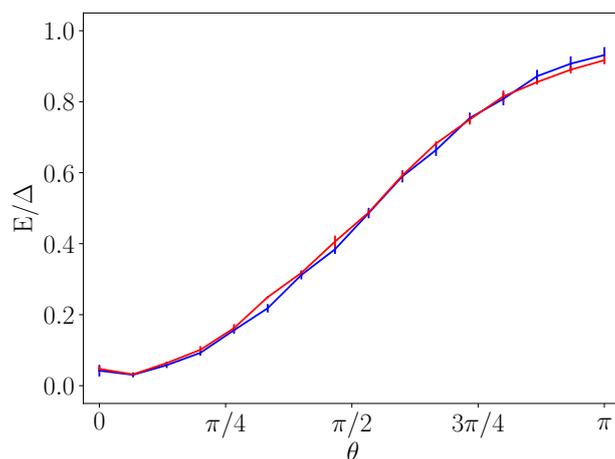
Come più volte evidenziato questo tipo di impulso non è il migliore per garantire la carica della batteria. Tuttavia, poiché si è visto essere sensibilmente non nullo in una regione molto limitata, è possibile ridurre notevolmente la durata complessiva dell'impulso senza che questo provochi variazioni nella curva di carica. Per applicazioni in cui è necessario caricare in tempi molto rapidi, accettando di raggiungere un'energia leggermente inferiore, questa può essere una buona scelta di impulso. In figura 4.8(c) sono riportate le curve di carica per $t_m = 600$ ns (blu) e 60 ns (rosso). Si noti che, riprendendo i valori della deviazione standard riportati nella tabella 4.1, scegliere $t_m = 60$ ns equivale ad avere $\frac{t_m}{\sigma} \simeq 5$ per l'impulso con $\theta = \pi$. Ridurre ulteriormente la durata dell'impulso porterebbe quindi ad uscire dal limite in cui è possibile effettuare l'approssimazione di gaussiana infinita per il calcolo di θ , come riportato nell'equazione 4.7. Nella tabella 4.5 è riportato il massimo valore dell'energia raggiunto in unità di Δ .



(a)



(b)



(c)

Figura 4.8: (a) curva di carica ottenuta utilizzando impulsi gaussiani con $\mathcal{A} = 0.1$ di durata $t_m = 600$ ns (blu), $t_m = 450$ ns (rosso) e $t_m = 300$ ns (verde); (b) curva di carica utilizzando impulsi con $\mathcal{A} = 0.5$ di durata $t_m = 600$ ns (blu) e $t_m = 119$ ns (rosso) e $t_m = 60$ ns (verde); (c) curva di carica utilizzando impulsi con $\mathcal{A} = 1$ di durata $t_m = 600$ ns (blu) e $t_m = 60$ ns (rosso).

	E_{max}/Δ	θ_{max}
$\mathcal{A} = 0.1$		
$t_m = 600$ ns	0.933 ± 0.009	$\frac{14}{15}\pi$
$t_m = 450$ ns	0.930 ± 0.004	π
$t_m = 300$ ns	0.730 ± 0.008	π
$\mathcal{A} = 0.5$		
$t_m = 600$ ns	0.941 ± 0.012	$\frac{14}{15}\pi$
$t_m = 119$ ns	0.927 ± 0.005	π
$t_m = 60$ ns	0.701 ± 0.011	π
$\mathcal{A} = 1$		
$t_m = 600$ ns	0.935 ± 0.004	π
$t_m = 60$ ns	0.917 ± 0.011	π

Tabella 4.5: massimi valori di energia raggiunti E_{max} (in unità di Δ) e valore di θ per cui viene raggiunto il massimo per gli impulsi descritti nella sezione 4.1.1.

	E_{max}/Δ	θ_{max}
$t_m = 600$ ns	0.953 ± 0.003	$\frac{13}{15}\pi$
$t_m = 240$ ns	0.950 ± 0.007	$\frac{14}{15}\pi$
$t_m = 135$ ns	0.951 ± 0.011	$\frac{14}{15}\pi$
$t_m = 95$ ns	0.936 ± 0.009	π

Tabella 4.6: massimi valori di energia raggiunti E_{max} (in unità di Δ) e valore di θ per cui viene raggiunto il massimo per impulsi con $\sigma = \frac{t_m}{8}$ in funzione di t_m .

Caso σ costante

Utilizzando impulsi con deviazione standard costante si ha un vincolo dovuto al fatto che la macchina non accetta impulsi con $\mathcal{A} > 1$. Considerando $\sigma = \frac{t_m}{\varkappa}$, sostituendo nell'equazione 4.12 si ha:

$$t_m > 11.94\varkappa. \quad (4.15)$$

Si noti che non c'è nessun vincolo che impone di scegliere \varkappa intero. Il caso in cui è possibile raggiungere il tempo minore è naturalmente quello con \varkappa più piccolo. Tra quelli considerati si ha quindi $\varkappa = 8$. In questo caso il tempo minimo è $t_m = 95$ ns. In figura sono riportate le curve di carica per $t_m = 600$ ns, $t_m = 240$ ns, $t_m = 135$ ns e $t_m = 95$ ns. Dalla figura emerge che le curve di carica non presentano una dipendenza dalla durata dell'impulso fino a $t_m = 135$ ns. Il caso limite di $t_m = 95$ ns mostra una carica più lenta. Questo emerge chiaramente osservando il massimo valore della carica raggiunto come riportato in tabella 4.6.

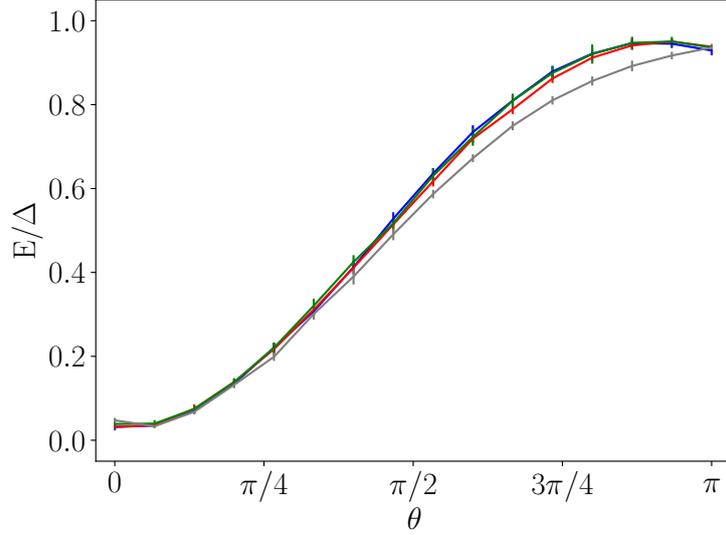


Figura 4.9: curva di carica ottenuta utilizzando impulsi gaussiani con $\sigma = \frac{t_m}{8}$ di durata $t_m = 600$ ns (blu), $t_m = 240$ ns (rosso), $t_m = 135$ ns (verde) e $t_m = 95$ ns (grigio).

4.1.3 Inviluppo lorentziano

La seconda funzione che è stata utilizzata come inviluppo è la lorentziana. Tale funzione non è predefinita all'interno di Qiskit Pulse. Tuttavia è possibile definire impulsi di forma arbitraria quali:

$$f^{(l)}(t) = \frac{\mathcal{M}\gamma}{\pi[(t - t_m/2)^2 + \gamma^2]}, \quad (4.16)$$

con \mathcal{M} e γ rispettivamente l'ampiezza e la larghezza della funzione. Anche in questo caso la quantità a cui siamo interessati è

$$\theta = g \int_0^{t_m} f^{(l)}(t) dt = g \frac{\mathcal{M}}{\pi} \int_{-\frac{t_m}{2\gamma}}^{\frac{t_m}{2\gamma}} \frac{dx}{x^2 + 1} \quad (4.17)$$

dove è stato effettuato un cambio di variabile ponendo $x = \frac{t-t_m/2}{\gamma}$. Questo integrale è risolvibile analiticamente ricordando che:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \arctan x + c. \quad (4.18)$$

Si ha quindi:

$$\theta = 2g \frac{\mathcal{M}}{\pi} \arctan \left(\frac{t_m}{2\gamma} \right). \quad (4.19)$$

Per $\frac{t_m}{2\gamma} \gg 1$ l'equazione 4.19 si riduce a

$$\theta = g\mathcal{M}. \quad (4.20)$$

Nel seguito verranno confrontati i risultati ottenuti utilizzando l'espressione esatta riportata nell'equazione 4.19 e quella approssimata dell'equazione 4.20. Come nel caso della gaussiana è possibile agire sia sull'ampiezza \mathcal{M} sia sulla larghezza γ

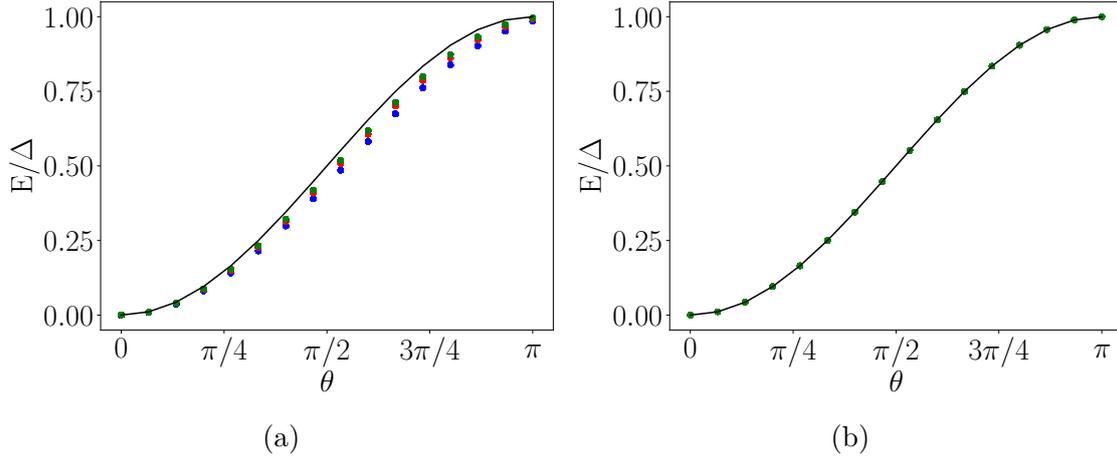


Figura 4.10: dati generati con il simulatore Qiskit Dynamics utilizzando impulsi lorentziani a diverse larghezze confrontati con la curva teorica riportata nell'equazione 4.1. Nella figura (a) l'ampiezza degli impulsi è stata calcolata mediante l'equazione approssimata 4.20, nella figura (b) mediante l'equazione esatta 4.19. I parametri utilizzati sono $\gamma = \frac{t_m}{8}$, $\gamma = \frac{t_m}{12}$ e $\gamma = \frac{t_m}{20}$. Si noti che nella figura (b) si vede una sola serie di dati in quanto i punti nei tre casi sono perfettamente sovrapposti.

della funzione. Tuttavia poiché dalle analisi effettuate sui dati ottenuti utilizzando involucri gaussiani si è visto che l'approccio più conveniente è quello di mantenere la larghezza degli impulsi costanti, nel seguito si analizzerà solo questo secondo approccio.

