



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI GENOVA

SCUOLA DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN FISICA

Studio dell'evoluzione temporale di campi
quantistici interagenti e stati a
temperatura finita

RELATORE: Prof. **Nicola Pinamonti**
CORRELATORE: Prof. **Giovanni Ridolfi**

CANDIDATO:
Leonardo Sangaletti

Sommario

Nello studio delle teorie dei campi interagenti, trattate con approcci perturbativi, gli elementi della teoria sono generalmente ottenuti nella forma di serie formali di potenze nella costante di accoppiamento con l'interazione. Tuttavia, quando si cerca di studiare il comportamento di sistemi a temperatura non nulla contenenti termini di interazione accesi ad un tempo finito, le serie perturbative mostrano la presenza di termini non invarianti sotto traslazioni temporali e, in alcuni casi, anche di crescite temporali. Questo comportamento complica l'uso di un approccio perturbativo in quanto, dopo un tempo sufficientemente lungo di evoluzione del sistema, le correzioni al tree-level acquistano un peso crescente all'interno della serie. L'obiettivo di questa tesi, dunque, è quello di mostrare esplicitamente l'insorgenza di tali problemi in sistemi fisici di interesse e come essi possano essere risolti utilizzando stati invarianti sotto l'evoluzione temporale determinata dalla Lagrangiana di interazione del sistema, ovvero gli stati termici interagenti.

Gli stati termici rispetto all'evoluzione temporale interagente non possono essere descritti all'interno della formulazione ordinaria della teoria di campo quantistico. Al contrario, però, essi possono essere ricavati utilizzando un approccio algebrico alla teoria dei campi (AQFT), anche nel caso in cui le interazioni siano trattate con metodi perturbativi. Per questo motivo, nei primi due capitoli della tesi viene analizzata nel dettaglio la costruzione algebrica per un campo scalare reale massivo. In particolare, nel primo capitolo è presentata la teoria algebrica per il caso di un campo scalare libero, mentre nel secondo capitolo la teoria viene generalizzata al caso di un sistema interagente trattato con la teoria delle perturbazioni. Particolare attenzione viene dedicata allo studio degli stati termici e alle loro proprietà di equilibrio sotto l'evoluzione temporale (proprietà Kubo-Martin-Schwinger).

Nel terzo capitolo la teoria algebrica viene applicata allo studio di un campo scalare massivo reale a temperatura finita, la cui densità Lagrangiana contenga un termine di interazione quadratico nei campi. In questo contesto, vengono analizzati e risolti i problemi dell'approccio perturbativo brevemente descritti in precedenza.

Infine, nell'ultimo capitolo, viene presentato un contributo originale, che generalizza la trattazione al caso di un campo scalare massivo complesso, il quale presenti un'interazione con un quadripotenziale elettromagnetico esterno.

Indice

Sommario	2
Introduzione	5
Notazioni e convenzioni	10
1 Teoria algebrica per campo scalare libero	11
1.1 Soluzioni fondamentali	11
1.2 Algebra delle osservabili e stati	15
1.2.1 Costruzione generale	16
1.2.2 Stato di vuoto e stati KMS	18
1.3 Costruzione esplicita dell'algebra delle osservabili	23
1.3.1 Introduzione all'approccio funzionale	23
1.3.2 Algebra delle osservabili regolari e quantizzazione per deformazione	25
1.3.3 Analisi degli infiniti sui funzionali locali	26
1.3.4 Wave front set e prodotto di distribuzioni	29
1.3.5 Stati di Hadamard	30
1.3.6 L'algebra delle osservabili: Funzionali microcausali	32
1.3.7 Conclusioni	36
2 Costruzione perturbativa della teoria interagente	38
2.1 Il prodotto tempo ordinato	38
2.2 La formula di Bogoljubov	42
2.3 Calcolo grafico del valore di aspettazione di osservabili interagenti	45
2.4 La rinormalizzazione nell'approccio algebrico	48
2.4.1 Introduzione	48
2.4.2 Estensione di distribuzioni	50
2.4.3 Esempio $\lambda\varphi^4$	54
2.4.4 Rinormalizzazione delle funzioni a 2-punti mediante la rappresentazione di Källén-Lehmann	56
2.5 Stati KMS per la teoria interagente	58
3 Campo scalare reale: interazione quadratica	64
3.1 Sistema fisico in esame	65
3.2 Soluzione dell'equazione di campo interagente	65
3.3 Funzione a due punti sullo stato ω^β	69
3.3.1 Correzione al primo ordine perturbativo	69
3.3.2 Correzione al secondo ordine perturbativo	73
3.4 Funzione a due punti sullo stato $\omega^{\beta,V}$	75
3.4.1 Calcolo esplicito sullo stato $\omega^{\beta,V}$	75

3.4.2	Analisi del risultato	77
3.5	Calcolo di un'osservabile locale	79
4	Campo scalare complesso: elettrodinamica scalare	83
4.1	Campo scalare complesso	83
4.2	Sistema fisico in esame: elettrodinamica scalare	84
4.3	Funzione a due punti sullo stato ω^β	85
4.4	Funzione a due punti sullo stato $\omega^{\beta,V}$	89
4.5	Analisi del risultato	92
	Conclusioni e futuri sviluppi	94
A	Dettagli sugli stati di Hadamard	97
B	Rappresentazione di Källén-Lehmann	99
C	Calcolo funzionale e diagrammi non connessi	101

Introduzione

Sul finire degli anni Venti dello scorso secolo, la necessità di conciliare la *Meccanica Quantistica* e la *Teoria della Relatività Speciale* portò alla nascita della *Teoria Quantistica dei Campi* (QFT) ([Sre07],[Wei05],[PS95]). Tale teoria, nel corso del tempo, ha permesso di studiare e modellizzare numerosi fenomeni di interesse fisico, fornendo previsioni teoriche accurate ed in eccellente accordo con i risultati ottenuti sperimentalmente. Negli anni Sessanta, grazie al lavoro di Rudolf Haag e Daniel Kastler, nacque una nuova formulazione della QFT, basata su un approccio assiomatico ed algebrico e focalizzata sulle proprietà di localizzazione delle osservabili. Tale approccio alla teoria dei campi quantistici prese dunque il nome di *Teoria Quantistica dei Campi Algebrica* o *Assiomatica* (AQFT). Sebbene in origine l'AQFT sia stata sviluppata esclusivamente nell'ambito di teorie quantistiche che ammettono trattazioni esatte, negli ultimi anni essa è stata estesa allo studio di sistemi interagenti trattati con *approcci perturbativi* (pAQFT) (si veda ad esempio [Düt19], [Rej16] e [Bru+15] per una trattazione esaustiva di questa materia). L'idea fondamentale alla base delle teorie di campo algebriche è quella di descrivere le *osservabili* della teoria come elementi di algebre non commutative, le quali soddisfino particolari assiomi che formalizzano e codificano le assunzioni fisiche fondamentali comunemente fatte nell'ambito della QFT. Mentre le osservabili fisiche vengono fatte corrispondere agli elementi dell'algebra, gli *stati* del sistema, ovvero le possibili configurazioni che il sistema e l'apparato sperimentale possono assumere, sono descritti da funzionali lineari positivi e normalizzati che agiscono sugli elementi dell'algebra. I valori ottenuti facendo agire i funzionali sulle osservabili, dunque, corrispondono ai valori di aspettazione ottenuti nel processo di misura. La formulazione astratta alla base della AQFT non costituisce esclusivamente una formalizzazione matematicamente rigorosa delle teorie di campo quantistiche, ma fornisce anche un importante strumento per la loro generalizzazione. Negli approcci tradizionali alla QFT ciò che viene comunemente fatto è scegliere una particolare rappresentazione dell'algebra delle osservabili ottenuta facendo uso dello stato di vuoto definito sullo spazio-tempo piatto di Minkowski. Al contrario, l'approccio algebrico alle teorie dei campi quantistici consente di sviluppare la teoria senza la necessità di fissare uno specifico stato a priori. Per questo motivo, l'AQFT può essere utilizzata per descrivere sistemi fisici in cui lo stato di vuoto non costituisca uno stato privilegiato o, addirittura, non possa essere correttamente definito (si pensi, ad esempio, allo studio delle teorie di campo quantistiche su spazio-tempo curvo). Per quanto riguarda questo lavoro di tesi, l'AQFT costituisce lo strumento adatto a trattare teorie quantistiche di campo a *temperatura finita*, in quanto, come vedremo in seguito, gli stati termici forniscono rappresentazioni delle osservabili non compatibili con quella di vuoto.

Generalmente, le teorie di campo quantistiche vengono sviluppate assumendo che la temperatura T del sistema studiato sia nulla, ovvero che valga la condizione limite $T = 0$. Tuttavia, negli anni Settanta dello scorso secolo, l'interesse per la descrizione delle transizioni di fase che avvengono nelle teorie elettrodeboli a temperature dell'ordine di 200 MeV

portò alla nascita delle teorie di campo quantistico a temperatura finita. Nel decennio successivo, le teorie di gauge su reticolo prevedettero la possibile esistenza di un nuovo stato deconfinato di quark e gluoni, noto come *plasma di quark e gluoni*, a temperature superiori a circa 150 MeV . La possibilità di osservare questo nuovo stato della materia negli urti ultrarelativistici di ioni pesanti incentivò ulteriormente l'interesse teorico nei confronti delle teorie di campo a temperatura finita. Attualmente, tale tema di ricerca costituisce uno strumento di fondamentale importanza anche nell'ambito delle *fisica dei plasmi* (in particolare lo studio delle equazioni del trasporto che ne governano la dinamica) e dei fenomeni di *bariogenesi* presenti nell'universo primordiale. Le teorie di campo quantistiche a temperatura finita sono genericamente indicate con il nome di *Teorie di Campo Termiche* (TFT) ed il loro sviluppo teorico trova le sue fondamenta nei lavori di Matsubara [Mat55], Keldysh [Kel64] e Schwinger [Sch61] (per una trattazione moderna ed esaustiva di questo argomento si veda ad esempio [Bel00]). L'obiettivo fondamentale delle teorie di campo a temperatura finita è quello di descrivere sistemi fisici collocati in stati di equilibrio termico. Tali stati possono essere caratterizzati mediante una particolare condizione, nota come *condizione Kubo, Martin, Schwinger* (KMS) [Haa96], la quale consente di generalizzare a sistemi Lorenziani infinitamente estesi la nozione di *stati di Gibbs* generalmente utilizzata nel contesto della *meccanica quantistica statistica*. Mentre nel caso delle teorie di campo libere la costruzione di stati KMS risulta immediata, la situazione diventa notevolmente più complicata quando si tenta di studiare teorie di campo interagenti a temperatura finita. La presenza di un'interazione, infatti, modifica l'evoluzione temporale del sistema e, di conseguenza, anche gli stati KMS di equilibrio termico. Generalmente, le equazioni di campo interagenti non possono essere risolte in modo esatto e, dunque, le teorie di campo interagenti vengono studiate mediante l'uso di approcci perturbativi per trattare l'interazione stessa. All'interno di questi approcci perturbativi, risulta particolarmente conveniente riuscire ad esprimere i valori di aspettazione delle osservabili su stati della teoria interagente in termini di stati della teoria libera. Per quanto riguarda le teorie di campo a temperatura nulla sullo spazio-tempo piatto, questo risultato può essere ottenuto facendo ricorso al *teorema di Gell-Mann e Low*. Tale teorema, infatti, garantisce che le *funzioni di Green* della teoria interagente (ovvero il valore medio del prodotto di campi interagenti sullo stato di vuoto con interazione) possono essere scritte in termini di valori di aspettazione di campi sullo stato di vuoto della teoria libera. Tuttavia, nelle teorie di campo a temperatura finita il teorema di Gell-Mann e Low cessa di valere e lo studio degli stati KMS per la teoria interagente richiede pertanto un'analisi più approfondita. Si consideri ad esempio un sistema quantistico libero a temperatura T , in cui un termine di densità Lagrangiana di interazione venga acceso ad un tempo finito t_0 . In questa situazione è possibile dimostrare che le funzioni di Green della teoria interagente, ottenute calcolando il valore di aspettazione del prodotto di campi supportati nel futuro di t_0 , ammettono un'espressione formale contenente esclusivamente medie su stati KMS per l'evoluzione temporale libera. Tuttavia, al fine di tenere in considerazione l'effetto dell'interazioni sia sulle osservabili che sugli stati, tali espressioni presentano al loro interno un'integrazione nella variabile temporale su un cammino complesso, comunemente chiamato *Keldish-Schwinger contour* [Kam04]. La presenza di un'integrazione nel piano complesso, tuttavia, complica notevolmente l'analisi delle funzioni di Green per sistemi a temperatura finita, rendendo di fatto impossibile ottenere delle regole grafiche che ne consentano un calcolo perturbativo. Solamente in alcuni casi particolari il problema può essere semplificato e risolto trascurando il contributo proveniente dall'integrazione sull'asse immaginario (*formalismo del tempo reale*) o sull'asse reale (*formalismo di Matsubara o del tempo immaginario*). Tuttavia, come verificato anche in questo lavoro di tesi, esistono

situazioni fisiche di interesse in cui nessuno dei due contributi può essere trascurato al fine di tenere in considerazione l'effetto dell'interazione sia a livello delle osservabili che a quello degli stati. In queste situazioni entrambi i formalismi sopra citati diventano insufficienti e l'utilizzo nella sua totalità del cammino di Keldish-Schwinger per ottenere espressioni perturbative delle funzioni di Green risulta problematico.

La soluzione a tale problema può essere trovata utilizzando un approccio differente alle teorie di campo a temperatura finita. Recentemente, infatti, Fredenhagen e Lindner hanno mostrato come sia possibile, nel contesto delle teorie di campo algebriche, costruire stati KMS per l'evoluzione temporale interagente e ottenere espressioni perturbative per i valori di aspettazione calcolati su tali stati in termini di valori di aspettazione sugli stati KMS della teoria libera [FL14]. In questo lavoro di tesi, dunque, la costruzione proposta in [FL14] viene applicata a sistemi fisici di interesse a temperatura finita, mostrando come ciò permette di risolvere le problematiche che emergono quando si tenta di trattare tali sistemi utilizzando gli approcci descritti in precedenza.

Nel primo capitolo l'attenzione viene focalizzata sulla costruzione di una teoria algebrica che descriva un campo scalare neutro che si propaga sullo spazio-tempo di Minkowski. Come già accennato in precedenza, negli approcci tradizionali a questa materia viene generalmente scelta ed utilizzata una particolare rappresentazione dell'algebra delle osservabili basata sullo stato di vuoto. Tuttavia, all'interno di questo lavoro di tesi è stato necessario utilizzare stati differenti da quello di vuoto che non possono essere descritti all'interno della rappresentazione tradizionale. Per questo motivo, è stata impiegata una formulazione algebrica della teoria dei campi quantistici. Per prima cosa, è stata definita l'algebra delle osservabili insieme alle proprietà di commutazione soddisfatte dai suoi elementi. Inoltre, sono stati definiti gli stati come funzionali che agiscono su tale algebra e particolare attenzione è stata riservata allo studio degli stati di equilibrio a temperatura finita caratterizzati dalla condizione KMS. In seguito, al fine di rendere possibile l'applicazione della teoria a sistemi fisici specifici, è stata fornita una realizzazione concreta dell'algebra delle osservabili, seguendo un approccio funzionale. In questo contesto, è stato risolto il problema della comparsa di divergenze nello studio dei prodotti e dei valori di aspettazione delle osservabili locali (fondamentali per lo studio delle teorie interagenti) mediante una procedura che generalizza il *normal ordering* utilizzato negli approcci standard alla QFT. Dopo aver terminato la costruzione della teoria per un campo scalare libero, l'attenzione è stata rivolta allo studio delle teorie interagenti. Per questo motivo, nel secondo capitolo, il prodotto tempo ordinato è stato introdotto ed utilizzato per rappresentare le osservabili della teoria interagente all'interno dell'algebra libera in modo perturbativo attraverso la *formula di Bogoljubov*. In questo contesto, inoltre, sono state ricavate delle regole grafiche che consentono di calcolare il valore di aspettazione delle osservabili interagenti nell'ambito della AQFT perturbativa (pAQFT) ed il problema della *rinormalizzazione* è stato affrontato riservando particolare attenzione agli aspetti teorici che concernono l'estendibilità delle distribuzioni corrispondenti alle potenze dei propagatori di Feynman. Infine, un paragrafo del secondo capitolo è dedicato all'analisi dei risultati principali ottenuti in [FL14] riguardanti la costruzione di stati KMS per le teorie interagenti.