Larghezza costante

Analogamente a quanto fatto nella sezione 4.1.1 è possibile esprimere l'ampiezza della curva in funzione della sua larghezza. Utilizzando l'espressione approssimata riportata nell'equazione 4.20 si ha:

$$\mathcal{M} = \frac{\theta}{g} \quad (4.21)$$

e quindi la forma dell'involuppo diventa

$$f^{(l)}(t) = \frac{\theta\gamma}{g\pi[(t - t_m/2)^2 + \gamma^2]}. \quad (4.22)$$

Utilizzando invece l'espressione esatta riportata nell'equazione 4.19 si ha

$$\mathcal{M} = \frac{\theta\pi}{2g \arctan\left(\frac{t_m}{2\gamma}\right)} \quad (4.23)$$

e quindi la forma dell'involuppo è data da:

$$f^{(l)}(t) = \frac{\theta\gamma}{2g \arctan\left(\frac{t_m}{2\gamma}\right)} \frac{1}{(t - t_m/2)^2 + \gamma^2}. \quad (4.24)$$

Confrontando le figure 4.10(a) e 4.10(b) emerge che il limite $\frac{t_m}{2\gamma} \ll 1$, necessario per ottenere l'equazione 4.20, non è ben verificato. Nel caso della lorentziana è

	E_{max}/Δ	θ_{max}
$\gamma = \frac{t_m}{8}$	0.942 ± 0.006	$\frac{14}{15}\pi$
$\gamma = \frac{t_m}{12}$	0.935 ± 0.008	$\frac{14}{15}\pi$
$\gamma = \frac{t_m}{20}$	0.936 ± 0.009	$\frac{14}{15}\pi$

Tabella 4.7: massimi valori di energia raggiunti E_{max} (in unità di Δ) e valore di θ per cui viene raggiunto il massimo per impulsi con $\sigma = \frac{t_m}{8}$ in funzione di t_m .

	a	ϕ	χ^2/ndf
$\gamma = \frac{t_m}{8}$	0.959 ± 0.003	0.30 ± 0.02	6.070
$\gamma = \frac{t_m}{12}$	0.966 ± 0.003	0.24 ± 0.03	4.719
$\gamma = \frac{t_m}{20}$	0.970 ± 0.002	0.20 ± 0.02	7.085

Tabella 4.8: parametri caratterizzanti lo stato iniziale del sistema definito come nell'equazione 2.22 e il valore del χ^2/ndf , parametro che quantifica la bontà del fit. I diversi casi sono identificati attraverso il valore del parametro mantenuto costante.

necessario effettuare il calcolo dell'integrale esatto per avere un buon accordo tra i punti simulati e la curva teorica.

In figura 4.11(d) sono riportati i dati ottenuti sollecitando il qubit con impulsi lorentziani a larghezza fissata, come descritti dall'equazione 4.24. In tutti i casi abbiamo considerato $t_m = 600$ ns e sono state effettuate 10 prove per ciascun valore di θ , ciascuna caratterizzata da 1024 ripetizioni. In particolare in figura 4.11(a) si è scelto $\gamma = t_m/8 = 75$ ns (338dt), in figura 4.11(b) $\gamma = t_m/12 = 50$ ns (225dt) e infine in figura 4.11(c) $\gamma = t_m/20 = 30$ ns (135dt). Come nei grafici riportati in figura 4.2 e 4.4, i punti sono stati calcolati attraverso l'equazione 3.31. Per facilitare l'analisi, in figura 4.11(d) sono state sovrapposte le tre serie di dati.

I punti sperimentali mostrano un buon accordo con la curva teorica e dalla figura 4.11(d) emerge che, per i valori analizzati, non si ha una dipendenza rilevante della curva di carica da γ in quanto le tre serie di dati sono molto ben sovrapposte. Nella tabella 4.7 sono riportati i massimi valori di energia raggiunti (in unità di Δ) e il valore di θ per cui viene raggiunto il massimo. Infine è stato eseguito un fit come descritto nella sezione 4.1.1 in modo da confrontare le due differenti forme di impulsi. I grafici relativi sono riportati nella figura 4.12, mentre i parametri ottenuti grazie al fit, e quindi la stima sullo stato iniziale del sistema, sono riassunti nella tabella 4.8.

4.2 Confronto con lo stato dell'arte

Le analisi fin qui condotte suggeriscono che il dispositivo Armonk funziona come una batteria caratterizzata da un'energia immagazzinata iniziale pari al $\sim 3\%$ del massimo Δ e che può raggiungere fino al 95% dell'energia massima nello stato "carico", corrispondente a un'energia di ~ 20 μ eV. L'energia contenuta nel sistema nello stato scarico in unità di Δ coincide con la probabilità che il sistema si trovi nello stato eccitato. Secondo la parametrizzazione introdotta nell'equazione 2.22 essa è pari a $1 - a$. Il valore del 3% si ricava a partire dai valori del parametro a riportati nelle

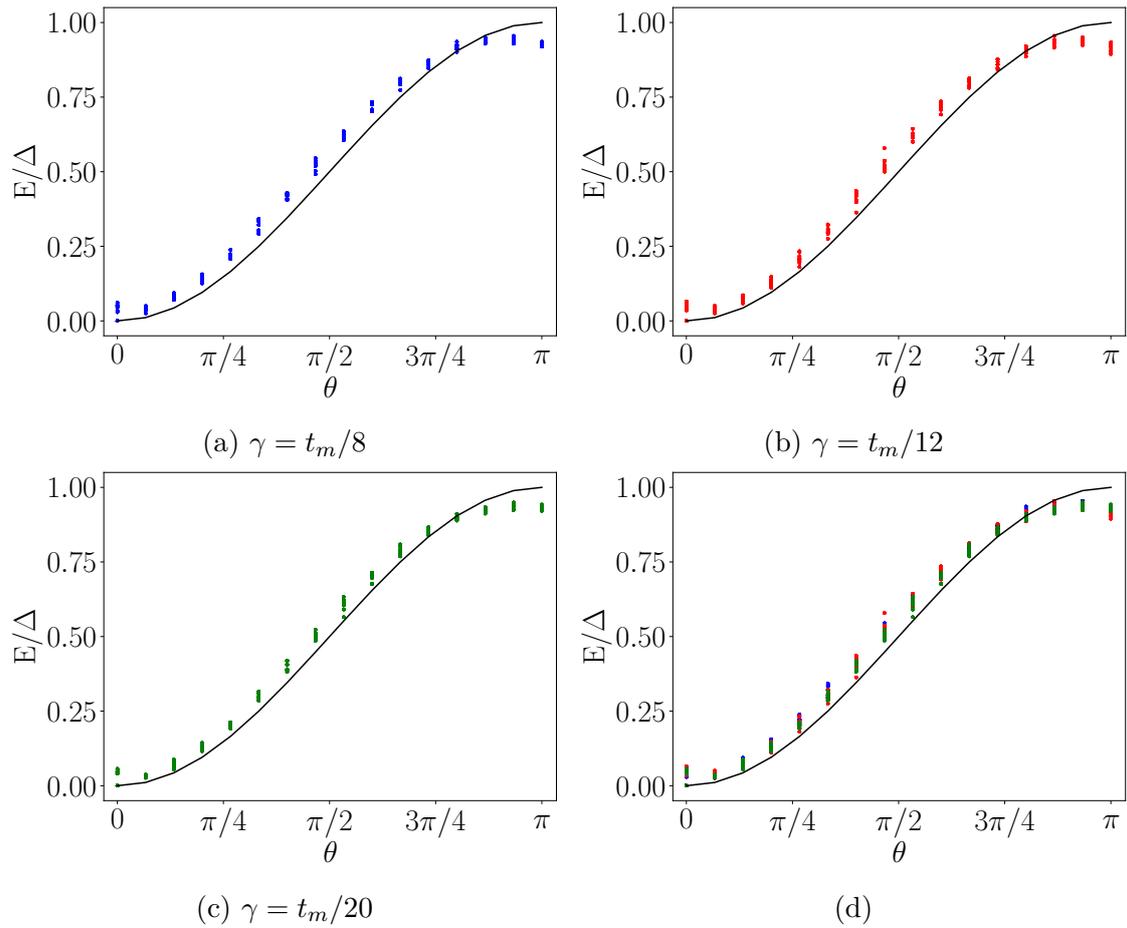


Figura 4.11: curve di carica ottenute applicando impulsi lorentziani ed effettuando 10 prove per ciascun valore di θ . I parametri scelti sono: (a) $\sigma = t_m/8$, (b) $\sigma = t_m/12$, (c) $\sigma = t_m/20$. Infine in figura (d) sono sovrapposti i dati delle figure (a), (b) e (c). La curva nera è quella teorica descritta dall'equazione 4.1.

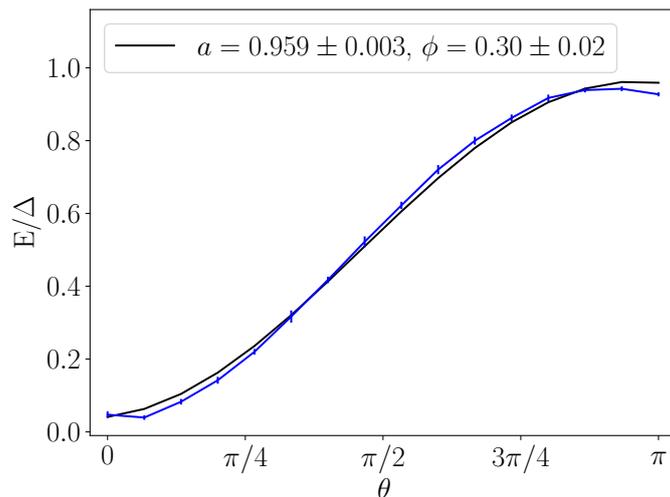
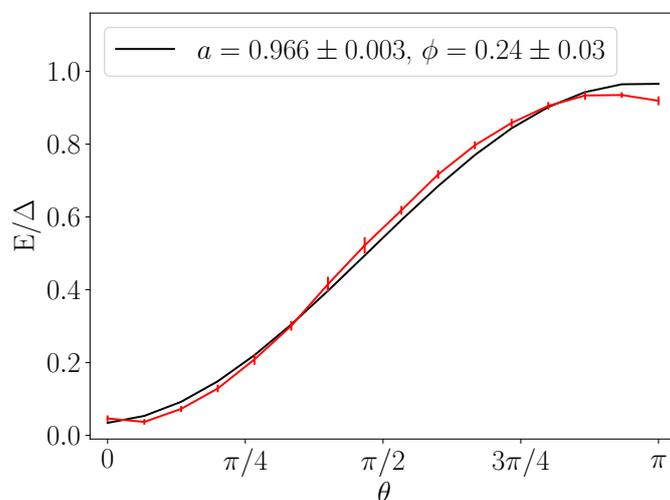
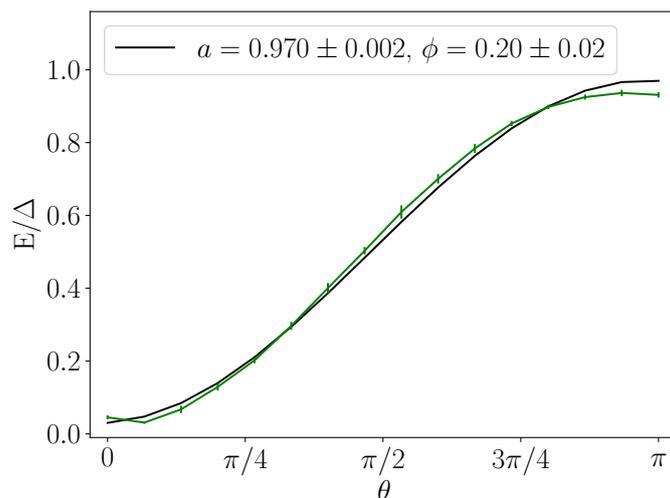

 (a) $\gamma = t_m/8$

 (b) $\gamma = t_m/12$

 (c) $\gamma = t_m/20$

Figura 4.12: best fit dei dati in figura 4.11 in funzione dei parametri a e ϕ caratterizzanti lo stato iniziale del sistema. In nero è rappresentata la curva ottenuta sostituendo i parametri del fit nell'equazione 2.88.