Una volta acquisiti tutti gli strumenti necessari, il lavoro è proseguito nello studio di sistemi caratterizzati da particolari Lagrangiane di interazione. Nello specifico, è stato studiato il comportamento delle *funzioni a due punti* a temperatura finita in presenza di un termine di interazione acceso in modo liscio ad un tempo finito e, da quel momento, lasciato acceso fino all'infinito. Per quanto riguarda il supporto spaziale dell'interazione, invece, esso è stato assunto compatto esclusivamente in un primo tempo; infatti, nel seguito, tale supporto è stato esteso all'intera componente spaziale dello spazio-tempo, considerando

dunque quello che viene generalmente chiamato *limite adiabatico*.

Il primo tipo di interazione analizzata, nel terzo capitolo, è un termine di densità Lagrangiana quadratico nei campi, ovvero una perturbazione della massa del campo scalare libero. All'interno di questa configurazione, è stata inizialmente calcolata la funzione a due punti della teoria interagente espandendo perturbativamente i campi interagenti in termini delle osservabili libere. Questo approccio produce risultati analoghi a quelli ottenibili mediante il formalismo del tempo reale descritto in precedenza. Tale calcolo è stato compiuto sia al primo che al secondo ordine perturbativo nella costante di accoppiamento con l'interazione. Inoltre, esso è stato compiuto sia risolvendo ricorsivamente l'equazione di campo interagente che mediante un'espansione grafica della formula di Bogljubov. Così facendo, è stato mostrato come l'espressione perturbativa ottenuta in questo modo presenti problematiche legate alla presenza di termini non invarianti sotto traslazioni temporali e dipendenti dalla forma esplicita del cut-off temporale che descrive il modo in cui si attiva l'interazione, anche dopo che quest'ultima viene definitivamente accesa. La presenza di questi problemi deve essere ricondotta al fatto che le funzioni a due punti ottenute mediante questo approccio corrispondono alla valutazione del valore di aspettazione di campi interagenti su stati termici invarianti rispetto all'evoluzione temporale determinata esclusivamente dalla Lagrangiana libera e non da quella interagente. Pertanto, nella parte successiva del capitolo, viene mostrato come, almeno al primo ordine nella teoria delle perturbazioni, l'uso di stati KMS per la teoria interagente (costruiti seguendo l'approccio proposto in [FL14]) possa risolvere i problemi incontrati. Inoltre, oltre allo studio delle funzioni a due punti, nel terzo capitolo viene calcolato esplicitamente anche il valore di aspettazione di un'osservabile locale (nello specifico $\varphi^2(x)$). Tale calcolo ha richiesto l'uso delle tecniche di rinormalizzazione studiate nel capitolo precedente.

Infine, nel quarto capitolo, viene analizzata in dettaglio una nuova configurazione di campo scalare interagente. Nello specifico, la costruzione algebrica è stata estesa al caso di un campo scalare complesso e l'analisi compiuta nel terzo capitolo è stata applicata al caso di un'interazione con un potenziale quadrivettoriale applicato dall'esterno. Tale potenziale viene trattato classicamente. La correzione al primo ordine nella costante di accoppiamento per la funzione a due punti è stata ricavata nel caso dell'accensione liscia della componente vettoriale del potenziale. Fisicamente, ciò corrisponde all'accensione di un campo magnetico. Nessuna particolare assunzione viene fatta riguardo alla dipendenza del potenziale vettore (e, dunque, del campo magnetico) dalle coordinate spaziali. Pertanto, una volta rimosso il cut-off spaziale, non è stato comunque possibile sfruttare la conservazione del triimpulso nei vertici di interazione, a differenza di quanto fatto nel terzo capitolo. Anche in questo caso, il termine al primo ordine perturbativo della funzione a due punti mostra problemi analoghi a quelli incontrati per l'interazione quadratica nei campi, risolti, come detto, mediante l'uso di stati KMS per l'evoluzione temporale interagente. Per di più, i problemi derivanti dalla mancanza di invarianza sotto traslazioni temporali della funzione a due punti risultano ulteriormente aggravati, come conseguenza diretta della presenza di termini derivativi nella Lagrangiana di interazione. La comparsa di crescite temporali all'interno delle serie perturbative, note come *effetti secolari*, è riscontrata anche nel caso in cui la funzione a due punti del sistema da noi analizzato venga calcolata mediante il formalismo del tempo reale citato in precedenza (si veda a riguardo [AAP14]). In questo lavoro di tesi, viene mostrato come tali problemi derivino dal fatto di non considerare esplicitamente l'effetto dell'interazione sugli stati, assumendo piuttosto che gli stati KMS della teoria libera convergano negli stati KMS della teoria interagente dopo tempi sufficientemente lunghi dall'accensione dell'interazione. Come recentemente dimostrato in [DFP17] tale assunzione, essenziale per il funzionamento del formalismo

del tempo reale, smette di valere nel caso in cui il limite adiabatico sul supporto spaziale dell'interazione venga considerato precedentemente al limite di grandi tempi. Avendo compreso nel dettaglio la natura e l'origine di questi problemi, è stato possibile mostrare come essi possano essere risolti. La soluzione proposta si basa sull'utilizzo di stati KMS per la teoria interagente costruiti secondo l'approccio presentato in [FL14]. Nel quarto capitolo viene infatti mostrato esplicitamente come, considerando l'effetto dell'interazione a livello degli stati e non solo a quello delle osservabili, sia possibile ottenere espressioni perturbative non divergenti anche nel caso in cui il limite adiabatico sul supporto spaziale dell'interazione venga considerato prima del limite di grandi tempi.

Notazioni e convenzioni

Di seguito è riportata una lista delle convenzioni e delle notazioni principali adottate all'interno della tesi:

- Il tensore metrico dello spazio-tempo di Minkowski è denotato con il simbolo $\eta_{\mu\nu}$ ed è posto uguale alla matrice diagonale $diag(-1, 1, 1, 1)$.
- La trasformata (antitrasformata) di Fourier di una funzione f è indicata indifferentemente con la notazione \hat{f} (\check{f}) o con la notazione $\mathcal{F}(f)$ ($\mathcal{F}^{-1}(f)$). Inoltre, per il calcolo della trasformata (antitrasformata) di Fourier è adottata la seguente convenzione:

$$\hat{f}(p) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ipx} dx, \quad \check{g}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(p)e^{ipx} dp. \quad (0.0.1)$$

- Per indicare un generico stato viene comunemente utilizzata la notazione ω . Lo stato di vuoto sullo spazio-tempo di Minkowski, invece, è indicato con il simbolo ω_0 , mentre con i simboli ω^β ed $\omega^{\beta,V}$ sono denotati gli stati di equilibrio a temperatura finita $T = \frac{1}{k_B\beta}$, rispettivamente per l'evoluzione temporale libera e per quella interagente. Di seguito è invece riportata una tabella contenente i simboli utilizzati per indicare i propagatori e le funzioni a due punti della teoria:

Propagatore causale	$\Delta(x, y)$
Propagatore ritardato/avanzato	$\Delta_{R\setminus A}(x, y)$
Funzione a due punti di uno stato ω	$\omega_2(x, y)$
Funzione a due punti di uno stato ω^β nella teoria libera	$\omega_2^\beta(x, y)$
Funzione a due punti di uno stato ω^β nella teoria interagente	$\omega_2^{\beta,(0)}(x, y)$
Funzione a due punti dello stato di vuoto ω_0	$\Delta_+(x, y)$
Propagatore di Dirac	$\Delta_D(x, y)$
Propagatore di Feynman relativo ad uno stato ω	$\Delta^F(x, y)$

- L'insieme delle funzioni lisce definite su una varietà \mathcal{M} è denotato indifferentemente con i simboli $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ e $\mathcal{E}(\mathcal{M})$. In modo analogo, le funzioni lisce a supporto compatto sono indicate con la notazione $\mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{M})$ e $\mathcal{D}(\mathcal{M})$. Come di consueto, infine, gli insiemi delle distribuzioni definite su tali spazi di funzioni sono denotate dai simboli primati \mathcal{E}' e \mathcal{D}' .
- I quadrivettori sono indicati con la notazione x, y mentre i trivettori con i simboli in grassetto \mathbf{x}, \mathbf{y} . Le loro componenti, invece, vengono denotate rispettivamente con i caratteri greci e latini.
- Viene adottata la convenzione di Einstein sugli indici ripetuti.
- Salvo diversa indicazione, viene adottato un sistema di unità di misura in cui si ha:

$$\hbar = k_B = c = 1. \quad (0.0.2)$$

Capitolo 1

Teoria algebrica per campo scalare libero

Introduzione al capitolo

L'obiettivo ultimo di questa tesi consiste nello studio del valore di aspettazione di osservabili di teorie interagenti su stati termici, con particolare attenzione rivolta al calcolo delle funzioni di correlazione della teoria. La necessità di utilizzare stati non descrivibili all'interno degli approcci standard alla teoria dei campi (in particolare stati che siano di equilibrio sotto l'evoluzione temporale della teoria interagente e che descrivano sistemi a temperatura finita) ci porta dunque a dover analizzare una costruzione alternativa, nota come teoria algebrica di campo quantistico (AQFT).

Nella prima parte di questo capitolo, definiremo e ricaveremo gli elementi fondamentali della teoria. In particolare, verrà definita l'algebra delle osservabili assieme alle proprietà che dovranno rispettare i suoi elementi (comprese le regole di commutazione). Sarà inoltre fornita una definizione generale di stato ed una caratterizzazione degli stati termici per sistemi infinitamente estesi.

Nella seconda parte del capitolo, invece, verrà fornita una costruzione concreta dell'algebra delle osservabili, in modo tale da rendere possibile un'applicazione diretta allo studio di situazioni di interesse fisico. All'interno di questo schema, inoltre, verranno fornite ed approfondite alcune nozioni riguardanti l'*analisi microlocale* utili per caratterizzare una particolare categoria di stati fisicamente rilevanti noti come *stati di Hadamard*. Tali nozioni costituiranno strumenti di fondamentale importanza per eliminare la presenza di divergenze nella teoria mediante un approccio che, come vedremo in dettaglio, generalizza il normal ordering impiegato negli approcci standard alla teoria dei campi.

1.1 Soluzioni fondamentali

In questa prima sezione definiremo e ricaveremo le *soluzioni fondamentali* dell'equazione di campo per un campo scalare libero massivo e reale. Esse rappresenteranno infatti oggetti fondamentali per la nostra teoria, in quanto, come vedremo, determinano le relazioni di commutazione rispettate dagli elementi dell'algebra delle osservabili.

Per affrontare questo problema, iniziamo con il definire le proprietà dell'ambiente geometrico all'interno del quale si propaga il campo scalare libero ϕ che intendiamo descrivere. Assumiamo che lo spazio-tempo sia descritto da una varietà liscia \mathcal{M} dotata di una metrica Lorentziana. D'ora in avanti, per la segnatura della metrica, utilizzeremo sempre la convenzione $(-, +, +, +)$. Per poter trattare il problema della ricerca delle soluzioni

dell'equazione libera di campo classica (di cui daremo a breve un'espressione esplicita per il campo scalare reale massivo) come un problema ai valori iniziali ben posto, richiediamo che la varietà \mathcal{M} sia *globalmente iperbolica*, ovvero che contenga al suo interno una *superficie di Cauchy* Σ . Ricordiamo che una ipersuperficie Σ in \mathcal{M} è detta di Cauchy se ogni curva di tipo tempo inestendibile di \mathcal{M} interseca tale sotto varietà una ed una sola volta (per maggiori dettagli si veda [BGP08] o [Wal84]). La nozione di superficie di Cauchy, dunque, consente di formalizzare l'idea intuitiva di "tempo iniziale" al quale fissare le condizioni iniziali per le soluzioni dell'equazione classica di campo.

All'interno della varietà \mathcal{M} possiamo ora definire la Lagrangiana di campo scalare libero nel modo usuale:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi(x)\partial^\mu\phi(x) - \frac{1}{2}m^2\phi^2(x) - \frac{1}{2}\xi R\phi^2(x), \quad (1.1.1)$$

dove $\phi(x)$ rappresenta il campo scalare, R la curvatura dello spazio, ξ una costante di accoppiamento ed m la massa del campo scalare. Sebbene nel seguito della tesi la curvatura dello spazio verrà assunta sempre nulla (*spazio-tempo di Minkowski*), è importante notare come la costruzione algebrica della teoria dei campi fornisca un'utile strumento per estendere la QFT a spazi curvi. Quest'aspetto verrà brevemente descritto nella sezione successiva.

Le equazioni del moto che discendono dalla Lagrangiana (1.1.1) sono le seguenti:

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi(x) - m^2\phi(x) - \xi R\phi(x) = 0. \quad (1.1.2)$$

Il nostro obiettivo consiste ora nel capire come risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \partial_\mu\partial^\mu\phi(x) - m^2\phi(x) - \xi R\phi(x) = 0 \\ \phi(x)|_\Sigma = \psi_1(\mathbf{x}) \\ \mathbf{n} \cdot \nabla\phi(x)|_\Sigma = \psi_2(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (1.1.3)$$

dove le funzioni $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{C}_0^\infty(\Sigma)$, ovvero le condizioni iniziali del nostro problema sono rappresentate da funzioni lisce e a supporto compatto note a priori. Il vettore \mathbf{n} rappresenta un vettore normale all'ipersuperficie Σ diretto verso il futuro. Il problema ai valori iniziali così definito risulta essere ben posto ed è possibile dimostrare che esiste un'unica soluzione $\phi(x) \in \mathcal{C}^\infty$ (per la dimostrazione di questo fatto si veda [BGP08]).

Per costruire le soluzioni di questo problema, consideriamo l'operatore differenziale:

$$P := -\square + m^2 + \xi R. \quad (1.1.4)$$

Diamo ora la definizione di *soluzioni fondamentali anticipata e ritardata* per l'operatore P , note anche come *propagatori anticipati e ritardati* (si tratta di una definizione leggermente diversa da quella usualmente incontrata nei corsi di fisica, ma che, come vedremo, risulterà essere del tutto analoga).

Definizione 1. Si definiscono soluzioni fondamentali avanzata e ritardata $\Delta_{A/R}$ di un operatore differenziale P gli operatori che associano alle funzioni lisce a supporto compatto f le soluzioni dell'equazione differenziale con sorgente f corrispondente all'operatore P e che verifichino delle particolari proprietà di supporto:

$$\Delta_{A/R} : \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \quad (1.1.5)$$

$$P\Delta_{A/R}f = f \text{ con } f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{M}) \quad (1.1.6)$$

$$Supp\Delta_Rf \subset J^+(Suppf) \text{ e } Supp\Delta_Af \subset J^-(Suppf) \quad (1.1.7)$$

Come di consueto con la notazione *Supp* indichiamo il supporto della funzione e con i simboli $J^{+/-}$ indichiamo il *futuro/passato causale* di un punto o di un insieme di punti.

È possibile dimostrare che in una varietà globalmente iperbolica il propagatore avanzato Δ_A e ritardato Δ_R esistono sempre e sono *unici* (per la dimostrazione di questo fatto si veda [BGP08]).

Date queste definizioni possiamo ora capire come costruire una soluzione per il nostro problema di Cauchy. Se infatti definiamo il *propagatore causale* Δ della teoria nel modo seguente:

$$\Delta := \Delta_R - \Delta_A, \quad (1.1.8)$$

risulta chiaro che esso associa alle funzioni a supporto compatto le soluzioni dell'equazione classica di campo, in quanto si ha:

$$P\Delta f = P\Delta_R f - P\Delta_A f = f - f = 0. \quad (1.1.9)$$

È inoltre possibile dimostrare che, data una qualunque coppia di funzioni lisce a supporto compatto che fissino le condizioni iniziali del problema di Cauchy, è sempre possibile trovare una funzione $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{M})$ tale che Δf sia soluzione del problema considerato. In generale, questa f non sarà però unica, in quanto $\text{Ker}(\Delta) = \{Pg|g \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{M})\}$.