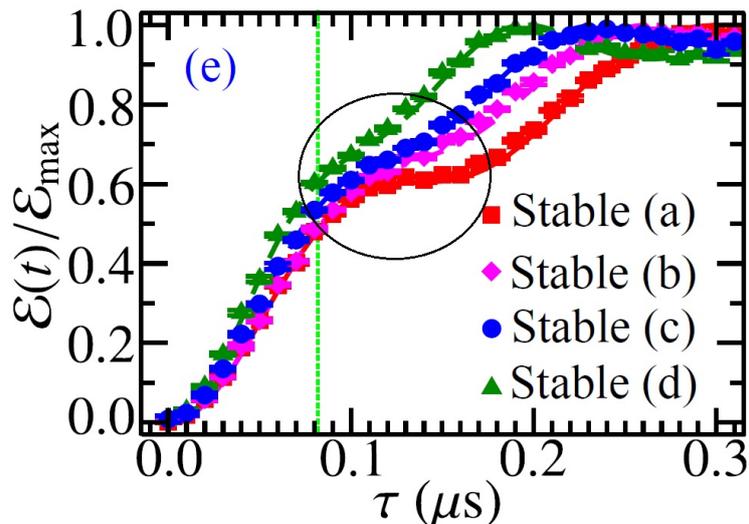


Figura 4.13: risultati sperimentali dell'ergotropia in funzione del tempo $\mathcal{E}(t)$ in unità di $\mathcal{E}_{max} = 51 \mu\text{eV}$. Il cerchio che identifica il raggiungimento del primo stato eccitato. Immagine tratta da [33] con modifiche minori.

tabelle 4.3 e 4.8. Come visto il tempo in cui è possibile passare dallo stato scarico allo stato carico è ~ 100 ns. A questo punto è opportuno confrontare questo risultato con quanto riportato in letteratura. Nella referenza [33] è riportata la recente implementazione sperimentale di una batteria quantistica costituita da un qutrit (sistema quantistico a tre livelli) superconduttivo nel regime di trasmon. Il set-up è molto simile a quello utilizzato nel corso della tesi, con la differenza che è stato realizzato con lo scopo di ottimizzare le sue performance come batteria quantistica. Si noti che anche attraverso il dispositivo Armonk utilizzato nel corso della tesi è in principio possibile accedere al secondo stato eccitato e lavorare con un sistema a tre livelli. Il sistema utilizzato nella referenza [33] è mantenuto a una temperatura di 8 mK, la separazione energetica tra lo stato fondamentale e il primo livello eccitato è, in unità \hbar , di $E_{01} = 39,4$ GHz e tra il primo livello eccitato e il secondo è $E_{12} = 37,8$ GHz. I tempi di decoerenza sono invece dell'ordine di $10 \mu\text{s}$. Si noti che E_{01} è paragonabile al valore di Δ riportato nell'equazione 2.56, mentre i tempi di decoerenza sono un ordine di grandezza inferiore a quelli dei dispositivi IBM, che nel caso di Armonk sono superiori a $200 \mu\text{s}$. In figura 4.13 il cerchio identifica il raggiungimento del primo stato eccitato. Il tempo impiegato a raggiungere tale stato è di ~ 100 ns e l'energia corrisponde a $0.6\mathcal{E}_{max} = 30 \mu\text{eV}$. Questi valori sono del tutto in linea con quanto osservato nel corso della tesi. È importante sottolineare che questo risultato è tutt'altro che scontato dal momento che il dispositivo utilizzato non è stato in nessun modo ottimizzato per funzionare come una batteria quantistica. Occorre precisare che in figura 4.13 è riportata l'ergotropia in funzione del tempo $\mathcal{E}(t)$ immagazzinata nel trasmon, normalizzata al valore massimo $\mathcal{E}_{max} = 51 \mu\text{eV}$. L'ergotropia è una quantità molto usata nell'ambito della termodinamica quantistica e rappresenta l'energia immagazzinata nel sistema che può essere successivamente estratta. Nel corso della tesi non si è fatto esplicito riferimento a questa quantità in quanto se il sistema si trova in uno stato puro essa coincide con l'energia immagazzinata. Nella seguente sezione verrà discussa tale quantità in modo da giustificare questa affermazione.

4.2.1 Ergotropia

Nel corso della tesi ci si è occupati di studiare il processo di carica di una batteria quantistica. Un altro aspetto importante nella caratterizzazione di una batteria quantistica è la fase di estrazione dell'energia in essa contenuta in quanto in generale non è sempre possibile estrarre tutta l'energia contenuta nella batteria. La massima energia estraibile da un sistema quantistico per mezzo di un'operazione unitaria viene chiamata *ergotropia*. L'obiettivo di questa sezione è dimostrare che se il sistema si trova inizialmente in uno stato puro, l'ergotropia coincide con l'energia immagazzinata.

Si consideri un sistema descritto da un'hamiltoniana dipendente dal tempo

$$\hat{\mathcal{H}}(t) = \hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{\mathcal{H}}_{int}(t) \text{ con } \hat{\mathcal{H}}_{int}(0) = \hat{\mathcal{H}}_{int}(t_f) = 0 \quad (4.25)$$

dove $\hat{\mathcal{H}}_0$ è l'hamiltoniana del sistema dal quale si vuole estrarre energia e $\hat{\mathcal{H}}_{int}(t)$ il potenziale dipendente dal tempo e utilizzato per estrarre l'energia [5, 13, 80]. Si noti che il sistema che stiamo analizzando risulta in questa forma generale (si veda l'equazione 2.55). Per semplicità si è posto $t = 0$ nell'istante in cui comincia il processo di scarica. L'energia interna media del sistema è definita come:

$$U(t) = \text{Tr} \left\{ \hat{\rho}(t) \hat{\mathcal{H}}(t) \right\} \quad (4.26)$$

dove $\hat{\rho}(t)$ è la matrice densità che descrive lo stato del sistema al tempo t . La variazione di energia interna tra lo stato iniziale ($t = 0$) e lo stato finale ($t = t_f$) è pari a

$$\Delta U(t) = \int_0^{t_f} \frac{d}{dt} \text{Tr} \left\{ \hat{\rho}(t) \hat{\mathcal{H}}(t) \right\} dt = U(t_f) - U(0). \quad (4.27)$$

Sebbene siano state proposte varie definizioni alternative in letteratura, un approccio largamente accettato consiste nello scomporre la variazione di energia in due quantità [6, 13], il lavoro:

$$L = \int_0^{t_f} \text{Tr} \left\{ \hat{\rho}(t) \dot{\hat{\mathcal{H}}}(t) \right\} dt \quad (4.28)$$

e il calore:

$$Q = \int_0^{t_f} \text{Tr} \left\{ \dot{\hat{\rho}}(t) \hat{\mathcal{H}}(t) \right\} dt. \quad (4.29)$$

Attraverso queste definizioni l'equazione 4.27 può essere riscritta in una forma analoga alla prima legge della termodinamica:

$$\Delta U = Q + L. \quad (4.30)$$

Possiamo inoltre definire il *lavoro estraibile*:

$$L_{ext} = -L. \quad (4.31)$$

L'evoluzione temporale della matrice densità è data dall'equazione di Liouville-von Neumann:

$$i\dot{\hat{\rho}}(t) = [\hat{\mathcal{H}}(t), \hat{\rho}(t)]. \quad (4.32)$$

Sostituendo questa equazione nell'equazione 4.29 si ottiene:

$$\begin{aligned}
 Q &= \int_0^{t_f} \text{Tr} \{ \dot{\hat{\rho}}(t) \hat{\mathcal{H}}(t) \} dt \\
 &= -i \int_0^{t_f} \text{Tr} \{ [\hat{\mathcal{H}}(t), \hat{\rho}(t)] \hat{\mathcal{H}}(t) \} dt \\
 &= -i \int_0^{t_f} \text{Tr} \{ (\hat{\mathcal{H}}(t) \hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t) \hat{\mathcal{H}}(t)) \hat{\mathcal{H}}(t) \} dt \\
 &= -i \left(\int_0^{t_f} \text{Tr} \{ \hat{\mathcal{H}}(t) \hat{\rho}(t) \hat{\mathcal{H}}(t) \} dt - \int_0^{t_f} \text{Tr} \{ \hat{\rho}(t) \hat{\mathcal{H}}(t) \hat{\mathcal{H}}(t) \} dt \right) \\
 &= -i \left(\int_0^{t_f} \text{Tr} \{ \hat{\mathcal{H}}(t) \hat{\rho}(t) \hat{\mathcal{H}}(t) \} dt - \int_0^{t_f} \text{Tr} \{ \hat{\mathcal{H}}(t) \hat{\rho}(t) \hat{\mathcal{H}}(t) \} dt \right) = 0 \quad (4.33)
 \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si è utilizzata la proprietà di ciclicità della traccia. Fisicamente questo risultato implica che non viene prodotto calore nel processo unitario che si sta considerando e la variazione di energia interna è dovuta solo al lavoro effettuato sul sistema:

$$L_{ext} = -\Delta U. \quad (4.34)$$

Riprendendo l'equazione del lavoro 4.28 e integrando per parti si ha:

$$\begin{aligned}
 L &= \int_0^{t_f} \text{Tr} \{ \hat{\rho}(t) \dot{\hat{\mathcal{H}}}(t) \} dt \\
 &= \text{Tr} \{ \hat{\rho}(t_f) \hat{\mathcal{H}}(t_f) \} - \text{Tr} \{ \hat{\rho}(0) \hat{\mathcal{H}}(0) \} - \int_0^{t_f} \text{Tr} \{ \dot{\hat{\rho}}(t) \hat{\mathcal{H}}(t) \} dt. \quad (4.35)
 \end{aligned}$$

Dall'espressione 4.33 si ha che l'ultimo addendo si annulla. Inoltre per le assunzioni sulla forma dell'hamiltoniana riportate nell'equazione 4.25 si ha:

$$L = \text{Tr} \{ \hat{\rho}(t_f) \hat{\mathcal{H}}_0 \} - \text{Tr} \{ \hat{\rho}(0) \hat{\mathcal{H}}_0 \} = E(t_f) - E(0) \quad (4.36)$$

dove $E(t)$ è l'energia del sistema come definita nell'equazione 2.5. L'ergotropia è il massimo lavoro estraibile dal sistema che si ottiene quando l'energia dello stato finale $E(t_f)$ è minima :

$$\mathcal{E} = \text{Tr} \{ \hat{\rho}(0) \hat{\mathcal{H}}_0 \} - \min \text{Tr} \{ \hat{\rho}(t_f) \hat{\mathcal{H}}_0 \}. \quad (4.37)$$

Tramite il principio variazionale si ottiene un punto stazionario per $E(t_f)$ quando [80]

$$[\hat{\rho}(t_f), \hat{\mathcal{H}}_0] = 0. \quad (4.38)$$

Per ottenere una matrice densità che rispetti tali condizioni è conveniente riscrivere $\hat{\rho}(0)$ e $\hat{\mathcal{H}}_0$ come:

$$\hat{\rho}(0) = \sum_{i=1} r_i |r_i\rangle \langle r_i| \quad \text{con } r_{i-1} > r_i \quad (4.39)$$

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \sum_{i=1} \epsilon_i |\epsilon_i\rangle \langle \epsilon_i| \quad \text{con } \epsilon_{i-1} < \epsilon_i \quad (4.40)$$

dove r_i e ϵ_i sono gli autovalori rispettivamente della matrice densità e dell'hamiltoniana $\hat{\mathcal{H}}_0$ e $|r_i\rangle$ e $|\epsilon_i\rangle$ i corrispondenti autovettori. A partire da queste espressioni si può ricavare uno stato $\hat{\sigma}$, chiamato *stato passivo*, che non può essere trasformato in uno stato a energia più bassa attraverso trasformazioni unitarie[6, 13]:

$$\hat{\sigma} = \sum_{i=1} r_i |\epsilon_i\rangle \langle \epsilon_i|. \quad (4.41)$$

Poiché l'obiettivo di questa trattazione è dimostrare che per il sistema considerato durante la tesi l'ergotropia e l'energia immagazzinata coincidono, si consideri ora $\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_B = \frac{\Delta}{2} (\mathbb{I} - \hat{\sigma}_z)$, come definita nell'equazione 2.10 e la matrice densità della stato iniziale per il processo di scarica pari a:

$$\hat{\rho}(0) = \begin{pmatrix} \hat{\rho}_{00}(0) & \hat{\rho}_{01}(0) \\ \hat{\rho}_{10}(0) & \hat{\rho}_{11}(0) \end{pmatrix}. \quad (4.42)$$

Per esplicitare lo stato passivo in cui possiamo trasformare il sistema, come definito nell'equazione 4.41, è necessario trovare gli autovalori $r_{1,2}(0)$ di tale matrice, che valgono, dal momento che $\text{Tr} \{\hat{\rho}(0)\} = 1$:

$$r_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4 \det \{\hat{\rho}(0)\}}}{2} \quad r_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4 \det \{\hat{\rho}(0)\}}}{2}. \quad (4.43)$$

Chiamando $|r_1\rangle$ e $|r_2\rangle$ i relativi autostati si ha:

$$\hat{\rho}(0) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4 \det \{\hat{\rho}(0)\}}}{2} |r_1\rangle \langle r_1| + \frac{1 - \sqrt{1 - 4 \det \{\hat{\rho}(0)\}}}{2} |r_2\rangle \langle r_2|. \quad (4.44)$$

Sostituendo nell'equazione 4.41 si ha che lo stato passivo che viene raggiunto dal sistema a seguito dell'evoluzione unitaria è:

$$\hat{\sigma} = \frac{1 + \sqrt{1 - 4 \det \{\hat{\rho}(0)\}}}{2} |0\rangle \langle 0| + \frac{1 - \sqrt{1 - 4 \det \{\hat{\rho}(0)\}}}{2} |1\rangle \langle 1|. \quad (4.45)$$

Sostituendo questo stato nell'espressione generale per l'ergotropia in equazione 4.37 si ha:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \text{Tr} \{\hat{\rho}(0) \hat{\mathcal{H}}_B\} - \frac{\Delta}{2} \left(1 - \frac{1 + \sqrt{1 - 4 \det \{\hat{\rho}(0)\}}}{2} + \frac{1 - \sqrt{1 - 4 \det \{\hat{\rho}(0)\}}}{2} \right) = \\ &= \text{Tr} \{\hat{\rho}(0) \hat{\mathcal{H}}_B\} - \frac{\Delta}{2} \left(1 - \sqrt{1 - 4 \det \{\hat{\rho}(0)\}} \right). \end{aligned} \quad (4.46)$$

Il primo termine coincide con l'energia immagazzinata nella batteria prima dell'inizio del processo di scarica. Nel caso in cui si sia raggiunta la carica massima si ha quindi si ha quindi

$$\mathcal{E} = E_{max} - \frac{\Delta}{2} \left(1 - \sqrt{1 - 4 \det \{\hat{\rho}(0)\}} \right). \quad (4.47)$$

Se lo stato $\hat{\rho}(0)$ è uno stato puro, come in tutti i casi considerati nel corso della tesi, si ha $\det \{\hat{\rho}(0)\} = 0$ e l'espressione precedente si riduce a:

$$\mathcal{E} = E_{max} \quad (4.48)$$

dimostrando che per uno stato puro l'ergotropia coincide con l'energia massima immagazzinata nella batteria.

4.3 Processo di carica da stati sovrapposizione

Nelle sezioni precedenti sono state analizzate le curve di carica ottenute inizializzando il sistema nello stato fondamentale e sollecitandolo con diversi tipi di impulsi. In questa sezione l'obiettivo dell'analisi è invece quello di capire quale ruolo svolge lo stato iniziale del sistema nel processo di carica. Per raggiungere questo scopo il sistema è stato sollecitato mediante la seguente serie di operazioni:

- inizializzazione nello stato fondamentale;
- rotazione descritta da una matrice unitaria $U(\varphi, \lambda)$, (vedere equazione 4.49), per raggiungere lo stato di sovrapposizione;
- sollecitazione con un impulso della forma descritta dall'equazione 3.1;
- misura dello stato del sistema.

In particolare, ci siamo concentrati sullo studio del processo di carica del sistema partendo da stati di massima sovrapposizione, dove la fase relativa ϕ tra lo stato fondamentale $|0\rangle$ e lo stato eccitato $|1\rangle$ gioca un ruolo cruciale nel determinare la quantità di energia che può essere immagazzinata nella batteria. Gli stati che sono stati analizzati sono quelli descritti nelle sezioni 2.3.2 e 2.3.3, rispettivamente lo stato Hadamard e lo stato Left. Si noti che i grafici riportati nelle figure 2.2 e 2.3 mostrano una forte dipendenza da ϕ durante il processo di carica anche utilizzando un drive costante.

Le matrici che descrivono la rotazione necessaria per far transire il sistema negli stati di sovrapposizione considerati hanno la seguente forma generale:

$$U(\varphi, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -e^{i\lambda} \\ e^{i\varphi} & e^{i(\varphi+\lambda)} \end{pmatrix}. \quad (4.49)$$

Ponendo $\varphi = 0$ e $\lambda = \pi$ si ottiene la matrice H (equazione 2.35), mentre scegliendo $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ e $\lambda = 0$ si ottiene la matrice V (equazione 2.45), necessarie per ruotare il sistema dallo stato fondamentale rispettivamente allo stato Hadamard e allo stato Left.

4.3.1 Stato Hadamard

Dal punto di vista teorico lo stato Hadamard si ottiene applicando una rotazione descritta dalla matrice $H = U(0, \pi)$ allo stato fondamentale e, utilizzando la parametrizzazione riporta nell'equazione 2.22, e che riportiamo per comodità:

$$|\psi(0)\rangle = \sqrt{a} |0\rangle + \sqrt{1-a} e^{-i\phi} |1\rangle \quad (4.50)$$

è definito dai parametri:

$$a = \frac{1}{2} \quad \phi = 0. \quad (4.51)$$

Sostituendo tali valori nell'equazione 2.88 si ottiene:

$$E\left(\frac{1}{2}, 0, \theta\right) = \frac{\Delta}{2}, \quad (4.52)$$

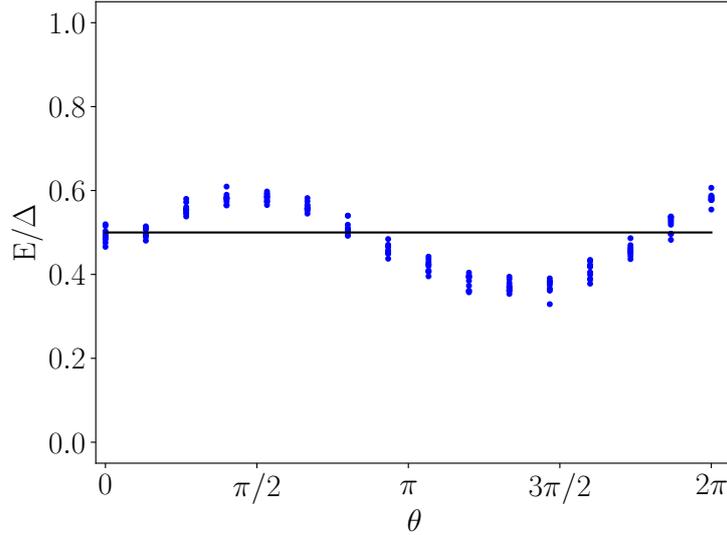


Figura 4.14: curva di carica ottenuta misurando lo stato del sistema dopo aver applicato una rotazione descritta dalla matrice H e successivamente un impulso definito da un involuppo gaussiano con $\sigma = \frac{t_m}{8}$ e $t_m = 600$ ns. In nero è rappresentata la curva teorica costante descritta dall'equazione 4.52.

ci si aspetta quindi che l'energia immagazzinata nel sistema rimanga costante, indipendentemente dalla fase θ associata all'involuppo dell'impulso attraverso il quale può essere sollecitato il sistema. Questo effetto è giustificato dal fatto che lo stato Hadamard è un autostato della matrice di Pauli $\hat{\sigma}_x$ e l'hamiltoniana del nostro sistema, descritta dall'equazione 2.55, genera rotazioni attorno allo stesso asse.

L'analisi condotta nella sezione 4.1.1 ha evidenziato che lo stato effettivo in cui si trova il sistema a seguito dell'inizializzazione non coincide con lo stato fondamentale. Questo significa che non ci aspettiamo che il sistema raggiunga esattamente lo stato Hadamard a seguito della rotazione descritta dalla matrice H e di conseguenza che la curva di carica costruita applicando impulsi con θ crescente non sia completamente triviale. In figura 4.14 sono riportati i punti ottenuti sollecitando il sistema con impulsi gaussiani con $\sigma = \frac{t_m}{8}$. Poiché non ci si aspetta una significativa variazione dell'energia immagazzinata nel sistema sono riportati punti ottenuti sollecitando il sistema con impulsi corrispondenti a valori di $\theta \in [0, 2\pi]$. L'intervallo scelto è quindi il doppio di quello considerato nelle sezioni precedenti. Per caratterizzare lo stato che viene effettivamente raggiunto dal sistema a seguito dell'applicazione della matrice H è stato eseguito un fit utilizzando l'equazione 2.88. Il risultato del fit è riportato nella figura 4.15 e i valori dei parametri sono riassunti nella tabella 4.9. Si noti che il valore del χ^2/ndf testimonia un buon accordo tra i dati e la curva corrispondente al best fit.

Vogliamo a questo punto verificare se l'incertezza introdotta sullo stato del qubit nella fase di inizializzazione è sufficiente a giustificare l'andamento dei punti sperimentali. Applicando la matrice H a un generico stato del qubit nella base

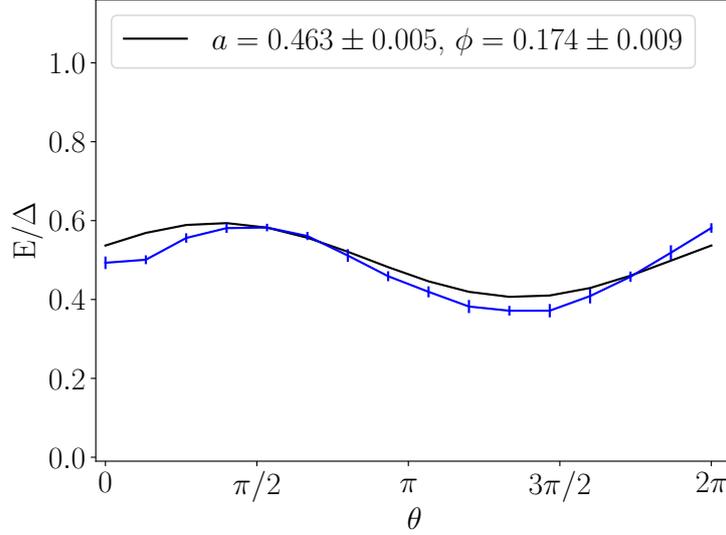


Figura 4.15: best fit dei dati di figura 4.14 in funzione dei parametri a e ϕ caratterizzanti lo stato del sistema dopo la rotazione descritta dalla matrice H . In nero è rappresentata la curva ottenuta sostituendo i parametri del fit nell'equazione 2.88.