Concludiamo ora mostrando che la precedente definizione di propagatore ritardato e anticipato coincide con l'usuale definizione di soluzioni fondamentali incontrata nei testi di fisica teorica (dove con soluzione si intende una soluzione in senso distribuzionale). Per il teorema del nucleo integrale di Schwartz, dato l'operatore $P\Delta_{R/A}$ che manda funzioni lisce e a supporto compatto in se stesse è possibile trovare una distribuzione T su $\mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{M}) \times \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{M})$ tale che valga:

$$\langle P\Delta_{R/A} f, g \rangle_2 = \langle T, f \otimes g \rangle_2 \quad f, g \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{M}), \quad (1.1.10)$$

dove con $\langle \rangle_n$ indichiamo il convenzionale pairing per le distribuzioni su \mathcal{M} :

$$\langle f, g \rangle_n = \int_{\mathcal{M}^n} f(x_1, \dots, x_n) g(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n. \quad (1.1.11)$$

Per definizione, però, sappiamo essere valida anche la seguente uguaglianza:

$$\langle P\Delta_{R/A} f, g \rangle_2 = \langle f, g \rangle_2. \quad (1.1.12)$$

Da questo si deduce dunque che :

$$T(x, y) = \delta(x - y). \quad (1.1.13)$$

In questo modo abbiamo riottenuto la definizione usuale di soluzioni fondamentali per l'operatore P :

$$P\Delta_{R/A} = \delta, \quad (1.1.14)$$

dove, nella precedente equazione (intesa in senso distribuzionale), abbiamo commesso un abuso di notazione indicando con il simbolo $\Delta_{R/A}$ il nucleo integrale della distribuzione associata all'operatore e non l'operatore stesso. D'ora in avanti, manterremo quest'ultima convenzione.

Per concludere il paragrafo, specializziamo ora la trattazione al caso in cui lo spazio-tempo sia quello di Minkowski e ricaviamo esplicitamente le espressioni per i propagatori anticipato, ritardato e causale dell'operatore P . Nel corso della dimostrazione utilizzeremo la trasformata di Fourier per risolvere l'equazione differenziale che definisce i propagatori. Tale strumento può essere impiegato correttamente, in quanto nel caso dello spazio-tempo

di Minkowski i propagatori $\Delta_{A/R}(x, y)$ sono *distribuzioni di Schwartz* e dunque, per un risultato standard dell'analisi distribuzionale, la loro trasformata di Fourier risulta essere ben definita.

L'equazione che intendiamo risolvere è la seguente (imponendo le opportune proprietà di supporto sulle soluzioni):

$$(\partial_\mu \partial^\mu - m^2) \Delta_{R/A} = \delta(x - y). \quad (1.1.15)$$

Passando in trasformata di Fourier, otteniamo:

$$(k_0^2 - \mathbf{k}^2 - m^2) \hat{\Delta}_{R/A}(k) = 1, \quad (1.1.16)$$

ovvero, calcolando l'antitrasformata di Fourier :

$$\Delta_{R/A}(x - y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{1}{(k_0^2 - \mathbf{k}^2 - m^2)} e^{-ik_0(x_0 - y_0)} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}. \quad (1.1.17)$$

Per poter integrare nella variabile k_0 , dobbiamo tenere conto della presenza di poli nel denominatore della funzione integranda sull'asse reale della variabile k_0 , in $k_0 = \pm \omega_{\mathbf{k}} := \pm \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$. Tale integrale può essere dunque calcolato facendo uso del teorema dei residui dopo aver scelto un percorso per aggirare i poli. In particolare, ciascun polo potrà essere aggirato in due modi, cioè in senso orario o in senso antiorario. Come vedremo, sarà proprio la prescrizione che adotteremo per aggirare i poli a determinare le proprietà di supporto dei propagatori e a distinguere dunque il propagatore ritardato da quello avanzato. Se, ad esempio, vogliamo richiedere che valga:

$$\Delta_R(x - y) = 0, \text{ per } x_0 < y_0, \quad (1.1.18)$$

per il caso del propagatore ritardato, dovremo aggirare entrambi i poli in senso orario. Infatti, nel caso in cui $(x_0 - y_0)$ sia negativo, l'integrazione andrà compiuta chiudendo il cammino di integrazione nel semipiano superiore del piano complesso (in modo tale da annullare il primo esponenziale in (1.1.17) nel limite in cui $k_0 \rightarrow \infty$). Avendo però scelto di aggirare i poli in senso orario, l'integrazione darà automaticamente il valore 0 in quanto il percorso chiuso di integrazione non conterrà al suo interno alcun polo (si veda la Figura 1.1.1). La prescrizione appena descritta corrisponde alla scelta di traslare entrambi i poli nel semipiano inferiore del piano complesso di un fattore $-i\epsilon$. Adotteremo pertanto la seguente prescrizione per la trasformata del propagatore ritardato:

$$\hat{\Delta}_R(k) = \frac{1}{(k_0 + i\epsilon)^2 - \mathbf{k}^2 - m^2}. \quad (1.1.19)$$

Sfruttando il teorema dei residui è quindi possibile calcolare l'integrale in k_0 ottenendo il seguente risultato:

$$\Delta_R(x - y) = - \int \frac{1}{(2\pi)^3} \theta(x_0 - y_0) \frac{\sin(\omega_{\mathbf{k}}(x_0 - y_0))}{\omega_{\mathbf{k}}} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} d^3\mathbf{k}. \quad (1.1.20)$$

Notiamo che, utilizzando questa prescrizione, abbiamo ottenuto che $\Delta_R(x - y)$ abbia supporto non nullo solo quando $x^0 > y^0$. Apparentemente, non sembrerebbe necessario che x e y siano causalmente connesse (come richiesto invece dalla definizione). Tuttavia, essendo l'equazione di Klein-Gordon invariante di Lorentz, osserviamo che la proprietà sul supporto di $\Delta_R(x - y)$ dovrà essere rispettata indipendentemente dal sistema di riferimento adottato. Questo implica che il supporto di $\Delta_R(x - y)$ contiene solamente i punti in cui x si trova nel *futuro causale* di y , soddisfacendo dunque pienamente le richieste imposte

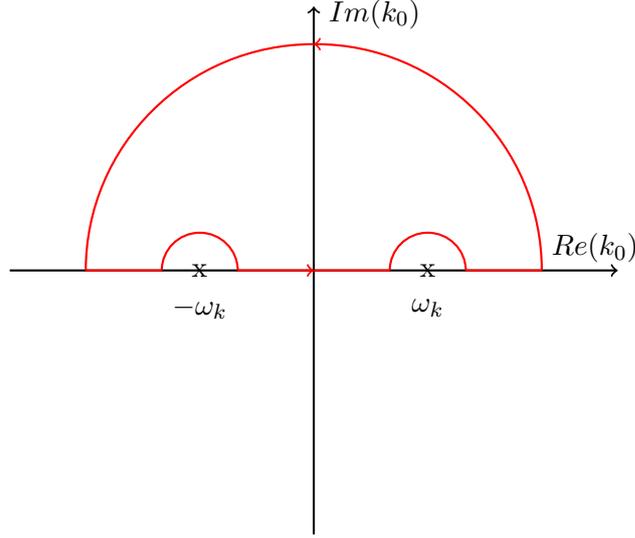


Figura 1.1.1: In figura riportiamo il percorso utilizzato per il calcolo del propagatore ritardato nel caso in cui $(x_0 - y_0) < 0$. Come si vede all'interno del percorso scelto non sono contenuti poli.

nella definizione di propagatore ritardato riportata in precedenza.

In modo analogo, è possibile ricavare la seguente espressione per la trasformata di Fourier del propagatore anticipato:

$$\hat{\Delta}_A(k) = \frac{1}{(k_0 - i\epsilon)^2 - \mathbf{k}^2 - m^2}. \quad (1.1.21)$$

e per la sua antitrasformata:

$$\Delta_A(x - y) = \Delta_R(y - x) = - \int \frac{1}{(2\pi)^3} \theta(y_0 - x_0) \frac{\sin(\omega_k(y_0 - x_0))}{\omega_k} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} d^3\mathbf{k}. \quad (1.1.22)$$

Infine, sottraendo le espressioni per il propagatore ritardato e anticipato ottenute, si ricava la seguente espressione per il propagatore causale:

$$\begin{aligned} \Delta(x - y) &= \Delta_R(x - y) - \Delta_A(x - y) = \\ &= - \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4k \operatorname{sign}(k_0) \delta(-k_0^2 + \mathbf{k}^2 + m^2) e^{-ik_0(x_0 - y_0)} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} d^3\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (1.1.23)$$

Per ricavare quest'ultima espressione, è necessario fare uso della seguente relazione distribuzionale:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{x - i\epsilon} - \frac{1}{x + i\epsilon} \right) = \delta(x). \quad (1.1.24)$$

1.2 Algebra delle osservabili e stati

In questa sezione intendiamo definire l'algebra astratta delle osservabili della teoria libera e le proprietà degli stati, con particolare attenzione allo stato di vuoto e agli stati termici della teoria.

1.2.1 Costruzione generale

Tra le proprietà basilari che richiediamo siano possedute dalle osservabili della nostra teoria, compaiono le richieste che esse possano essere moltiplicate e combinate linearmente. Per questo motivo, le osservabili costituiscono un'algebra \mathcal{A} . Inoltre, poiché i valori di aspettazione delle quantità fisiche devono necessariamente essere reali, è necessario avere un modo per selezionare gli elementi positivi dell'algebra. Richiediamo pertanto che essa sia dotata di un'involuzione che indicheremo con il simbolo $*$. In conclusione, le osservabili della teoria sono gli elementi di una $*$ -algebra. Nel caso di teorie quantistiche, poi, richiediamo che le osservabili soddisfino opportune relazioni di commutazioni a livello algebrico. Per quanto riguarda la teoria di campo libero che intendiamo costruire, assumiamo che l'algebra delle osservabili sia generata¹ dai *campi lisciati* $\phi(f)$, ovvero da oggetti astratti etichettati da funzioni $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{M})$, che soddisfino le seguenti proprietà:

- $\phi(af + bg) = a\phi(f) + b\phi(g)$ con $f, g \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{M})$ e $a, b \in \mathbb{C}$ (linearità di ϕ).
- $\phi(f)^* = \phi(\bar{f})$, ovvero che i campi della nostra teoria siano reali.
- $\phi(Pf) = 0$, ovvero che i campi soddisfino le equazioni del moto.
- $\phi(f)\phi(g) - \phi(g)\phi(f) = i\langle f, \Delta g \rangle \mathbb{1}$, avendo posto la costante $\hbar = 1$.

L'ultimo dei punti elencati determina le relazioni di commutazione tra i campi, le quali risultano dunque fissate a priori ed indipendentemente dalla scelta di una particolare rappresentazione dell'algebra. Poiché il coefficiente che compare in tale relazione viene fissato dall'azione del propagatore causale della teoria, risulta evidente l'utilità di avere ricavato tale distribuzione nella precedente sezione, almeno nel caso in cui la teoria sia costruita sullo spazio-tempo di Minkowski.

Avendo definito l'algebra delle osservabili, possiamo ora passare a definire gli stati. Essi, in generale, sono i *funzionali* $\omega : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ che agiscono sugli elementi della nostra algebra e che soddisfano le seguenti proprietà:

- Linearità: $\omega(aA + bB) = a\omega(A) + b\omega(B)$ con $a, b \in \mathbb{C}$ e $A, B \in \mathcal{A}$.
- Positività: $\omega(A^*A) \geq 0$ con $A \in \mathcal{A}$.
- Normalizzazione: $\omega(\mathbb{1}) = 1$.

Per via della proprietà di linearità, uno stato ω risulta essere completamente noto una volta nota la sua azione su ogni generico prodotto di campi lisciati. Nel caso specifico di nostro interesse vale la seguente azione:

$$\omega_n(f_1, \dots, f_n) := \omega(\phi(f_1)\phi(f_2)\dots\phi(f_n)) \quad \forall f_i \in \mathcal{C}_0^\infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.2.1)$$

Le ω_n vengono chiamate *funzioni ad n-punti* dello stato ed appartengono all'insieme delle distribuzioni su funzioni a supporto compatto ($\omega_n \in \mathcal{D}'(\mathcal{M}^n)$). Possiamo ora osservare che la richiesta che i campi lisciati siano soluzione dell'equazione del moto, insieme alla richiesta di linearità degli stati implicano il fatto che le funzioni ad n -punti ω_n siano soluzioni dell'equazione del moto in ogni entrata, cioè:

$$\omega_n(Pf_1, f_2, \dots, f_n) = \omega_n(f_1, Pf_2, \dots, f_n) = \omega_n(f_1, f_2, \dots, Pf_n) = 0. \quad (1.2.2)$$

¹Ricordiamo che un'algebra \mathcal{A} si dice generata da un sottoinsieme $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$, se ogni elemento $A \in \mathcal{A}$ può essere ottenuto dalla combinazione lineare finita dei prodotti degli elementi di \mathcal{S} .

Infine, è importate osservare come la condizione di normalizzazione fissi in modo univoco la componente antisimmetrica della funzione a due punti di uno stato qualsiasi, in quanto si avrà:

$$\omega_2(f_1, f_2) - \omega_2(f_2, f_1) = \omega([\phi(f_1), \phi(f_2)]) = i\Delta(f_1, f_2)\omega(\mathbb{1}) = i\Delta(f_1, f_2). \quad (1.2.3)$$

In linea di principio, quindi, la completa conoscenza di uno stato richiede la conoscenza di tutte le sue funzioni ad n -punti. Tuttavia, esiste una categoria particolari di stati per cui la conoscenza delle funzioni a 2-punti risulta essere sufficiente. Questi stati vengono chiamati *quasi liberi* o *gaussiani* e sono caratterizzati dalla seguente proprietà che deve valere $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} \omega_{2n+1} = 0. \\ \omega_{2n}(x_1, \dots, x_{2n}) = \sum_{\pi \in \mathcal{P}} \omega_2(x_{\pi_1}, x_{\pi_2}) \omega_2(x_{\pi_3}, x_{\pi_4}) \dots \omega_2(x_{\pi_{2n-1}}, x_{\pi_{2n}}). \end{cases} \quad (1.2.4)$$

Dove con \mathcal{P} indichiamo tutte le permutazioni ordinate di n elementi, ovvero le permutazioni per cui vale:

$$\pi_{2m-1} < \pi_{2m} \text{ con } 1 \leq m \leq n \quad \wedge \quad \pi_{2m-1} < \pi_{2m+1} \text{ con } 1 \leq m < n. \quad (1.2.5)$$

Gli stati che intenderemo studiare in questa tesi saranno quasi sempre stati di tipo gaussiano. L'unica eccezione è rappresentata dagli stati di equilibrio termico per teorie di campo interagenti. Tuttavia, come vedremo nel seguito, tali stati possono essere descritti mediante espressioni perturbative espresse in termini di funzioni a 2-punti di stati Gaussiani.

Per concludere questa sezione, cerchiamo ora di capire come la costruzione algebrica della teoria dei campi appena descritta si leghi all'approccio che si incontra normalmente nei testi di fisica.

La costruzione algebrica delle teorie fisiche è in generale applicabile sia alle teorie classiche che a quelle quantistiche. Nel caso di teorie quantistiche, a livello dell'algebra delle osservabili, vengono implementate le relazioni di commutazione che caratterizzano la teoria. Per questo motivo, l'algebra che si ottiene in questo caso sarà una $*$ -algebra non abeliana. In generale, una $*$ -algebra non abeliana può essere rappresentata concretamente a patto di fissare a priori uno stato ω necessario per costruire la rappresentazione stessa. Più precisamente vale il seguente teorema che prende il nome di *costruzione GNS*:

Teorema 1 (Costruzione GNS). *Sia ω uno stato su una C^* -algebra² \mathcal{A} , allora esiste uno spazio di Hilbert \mathcal{H}_ω , una rappresentazione $\pi_\omega : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_\omega)$ ³ ed un vettore ciclico⁴ $\Psi_\omega \in \mathcal{H}_\omega$ tale per cui valga:*

$$(\Psi_\omega, \pi_\omega(A)\Psi_\omega) = \omega(A). \quad (1.2.6)$$

Inoltre, ogni altra rappresentazione π in uno spazio di Hilbert \mathcal{H}_π con un vettore ciclico Ψ tale che:

$$(\Psi, \pi(A)\Psi) = \omega(A), \quad (1.2.7)$$

è unitariamente equivalente a π_ω .

²Una C^* -algebra \mathcal{A} è un'algebra di Banach (cioè un'algebra completa rispetto alla topologia indotta dalla norma $\|\cdot\|$ su essa definita) in cui il prodotto è continuo rispetto alla norma: $\|AB\| \leq \|A\| \|B\| \quad \forall A, B \in \mathcal{A}$. Inoltre, è soddisfatta la condizione C^* , ovvero $\forall A \in \mathcal{A}$ vale l'uguaglianza $\|A^*A\| = \|A\|^2$

³Con il simbolo $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\omega)$ indichiamo l'algebra degli operatori lineari limitati su \mathcal{H}_ω .

⁴Data una rappresentazione π di un'algebra \mathcal{A} su uno spazio di Hilbert \mathcal{H} , si dice che un vettore $\Psi \in \mathcal{H}$ è ciclico se $\pi(\mathcal{A})\Psi$ è denso in \mathcal{H} .

Il teorema GNS può essere esteso anche al caso più generale delle $*$ -algebre, dove non è prevista una norma a livello algebrico. Mediante la costruzione GNS gli stati vengono dunque rappresentati come vettori di uno spazio di Hilbert \mathcal{H}_ω e le osservabili come gli elementi di $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\omega)$. Nel caso della meccanica quantistica la rappresentazione GNS più comunemente adottata per l'algebra delle osservabili è quella di Schrödinger, nella quale lo spazio di Hilbert utilizzato per rappresentare gli stati coincide con lo spazio delle funzioni $L^2(\mathbb{R}^3)$. La scelta di una particolare rappresentazione GNS per l'algebra delle osservabili della meccanica quantistica non costituisce tuttavia una perdita di generalità. Ciò è dovuto all'esistenza del *teorema di von Neumann*, un potente teorema di unicità che garantisce l'unitaria equivalenza di tutte le rappresentazioni regolari irriducibili delle algebre delle osservabili *finito dimensionali* (si veda ad esempio [Mor10]).

La costruzione GNS può essere applicata anche al caso di teorie di campo quantistiche. Nel caso particolare di teorie su spazi piani, è possibile selezionare uno stato ω_0 che risulti essere massimamente simmetrico rispetto al *gruppo di Poincaré* e che viene comunemente chiamato stato di vuoto. Lo spazio di Hilbert della rappresentazione GNS corrispondente coincide proprio con lo spazio di Fock utilizzato negli approcci standard alla QFT. Al contrario di quanto succede nel caso della meccanica quantistica, tuttavia, non esiste un'estensione del teorema di von Neumann che garantisca l'unicità delle rappresentazioni di algebre *infinito dimensionali* e che possa dunque essere applicata alle teorie di campo quantistiche. Ciò che di fatto succede, invece, è che la descrizione di sistemi fisici differenti comporta l'utilizzo di rappresentazioni inequivalenti. Nel caso specifico di questa tesi, la formulazione algebrica della QFT (la quale non richiede il ricorso alla scelta di una particolare rappresentazione a priori) fornisce lo strumento adatto per trattare gli stati di equilibrio termico per le teorie di campo interagenti che, come vedremo anche nella prossima sezione, non possono essere riottenuti come operatori di classe traccia sullo spazio di Fock nella costruzione GNS basata sull'utilizzo dello stato di vuoto. È infine importante notare come l'AQFT si riveli uno strumento particolarmente utile anche quando si cerca di descrivere teorie di campo su spazi curvi. In quest'ultimo caso, infatti, non risulta addirittura possibile fornire una definizione univoca di stato di vuoto da utilizzare per costruire la teoria.

1.2.2 Stato di vuoto e stati KMS

In questa sezione intendiamo fornire le definizioni di stato di vuoto e stati termici per le teorie di campo scalare su spazio-tempo di Minkowski. Verranno inoltre ricavate esplicitamente le relative funzioni a due punti, in quanto oggetti di importanza fondamentale per il proseguimento della tesi.

Iniziamo con lo studio dello stato di vuoto ω_0 . Esso è definito come lo stato quasi-libero che sia *massimamente simmetrico sotto trasformazioni di Poincaré* o che sia *invariante sotto traslazioni spazio temporali* e *minimizzi il proprio contenuto di energia*. Come vedremo, queste due condizioni (oltre alle proprietà generali che devono essere soddisfatte da tutti gli stati) sono sufficienti a caratterizzare completamente lo stato.

Essendo ω_0 uno stato gaussiano, siamo interessati a studiarne solamente la funzione a due punti corrispondente che, d'ora in avanti, indichiamo con il simbolo Δ_+ (per ragioni che risulteranno chiare alla fine della discussione). La prima cosa da osservare è che la richiesta di invarianza sotto traslazioni spazio-temporali vincola la funzione a 2-punti ad essere funzione della sola differenza delle variabili x ed y :

$$\omega_{0,2}(x, y) = \Delta_+(x - y) = \Delta_+(s) \quad \text{con} \quad s := x - y, \quad (1.2.8)$$

Per implementare le proprietà che definiscono lo stato di vuoto è conveniente studiare la trasformata di Fourier della funzione a due punti, che, per quanto appena visto, potrà essere scritta come:

$$\hat{\Delta}_+(p) = \int ds \Delta_+(s) e^{-ip_\mu s^\mu}. \quad (1.2.9)$$

A questo punto, richiediamo che lo stato sia invariante sotto trasformazioni di Lorentz. Le uniche quantità invarianti che possiamo costruire con il quadrivettore p sono la sua norma $p^2 := p_\mu p^\mu$ ed il segno della sua prima entrata $\text{sign}(p_0)$. Avremo dunque:

$$\hat{\Delta}_+(p) = \hat{\Delta}_+(p^2, \text{sign}(p_0)). \quad (1.2.10)$$

Prima di imporre la condizione sulla minimizzazione dell'energia, richiediamo che la funzione a 2-punti soddisfi le proprietà comuni a tutti gli stati. Iniziamo con l'osservare che la richiesta (1.2.2) che la funzione a due punti sia soluzione dell'equazione di campo si traduce nella seguente equazione:

$$(p^2 + m^2)\hat{\Delta}_+(p^2, \text{sign}(p_0)) = 0. \quad (1.2.11)$$

Questa condizione fissa la trasformata della funzione a due punti ad essere supportata sul mass-shell:

$$\hat{\Delta}_+(p^2, \text{sign}(p_0)) = f(\mathbf{p}^2, \text{sign}(p_0))\delta(p^2 + m^2). \quad (1.2.12)$$

Vediamo ora come implementare a livello della trasformata la condizione (1.2.3) sulla parte antisimmetrica della funzione a due punti. In generale, per $g, h \in \mathcal{C}_0^\infty$ a valori reali, si ha:

$$\begin{aligned} \Delta_+(g, h) &= \int \int dx dy g(x)\Delta_+(x-y)h(y) = \int dx g(x)(\Delta_+ * h)(x) \\ &= \int dk \bar{\hat{g}}(k)\hat{\Delta}_+(k)\hat{h}(k) = \int dk \hat{g}(-k)\hat{\Delta}_+(k)\hat{h}(k). \end{aligned} \quad (1.2.13)$$

Dove per passare dalla prima alla seconda riga si è fatto uso del *teorema di Parseval*. Viceversa si avrà:

$$\Delta_+(h, g) = \int dk \hat{h}(-k)\hat{\Delta}_+(k)\hat{g}(k) = \int dk \hat{g}(-k)\hat{\Delta}_+(-k)\hat{h}(k). \quad (1.2.14)$$

Sfruttando la linearità dello stato e la definizione di prodotto scalare su $L^2(\mathbb{R}^n)$ è immediato verificare che le precedenti relazioni continuano a valere anche nel caso in cui f, g siano funzioni a valori complessi.

Grazie a quanto appena mostrato, la condizione (1.2.3) può essere implementata nel modo seguente a livello della trasformata della funzione a due punti:

$$(f(\mathbf{p}^2, \text{sign}(p_0)) - f(\mathbf{p}^2, \text{sign}(-p_0)))\delta(p^2 + m^2) = i\hat{\Delta}(p) = 2\pi\text{sign}(p_0)\delta(p^2 + m^2), \quad (1.2.15)$$

dove è stata utilizzata l'espressione esplicita del propagatore causale ricavata in (1.1.23). La (1.2.15) implica che:

$$f(\mathbf{p}^2, 1) = 2\pi + f(\mathbf{p}^2, -1). \quad (1.2.16)$$

Osserviamo infine che la (1.2.12) può essere riscritta nel modo seguente:

$$\hat{\Delta}_+(p^2, \text{sign}(p_0)) = \frac{f(\mathbf{p}^2, 1)}{2\omega_p}\delta(p_0 - \omega_p) + \frac{f(\mathbf{p}^2, -1)}{2\omega_p}\delta(p_0 + \omega_p). \quad (1.2.17)$$

Avendo i due addendi supporto separato, è chiaro che la richiesta di positività dello stato implica che valgano separatamente:

$$f(\mathbf{p}^2, 1) \geq 0 \wedge f(\mathbf{p}^2, -1) \geq 0. \quad (1.2.18)$$

Possiamo ora dunque imporre l'ultima richiesta su ω_0 , ovvero che esso minimizzi la quantità di energia del sistema. Tale proprietà equivale a richiedere che la seguente quantità sia minima:

$$\int dp p_0^2 \left[\frac{f(\mathbf{p}^2, 1)}{2\omega_p} \delta(p_0 - \omega_p) + \frac{f(\mathbf{p}^2, -1)}{2\omega_p} \delta(p_0 + \omega_p) \right]. \quad (1.2.19)$$

Tenendo conto dei vincoli imposti da (1.2.16) e (1.2.18) si ottiene dunque:

$$f(\mathbf{p}^2, -1) = 0 \wedge f(\mathbf{p}^2, 1) = 2\pi. \quad (1.2.20)$$

E quindi, in conclusione:

$$\Delta_+(x - y) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dp \theta(p_0) \delta(p^2 + m^2) e^{ip^\mu(x-y)_\mu}. \quad (1.2.21)$$

Risulta ora chiara la motivazione della notazione utilizzata, in quanto la funzione a due punti del vuoto corrisponde alla sola componente a frequenza positiva del propagatore causale Δ . Lo stesso risultato può essere ricavato sfruttando la rappresentazione dei campi sullo spazio di Fock ottenuta partendo dallo stato di vuoto.

Passiamo ora a descrivere una categoria di stati di particolare rilievo fisico, ovvero gli *stati termici*. Essi costituiscono stati di equilibrio sotto l'evoluzione temporale del sistema a temperatura non nulla. Di seguito vedremo come caratterizzare questo tipo di stati nel caso di sistemi illimitati e ne studieremo le principali proprietà (per un'analisi più dettagliata si rimanda al libro [Haa96]).

Nei corsi di meccanica quantistica vengono normalmente costruiti gli stati di equilibrio termico per sistemi spazialmente limitati tramite la definizione di *stati di Gibbs*, ovvero stati caratterizzati da un operatore ρ noto come *matrice densità*. Se il sistema in esame è descritto da un'Hamiltoniana H e se l'operatore $e^{-\beta H}$ è un operatore di classe traccia, si definisce:

$$\rho := \frac{e^{-\beta H}}{Z} := \frac{e^{-\beta H}}{\text{Tr}(e^{-\beta H})} \quad \text{con } \beta := \frac{1}{k_B T}. \quad (1.2.22)$$

Con T indichiamo la temperatura del sistema e con k_B la costante di Boltzmann. Il valor medio di un operatore A su uno stato di equilibrio termico ω^β è dunque definito nel modo seguente:

$$\omega^\beta(A) := \frac{\text{Tr}(A e^{-\beta H})}{Z}. \quad (1.2.23)$$

Se definiamo poi nel modo consueto l'evoluzione temporale per l'operatore A :

$$\tau_t A = e^{iHt} A e^{-iHt}, \quad (1.2.24)$$

risulta immediato verificare che uno stato di Gibbs è uno stato di equilibrio sotto l'evoluzione temporale per via della proprietà ciclica della traccia.

Osserviamo ora le seguenti proprietà soddisfatte da uno stato di Gibbs. Siano A e B due osservabili qualsiasi, si ha allora che:

- La funzione $\omega^\beta(B \tau_t A)$ della variabile reale t è continuabile analiticamente nel piano complesso per $\text{Im}(t) \in [0, \beta]$.

- Vale la seguente relazione:

$$\begin{aligned}\omega^\beta((\tau_t A)B) &= \frac{1}{Z} \text{Tr}(e^{-\beta H} e^{iHt} A e^{-iHt} B) = \frac{1}{Z} \text{Tr}(B e^{i(t+i\beta)H} A e^{-iHt}) = \\ &= \frac{1}{Z} \text{Tr}(B e^{i(t+i\beta)H} A e^{-i(t+i\beta)H} e^{-\beta H}) = \omega^\beta(B(\tau_{t+i\beta} A)).\end{aligned}\quad (1.2.25)$$

Se definiamo ora le due seguenti funzioni della variabile complessa $z = t + i\gamma$:

$$F(z) := \omega^\beta(B(\tau_z A)) = \frac{1}{Z} \text{Tr}(B e^{iHt} e^{-\gamma t} A e^{-iHt} e^{(\gamma-\beta)H}), \quad (1.2.26)$$

$$G(z) := \omega^\beta((\tau_z A)B), \quad (1.2.27)$$

possiamo osservare che la funzione $F(z)$ risulta essere analitica per $0 < \gamma < \beta$ in quanto stiamo supponendo che $e^{-\alpha H}$ sia un operatore di classe traccia per $\alpha > 0$. Inoltre, per quanto visto in (1.2.25), le funzioni $F(z)$ e $G(z)$ sono legate dalla seguente relazione:

$$F(t + i\beta) = G(t). \quad (1.2.28)$$

La discussione condotta fino ad ora si basa sull'assunzione che l'operatore $e^{-\beta H}$ sia un operatore di classe traccia e sia dunque possibile costruire nel modo usuale gli stati di Gibbs. Tuttavia, questa assunzione cessa di valere nel caso in cui si studino teorie di campo su dominio infinito.

Per questo motivo viene data la definizione di *stato KMS*, la quale codifica le informazioni fondamentali sull'analiticit  di $F(z)$ e sulla propriet  (1.2.28) senza la necessit  di richiedere che $e^{-\beta H}$ sia un operatore di classe traccia. In particolare, avremo la seguente definizione:

Definizione 2 (Stati KMS). Uno stato ω^β   detto *stato KMS* rispetto all'evoluzione temporale τ_t del sistema se valgono le due seguenti propriet  per una qualunque coppia di osservabili A e B :

- La funzione di variabile complessa $F(z) = \omega^\beta(B(\tau_z A))$   analitica per $\text{Im}(z) \in (0, \beta)$.
- La funzione $F(z)$ e la funzione $G(z) = \omega^\beta((\tau_z A)B)$ soddisfano la seguente relazione:

$$G(t) = F(t + i\beta) \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (1.2.29)$$

Per quanto visto in precedenza   evidente che uno stato di Gibbs, quando pu  essere correttamente definito, soddisfa le due propriet  richieste per essere uno stato KMS.   inoltre possibile dimostrare che, quando l'operatore $e^{-\beta H}$ costituisce un operatore di classe traccia, uno stato che soddisfi la condizione KMS coincide necessariamente con uno stato di Gibbs. Pertanto in quest'ultimo caso la condizione KMS e la definizione di stati di Gibbs risultano essere del tutto equivalenti.   infine semplice dimostrare, facendo uso del *teorema di Liouville*, che uno stato KMS costituisce uno stato di equilibrio sotto l'evoluzione temporale del sistema. La condizione KMS pu  essere verificata anche quando $e^{-\beta H}$ non   un buon operatore di classe traccia. D'ora in avanti, dunque, faremo coincidere la definizione di stati di equilibrio con quella di stati KMS.

Per concludere questo paragrafo, ricaviamo l'espressione esplicita per la funzione a due punti degli stati KMS per la nostra teoria di campo scalare. Tutto ci  che dobbiamo fare   utilizzare la propriet  (1.2.29) che definisce gli stati KMS insieme alla forma esplicita del propagatore causale, il quale fissa la parte antisimmetrica di uno stato qualsiasi come

visto in (1.2.3).