computazionale si ha:

$$\begin{aligned}
 \psi_H(a, \phi) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{a} \\ e^{-i\phi} \sqrt{1-a} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{a} + e^{-i\phi} \sqrt{1-a} \\ \sqrt{a} - e^{-i\phi} \sqrt{1-a} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left((\sqrt{a} + \cos \phi \sqrt{1-a}) - i \sin \phi \sqrt{1-a} \right) |0\rangle + \\
 &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}} \left((\sqrt{a} - \cos \phi \sqrt{1-a}) + i \sin \phi \sqrt{1-a} \right) |1\rangle
 \end{aligned} \tag{4.53}$$

definendo:

$$a_H(a, \phi) = \frac{1}{2} + \cos \phi \sqrt{a} \sqrt{1-a} \tag{4.54}$$

$$\Phi'_H(a, \phi) = -\arctan \left(\frac{\sin \phi \sqrt{1-a}}{\sqrt{a} + \cos \phi \sqrt{1-a}} \right) \tag{4.55}$$

$$\Phi''_H(a, \phi) = \arctan \left(\frac{\sin \phi \sqrt{1-a}}{\sqrt{a} - \cos \phi \sqrt{1-a}} \right) \tag{4.56}$$

e

$$\Phi_H(a, \phi) = \Phi''_H(a, \phi) - \Phi'_H(a, \phi), \tag{4.57}$$

è possibile riscrivere lo stato nella forma definita nell'equazione 4.50:

$$\psi_H(a, \phi) = \sqrt{a_H(a, \phi)} |0\rangle + \sqrt{1 - a_H(a, \phi)} e^{i\Phi_H(a, \phi)} |1\rangle. \tag{4.58}$$

I valori a e ϕ caratterizzanti lo stato iniziale $|0\rangle$ sono stati ricavati, per diverse configurazioni sperimentali, nella sezione 4.1.1 attraverso best fit delle curve di carica. I valori ottenuti non sono statisticamente compatibili (la deviazioni standard supera i 3σ). Tuttavia, siamo interessati solo ad avere una stima dei valori attesi

per a_H e Φ_H che possiamo stimare come la media su tutte le realizzazioni, pari a $a \sim 0.97$ $\phi \sim 0.3$ (valori dedotti dalla tabella 4.3). Sostituendo questi valori nelle equazioni 4.54 e 4.57 si ottiene:

$$a_H \sim 0.66 \quad \Phi_H \sim 0.1 \quad (4.59)$$

Dall'equazione 4.54 si deduce che per $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ si ha $a_H > \frac{1}{2}$, mentre dal fit si è ottenuto un valore di $a_H < \frac{1}{2}$. Ciò dimostra che il sistema è caratterizzato sia da un errore dovuto all'inizializzazione che da un errore dovuto al gate che genera la rotazione H .

4.3.2 Stato Left

Lo stato Left si ottiene applicando una rotazione descritta dalla matrice $V = U(-\frac{\pi}{2}, 0)$ allo stato fondamentale e, utilizzando la parametrizzazione riportata nell'equazione 4.50, è definito dai parametri:

$$a = \frac{1}{2} \quad \phi = \frac{\pi}{2}. \quad (4.60)$$

Sostituendo tali valori nell'equazione 2.88 si ottiene:

$$E\left(\frac{1}{2}, 0, \theta\right) = \frac{\Delta}{2} (1 + \sin \theta). \quad (4.61)$$

Dal punto di vista teorico è quindi possibile raggiungere la completa carica della batteria. Questo stato di sovrapposizione permette di effettuare un processo di carica in cui ci si aspetta di immagazzinare nel sistema un'energia pari alla metà di quella che si immagazzina partendo dallo stato fondamentale. Dall'equazione 4.61 si ricava che essa viene immagazzinata sollecitando il sistema con un impulso corrispondente a $\theta = \frac{\pi}{2}$. L'equazione 4.12 fornisce un limite inferiore alla durata di σ in funzione di θ , dovuto all'impossibilità di utilizzare impulsi con $\mathcal{A} > 1$. Per $\theta = \pi$ si ha $\sigma > 11,94$ ns, per $\theta = \frac{\pi}{2}$ invece:

$$\sigma > \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi g}} \simeq 5,97 \text{ ns}. \quad (4.62)$$

A parità di $\frac{t_m}{\sigma}$ e $\mathcal{A} = \frac{\theta}{\sqrt{2\pi\sigma g}}$, parametri che determinano la bontà dell'impulso al fine di ottenere la carica del sistema, si ha quindi che la durata t_m dell'impulso corrispondente a $\theta = \frac{\pi}{2}$ è la metà di quello corrispondente a $\theta = \pi$. Si ha quindi la possibilità di immagazzinare metà energia in metà tempo.

In figura 4.16 è riportato l'andamento trovato utilizzando come involuppo dell'impulso una gaussiana con $\sigma = \frac{t_m}{8}$. Poiché ci aspettiamo di raggiungere la carica della batteria per $\theta = \frac{\pi}{2}$, in figura sono stati riportati i dati ottenuti con $\theta = [0, \frac{\pi}{2}]$. I punti sperimentali seguono l'andamento della curva teorica, non raggiungendo però la carica completa. L'energia massima raggiunta è $\frac{E_{max}}{\Delta} = 0.923 \pm 0.005$ per $\theta = \frac{7}{15}\pi$. Come nei processi di carica dallo stato fondamentale si registra un anticipo della carica rispetto al valore teorico previsto.

Come nel caso precedente è stato effettuato un best fit, riportato in figura 4.17, sui dati per caratterizzare lo stato Left. I parametri caratterizzanti lo stato del sistema a seguito della rotazione sono riportati nella tabella 4.9. Si noti che il valore

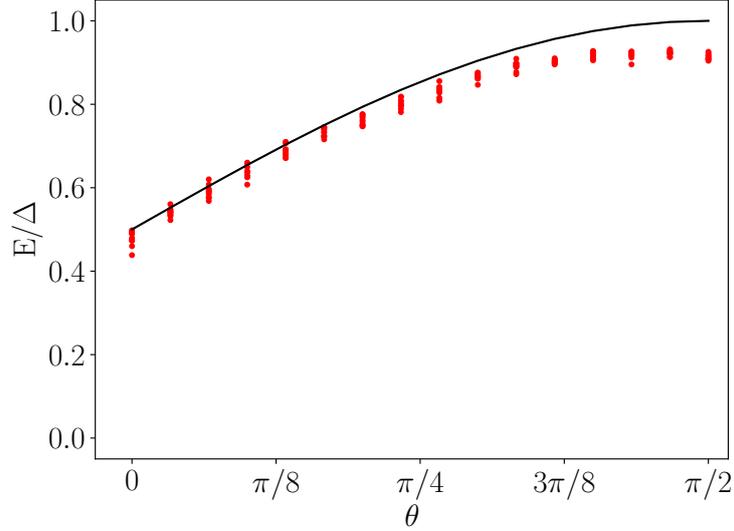


Figura 4.16: curva di carica ottenuta misurando lo stato del sistema dopo aver applicato una rotazione descritta dalla matrice V e successivamente un impulso definito da un involuppo gaussiano con $\sigma = \frac{t_m}{8}$ e $t_m = 600$ ns. In nero è rappresentata la curva teorica descritta dall'equazione 4.61.

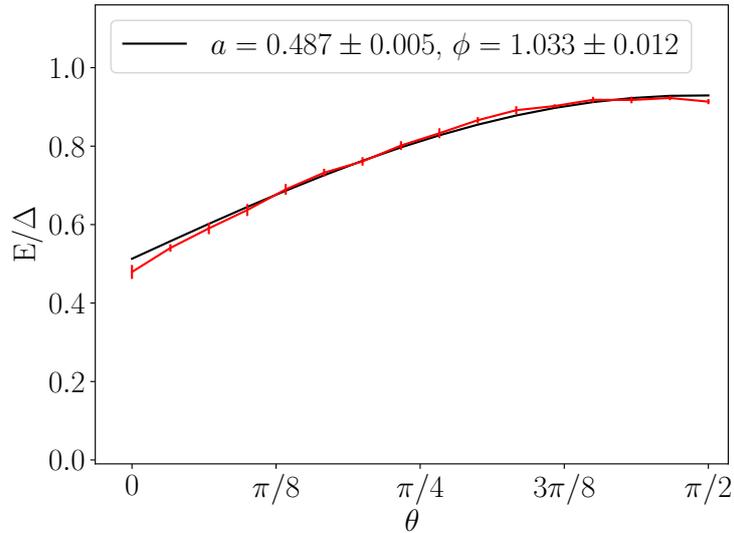


Figura 4.17: best fit dei dati di figura 4.16 in funzione dei parametri a e ϕ caratterizzanti lo stato del sistema dopo la rotazione descritta dalla matrice V . In nero è rappresentata la curva ottenuta sostituendo i parametri del fit nell'equazione 2.88.

M	a	ϕ	χ^2/ndf
H	0.463 ± 0.005	0.174 ± 0.009	6.785
V	0.487 ± 0.005	1.033 ± 0.012	1.506

Tabella 4.9: parametri caratterizzanti lo stato del sistema dopo la rotazione descritta dalla matrice M in equazione 4.50

del χ^2/ndf testimonia che vi è un ottimo accordo tra i dati sperimentali e la curva ottenuta attraverso il fit.

Infine vogliamo nuovamente stimare se la differenza tra i valori dei parametri caratterizzanti lo stato del sistema a seguito della rotazione ottenuti dal fit e quelli attesi teoricamente è imputabile agli errori di inizializzazione del sistema nello stato fondamentale (prima della rotazione). Applicando la matrice V a un generico stato del qubit, lavorando nella base computazionale, si ha:

$$\begin{aligned}
 \psi_L(a, \phi) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \sqrt{a} \\ \sqrt{1-a} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{a} - e^{-i\phi} \sqrt{1-a} \\ -i(\sqrt{a} + e^{-i\phi} \sqrt{1-a}) \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left((\sqrt{a} - \cos \phi \sqrt{1-a}) + i \sin \phi \sqrt{1-a} \right) |0\rangle + \\
 &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\sin \phi \sqrt{1-a} - i(\sqrt{a} + \cos \phi \sqrt{1-a}) \right) |1\rangle.
 \end{aligned} \tag{4.63}$$

Definendo

$$a_L(a, \phi) = \frac{1}{2} - \cos \phi \sqrt{a} \sqrt{1-a} \tag{4.64}$$

$$\Phi'_L(a, \phi) = \arctan \left(\frac{\sin \phi \sqrt{1-a}}{\sqrt{a} - \cos \phi \sqrt{1-a}} \right) \tag{4.65}$$

$$\Phi''_L(a, \phi) = \arctan \left(\frac{\sqrt{a} + \cos \phi \sqrt{1-a}}{\sin \phi \sqrt{1-a}} \right) \tag{4.66}$$

e

$$\Phi_L(a, \phi) = \Phi''_L(a, \phi) - \Phi'_L(a, \phi), \tag{4.67}$$

è possibile riscrivere lo stato nella forma definita nell'equazione 4.50:

$$\psi_L(a, \phi) = \sqrt{a_L(a, \phi)} |0\rangle + \sqrt{1 - a_L(a, \phi)} e^{i\Phi_L(a, \phi)} |1\rangle. \tag{4.68}$$

Come descritto nella sezione 4.3.1, dalla tabella 4.3 otteniamo $a \sim 0.97$ $\phi \sim 0.3$, e sostituendo nelle equazioni 4.64, 4.67 si ha:

$$a_L \sim 0.33 \quad \Phi_L \sim 1.46. \tag{4.69}$$

Confrontando questi valori con quelli ricavati attraverso i fit e riportati nella tabella 4.9 emerge che non sono in accordo anche in questo caso. L'errore associato alla rotazione descritta dalla matrice V è quindi rilevante.

Conclusioni e sviluppi futuri

Il presente lavoro di tesi si colloca nell'ambito dello studio delle batterie quantistiche, il cui scopo è quello di investigare sistemi nei quali sia possibile sfruttare proprietà quantistiche, come la sovrapposizione e l'entanglement, per immagazzinare e trasferire energia in maniera più rapida ed efficiente rispetto a quanto è possibile fare in sistemi puramente classici. L'obiettivo della tesi è stato quello di stabilire se un semplice dispositivo quantistico formato da un singolo qubit, la macchina IBM Armonk, costruito e ottimizzato per lavorare nel campo della computazione quantistica, possa essere utilizzato efficacemente anche come batteria quantistica.

Attraverso l'utilizzo del pacchetto Qiskit Pulse è stato dimostrato che tale dispositivo, costituito da un singolo qubit superconduttivo in configurazione di trasmone, caricato attraverso una forzante esterna classica ha prestazioni in linea con risultati riportati recentemente in letteratura [33]. La possibilità fornita dal pacchetto Qiskit Pulse di definire esplicitamente la forma degli impulsi per mezzo dei quali sollecitare il qubit ha permesso di studiare la dipendenza delle prestazioni di carica del qubit dalla forma di tale segnale. Dalle simulazioni riportate nel capitolo 2 è emerso che utilizzando una forzante costante per caricare il sistema è necessario che l'intensità dell'accoppiamento tra la batteria e il caricatore sia dello stesso ordine di grandezza della quantità di energia che si vuole immagazzinare nella batteria stessa. Questa condizione è ben lontana dal punto di lavoro dei dispositivi IBM, dove il termine di accoppiamento g è due ordini di grandezza più piccolo rispetto alla spaziatura energetica Δ . Nella tesi si è tuttavia mostrato che introducendo una opportuna modulazione temporale della forzante è possibile superare questa apparente limitazione. Per riuscire a caricare efficacemente la batteria è cruciale infatti lavorare con impulsi modulati con una frequenza in risonanza con quella della batteria stessa. Si è inoltre mostrato che la forma dell'inviluppo della forzante utilizzata non influenza in modo rilevante le performance di carica, almeno per un ampio range dei parametri, come evidenziato testando varie forme della forzante. Nello specifico si è verificato che, utilizzando impulsi di carica non troppo stretti e che decadono rapidamente a zero, si può raggiungere una carica superiore al 95% del massimo teorico in tempi molto brevi (~ 100 ns) rispetto ai tempi di decadimento tipici del dispositivo utilizzato (~ 100 μ s). Si può quindi concludere che il dispositivo Armonk, e analoghi dispositivi IBM caratterizzati da simili parametri di fabbricazione, possono essere visti come delle buone batterie quantistiche, senza la necessità di ottimizzare in alcun modo i parametri costruttivi. Poiché uno dei principali risvolti pratici associati allo studio delle batterie quantistiche consiste nella possibilità di immagazzinare energia all'interno di dispositivi quantistici più complessi, come i computer quantistici, questo risultato permetterà di aprire nuove prospettive in questo ambito di ricerca.

Inaspettatamente, l'analisi condotta in questa tesi ha dimostrato che le prestazioni di questo qubit, visto come una batteria quantistica, possono trarre vantaggio

dagli errori che sono inevitabilmente associati ad ogni operazione che viene eseguita su un dispositivo non protetto da protocolli di correzione degli errori. La presenza di fluttuazioni della fase dello stato iniziale porta infatti a raggiungere la carica massima per un valore di θ minore, rispetto a quello atteso, nella maggior parte delle prove riportate. Come discusso nel capitolo 4, questo porta ad una riduzione del tempo minimo di carica.

Questi risultati, ottenuti utilizzando la macchina più semplice possibile, un singolo sistema a due livelli, aprono la strada a diversi sviluppi. Da un lato è possibile seguire la strada suggerita dalla referenza [33] e studiare se è possibile incrementare ulteriormente le prestazioni della batteria lavorando con un sistema a tre livelli, un qutrit. Sebbene i dispositivi IBM siano ottimizzati per essere trattati come sistemi a due livelli è tuttavia possibile accedere anche agli stati del trasimone superiori al primo eccitato. In particolare si può includere nella trattazione il secondo stato eccitato del trasimone, seppure questo non rappresenta l'utilizzo prevalente di questi sistemi e ci si aspetta quindi che le operazioni che coinvolgono tale stato siano soggette a maggiore errore. Il parametro fondamentale che suggerisce la possibilità di procedere in questa direzione è l'anarmonicità del sistema, $\delta = E_{21} - E_{10}$, avendo definito $E_{ij} = E_i - E_j$ con E_i l'energia dello stato $|i\rangle$. Per il dispositivo Armonk tale parametro vale $\delta \simeq -2,2$ GHz, compatibile con quanto riportato nella referenza [33]. Per accedere al secondo stato eccitato è possibile pensare di implementare due diversi protocolli: un unico impulso in grado di promuovere il sistema direttamente dallo stato fondamentale al secondo stato eccitato oppure due impulsi successivi adibiti a promuovere prima il sistema dallo stato fondamentale al primo stato eccitato e successivamente dal primo stato eccitato al secondo stato eccitato. Ci si aspetta che il primo approccio sia più efficiente in termini di tempo di carica. Tuttavia nella referenza [33] è stata implementata la seconda possibilità, come emerge dal profilo a scalini in figura 4.13. Da un'analisi preliminare svolta durante la tesi ci si aspetta che anche per la macchina Armonk sia possibile accedere al secondo stato eccitato solo utilizzando due impulsi successivi, il primo in risonanza con il salto energetico E_{10} e il secondo con E_{21} , e non sia possibile invece costruire un impulso tale da promuovere direttamente il sistema dallo stato fondamentale al primo stato eccitato. Lo studio teorico di possibili strategie volte a superare questa limitazione potrebbe avere un impatto importante su future implementazioni sperimentali.

Un'ulteriore generalizzazione che può essere condotta a partire dai risultati riportati in questa tesi è lo studio di un sistema costituito da una catena di qubit. In questi sistemi è possibile studiare il trasferimento coerente di energia tra due qubit mediato da altri sistemi a due livelli. Tale trasferimento di energia può essere passivo, dovuto solo all'accoppiamento esistente tra i diversi sistemi a due livelli, o attivo, stimolato cioè da una forzante esterna. Un'analisi teorica di questo problema è attualmente in corso presso il gruppo di fisica mesoscopica del dipartimento di fisica dell'Università di Genova [81]. I dispositivi IBM, ad esempio denominati Bogota, Santiago e Manila, sono una piattaforma naturale per la simulazione sperimentale di questi modelli in quanto sono costruiti come catena di qubit accoppiati.

Appendice A

Codice per la calibrazione e la curva di carica

Di seguito è riportato il listato del programma utilizzato per la calibrazione dei dati estratti dal dispositivo Armonk e per la costruzione delle curve di carica. La prima parte del codice, righe 4 – 43, è dedicata al caricamento delle librerie necessarie e dei parametri del dispositivo. Nelle righe 47 – 74 sono definite le funzioni utilizzate come involuppo degli impulsi. L'algoritmo di calibrazione è implementato tra le righe 78 – 110 e 162 – 195. Infine le curve di carica vengono costruite grazie al codice riportato tra le righe 114 – 159 e 198 – 222. Per una maggiore chiarezza i commenti sono riportati in verde.

```
1 #Curva di carica
2
3 #Importazione librerie
4 from qiskit import IBMQ
5 import numpy as np
6 from qiskit import pulse
7 import math
8 from qiskit.tools.monitor import job_monitor
9 import matplotlib.pyplot as plt
10
11 #Caricamento account
12 IBMQ.enable_account(' ... ')
13 provider=IBMQ.get_provider(hub=' ... ', group=' ... ', project='
    ... ')
14 #scelta del dispositivo (Armonk)
15 backend = provider.get_backend('ibmq_armonk')
16 backend_config = backend.configuration()
17 #controllo che il dispositivo supporti pulse
18 assert backend_config.open_pulse, "Backend doesn't support Pulse"
19 backend_defaults = backend.defaults()
20
21 #Caricamento e stampa parametri del dispositivo
22 dt = backend_config.dt
23 print(f"Sampling time: {dt*1e9} ns") #stampa dt in ns
24 hamil=backend_config.hamiltonian['vars']
25 print(hamil) #stampa parametri hamiltoniana
26 #Differenza di energia tra lo stato 1 e lo stato 0
27 Delta = hamil['wq0'] #(unita' h/2pi)
```

APPENDICE A. CODICE PER LA CALIBRAZIONE E LA CURVA DI CARICA

```
28 #Frequenza associata alla spaziatura energetica del qubit
29 omega_q=Delta/(2*np.pi)
30 #Accoppiamento qubit-radiazione
31 g = hamil['omegad0']
32
33 #Fattori di conversione
34 ns = 1.0e-9
35 #Fattore di scala per semplificare la lettura del grafico I-Q
36 scale_factor = 1e-14
37 #Definizione di una funzione per calcolare il piu' vicino multiplo
    di 16dt
38 def get_closest_multiple_of_16(num):
39     return int(num + 8 ) - (int(num + 8 ) % 16)
40
41 #Definizione qubit e slot di memoria
42 qubit = 0
43 mem_slot = 0
44
45 #Definizione forma inviluppo
46 #Definizione Gaussiana
47 def Gaussiana(amp,sigma,durata):
48     x_vec=np.arange(1,durata+1,1)
49     G=np.array(x_vec, dtype=float)
50     i=0
51     for x in x_vec:
52         G[i]=amp*math.exp(-pow((x-durata/2),2)/(2*pow(sigma,2)))
53         i=i+1
54     return G
55 #Definizione Lorentziana
56 def Lorentzian(gamma,durata,theta):
57     x_vec=np.arange(1,durata+1,1)
58     L=np.array(x_vec, dtype=float)
59     i=0
60     for x in x_vec:
61         L[i]=(theta/(2*np.arctan(durata/gamma)*g*dt))*(gamma/2.0)/(
        pow((x-durata/2.0),2)+pow((gamma/2.0),2))
62         i=i+1
63     return L
64
65 #Numero punti
66 N=16
67 theta_vec = np.linspace(0, np.pi, N)
68 #t_m in secondi
69 T_s=600*ns
70
71 #Gaussiana amp fissa
72 # drive_amp=0.1 #decommentare per usare gaussiane con amp fissa
73 #Gaussiana sigma fissa
74 sigma_s=T_s/8 #sigma in secondi
75
76 #Calibrazione
77 #Costruzione impulso di calibrazione
78 with pulse.build(backend) as pi_pulse:
79     #conversione t_m in un multiplo di 16dt
80     drive_duration = get_closest_multiple_of_16(pulse.
        seconds_to_samples(8*75*ns))
81     #conversione sigma in multiplo di dt
82     drive_sigma = pulse.seconds_to_samples(75*ns)
```

APPENDICE A. CODICE PER LA CALIBRAZIONE E LA CURVA DI CARICA

```
83     #canale su cui agisce l'impulso
84     drive_chan = pulse.drive_channel(qubit)
85     #ampiezza calcolata per theta=pi (condizione di carica)
86     drive_amp=(np.sqrt(np.pi/2))/(g*75*ns)
87     #costruzione involuppo a partire dalla definizione della
funzione
88     gauss=pulse.Waveform(Gaussiana(drive_amp, drive_sigma,
drive_duration))
89     #lancio dell'impulso
90     pulse.play(gauss, drive_chan)
91
92 #Creazione schedule
93 vec_schedule=[]
94 #Schedule stato fondamentale (calibrazione)
95 with pulse.build(backend=backend, default_alignment='sequential',
name='ground state') as gnd_schedule:
96     #misura sul qubit
97     pulse.measure(qubits=[qubit], registers=[pulse.MemorySlot(
mem_slot)])
98 vec_schedule.append(gnd_schedule)
99
100 #Schedule stato eccitato (calibrazione)
101 with pulse.build(backend=backend, default_alignment='sequential',
name='excited state') as exc_schedule:
102     #canale su cui agisce l'impulso
103     drive_chan = pulse.drive_channel(qubit)
104     #definizione frequenza portante impulso omega_d=omega_q
105     pulse.set_frequency(omega_q, drive_chan)
106     #azione con il pi_pulse sul qubit
107     pulse.call(pi_pulse)
108     #misura sul qubit
109     pulse.measure(qubits=[qubit], registers=[pulse.MemorySlot(
mem_slot)])
110 vec_schedule.append(exc_schedule)
111
112 #Schedule curva di carica
113 #Schedule corrispondete a theta=0 (nessun impulso applicato)
114 with pulse.build(backend=backend, default_alignment='sequential',
name="My Experiment0") as my_schedule0:
115     #canale su cui agisce l'impulso
116     drive_chan = pulse.drive_channel(qubit)
117     #definizione frequenza portante impulso omega_d=omega_q
118     pulse.set_frequency(omega_q, drive_chan)
119     #pulse.u2(-np.pi/2, 0, 0) #decommentare per inizializzare il
sistema nello stato left
120     #pulse.u2(0, np.pi, 0) #decommentare per inizializzare il
sistema nello stato hadamard
121     #misura sul qubit
122     pulse.measure(qubits=[qubit], registers=[pulse.MemorySlot(
mem_slot)])
123 vec_schedule.append(my_schedule0)
124 #Schedule corrispondente a theta=i*pi/15
125 for i in range(1,N):
126     with pulse.build(backend=backend, default_alignment='sequential
', name="My Experiment0") as my_schedule_i:
127         #canale su cui agisce l'impulso
128         drive_chan = pulse.drive_channel(qubit)
129         #definizione frequenza portante impulso omega_d=omega_q
```