Iniziamo con l'osservare che, per la proprietà (1.2.29), si ha:

$$\omega^\beta(\phi(f)\tau_{i\beta}\phi(g)) = \omega^\beta(\phi(g)\phi(f)) = \omega^\beta(\phi(f)\phi(g)) - \omega^\beta([\phi(f), \phi(g)]). \quad (1.2.30)$$

Se ora definiamo l'azione dell'evoluzione temporale sui campi nel modo seguente:

$$\tau_t\phi(g) = \phi(g_t) \quad \text{con} \quad g_t(x_0, \mathbf{x}) = g(x_0 - t, \mathbf{x}). \quad (1.2.31)$$

otteniamo la seguente proprietà per la funzione a due punti dello stato:

$$\omega_2^\beta(f, g_{i\beta}) - \omega_2^\beta(f, g) = -i\Delta(f, g). \quad (1.2.32)$$

Se passiamo ora in trasformata di Fourier (assumendo che le distribuzioni ω_2^β e Δ siano distribuzioni di Schwartz) e imponiamo l'invarianza sotto traslazioni spazio-temporali per lo stato ω^β otterremo la seguente relazione:

$$\hat{\omega}_2^\beta(p)e^{-\beta p_0} - \hat{\omega}_2^\beta(p) = -i\hat{\Delta}(p), \quad (1.2.33)$$

dove è stato utilizzato il fatto che, in trasformata di Fourier, l'azione di un traslazione temporale coincide con la moltiplicazione per una fase e la dipendenza dalle funzioni f e g è stata omessa in quanto la relazione (1.2.30) deve essere soddisfatta per ogni coppia di funzioni. In conclusione abbiamo ricavato:

$$\hat{\omega}_2^\beta(p) = \frac{i\hat{\Delta}(p)}{1 - e^{-\beta p_0}} = \frac{(2\pi)\text{sign}(p_0)\delta(-p_0^2 + \mathbf{p}^2 + m^2)}{1 - e^{-\beta p_0}}. \quad (1.2.34)$$

Abbiamo dunque ottenuto:

$$\omega_2^\beta(x, y) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left[\frac{e^{-i\omega_p(t_x - t_y)}}{(1 - e^{-\beta\omega_p})2\omega_p} - \frac{e^{i\omega_p(t_x - t_y)}}{(1 - e^{\beta\omega_p})2\omega_p} \right] e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{y})}. \quad (1.2.35)$$

Nel passare dall'equazione (1.2.33) all'equazione (1.2.34) abbiamo implicitamente assunto che la seguente quantità non si annulli mai sul supporto di $\hat{\Delta}(p)$:

$$(1 - e^{-\beta p_0}) \neq 0. \quad (1.2.36)$$

Tale assunzione, verificata nel caso in cui $m > 0$, cessa di essere valida nel caso in cui si considerino particelle a massa nulla. In quest'ultimo caso è possibile dimostrare che la trasformata di Fourier della funzione a due punti dello stato KMS coincide con quella da noi ricavata per il caso massivo a meno della presenza di un fattore $\delta(p_0)$:

$$\hat{\omega}_{2,m=0}^\beta(p) = \hat{\omega}_{2,m}^\beta(p) + C\delta(p_0). \quad (1.2.37)$$

Questa differenza determina degli effetti importanti in situazioni di particolare interesse fisico, come ad esempio nello studio dei condensati di Bose-Einstein.

Possiamo infine notare come nella funzione a due punti per uno stato KMS siano presenti dei contributi a frequenza negativa, mentre quest'ultimi risultano del tutto assenti nella funzione a due punti dello stato di vuoto. Tuttavia, è evidente che i termini a frequenza negativa vengono smorzati da un fattore di Bose e, nel limite di basse temperature ($\beta \rightarrow \infty$), la funzione a due punti $\omega_2^\beta(x, y)$ tende a coincidere con $\Delta_+(x, y)$, come atteso.

1.3 Costruzione esplicita dell'algebra delle osservabili

Dopo aver analizzato gli aspetti generali che concernono gli stati e l'algebra delle osservabili, siamo ora pronti a fornire una costruzione esplicita di quest'ultima, in modo da rendere possibile un'applicazione diretta allo studio di sistemi di interesse fisico. Nella parte iniziale di questa sezione, affronteremo un primo tentativo di costruzione dell'algebra dei campi. Tuttavia, essa si rivelerà essere insufficiente, in quanto priva degli elementi essenziali per una sua successiva applicazione alla descrizione delle teorie interagenti. In particolare, avremo la necessità di trovare un'estensione dell'algebra delle osservabili sufficientemente grande da contenere le Lagrangiane di iterazione di nostro interesse. Per risolvere questo problema dal punto di vista matematico dovremo analizzare alcune importanti proprietà delle distribuzioni studiate nell'ambito dell'*analisi microlocale*. Inoltre, approfondiremo l'analisi di una particolare categoria di stati, noti come *stati di Hadamard*. Una volta acquisite tutte le conoscenze necessarie, potremo dunque concludere la sezione fornendo la versione definitiva dell'algebra delle osservabili di nostro interesse. Per una costruzione analoga a quella qui descritta, si veda ad esempio il libro [Düt19].

1.3.1 Introduzione all'approccio funzionale

L'approccio che intendiamo utilizzare per fornire una costruzione esplicita dell'algebra delle osservabili è un approccio funzionale. Iniziamo con il definire l'insieme delle *configurazioni di campo* nel modo seguente:

Definizione 3 (Configurazioni di campo). L'insieme delle *configurazioni di campo* è definito come l'insieme delle funzioni $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ a valori reali.

Osserviamo che, sebbene all'interno di questo insieme siano contenute anche le soluzioni dell'equazione di campo, in generale le configurazioni φ risultano essere funzioni off-shell. Questa scelta si rivelerà utile per l'intento futuro di costruire una teoria di campo interagente.

Data la precedente definizione, possiamo ora ad identificare le osservabili della teoria con una classe particolare di funzionali \mathcal{F} sullo spazio delle configurazioni. Prima di fare ciò, ricordiamo che in generale un funzionale sullo spazio delle configurazioni è una mappa F da $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}; \mathbb{R})$ che restituisce valori complessi:

$$F \in \mathcal{F} : \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}. \quad (1.3.1)$$

L'esempio più semplice di funzionale è il *funzionale lineare* $\Phi_f(\varphi)$, la cui valutazione sulle configurazioni di campo è così definita:

$$\Phi_f(\varphi) := \int f(x)\varphi(x) dx \quad \text{con } f \in \mathcal{C}_0^\infty. \quad (1.3.2)$$

Esistono però anche altri tipi di funzionali più complicati, come il seguente *funzionale quadratico* nei campi:

$$H(\varphi) = \int dx \int dy h(x, y)\varphi(x)\varphi(y) \quad \text{con } h(x, y) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{M}^2). \quad (1.3.3)$$

o il seguente funzionale *locale* (per una definizione precisa di funzionale locale si veda nel seguito la Definizione 6):

$$\Phi_f^n(\varphi) := \int f(x)\varphi^n(x) dx. \quad (1.3.4)$$

Un'operazione di fondamentale importanza che può essere eseguita sui funzionali è la *derivata funzionale*, così definita:

Definizione 4 (Derivata funzionale). Dato un funzionale F si definisce la sua derivata funzionale $F^{(1)}$ nel modo seguente:

$$F^{(1)}(\varphi)(\psi) := \frac{d}{d\lambda} F(\varphi + \lambda\psi) \Big|_{\lambda=0} \quad \text{con } \varphi, \psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}). \quad (1.3.5)$$

Le derivate funzionali di ordine superiore sono definite applicando ricorsivamente lo stesso procedimento di derivazione. Ad esempio, si avrà:

$$F^{(2)}(\varphi)(\psi_1, \psi_2) := \frac{d^2}{d\lambda_1 d\lambda_2} F(\varphi + \lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2) \Big|_{\lambda_1=\lambda_2=0} \quad \text{con } \varphi, \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}). \quad (1.3.6)$$

È importante notare che sebbene un funzionale non necessariamente dipenda linearmente dalle configurazioni di campo φ , per definizione la sua derivata n -esima è lineare sulle funzioni $\psi_1 \dots \psi_n$. Per questo motivo, dunque, richiediamo che la derivata n -esima di un funzionale definisca una distribuzione a supporto compatto su $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})^{\otimes n}$ (un elemento di $\mathcal{E}'(\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})^{\otimes n})$). Nel corso della tesi utilizzeremo la notazione $F^{(n)}$ per indicare la derivata funzionale n -esima di un funzionale F , la quale viene valutata sulle funzioni $\varphi, \psi_1, \dots, \psi_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$. Indicheremo invece con il simbolo $\frac{\delta^n F}{\delta\varphi_1 \dots \delta\varphi_n}$ il nucleo integrale della distribuzione corrispondente alla derivata funzionale n -esima di F , la quale è valutata linearmente sulle funzioni $\psi_1, \dots, \psi_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$.

Riprendendo gli esempi visti sopra, la derivata funzionale del funzionale lineare $\Phi_f(\varphi)$ è data semplicemente da:

$$\Phi_f^{(1)}(\varphi)(\psi) = \frac{d}{d\lambda} \int f(x)(\varphi(x) + \lambda\psi(x)) dx \Big|_{\lambda=0} = \int f(x)\psi(x) dx. \quad (1.3.7)$$

In modo analogo è possibile calcolare la derivata prima del funzionale $H(\varphi)$ ottenendo il seguente risultato:

$$H^{(1)}(\varphi)(\psi) = \int dx \int dy (h(x, y) + h(y, x))\varphi(x)\psi(y), \quad (1.3.8)$$

dove in modo automatico è comparsa la simmetrizzazione della funzione $h(x, y)$. Infine, calcolando la derivata funzionale seconda del funzionale $\Phi_f^2(\varphi)$ si ottiene la seguente espressione:

$$\Phi_f^{2,(2)}(\varphi)(\psi_1, \psi_2) = 2 \int dx \int dy f(x)\delta(x - y)\psi_1(x)\psi_2(y). \quad (1.3.9)$$

Avendo acquisito familiarità con il concetto di derivata funzionale possiamo ora fornire una prima importante definizione, ovvero la definizione di *funzionali regolari*:

Definizione 5 (Funzionali regolari). Si definisce l'insieme dei *funzionali regolari*, che indicheremo con il simbolo \mathcal{F}_{reg} , l'insieme dei funzionali che soddisfano le seguenti proprietà:

- Le derivate $F^{(n)}$ di F esistono per ogni $n \in \mathbb{N}$.
- Solo un numero limitato di derivate funzionali è non nullo:

$$\exists N \text{ t.c } F^{(n)} = 0 \quad \forall n > N \in \mathbb{N}. \quad (1.3.10)$$

- Il funzionale F e tutte le sue derivate sono a supporto compatto (il supporto di un funzionale è l'insieme dei punti in \mathcal{M} in cui il valore di $F(\varphi)$ è sensibile ai cambiamenti della configurazione di campo φ).

- Le derivate funzionali non nulle sono funzioni lisce a supporto compatto:

$$F^{(n)} \in \mathcal{C}_0^\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.3.11)$$

Siamo ora pronti ad analizzare una prima costruzione dell'algebra delle osservabili.

1.3.2 Algebra delle osservabili regolari e quantizzazione per deformazione

Iniziamo cercando di identificare le osservabili della teoria con i funzionali regolari $F \in \mathcal{F}_{reg}$ sulle configurazioni di campo. Come vedremo alla fine di questo paragrafo, l'ultima condizione di regolarità che caratterizza in funzionali regolari costituisce una richiesta troppo stringente, ma il procedimento necessario a rilassarla non è banale e dovrà essere approfondito nel dettaglio.

Come visto in precedenza, gli elementi dell'algebra delle osservabili devono soddisfare particolari regole di commutazione determinate dal propagatore causale dell'equazione di campo. Tuttavia, il prodotto più semplice che possa essere definito tra due funzionali, ovvero il prodotto puntuale, è un prodotto commutativo. Si ha infatti:

$$F \cdot G(\varphi) := F(\varphi)G(\varphi) = G \cdot F(\varphi) \quad \forall F, G \in \mathcal{F}. \quad (1.3.12)$$

La procedura di quantizzazione viene pertanto eseguita deformando il prodotto puntuale in un prodotto non commutativo chiamato *prodotto star*. Tale prodotto viene così definito:

$$F \star G := F \cdot G + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{2}\right)^n \langle F^{(n)}, \Delta^{\otimes n} G^{(n)} \rangle := \mathcal{M} e^{\Gamma_{i\frac{\Delta}{2}}} F \otimes G, \quad (1.3.13)$$

dove il prodotto tensore di due funzionali è definito nel modo seguente:

$$F \otimes G(\varphi_1, \varphi_2) = F(\varphi_1) \cdot G(\varphi_2), \quad (1.3.14)$$

la mappa gamma manda il prodotto tensoriale di funzionali in se stesso:

$$\Gamma_{i\frac{\Delta}{2}}(F \otimes G) = \frac{i}{2} \int dx_1 dx_2 \Delta(x_1, x_2) \frac{\delta F}{\delta \varphi(x_1)} \otimes \frac{\delta G}{\delta \varphi(x_2)}, \quad (1.3.15)$$

ed infine la mappa \mathcal{M} manda il prodotto tensoriale di due funzionali in un singolo funzionale:

$$\mathcal{M}(F \otimes G)(\varphi) = (F \cdot G)(\varphi) = F(\varphi)G(\varphi). \quad (1.3.16)$$

Notiamo che il pairing utilizzato nella prima espressione in (1.3.13) risulta essere ben definito. Difatti, essendo F e G due funzionali regolari, la loro derivata n -esima è un elemento di $\mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{M}^n)$ e, dunque, risulterà ben definito il pairing mediante la distribuzione $\Delta^{\otimes n} \in \mathcal{D}'(\mathcal{M}^{2n})$.

È immediato verificare che il prodotto star implementa le relazioni di commutazioni richieste. Si ha infatti:

$$\Phi_f \star \Phi_g - \Phi_g \star \Phi_f = \Phi_f \cdot \Phi_g - \Phi_g \cdot \Phi_f + \frac{i}{2} \langle f, \Delta g \rangle - \frac{i}{2} \langle g, \Delta f \rangle = i \langle f, \Delta g \rangle. \quad (1.3.17)$$

Per ottenere l'ultima uguaglianza è stata utilizzata l'antisimmetria del propagatore causale.

È possibile verificare direttamente che il prodotto star così costruito è un prodotto associativo ed è ben definito su tutti i funzionali regolari. L'algebra dei funzionali regolari

dotata del prodotto \star e della coniugazione complessa $*$ ($\mathcal{F}_{reg}; \star; *$) costituisce dunque un buon candidato per fornire una costruzione concreta dell'algebra delle osservabili libere. Tuttavia, a questo punto, sorge un problema fondamentale. Il nostro obiettivo, infatti, sarà quello di trattare teorie interagenti. Un tipico esempio di interazione polinomiale assume la seguente forma funzionale:

$$\mathcal{L} = \int d^4x h(x)\varphi^n(x). \quad (1.3.18)$$

Tale funzionale costituisce un esempio di *funzionale locale*. In generale, avremo la seguente definizione:

Definizione 6 (Funzionali locali). L'insieme dei *funzionali locali*, indicato con la notazione \mathcal{F}_{loc} , è l'insieme dei funzionali le cui derivate funzionali $F^{(n)}$ con $n \geq 2$ sono distribuzioni supportate sulla diagonale di \mathcal{M}^n , ovvero i punti di coordinate $(x, \dots, x) \in \mathcal{M}^n$.

Come si vede dall'esempio in (1.3.9) i funzionali locali non sono regolari, in quanto le loro derivate funzionali non sono funzioni lisce a supporto compatto ma piuttosto distribuzioni a supporto compatto. In generale, per un funzionale locale Φ_f^n vale la seguente relazione:

$$\begin{aligned} \Phi_f^{n,(m)}(\varphi)(\psi_1, \dots, \psi_m) = \\ \frac{n!}{(n-m)!} \int dx_1 \dots \int dx_m f(x_1)\varphi^{(n-m)}(x_1)\delta(x_1, \dots, x_m)\psi_1(x_1)\dots\psi_m(x_m). \end{aligned} \quad (1.3.19)$$

La procedura necessaria per includere i funzionali locali nell'algebra delle osservabili non è banale. Se infatti si prova ad utilizzare il prodotto star per questa categoria di funzionali si incorre immediatamente in diversi infiniti. Nella sottosezione seguente intendiamo analizzare le cause all'origine di tali infiniti per comprendere in che modo essi possano essere aggirati.