APPENDICE A. CODICE PER LA CALIBRAZIONE E LA CURVA DI CARICA

```
130     pulse.set_frequency(omega_q, drive_chan)
131     #pulse.u2(-np.pi/2, 0, 0) #decommentare per inizializzare
il sistema nello stato left
132     #pulse.u2(0, np.pi, 0) #decommentare per inizializzare il
sistema nello stato hadamard
133     #conversione t_m in un multiplo di 16dt
134     drive_duration = get_closest_multiple_of_16(pulse.
seconds_to_samples(T_s))
135     #Caso gaussiana amp fissa
136     #calcolo di sigma e conversione in unita' di dt
137     #drive_sigma = pulse.seconds_to_samples(theta_vec[i]/(g*np.
sqrt(2*np.pi)*drive_amp)) #decommentare gaussiana amp fissa
138     #Caso gaussiana sigma fissa
139     #conversione di sigma in unita' di dt
140     drive_sigma = pulse.seconds_to_samples(sigma_s)
141     #calcolo ampiezza
142     drive_amp=theta_vec[i]/(2*g*np.sqrt(2*np.pi)*sigma_s)
143     #costruzione impulso gaussiano
144     gauss=pulse.Waveform(Gaussiana(drive_amp, drive_sigma,
drive_duration))
145     #Caso lorentziana
146     #conversione gamma in unita' di dt
147     #gamma=pulse.seconds_to_samples(gamma_s) #decommentare nel
caso lorentziana
148     #costruzione impulso lorentziano
149     #lorent=pulse.Waveform(Lorentzian(M_lor, drive_duration,
Aree_vec[i])) #decommentare nel caso lorentziana
150     #azione con l'impulso gauss sul qubit (eventualmente
cambiare in lorent)
151     pulse.play(gauss, drive_chan)
152     pulse.measure(qubits=[qubit], registers=[pulse.MemorySlot(
mem_slot)])
153     vec_schedule.append(my_schedule_i)
154 #numero ripetizioni per ogni misura
155 num_shots = 1024
156 #definizione livello di misura
157 job = backend.run(vec_schedule, meas_level=1, meas_return='single',
shots=num_shots)
158 #stampa dello stato del lavoro
159 job_monitor(job)
160
161 #Estrazione risultati della misura (riscalati per lo scale_factor)
162 gnd_exc_my_results = job.result(timeout=120)
163 #risultati della schedule dello stato fondamentale
164 gnd_results = gnd_exc_my_results.get_memory(0)[:, qubit]*
scale_factor
165 #risultati della schedule dello stato eccitato
166 exc_results = gnd_exc_my_results.get_memory(1)[:, qubit]*
scale_factor
167
168 #Fase di calibrazione
169 #Calcolo del centro delle due distribuzioni di calibrazione
170 #media della parte reale e immaginaria
171 mean_gnd = np.mean(gnd_results)
172 mean_exc = np.mean(exc_results)
173 plt.scatter(np.real(mean_gnd), np.imag(mean_gnd), s=200, cmap='
viridis', c='black', alpha=1, label='state_0_mean')
```

APPENDICE A. CODICE PER LA CALIBRAZIONE E LA CURVA DI CARICA

```
174 plt.scatter(np.real(mean_exc), np.imag(mean_exc), s=200, cmap='
    viridis', c='black', alpha=1, label='state_1_mean')
175
176 #Calcolo dell'equazione della retta di separazione
177 x_m=(np.real(mean_gnd)+np.real(mean_exc))/2
178 y_m=(np.imag(mean_gnd)+np.imag(mean_exc))/2
179 m=(np.real(mean_gnd)-np.real(mean_exc))/(-np.imag(mean_gnd)+np.imag
    (mean_exc))
180 q=-m*x_m+y_m
181 plt.plot([x_m-8,x_m+5],[m*(x_m-8)+q,m*(x_m+5)+q])
182
183 #Calcolo delle efficienze
184 #Efficienza di calibrazione dello stato fondamentale
185 eff_gnd=0.0
186 for x in gnd_results:
187     #i punti a sinistra della retta sono classificati come 0
188     if np.sign(m)*np.imag(x)>np.sign(m)*m*np.real(x)+np.sign(m)*q:
189         eff_gnd=eff_gnd+1
190 #Efficienza di calibrazione dello stato eccitato
191 eff_exc=0.0
192 for x in exc_results:
193     #i punti a destra della retta sono classificati come 1
194     if np.sign(m)*np.imag(x)<np.sign(m)*m*np.real(x)+np.sign(m)*q:
195         eff_exc=eff_exc+1
196
197 #Efficienza di essere in 1 degli stati intermedi
198 eff=[]
199 for i in range(0,N):
200     eff_my=0.0
201     for x in gnd_exc_my_results.get_memory(i+2)[: , qubit]*
    scale_factor:
202         if np.sign(m)*np.imag(x)<np.sign(m)*m*np.real(x)+np.sign(m)
    *q:
203             eff_my=eff_my+1
204     eff.append(eff_my/num_shots)
205
206 print('efficienta calcolata dal gnd: ',eff_gnd/gnd_results.size)
207 print('efficienta calcolata dal exc: ',eff_exc/exc_results.size)
208 print('efficienta calcolata dal mio impulso: ',eff[N-1])
209
210 plt.figure()
211 dimcar=15
212 plt.title("Curva di carica", fontsize=dimcar)
213 plt.scatter(theta_vec, eff,s=50, cmap='viridis', c='black', alpha
    =1, label='state_1')
214 plt.xlabel('$\\theta$', fontsize=dimcar)
215 plt.ylabel('E/$\\Delta$', fontsize=dimcar)
216 plt.title("Carica in funzione di $\\theta$", fontsize=dimcar)
217 plt.show()
218
219 #Salvataggio dati curva di carica sul file nome_file.txt
220 with open('nome_file.txt', "a") as external_file:
221     for i in range(0,N):
222         print(theta_vec[i], eff[i], file=external_file)
223     external_file.close()
```

Bibliografia

- [1] S. Bhattacharjee e A. Dutta. «Quantum thermal machines and batteries». In: *The European Physical Journal B* 94.12 (2021), pp. 1–42.
- [2] A. Acìn et al. «The quantum technologies roadmap: a European community view». In: *New Journal of Physics* 20.8 (ago. 2018), p. 080201. DOI: 10.1088/1367-2630/aad1ea.
- [3] Q. Zhang et al. «Quantum information research in China». In: *Quantum Science and Technology* 4.4 (nov. 2019), p. 040503. DOI: 10.1088/2058-9565/ab4bea.
- [4] M. G. Raymer e C. Monroe. «The US National Quantum Initiative». In: *Quantum Science and Technology* 4.2 (feb. 2019), p. 020504. DOI: 10.1088/2058-9565/ab0441.
- [5] S. Deffner e S. Campbell. *Quantum Thermodynamics: An introduction to the thermodynamics of quantum information*. 2019. DOI: 10.48550/ARXIV.1907.01596.
- [6] J. Goold et al. «The role of quantum information in thermodynamics—a topical review». In: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 49.14 (feb. 2016), p. 143001. DOI: 10.1088/1751-8113/49/14/143001.
- [7] M. Esposito, U. Harbola e S. Mukamel. «Nonequilibrium fluctuations, fluctuation theorems, and counting statistics in quantum systems». In: *Rev. Mod. Phys.* 81 (4 dic. 2009), pp. 1665–1702. DOI: 10.1103/RevModPhys.81.1665.
- [8] G. Benenti et al. «Fundamental aspects of steady-state conversion of heat to work at the nanoscale». In: *Physics Reports* 694 (2017). Fundamental aspects of steady-state conversion of heat to work at the nanoscale, pp. 1–124. ISSN: 0370-1573. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2017.05.008>.
- [9] C. Vincent e B. Scrosati. *Modern batteries*. Elsevier, 1997.
- [10] R. Dell e D. A. J. Rand. *Understanding batteries*. Royal society of chemistry, 2001.
- [11] F. Campaioli, F. A. Pollock e S. Vinjanampathy. *Thermodynamics in the Quantum Regime*. Springer Berlin, 2018.
- [12] F. C. Binder et al. «Quantacell: powerful charging of quantum batteries». In: *New Journal of Physics* 17.7 (lug. 2015), p. 075015. DOI: 10.1088/1367-2630/17/7/075015.
- [13] R. Alicki e M. Fannes. «Entanglement boost for extractable work from ensembles of quantum batteries». In: *Phys. Rev. E* 87 (4 apr. 2013), p. 042123. DOI: 10.1103/PhysRevE.87.042123.

- [14] G. M. Andolina et al. «Charger-mediated energy transfer in exactly solvable models for quantum batteries». In: *Phys. Rev. B* 98 (20 nov. 2018), p. 205423. DOI: 10.1103/PhysRevB.98.205423.
- [15] S. Qi e J. Jing. «Magnon-mediated quantum battery under systematic errors». In: *Physical Review A* 104.3 (set. 2021). DOI: 10.1103/physreva.104.032606.
- [16] A. Crescente et al. «Charging and energy fluctuations of a driven quantum battery». In: *New Journal of Physics* 22.6 (giu. 2020), p. 063057. DOI: 10.1088/1367-2630/ab91fc.
- [17] Y. Zhang et al. «Powerful harmonic charging in a quantum battery». In: *Phys. Rev. E* 99 (5 mag. 2019), p. 052106. DOI: 10.1103/PhysRevE.99.052106.
- [18] J. Chen et al. «Charging Quantum Batteries with a General Harmonic Driving Field». In: *Annalen der Physik* 532.4 (apr. 2020), p. 1900487. DOI: 10.1002/andp.201900487.
- [19] D. Rossini et al. «Quantum Advantage in the Charging Process of Sachdev-Ye-Kitaev Batteries». In: *Phys. Rev. Lett.* 125 (23 dic. 2020), p. 236402. DOI: 10.1103/PhysRevLett.125.236402.
- [20] M. Carrega et al. «Dissipative dynamics of an open quantum battery». In: *New Journal of Physics* 22.8 (ago. 2020), p. 083085. DOI: 10.1088/1367-2630/abaa01.
- [21] A. C. Santos. «Quantum advantage of two-level batteries in the self-discharging process». In: *Phys. Rev. E* 103 (4 apr. 2021), p. 042118. DOI: 10.1103/PhysRevE.103.042118.
- [22] L. Peng et al. «Lower and upper bounds of quantum battery power in multiple central spin systems». In: *Phys. Rev. A* 103 (5 mag. 2021), p. 052220. DOI: 10.1103/PhysRevA.103.052220.
- [23] T. P. Le et al. «Spin-chain model of a many-body quantum battery». In: *Phys. Rev. A* 97 (2 feb. 2018), p. 022106. DOI: 10.1103/PhysRevA.97.022106.
- [24] D. Rosa et al. «Ultra-stable charging of fast-scrambling SYK quantum batteries». In: *Journal of High Energy Physics* 2020.11 (nov. 2020). DOI: 10.1007/jhep11(2020)067.
- [25] J. Liu, D. Segal e G. Hanna. «Loss-Free Excitonic Quantum Battery». In: *The Journal of Physical Chemistry C* 123.30 (2019), pp. 18303–18314. DOI: 10.1021/acs.jpcc.9b06373.
- [26] F. Dou et al. «Extended Dicke quantum battery with interatomic interactions and driving field». In: *Phys. Rev. B* 105 (11 mar. 2022), p. 115405. DOI: 10.1103/PhysRevB.105.115405.
- [27] V. Shaghghi et al. *Micromasers as Quantum Batteries*. 2022. arXiv: 2204.09995 [quant-ph].
- [28] D. Ferraro et al. «Quantum supercapacitors». In: *Phys. Rev. B* 100 (7 ago. 2019), p. 075433. DOI: 10.1103/PhysRevB.100.075433.
- [29] A. Crescente et al. «Ultrafast charging in a two-photon Dicke quantum battery». In: *Phys. Rev. B* 102 (24 dic. 2020), p. 245407. DOI: 10.1103/PhysRevB.102.245407.