1.3.3 Analisi degli infiniti sui funzionali locali

Iniziamo considerando il valore di aspettazione su di uno stato ω di un'osservabile locale quadratico nelle configurazioni di campo. Se con $\Phi^2(x)$ indichiamo il kernel del funzionale locale corrispondente otteniamo immediatamente la seguente espressione:

$$\omega(\Phi^2(x)) := \lim_{y \rightarrow x} \omega((\Phi(x) \star \Phi(y))) = \omega_2(x, x). \quad (1.3.20)$$

Tale espressione risulta però essere mal definita in quanto le funzioni a due punti degli stati presentano delle divergenze nel limite di coincidenza delle variabili. Per rendersene conto, è possibile ad esempio analizzare l'espressione esplicita della funzione a due punti dello stato di vuoto per un campo scalare a massa nulla, la quale può essere ottenuta dal calcolo diretto dell'antitrasformata di $\hat{\Delta}_+^{m=0}(p)$. Questo tipo di divergenza viene comunemente incontrata anche negli approcci tradizionali alla QFT e, all'interno della rappresentazione sullo spazio di Fock, viene risolta mediante il processo di *normal ordering* degli operatori di creazione e di distruzione, ovvero spostando gli operatori di distruzione alla destra di quelli di creazione nei prodotti. Tale processo corrisponde di fatto alla sottrazione del valore di aspettazione del prodotto dei campi sullo stato di vuoto. Per comprendere nel dettaglio l'equivalenza di queste due formulazioni del normal ordering, consideriamo l'espressione

esplicita dei campi nella rappresentazione sullo spazio di Fock. Utilizzando le convenzioni standard avremo:

$$\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x) := \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \left(a_{\mathbf{p}} e^{ipx} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-ipx} \right), \quad (1.3.21)$$

dove abbiamo definito:

$$\phi^+(x) := \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} a_{\mathbf{p}} e^{ipx} \quad e \quad \phi^-(x) := \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-ipx}. \quad (1.3.22)$$

Siamo ora interessati a studiare la seguente espressione:

$$: \phi(x)\phi(y) : - \phi(x)\phi(y), \quad (1.3.23)$$

dove con il simbolo $: \dots :$ abbiamo indicato il prodotto normal ordered dei campi, nel senso di spostare gli operatori di distruzione a destra di quelli di creazione. Inoltre, abbiamo evitato di indicare esplicitamente mediante la notazione \star il fatto che il prodotto tra i campi ϕ è un prodotto non commutativo, come fatto usualmente quando si lavora nella rappresentazione sullo spazio di Fock. Sostituiamo ora in (1.3.23) le espressioni esplicite per i campi:

$$\begin{aligned} & : \phi(x)\phi(y) : - \phi(x)\phi(y) = & (1.3.24) \\ & \phi^+(x)\phi^+(y) + \phi^-(x)\phi^-(y) + \phi^-(x)\phi^+(y) + \phi^-(y)\phi^+(x) - \\ & \phi^+(x)\phi^+(y) - \phi^-(x)\phi^-(y) - \phi^-(x)\phi^+(y) - \phi^+(x)\phi^-(y) = \\ & - [\phi^+(x), \phi^-(y)]. \end{aligned}$$

Per calcolare il commutatore che compare nella precedente espressione utilizziamo le regole canoniche di commutazione:

$$[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{k}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{k}). \quad (1.3.25)$$

Avremo pertanto la seguente catena di uguaglianze:

$$\begin{aligned} & : \phi(x)\phi(y) : - \phi(x)\phi(y) = - [\phi^+(x), \phi^-(y)] = & (1.3.26) \\ & - \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}\sqrt{2\omega_k}} [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{k}}^\dagger] e^{ipx-iky} = \end{aligned}$$

$$- \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_p} e^{ip(x-y)} = -\Delta_+(x, y), \quad (1.3.27)$$

dove, nell'ultimo passaggio, abbiamo riconosciuto la funzione a 2-punti del vuoto ricavata in (1.2.21). In conclusione abbiamo dunque mostrato che la definizione di normal ordering comunemente utilizzata negli approcci tradizionali alla QFT corrisponde effettivamente alla sottrazione del valore di aspettazione dei campi sullo stato di vuoto:

$$: \phi(x)\phi(y) : := \phi(x)\phi(y) - \Delta_+(x, y). \quad (1.3.28)$$

Nel limite di coincidenza $y \rightarrow x$ possiamo pertanto definire i *funzionali locali regolarizzati* nel modo seguente:

$$: \Phi^2(x) : := \lim_{y \rightarrow x} (\Phi(x) \star \Phi(y) - \Delta_+(x, y) \mathbb{1}). \quad (1.3.29)$$

È evidente che il valore di aspettazione dell'osservabile $: \Phi^2(x) :$ sullo stato di vuoto ω_0 restituisce un valore ben definito, cioè 0. Più in generale, il processo di normal ordering

consente di calcolare il valore di aspettazione di osservabili locali su una classe più ampia di stati ω . Infatti, il valore di aspettazione $\omega(\Phi^2(x))$ risulta essere ben definito su tutti quegli stati le cui funzioni a due punti presentino le stesse divergenze di Δ_+ nel limite di coincidenza $x \rightarrow y$, ovvero quegli stati per cui la differenza $\omega_2(x, y) - \Delta_+(x, y)$ è una funzione continua. Se inoltre la differenza $\omega_2(x, y) - \Delta_+(x, y)$ è anche una funzione liscia, anche tutte le sue derivate risultano essere prive di divergenza nel limite di coincidenza $y \rightarrow x$. In particolare, dunque, la richiesta di lisciezza consente di calcolare anche il valore di aspettazione delle derivate di osservabili locali, necessario, ad esempio, a calcolare le componenti del tensore energia impulso. Nel corso delle prossime sezioni cercheremo di capire con esattezza quali stati condividono le stesse divergenze, anche nel caso più generale in cui la teoria di campo non sia costruita sullo spazio-tempo piano di Minkowski. Inoltre, vedremo come estendere e modificare l'algebra dei funzionali regolari, in modo tale che l'estensione contenga il prodotto locale di campi regolarizzato.

Per rendere più chiaro il contenuto di questa sezione anticipiamo nel dettaglio quale sarà la logica seguita al suo interno. Come abbiamo appena visto, l'obiettivo di trattare teorie di campo interagenti comporta la necessità di utilizzare un'algebra che contenga al suo interno, oltre ai funzionali regolari, anche il prodotto normal ordered di osservabili locali. D'ora in avanti indicheremo tale algebra estesa con il simbolo \mathcal{A}_{ext} . L'obiettivo di questa sezione sarà dunque quello di fornire una costruzione concreta dell'algebra astratta \mathcal{A}_{ext} . Per fare ciò, inizieremo deformando ulteriormente il prodotto \star da noi definito in un altro prodotto non commutativo \star_ω . Dopo aver mostrato che le algebre $(\mathcal{F}_{reg}, \star)$ e $(\mathcal{F}_{reg}, \star_\omega)$ sono legate da uno \ast -isomorfismo, vedremo come sia possibile estendere l'algebra $(\mathcal{F}_{reg}, \star_\omega)$ ad una classe più ampia di funzionali, ovvero i *funzionali microcausali* $\mathcal{F}_{\mu c}$, a patto di restringere l'insieme degli stati utilizzabili per calcolare correttamente i valori di aspettazione. Infine, mostreremo come l'algebra $(\mathcal{F}_{\mu c}, \star_\omega)$ costituisca effettivamente una realizzazione esplicita dell'algebra \mathcal{A}_{ext} da noi cercata.

Come vedremo, l'utilizzo del prodotto normal ordered di osservabili locali consente di risolvere anche il seguente problema che compare quando si tenta di calcolare il prodotto \star di funzionali locali. Consideriamo il seguente prodotto:

$$\begin{aligned} \Phi_f^2 \star \Phi_g^2 = \Phi_f^2 \cdot \Phi_g^2 + 2i \int dx_1 dx_2 f(x_1)g(x_2)\Delta(x_1, x_2)\varphi(x_1)\varphi(x_2) - \\ \frac{1}{2} \int dx_1 dx_2 f(x_1)g(x_2)\Delta^2(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (1.3.30)$$

Nel termine al secondo ordine compare il quadrato del propagatore causale. Tuttavia, essendo il propagatore causale una distribuzione, il suo quadrato in generale non sarà un oggetto ben definito. Se si tenta di definire il prodotto tra distribuzioni mediante il teorema di convoluzione, per il quadrato della distribuzione Δ si ottiene la seguente espressione:

$$\begin{aligned} \Delta^2(x, y) := \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\Delta^2(x, y))) = \frac{1}{(2\pi)^4} \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\Delta(x, y)) \star \mathcal{F}(\Delta(x, y))) = \\ \frac{1}{(2\pi)^6} \int dk e^{ik^\mu(x-y)_\mu} \int dq \text{sign}(q_0)\delta(q^2 + m^2)\text{sign}(k_0 - q_0)\delta((k - q)^2 + m^2). \end{aligned} \quad (1.3.31)$$

Tale espressione è divergente per via dell'integrazione nella variabile q , in quanto la funzione integranda (a k fissato) ha un supporto illimitato (il prodotto delle funzioni segno non si annulla mai).

Nelle prossime sezioni daremo un criterio che consenta di stabilire quando il prodotto tra distribuzioni è un oggetto ben definito e vedremo come sia possibile deformare ulteriormente il prodotto star da noi costruito affinché la divergenza in (1.3.30) sia eliminata.

Per poter proseguire nella costruzione della nostra algebra delle osservabili e nella risoluzione dei problemi appena incontrati, dobbiamo ora analizzare nel dettaglio alcune proprietà delle distribuzioni trattate nell'ambito dell'analisi microlocale, proprietà che costituiscono l'argomento della prossima sezione.

1.3.4 Wave front set e prodotto di distribuzioni

In questa sezione vedremo come caratterizzare il comportamento singolare di una distribuzione e un criterio che consenta di definire in modo corretto il prodotto tra due distribuzioni (si veda, ad esempio, l'introduzione a [BF00] o [Hör03] per maggiori dettagli).

Consideriamo una distribuzione $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, ovvero una distribuzione a supporto compatto. Dall'analisi standard sulle distribuzioni, sappiamo che la trasformata di Fourier di una distribuzione in \mathcal{E}' può essere ottenuta calcolandone il pairing usuale sulla funzione e^{-ikx} . Inoltre, sappiamo che la trasformata di Fourier di una distribuzione a supporto compatto è una funzione analitica che presenta una crescita al più polinomiale in k per grandi k . Infine, risulta noto anche il fatto che nel caso in cui $u \in \mathcal{E}'$ sia anche una funzione liscia ($u \in \mathcal{D}$) allora la sua trasformata sarà a *decrescenza rapida* nel senso seguente:

Definizione 7 (Decrescenza rapida). Diremo che k_0 è una direzione di *decrescenza rapida* per u se esiste un intorno conico Γ di k_0 ⁵ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esista una costante C_n per cui valga:

$$|\hat{u}(k)| \leq C_n(1 + |k|)^{-n} \quad \forall k \in \Gamma. \quad (1.3.32)$$

Se una distribuzione $u \in \mathcal{E}'$ non è anche una funzione liscia, la sua trasformata di Fourier non è a decrescenza rapida in ogni direzione. Pertanto, lo studio delle direzioni in cui $\hat{u}(k)$ non decresce rapidamente fornisce informazioni quantitative sul comportamento singolare di u .

Passiamo ora a considerare il caso più generale in cui $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, ovvero la distribuzione non sia a supporto compatto. In tal caso la trasformata di u non può essere calcolata facendo agire u su e^{-ikx} , in quanto l'esponenziale complesso non è una funzione a supporto compatto. Tuttavia, noi siamo interessati a studiare ed isolare il comportamento singolare di u in un punto $x \in \mathbb{R}^n$. Per questo motivo, dobbiamo localizzare la distribuzione u moltiplicandola per una funzione $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ che non si annulli in x ($f(x) \neq 0$) e studiare l'insieme delle direzioni a decrescita rapida di \widehat{fu} . La richiesta che $f(x) \neq 0$ serve ad evitare di perdere informazioni sul comportamento singolare di u in x . In generale infatti, se indichiamo con $\Sigma(u)$ il complementare dell'insieme delle direzioni di decrescenza rapida di una distribuzione $u \in \mathcal{E}'$ e con $g \in \mathcal{D}$ una generica funzione a supporto compatto, è possibile dimostrare la seguente relazione:

$$\Sigma(gu) \subset \Sigma(u). \quad (1.3.33)$$

Ciò indica il fatto che nel localizzare una distribuzione $u \in \mathcal{D}'$ moltiplicandola per una funzione a supporto compatto f possa andare perduto il comportamento singolare di u in un punto x , nel caso in cui f venga scelta nel modo sbagliato, ovvero nel caso in cui $f(x) = 0$. Alla luce di tutto ciò risulta chiaro il significato e la motivazione della seguente importante definizione:

Definizione 8 (Wave front set). Sia data $u \in \mathcal{D}'$ una generica distribuzione ed una coppia $(x, k_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. k_0 è una direzione regolare di u in x se esiste una funzione $f \in \mathcal{C}_0^\infty$, con $f(x) \neq 0$, tale per cui k_0 sia una direzione di decrescenza rapida per la distribuzione

⁵Un intorno Γ di $k_0 \in \mathbb{R}^n$ è detto *conico* se $k \in \Gamma$ implica $\lambda k \in \Gamma$ per qualunque $\lambda \in (0, +\infty)$.

$fu \in \mathcal{E}'$. Sia $\Sigma_x(u)$ il complementare delle direzioni regolari di u in x .

Il *wave front set* di u è il complementare dell'insieme contenente tutte le direzioni regolari di u , ovvero:

$$WF(u) := \{(x, k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mid k \in \Sigma_x(u)\}. \quad (1.3.34)$$

dove con $\{0\}$ indichiamo la sezione nulla del fibrato cotangente $T^*\mathcal{M}$.

È importante notare come la definizione di wave front set possa essere estesa al caso di distribuzioni definite su una generica varietà \mathcal{M} . In tal caso, esso sarà definito come un sottoinsieme del fibrato cotangente $T^*\mathcal{M}$ mediante una definizione covariante sotto trasformazioni di coordinate.

Per ciò che riguarda i nostri scopi, siamo interessati a capire come lo studio del WF di due distribuzioni sia collegato alla possibilità di definirne il prodotto puntuale. Se $u, v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ sono due distribuzioni, si definisce la somma dei loro wave front set nel modo seguente:

$$WF(u) + WF(v) := \{(x, k + k') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mid (x, k) \in WF(u), (x, k') \in WF(v)\}. \quad (1.3.35)$$

Possiamo ora enunciare il criterio che stabilisce quando il prodotto di due distribuzioni è un oggetto ben definito (si veda per maggiori dettagli [Hör03], Teorema 8.2.10).

Proposizione 1 (Criterio di Hörmander). Date due distribuzioni $u, v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, se la somma dei loro wave front set non interseca la sezione zero, ovvero se per $\forall x$ si ha $(x, k) \in WF(u) \implies (x, -k) \notin WF(v)$, è ben definito il prodotto uv e vale:

$$WF(uv) \subset (WF(u) \cup \{0\}) + (WF(v) \cup \{0\}) \setminus \{0\}. \quad (1.3.36)$$

Possiamo ora comprendere in modo rigoroso le origini della divergenza incontrata in (1.3.30). Lo studio del WF del propagatore causale $\Delta(x, y)$ mostra infatti che il prodotto puntuale di tale distribuzione con se stessa non soddisfa il criterio di Hörmander. Per questo motivo, non è a priori garantito il fatto che tale prodotto sia ben definito e, ciò che in effetti succede, è che non esiste un modo per definirlo correttamente. Il nostro obiettivo sarà dunque quello di cercare una nuova classe di distribuzioni che possa essere utilizzata al posto di $i\frac{\Delta}{2}$ per ridefinire il prodotto \star . Tali distribuzioni dovranno possedere un wave front set che consenta di definirne una generica potenza in accordo con il criterio di Hörmander, ma, allo stesso tempo, dovranno continuare a valere le relazioni di commutazione canoniche a livello algebrico. Nella prossima sezione, scopriremo che tali distribuzioni non sono altro che le funzioni a due punti di una particolare classe di stati, ovvero gli *stati di Hadamard*.

1.3.5 Stati di Hadamard

Iniziamo questa sezione riconsiderando il procedimento di regolarizzazione definito in (1.3.29). Come già osservato, la sottrazione della funzione a due punti del vuoto al prodotto di due campi consente di ottenere dei valori di aspettazione finiti quando si calcola il valor medio di osservabili locali su tutti quegli stati ω che possiedono le stesse divergenze dello stato di vuoto ω_0 . Per capire quali siano questi stati, è utile considerare la seguente espressione che può essere ricavata per $\Delta_+(x, y)$:

$$\Delta_+(x, y) = \frac{1}{8\pi^2} \left[\frac{1}{(x-y)^2 + i\epsilon(x-y)_0} + V(x, y) \log \left(\frac{(x-y)^2 + 2i\epsilon(x-y)_0}{2\lambda^2} \right) + W(x, y) \right], \quad (1.3.37)$$

dove V, W sono due funzioni lisce e λ è una lunghezza di scala. Nel caso di campi a massa nulla la funzione V si annulla e Δ_+ possiede una sola singolarità.

La definizione di *stato di Hadamard* che stiamo per dare costituisce dunque una generalizzazione su una generica varietà \mathcal{M} dello stato di vuoto dello spazio-tempo di Minkowski.

Definizione 9 (Stati di Hadamard I). Uno stato *quasi libero* ω (si veda la sezione (1.2.1) per la definizione) è detto *stato di Hadamard* se per ogni $\bar{x} \in \mathcal{M}$ esiste un intorno *geodeticamente convesso* \mathcal{O}^6 di \bar{x} in cui la funzione a due punti dello stato possa essere scritta nel modo seguente:

$$\omega_2(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \left[\frac{U(x, y)}{\sigma_\epsilon(x, y)} + V(x, y) \log\left(\frac{\sigma_\epsilon(x, y)}{\lambda^2}\right) + W(x, y) \right] := H(x, y) + W(x, y), \quad (1.3.38)$$

Dove:

- $\sigma_\epsilon(x, y) := \sigma(x, y) + 2i\epsilon(x_0 - y_0)$, con $\sigma(x, y)$ la *Synge's world function*, ovvero la metà del quadrato della distanza geodetica tra i punti x, y presa con il suo segno (positivo per intervalli di tipo spazio, negativo per intervalli di tipo tempo). Osserviamo che nel caso dello spazio-tempo di Minkowski la distanza geodetica si riduce all'usuale definizione:

$$\sigma^{Mink}(x, y) = \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} (x - y)^\mu (x - y)^\nu, \quad (1.3.39)$$

in accordo con l'espressione fornita in (1.3.37) per la funzione a due punti del vuoto.

- λ è una lunghezza di scala arbitraria introdotta per rendere adimensionato l'argomento del logaritmo.
- Le funzioni U, V, W sono funzioni lisce delle variabili x, y .

La definizione di stati di Hadamard può essere estesa anche al caso di stati non gaussiani, richiedendo che le funzioni ad n -punti troncate, con $n > 2$, siano funzioni lisce. Tuttavia, in quanto gli stati studiati all'interno di questa tesi sono tutti stati Gaussiani, la definizione (9) risulta essere sufficiente per i nostri scopi.

Le funzioni U, V possiedono una caratteristica di fondamentale importanza. È infatti possibile mostrare che la funzione U risulta essere completamente determinata dalle proprietà geometriche della varietà \mathcal{M} , mentre la funzione V viene fissata dalle proprietà geometriche e dal parametro di massa m che compare nelle equazioni del moto. Una dimostrazione di questo fatto è riportata nell' "Appendice A". L'unica parte della funzione a due punti che dipende dalle proprietà particolari dello stato considerato è dunque la funzione liscia $W(x, y)$. In questo senso, dunque, gli stati di Hadamard generalizzano al caso di una varietà qualsiasi l'idea di "divergenze comuni" considerata per rendere efficace il processo di regolarizzazione analizzato nel caso di spazio-tempo piatto. Il prodotto regolarizzato sarà dunque implementato sugli spazi curvi sottraendo al prodotto locale di campi la funzione a due punti di uno stato di Hadamard, rendendo in questo modo finito il valore di aspettazione di tali osservabili su questa categoria di stati.

Ai fini del lavoro di tesi è importante sottolineare che, sullo spazio-tempo di Minkowski, oltre allo stato di vuoto ω_0 , anche gli stati KMS descritti nella sezione precedente sono stati di Hadamard. Questo fatto può essere dimostrato mostrando che la differenza $\omega_2^\beta(x, y) - \Delta_+(x, y)$ è una funzione liscia.

Fino ad ora non abbiamo detto ancora nulla riguardo alle proprietà del wave front set degli stati di Hadamard. A riguardo, esiste un importante teorema dimostrato da Radzikowski in [Rad96], il quale può essere enunciato nel modo seguente:

⁶Un intorno \mathcal{O} di \bar{x} è detto geodeticamente convesso se dati due qualunque punti $x, y \in \mathcal{O}$ esiste una geodetica che li collega e che sia totalmente contenuta in \mathcal{O} .

Proposizione 2 (Stati di Hadamard II). Gli stati di Hadamard definiti secondo la Definizione 9 sono tutti e soli queglii stati ω quasi liberi le cui funzioni a due punti ω_2 verificano la seguente condizione sul wave front set (nota come *condizione di spettro microlocale*):

$$WF(\omega_2(x, y)) = \left\{ (x, y; k_x, k_y) \in T^*M^2 \setminus \{0\} \mid (x, k_x) \sim (y, -k_y), k_x \triangleright 0 \right\}, \quad (1.3.40)$$

Dove:

- Il simbolo di equivalenza \sim indica il fatto che i punti x, y sono collegati da una geodetica di tipo null e il vettore tangente $-g^{-1}k_y$ è ottenuto trasportando il vettore tangente $g^{-1}k_x$ parallelamente lungo la geodetica stessa.⁷
- La notazione $k_x \triangleright 0$ significa che il vettore $g^{-1}k_x$ è diretto nel futuro.

Senza soffermarci sugli aspetti tecnici della precedente proposizione, ciò che a noi interessa è il fatto che la condizione di spettro microlocale garantisce che le funzioni a 2-punti degli stati di Hadamard soddisfino il criterio di Hörmander e possano essere dunque moltiplicate puntualmente. Questo fatto deriva dalla presenza della condizione $k_x \triangleright 0$ che, selezionando solo i contributi a frequenza positiva, evita che la somma di due vettori direzionali appartenenti al WF della distribuzione ω_2 possa annullarsi. Abbiamo dunque capito che tali funzioni a due punti costituiscono un buon candidato per ridefinire il prodotto \star in modo che esso possa essere esteso anche ai funzionali locali. Il modo in cui ciò viene realizzato è presentato nella prossima sezione.

1.3.6 L'algebra delle osservabili: Funzionali microcausali

L'algebra dei funzionali regolari dotata del prodotto star $(\mathcal{F}_{reg}, \star)$ costituisce una realizzazione concreta dell'algebra astratta descritta nella Sezione 1.2.1. Infatti, i funzionali lineari Φ_f che generano tale algebra soddisfano la proprietà di linearità richiesta per i *campi lisciati* come conseguenza diretta della linearità degli integrali. Inoltre, la richiesta che le *configurazioni di campo* siano funzioni a valori reali equivale alla richiesta che i *campi lisciati* siano reali. Infine, come verificato in (1.3.17), il prodotto star implementa le relazioni di commutazione desiderate a livello algebrico. L'unica differenza rispetto all'algebra descritta nella Sezione 1.2.1 consiste nel fatto che gli elementi di $(\mathcal{F}_{reg}, \star)$ non soddisfano necessariamente le equazioni del moto, ovvero costituiscono una realizzazione concreta dei campi off-shell. Come già anticipato, però, la scelta di non implementare le equazioni del moto a livello algebrico risulta vantaggiosa nel momento in cui si vuole estendere la teoria al caso dei campi interagenti.

Giunti a questo punto possediamo tutti gli strumenti necessari per costruire un'estensione dell'algebra dei funzionali regolari \mathcal{F}_{reg} , in modo tale da poter trattare anche i funzionali locali senza incorrere nelle divergenze descritte nelle sezioni precedenti.

Come visto in (1.3.30) l'origine delle divergenze nel calcolo del prodotto \star di osservabili locali:

$$\Phi_f^2 \star \Phi_g^2, \quad (1.3.41)$$

è dovuta alla comparsa del quadrato del propagatore causale. Tale oggetto, come osservato alla fine della Sezione 1.3.4, non può essere definito correttamente.

Per risolvere questo problema, deformiamo ulteriormente il prodotto \star da noi definito. In particolare, il nuovo prodotto non commutativo \star_ω sarà definito in modo analogo a quanto

⁷I vettori tangenti sono ottenuti da quelli cotangenti facendo agire su di essi l'inverso della metrica g .

visto in (1.3.13), ma sostituendo il propagatore causale Δ con la funzione a due punti ω_2 di uno *stato di Hadamard* ω . Avremo dunque:

$$F \star_\omega G := F \cdot G + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \langle F^{(n)}, \omega_2^{\otimes n} G^{(n)} \rangle := \mathcal{M} e^{\Gamma_\omega} F \otimes G, \quad (1.3.42)$$

dove \mathcal{M} e Γ sono definiti come in precedenza. Dobbiamo ora chiederci se la deformazione applicata alla definizione di prodotto star abbia degli effetti sulle relazioni di commutazione soddisfatte a livello algebrico. Calcoliamo dunque la seguente espressione:

$$\Phi_f \star_\omega \Phi_g - \Phi_g \star_\omega \Phi_f = \Phi_f \Phi_g + \omega_2(f, g) - \Phi_g \Phi_f - \omega_2(g, f) = i\Delta(f, g), \quad (1.3.43)$$

Nell'ultimo passaggio è stato utilizzato il fatto che la parte antisimmetrica di uno stato è per definizione fissata ad essere uguale ad $\frac{i}{2}$ volte il propagatore causale dell'equazione di campo. Abbiamo dunque verificato che il nuovo prodotto \star_ω preserva le relazioni di commutazione che vogliamo siano implementate nell'algebra delle osservabili. Se ora consideriamo il prodotto tra due funzionali locali come quello studiato in (1.3.30), ma calcolato con il nuovo prodotto \star_ω , otterremo il seguente risultato:

$$\begin{aligned} \Phi_f^2 \star_\omega \Phi_g^2 &= \Phi_f^2 \cdot \Phi_g^2 + 4 \int dx_1 dx_2 f(x_1) g(x_2) \omega_2(x_1, x_2) \varphi(x_1) \varphi(x_2) - \\ &\quad 2 \int dx_1 dx_2 f(x_1) g(x_2) \omega_2^2(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (1.3.44)$$

Nel contributo al secondo ordine non compare più il quadrato del propagatore causale ma il quadrato della funzione a due punti ω_2 . Avendo richiesto che lo stato ω sia uno stato di Hadamard, per quanto visto nelle sezioni precedenti riguardo alla caratterizzazione del wave front set di tali stati, il *criterio di Hörmander* garantisce che $\omega_2^2(x_1, x_2)$ costituisca una distribuzione ben definita. In questo modo, dunque, siamo riusciti a definire correttamente un prodotto non commutativo che implementa le relazioni di commutazione e sia applicabile anche ad i funzionali locali. Più in generale, è possibile mostrare che il prodotto \star_ω risulta essere ben definito su una classe più ampia di funzionali, ovvero i *funzionali microcausali* che indicheremo con il simbolo $\mathcal{F}_{\mu c}$. Per completezza, riportiamo la definizione di tale classe di funzionali:

Definizione 10 (Funzionali microcausali). Si definisce l'insieme dei *funzionali microcausali* $\mathcal{F}_{\mu c}$ l'insieme costituito da quei funzionali le cui derivate funzionali soddisfano la seguente condizione sul wave front set:

$$\mathcal{F}_{\mu c} = \left\{ F \in \mathcal{F} \mid WF(F^{(n)}) \cap (\bar{V}_+^n \cup \bar{V}_-^n) = \emptyset, \forall n \in \mathbb{N} \right\}, \quad (1.3.45)$$

dove con $\bar{V}_+(\bar{V}_-)$ indichiamo la chiusura dell'insieme nel fibrato cotangente $T^*\mathcal{M}$ formato dall'unione di tutti i coni luce diretti nel futuro (passato), ovvero:

$$V_\pm := \cup_{x \in \mathcal{M}} V_\pm(x) \subset T^*\mathcal{M}. \quad (1.3.46)$$

Sebbene la precedente definizione sia molto tecnica, ciò che interessa per i nostri scopi è sapere che l'insieme dei funzionali locali (e dunque tutti i prodotti locali dei campi e delle loro derivate) sono contenuti in $\mathcal{F}_{\mu c}$. Pertanto, all'interno di questo insieme è possibile costruire le densità lagrangiane di interazione che stavamo cercando di includere nella nostra costruzione.

Al fine di illustrare in modo concreto come l'utilizzo delle funzioni a due punti degli stati

di Hadamard consenta di curare le divergenze incontrate nel prodotto di funzionali locali, consideriamo l'esempio specifico in cui si utilizzi la funzione a due punti del vuoto $\Delta_+(x-y)$ per definire il prodotto star. In tal caso, nel calcolo dell'espressione ricavata in (1.3.44), compare la seguente espressione:

$$\Delta_+^2(x-y) := \frac{1}{(2\pi)^6} \int dk e^{ik^\mu(x-y)_\mu} \int dq \theta(q_0) \delta(q^2+m^2) \theta(k_0-q_0) \delta((k-q)^2+m^2), \quad (1.3.47)$$

dove il quadrato è stato definito mediante il teorema di convoluzione come in (1.3.31). A differenza di quanto avviene in (1.3.31), tuttavia, in questo caso la presenza delle funzioni θ al posto delle funzioni sign rende compatto il dominio della funzione integranda rispetto alla variabile q per qualunque valore fissato di k_0 . Il risultato dell'integrazione in dq è dunque finito e $\Delta_+^2(x-y)$ definisce correttamente una nuova distribuzione.

Per concludere questo paragrafo, vogliamo ora mostrare come la costruzione della nuova algebra $(\mathcal{F}_{\mu c}; \star_\omega)$ si ricollegli alla regolarizzazione del valore di aspettazione delle osservabili locali mediante la sottrazione del contributo divergente degli stati di Hadamard come visto nella sezione (1.3.5). Fino ad ora abbiamo capito come il prodotto star possa essere deformato per passare dall'algebra $(\mathcal{F}_{reg}, \star)$ all'algebra $(\mathcal{F}_{reg}, \star_\omega)$ e come quest'ultima algebra possa essere estesa all'algebra $(\mathcal{F}_{\mu c}, \star_\omega)$ che contiene i funzionali microcausali. Siamo ora interessati a capire come le due algebre $(\mathcal{F}_{reg}; \star)$ e $(\mathcal{F}_{reg}; \star_\omega)$ siano collegate tra loro. La risposta a questa domanda è che le due algebre sono collegate dal seguente *-isomorfismo:

$$\begin{aligned} \alpha_{\omega-\frac{i}{2}\Delta} : F \in (\mathcal{F}_{reg}; \star) &\rightarrow \alpha_{\omega-\frac{i}{2}\Delta}(F) \in (\mathcal{F}_{reg}; \star_\omega) \\ \alpha_{\omega-\frac{i}{2}\Delta}(F) &:= e^{\tilde{\Gamma}_{\omega-\frac{i}{2}\Delta}}(F), \end{aligned} \quad (1.3.48)$$

dove abbiamo definito il seguente operatore:

$$\tilde{\Gamma}_{\omega-\frac{i}{2}\Delta} := \frac{1}{2} \int dx dy (\omega_2(x, y) - \frac{i}{2} \Delta(x, y)) \frac{\delta^2}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(y)}. \quad (1.3.49)$$