- [30] A. Delmonte et al. «Characterization of a Two-Photon Quantum Battery: Initial Conditions, Stability and Work Extraction». In: *Entropy* 23.5 (2021). ISSN: 1099-4300. DOI: 10.3390/e23050612.
- [31] D. Ferraro et al. «High-Power Collective Charging of a Solid-State Quantum Battery». In: *Phys. Rev. Lett.* 120 (11 mar. 2018), p. 117702. DOI: 10.1103/PhysRevLett.120.117702.
- [32] J. Q. Quach et al. «Superabsorption in an organic microcavity: Toward a quantum battery». In: *Science Advances* 8.2 (gen. 2022). DOI: 10.1126/sciadv.abk3160.
- [33] C. Hu et al. *Optimal charging of a superconducting quantum battery*. 2021. DOI: 10.48550/ARXIV.2108.04298.
- [34] I. Maillett de Buy Wenniger et al. *Coherence-powered work exchanges between a solid-state qubit and light fields*. 2022. DOI: 10.48550/ARXIV.2202.01109.
- [35] Y. Cao et al. «Quantum Chemistry in the Age of Quantum Computing». In: *Chemical Reviews* 119.19 (2019). PMID: 31469277, pp. 10856–10915. DOI: 10.1021/acs.chemrev.8b00803.
- [36] J. D. Guimarães et al. «Simulation of Nonradiative Energy Transfer in Photosynthetic Systems Using a Quantum Computer». In: *Complexity* 2020 (set. 2020), pp. 1–12. DOI: 10.1155/2020/3510676.
- [37] Q. Gao et al. «Applications of quantum computing for investigations of electronic transitions in phenylsulfonyl-carbazole TADF emitters». In: *npj Computational Materials* 7.1 (mag. 2021). DOI: 10.1038/s41524-021-00540-6.
- [38] A. Chiesa et al. «Quantum hardware simulating four-dimensional inelastic neutron scattering». In: *Nature Physics* 15.5 (mar. 2019), pp. 455–459. DOI: 10.1038/s41567-019-0437-4.
- [39] François Fillion-Gourdeau, S. MacLean e R. Laflamme. «Algorithm for the solution of the Dirac equation on digital quantum computers». In: *Phys. Rev. A* 95 (4 apr. 2017), p. 042343. DOI: 10.1103/PhysRevA.95.042343.
- [40] N. Klco, M. J. Savage e J. R. Stryker. «SU(2) non-Abelian gauge field theory in one dimension on digital quantum computers». In: *Phys. Rev. D* 101 (7 apr. 2020), p. 074512. DOI: 10.1103/PhysRevD.101.074512.
- [41] G. Agliardi et al. *Quantum integration of elementary particle processes*. 2022. DOI: 10.48550/ARXIV.2201.01547.
- [42] B. Nachman et al. «Quantum Algorithm for High Energy Physics Simulations». In: *Phys. Rev. Lett.* 126 (6 feb. 2021), p. 062001. DOI: 10.1103/PhysRevLett.126.062001.
- [43] M. J. Cervia et al. «Exactly solvable model as a testbed for quantum-enhanced dark matter detection». In: *arXiv: High Energy Physics - Theory* (2020).
- [44] D. Herman et al. *A Survey of Quantum Computing for Finance*. 2022. DOI: 10.48550/ARXIV.2201.02773.
- [45] N. Moll et al. «Quantum optimization using variational algorithms on near-term quantum devices». In: *Quantum Science and Technology* 3.3 (giu. 2018), p. 030503. DOI: 10.1088/2058-9565/aab822.

- [46] A. D. Corcoles et al. «Challenges and Opportunities of Near-Term Quantum Computing Systems». In: *Proceedings of the IEEE* 108.8 (ago. 2020), pp. 1338–1352. DOI: 10.1109/jproc.2019.2954005.
- [47] J. Koch et al. «Charge-insensitive qubit design derived from the Cooper pair box». In: *Phys. Rev. A* 76 (4 ott. 2007), p. 042319. DOI: 10.1103/PhysRevA.76.042319.
- [48] T. Alexander et al. «Qiskit pulse: programming quantum computers through the cloud with pulses». In: *Quantum Science and Technology* 5.4 (ago. 2020), p. 044006. DOI: 10.1088/2058-9565/aba404.
- [49] D. C. McKay et al. *Qiskit Backend Specifications for OpenQASM and OpenPulse Experiments*. 2018. DOI: 10.48550/ARXIV.1809.03452.
- [50] J. Preskill. «Quantum Computing in the NISQ era and beyond». In: *Quantum* 2 (ago. 2018), p. 79. DOI: 10.22331/q-2018-08-06-79.
- [51] G. Gemme et al. «IBM Quantum Platforms: A Quantum Battery Perspective». In: *Batteries* 8.5 (2022). ISSN: 2313-0105. DOI: 10.3390/batteries8050043.
- [52] P. Cappellaro. *Two-Level Systems-Course Notes, Chapter 4*. 2012.
- [53] J. J. Sakurai. *Meccanica quantistica moderna / Jun John Sakurai ; a cura di San Fu Tuan*. ita. Opere generali, dizionari. Bologna: Zanichelli, 1990.
- [54] M. Le Bellac. *A Short Introduction to Quantum Information and Quantum Computation*. Cambridge University Press, 2006.
- [55] S. Olivares. *Lecture Notes on Quantum Computing*. 2020.
- [56] N. K Langford. *Circuit QED - Lecture Notes*. 2013. DOI: 10.48550/ARXIV.1310.1897.
- [57] P. Krantz et al. «A quantum engineer’s guide to superconducting qubits». In: *Applied Physics Reviews* 6.2 (giu. 2019), p. 021318. DOI: 10.1063/1.5089550.
- [58] J. I. Cirac e P. Zoller. «Quantum Computations with Cold Trapped Ions». In: *Phys. Rev. Lett.* 74 (20 mag. 1995), pp. 4091–4094. DOI: 10.1103/PhysRevLett.74.4091.
- [59] C. D. Bruzewicz et al. «Trapped-ion quantum computing: Progress and challenges». In: *Applied Physics Reviews* 6.2 (giu. 2019), p. 021314. DOI: 10.1063/1.5088164.
- [60] D. Loss e D. P. DiVincenzo. «Quantum computation with quantum dots». In: *Physical Review A* 57.1 (1998), p. 120.
- [61] F. Campaioli, F. A. Pollock e S. Vinjanampathy. *Quantum Batteries - Review Chapter*. 2018. DOI: 10.48550/ARXIV.1805.05507.
- [62] H. Abraham e al. *Qiskit: An Open-source Framework for Quantum Computing*. 2021. DOI: 10.5281/zenodo.2573505.
- [63] W. P. Schleich. *Quantum Optics in Phase Space*. Berlin: Wiley-VCH, 2001.
- [64] M. A. Nielsen e I. L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition*. Cambridge University Press, 2011. ISBN: 1107002176.

- [65] P. Cappellaro. *Two-Level Quantum Systems-Nanoscale Science and Technology Course Notes*. 2005.
- [66] D. P. DiVincenzo. «The Physical Implementation of Quantum Computation». In: *Fortschritte der Physik* 48.9-11 (set. 2000), pp. 771–783. DOI: 10.1002/1521-3978(200009)48:9/11<771::aid-prop771>3.0.co;2-e.
- [67] S. Girvin. *Superconducting Qubits and Circuits: Artificial Atoms Coupled to Microwave Photons*. 2014.
- [68] G. Grosso e G. Pastori Parravicini. «Solid State Physics». In: London: Academic Press, 2000. Cap. XVIII - Superconductivity.
- [69] Michael Tinkham. *Introduction to Superconductivity*. 2^a ed. Dover Publications, giu. 2004. ISBN: 0486435032.
- [70] R. M. White. *Physics and Applications of the Josephson Effect by A. Barone and G. Paterno*. Vol. 21. John Wiley & Sons, Ltd, 1982, pp. 1050–1051. DOI: 10.1116/1.571869.
- [71] J. Gorman, D. G. Hasko e D. A. Williams. «Charge-Qubit Operation of an Isolated Double Quantum Dot». In: *Phys. Rev. Lett.* 95 (9 ago. 2005), p. 090502. DOI: 10.1103/PhysRevLett.95.090502.
- [72] J. Adamowski, S. L. Bednarek e B. L. Szafran. «Quantum Computing with Quantum Dots». In: *Schedae Informaticae* 14 (2005).
- [73] S. Haroche e J. M. Raimond. *Exploring the Quantum: Atoms, Cavities, and Photons*. Oxford: Oxford Univ. Press, 2006. DOI: 10.1093/acprof:oso/9780198509141.001.0001.
- [74] M. Bina. «The coherent interaction between matter and radiation». In: *The European Physical Journal Special Topics* 203.1 (apr. 2012), pp. 163–183. DOI: 10.1140/epjst/e2012-01541-3.
- [75] *The IBM Quantum heavy hex lattice*. 2021. URL: <https://research.ibm.com/blog/heavy-hex-lattice> (visitato il 05/05/2022).
- [76] K. Bharti et al. «Noisy intermediate-scale quantum algorithms». In: *Reviews of Modern Physics* 94.1 (feb. 2022). DOI: 10.1103/revmodphys.94.015004.
- [77] V. B. Braginsky e F. Ya. Khalili. «Quantum nondemolition measurements: the route from toys to tools». In: *Rev. Mod. Phys.* 68 (1 gen. 1996), pp. 1–11. DOI: 10.1103/RevModPhys.68.1.
- [78] E. Jeffrey et al. «Fast Accurate State Measurement with Superconducting Qubits». In: *Phys. Rev. Lett.* 112 (19 mag. 2014), p. 190504. DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.190504.
- [79] R. Brun e F. Rademakers. *ROOT - An Object Oriented Data Analysis Framework*. 1996. URL: [\[root.cern.ch/\]http://root.cern.ch/](http://root.cern.ch/).
- [80] A. E. Allahverdyan, R. Balian e T. M. Nieuwenhuizen. «Maximal work extraction from finite quantum systems». In: *Europhysics Letters (EPL)* 67.4 (ago. 2004), pp. 565–571. DOI: 10.1209/epl/i2004-10101-2.
- [81] A. Crescente et al. *Enhancing coherent energy transfer between quantum devices via a mediator*. 2022. DOI: 10.48550/ARXIV.2202.01025.