Verifichiamo che $\alpha_{\omega-\frac{i}{2}\Delta}$ sia effettivamente uno *-isomorfismo. Avremo:

$$\begin{aligned} \alpha_{\omega-\frac{i}{2}\Delta}(F) \star_\omega \alpha_{\omega-\frac{i}{2}\Delta}(G)(\varphi) &= e^{\frac{1}{2} \int (\omega_2 - \frac{i}{2} \Delta) \frac{\delta^2}{\delta\varphi_1^2}} F(\varphi_1) \star_\omega e^{\frac{1}{2} \int (\omega_2 - \frac{i}{2} \Delta) \frac{\delta^2}{\delta\varphi_2^2}} G(\varphi_2) = \\ &= \left. e^{\int \omega_2 \frac{\delta}{\delta\varphi_1} \otimes \frac{\delta}{\delta\varphi_2}} e^{\frac{1}{2} \int (\omega_2 - \frac{i}{2} \Delta) \frac{\delta^2}{\delta\varphi_1^2}} e^{\frac{1}{2} \int (\omega_2 - \frac{i}{2} \Delta) \frac{\delta^2}{\delta\varphi_2^2}} F(\varphi_1) G(\varphi_2) \right|_{\varphi_1=\varphi_2=\varphi} = \\ &= \left. e^{\int (\omega_2 - \frac{i}{2} \Delta) \frac{\delta}{\delta\varphi_1} \otimes \frac{\delta}{\delta\varphi_2}} e^{\frac{i}{2} \Delta \frac{\delta}{\delta\varphi_1} \otimes \frac{\delta}{\delta\varphi_2}} e^{\frac{1}{2} \int (\omega_2 - \frac{i}{2} \Delta) \frac{\delta^2}{\delta\varphi_1^2}} e^{\frac{1}{2} \int (\omega_2 - \frac{i}{2} \Delta) \frac{\delta^2}{\delta\varphi_2^2}} F(\varphi_1) G(\varphi_2) \right|_{\varphi_1=\varphi_2=\varphi} = \\ &= e^{\frac{1}{2} \int (\omega_2 - \frac{i}{2} \Delta) \frac{\delta^2}{\delta\varphi^2}} \left(e^{\frac{i}{2} \Delta \frac{\delta}{\delta\varphi_1} \otimes \frac{\delta}{\delta\varphi_2}} F(\varphi_1) G(\varphi_2) \right) \Big|_{\varphi_1=\varphi_2=\varphi} = \alpha_{\omega-\frac{i}{2}\Delta}(F \star G)(\varphi). \end{aligned}$$

Nel passare dalla prima alla seconda riga abbiamo utilizzato l'espressione esplicita per il prodotto \star_ω mentre per ottenere l'ultima riga si è fatto uso della seguente relazione (derivante dalla regola di Leibniz):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z^2}(g(z)h(z)) &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2}[g(z)]h(z) + \frac{1}{2}g(z) \frac{\partial^2}{\partial z^2}[h(z)] + \frac{\partial}{\partial z}[g(z)] \frac{\partial}{\partial z}[h(z)] = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}[g(x)h(y)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}[g(x)h(y)] + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y}[g(x)h(y)] \Big|_{x=y=z}. \end{aligned} \quad (1.3.50)$$

Infine, per verificare che $\alpha_{\omega - \frac{i}{2}\Delta}$ sia compatibile con la proprietà $*$, ovvero che valga la seguente relazione:

$$\alpha_{\omega - \frac{i}{2}\Delta}(F^*) = e^{\frac{1}{2} \int (\omega_2 - \frac{i}{2}\Delta) \frac{\delta^2}{\delta\varphi^2} (\bar{F}(\varphi))} = \left(\alpha_{\omega - \frac{i}{2}\Delta}(F) \right)^*, \quad (1.3.51)$$

è sufficiente osservare che la condizione di positività dello stato forza la parte simmetrica della funzione a due punti $\omega_2 - \frac{i}{2}\Delta$ ad essere reale⁸.

Possiamo ora sfruttare lo $*$ -isomorfismo appena studiato per comprendere in che modo gli elementi dell'algebra estesa $(\mathcal{F}_{\mu c}; \star_\omega)$ risultino essere collegati ai prodotti locali di campi regolarizzati, ovvero come l'algebra $(\mathcal{F}_{\mu c}; \star_\omega)$ costituisca una realizzazione concreta dell'algebra \mathcal{A}_{ext} discussa nella Sottosezione 1.3.3. Consideriamo il seguente funzionale:

$$G_\epsilon = \int \varphi(x)\varphi(y)f_\epsilon(x,y)g(x,y) dx dy \in (\mathcal{F}_{\mu c}; \star_\omega), \quad (1.3.52)$$

dove f_ϵ è una approssimante della delta ($\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_\epsilon = \delta(x-y)$) *simmetrica* nelle sue variabili e $g(x,y)$ una funzione liscia e compatta, anche essa simmetrica nelle variabili. Nel limite $\epsilon \rightarrow 0$, dunque, G_ϵ diventa il funzionale locale $\Phi_{\mathcal{F}}^2$. Vediamo ora in quale funzionale di $(\mathcal{F}_{reg}; \star)$ venga mappato G_ϵ dallo $*$ -isomorfismo $\alpha_{\frac{i}{2}\Delta - \omega} = \alpha_{\omega - \frac{i}{2}\Delta}^{-1} : (\mathcal{F}; \star_\omega) \rightarrow (\mathcal{F}; \star)$:

$$\begin{aligned} \alpha_{\frac{i}{2}\Delta - \omega}(G_\epsilon) &= \int dx dy \varphi(x)\varphi(y)f_\epsilon(x,y)g(x,y) + \\ &\frac{1}{2} \int \left(\frac{i}{2}\Delta(x,y) - \omega_2(x,y) \right) f_\epsilon(x,y) (g(x,y) + g(y,x)) = \\ &\int dx dy \varphi(x)\varphi(y)f_\epsilon(x,y)g(x,y) + \\ &\int \left(\frac{i}{2}\Delta(x,y) - \omega_2(x,y) \right) f_\epsilon(x,y)g(x,y) = \\ &\int dx dy \left[\varphi(x)\varphi(y) - (\omega_2^s(x,y) + \frac{i}{2}\Delta(x,y)) \right] f_\epsilon(x,y)g(x,y) = \\ &\int dx dy [\varphi(x)\varphi(y) - \omega_2(x,y)] f_\epsilon(x,y)g(x,y). \end{aligned}$$

Nel primo passaggio abbiamo utilizzato l'espressione esplicita per la derivata funzionale seconda di G_ϵ :

$$\frac{\delta^2 G_\epsilon}{\delta\varphi^2} = f_\epsilon(x,y)(g(x,y) + g(y,x)), \quad (1.3.53)$$

mentre nella penultima riga abbiamo risommato la parte antisimmetrica della funzione a due punti dello stato sfruttando la simmetria delle funzioni f_ϵ e g (abbiamo invece indicato con $\omega_2^s(x,y) := \omega_2(x,y) - \frac{i}{2}\Delta(x,y)$ la parte simmetrica di ω_2).

In questo modo abbiamo dunque compreso come i funzionali locali presenti all'interno di $(\mathcal{F}_{\mu c}; \star_\omega)$ costituiscano una realizzazione concreta dei funzionali regolarizzati mediante la sottrazione della funzione a due punti di uno stato di Hadamard, ovvero le osservabili normal ordered rispetto alla funzione a due punti ω_2 (studiata nel dettaglio nelle sezioni precedenti). Ricordiamo che tale sottrazione consente di ricavare valori di aspettazione finiti quando le osservabili regolarizzate vengono valutate su stati di Hadamard, in quanto le funzioni a due punti di tali stati condividono le medesime divergenze.

⁸Data una funzione h a valori reali la condizione $\omega_2(h,h) \geq 0$ implica che $\omega_2(h,h)$ debba essere reale. Tuttavia, l'unico contributo che sopravvive nell'integrazione è quello derivante dalla parte simmetrica di ω_2 che, considerando h reale, dovrà essere reale.

1.3.7 Conclusioni

Riassumiamo ora brevemente il ragionamento e la procedura studiati nelle sezioni precedenti. Dopo aver definito una prima algebra delle osservabili $(\mathcal{F}_{reg}, \star)$, la necessità di trattare oggetti più generali (come i prodotti regolarizzati di *funzionali locali*) ci ha portato a ricercare un'estensione di tale algebra. Questa estensione può essere ottenuta seguendo i seguenti passaggi. Per prima cosa, il prodotto \star può essere deformato in un prodotto \star_ω ottenendo dunque una nuova algebra $(\mathcal{F}_{reg}, \star_\omega)$ che risulta essere isomorfa alla precedente. A questo punto, è possibile mostrare (facendo uso dell'*analisi microlocale* e della nozione di *stati di Hadamard*) che la nuova algebra $(\mathcal{F}_{reg}, \star_\omega)$ può essere correttamente estesa ad un'algebra più grande $(\mathcal{F}_{\mu c}, \star_\omega)$. Infine, è stato possibile verificare direttamente che l'algebra $(\mathcal{F}_{\mu c}, \star_\omega)$ costituisce una realizzazione concreta dell'algebra estesa delle osservabili \mathcal{A}_{ext} , ovvero che essa contiene al suo interno i campi normal ordered rispetto a ω ed il prodotto regolarizzato di funzionali locali non lineari.

Arrivati a questo punto, però, potrebbe sorgere spontaneo un dubbio. Mentre infatti l'algebra $(\mathcal{F}_{reg}, \star)$ inizialmente costruita permette di implementare le relazioni di commutazione utilizzando esclusivamente il propagatore causale, le nuove algebre $(\mathcal{F}_{\mu c}, \star_\omega)$ richiedono l'utilizzo della funzione a due punti di uno specifico stato di Hadamard. Tale richiesta sembrerebbe apparentemente andare contro alla nostra necessità di ottenere una formulazione della teoria indipendente dalla scelta di un particolare stato. Tuttavia, è possibile mostrare che dati due stati di Hadamard ω e $\tilde{\omega}$ le due algebre $(\mathcal{F}_{\mu c}, \star_\omega)$ e $(\mathcal{F}_{\mu c}, \star_{\tilde{\omega}})$ sono collegate mediante lo \ast -isomorfismo $\alpha_{\tilde{\omega}-\omega}$ definito in modo analogo a quanto visto in (1.3.48). Pertanto, l'unica differenza che sarà riscontrata nell'uso di differenti funzioni a due punti per definire il prodotto deformato corrisponderà ad una differente scelta di regolarizzazione dei valori di aspettazione delle osservabili.

Concludiamo questo capitolo con un'osservazione di particolare utilità pratica. Consideriamo il seguente prodotto:

$$\Phi_f \star_\omega \Phi_g = \Phi_f \cdot \Phi_g + \omega_2(f, g)\mathbb{1}. \quad (1.3.54)$$

Se calcoliamo ora il valore di aspettazione di tale prodotto sullo stesso stato ω utilizzato per definire il prodotto deformato, otterremo la seguente espressione:

$$\omega(\Phi_f \star_\omega \Phi_g) = \omega(\Phi_f \cdot \Phi_g) + \omega_2(f, g). \quad (1.3.55)$$

Osserviamo che per definizione di funzione a due punti si ha $\omega(\Phi_f \star_\omega \Phi_g) = \omega_2(f, g)$, quindi il precedente calcolo si riduce alla valutazione del prodotto \star in $\varphi = 0$. Più in generale, dati due funzionali F e G , si ha la seguente relazione:

$$\omega(F \star_\omega G) = F \star_\omega G|_{\varphi=0}, \quad (1.3.56)$$

di cui faremo ampio uso nei prossimi capitoli. La relazione (1.3.56) costituisce anche una riprova del fatto che i funzionali locali in $(\mathcal{F}_{\mu c}, \star_\omega)$ corrispondono ai funzionali regolarizzati. Il calcolo del valore di aspettazione $\omega(\Phi^2(x))$ restituirà infatti banalmente il valore 0.

D'ora in avanti, ometteremo il pedice nel simbolo \star indicante lo stato utilizzato per deformare il prodotto ogniqualvolta ciò non crei delle ambiguità.

Capitolo 2

Costruzione perturbativa della teoria interagente

Introduzione al capitolo

In questo capitolo tratteremo le teorie di campo interagenti con un approccio perturbativo nell'ambito della costruzione algebrica della QFT. Per fare ciò, inizieremo definendo e studiando un oggetto di importanza fondamentale, ovvero il *prodotto tempo ordinato*. Sfrutteremo dunque tale prodotto per ottenere una rappresentazione perturbativa dei campi interagenti all'interno dell'algebra libera descritta nel capitolo 1. Inoltre, affronteremo i problemi che sorgono nel tentativo di estendere il prodotto tempo ordinato a fattori costituiti da funzionali locali, ricollegandoli al problema particolare della costruzione delle potenze del *propagatore di Feynman*, ovvero di una particolare distribuzione utilizzata per definire il prodotto tempo ordinato. Questo tema, come vedremo, costituisce un approccio che fa uso di particolari tecniche distribuzionali alla teoria della *rinormalizzazione* normalmente utilizzata negli approcci standard alle teorie di campo. Più precisamente, in questo approccio la teoria della rinormalizzazione è ricondotta ad un problema di estensione di certe distribuzioni ad opportune sottovarietà e la libertà di rinormalizzazione classifica la non unicità di questo processo di estensione. Infine, concluderemo il capitolo fornendo un'idea della costruzione perturbativa degli stati KMS rispetto all'evoluzione temporale dei sistemi interagenti.

2.1 Il prodotto tempo ordinato

In questo capitolo vogliamo capire come descrivere sistemi quantistici interagenti. In particolare, studieremo nel dettaglio il caso di un campo scalare reale la cui densità Lagrangiana assume la forma seguente:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi(x)\partial^\mu\varphi(x) - \frac{1}{2}m^2\varphi(x)^2 - \lambda\frac{\varphi^n}{n} := \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int}, \quad (2.1.1)$$

dove con \mathcal{L}_0 indichiamo il termine di densità Lagrangiana libera, ovvero la parte quadratica nei campi.

In generale, non è quasi mai possibile costruire soluzioni esatte dell'equazione di campo classica interagente e, anche per questo motivo, la costruzione diretta dei campi quantistici interagenti è generalmente preclusa. Di conseguenza, ciò che normalmente viene fatto negli approcci tradizionali è ricavare tali soluzioni e, dunque, le relative versioni quantizzate, in modo perturbativo. Noi vogliamo dunque generalizzare e formalizzare questa idea

nel contesto della teoria di campo algebrica. In particolare, il nostro obiettivo è quello di trovare un modo per rappresentare perturbativamente le osservabili della teoria interagente all'interno dell'algebra libera, identificata nel capitolo precedente con l'algebra dei funzionali microcausali $(\mathcal{F}_{\mu c}, \star_{\omega}, *)$. Per fare ciò, abbiamo bisogno di definire ed utilizzare uno strumento di fondamentale importanza per la teoria, ovvero il *prodotto tempo ordinato* (\cdot_T) (per una trattazione approfondita di quanto segue si veda ad esempio [Rej16]).

Iniziamo caratterizzando il prodotto tempo ordinato richiedendo che esso soddisfi le due seguenti proprietà:

- Il prodotto tempo ordinato è simmetrico.
- Date due osservabili regolari F e G i cui supporti siano legati dalla seguente relazione di causalità:

$$J^+(SuppF) \cap J^-(SuppG) = \emptyset, \quad (2.1.2)$$

deve valere la seguente relazione:

$$F \cdot_T G = F \star G. \quad (2.1.3)$$

La condizione sul supporto dei funzionali (2.1.2) equivale a richiedere che il funzionale F non sia casualmente connesso al funzionale G oppure che esso si trovi nel futuro causale di G . Indicheremo tale condizione con la notazione $F \succeq G$.

In figura sono illustrate graficamente due situazioni in cui i funzionali F e G rispettano la relazione $F \succeq G$, nel caso particolare in cui la teoria di campo sia costruita sullo spazio-tempo di Minkowski. Per capire come costruire esplicitamente il prodotto T-ordinato, consideriamo nello specifico il prodotto $\varphi(x) \cdot_T \varphi(y)$. Sono dunque possibili le due seguenti possibilità:

1. Se $x \succeq y$ deve valere $\varphi(x) \cdot_T \varphi(y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y) + \frac{i}{2} \Delta(x, y)$.
2. Se $y \succeq x$ deve valere $\varphi(x) \cdot_T \varphi(y) = \varphi(y) \cdot \varphi(x) + \frac{i}{2} \Delta(y, x)$.

Osserviamo che nel caso in cui x e y non siano causalmente connessi, valgono contemporaneamente le relazioni $x \succeq y$ e $y \succeq x$. Tuttavia, ciò non costituisce una contraddizione in quanto in tal caso il propagatore causale si annulla per via delle proprietà sul suo supporto (studiate nel precedente capitolo nella Sezione 1.1) ed il prodotto T-ordinato si riduce dunque al prodotto puntuale, il quale è per definizione simmetrico.

Utilizzando la relazione $\Delta(x, y) = \Delta_R(x, y) - \Delta_A(x, y)$ e le proprietà di supporto dei propagatori avanzato e ritardato le due precedenti condizioni possono essere riscritte nel modo seguente:

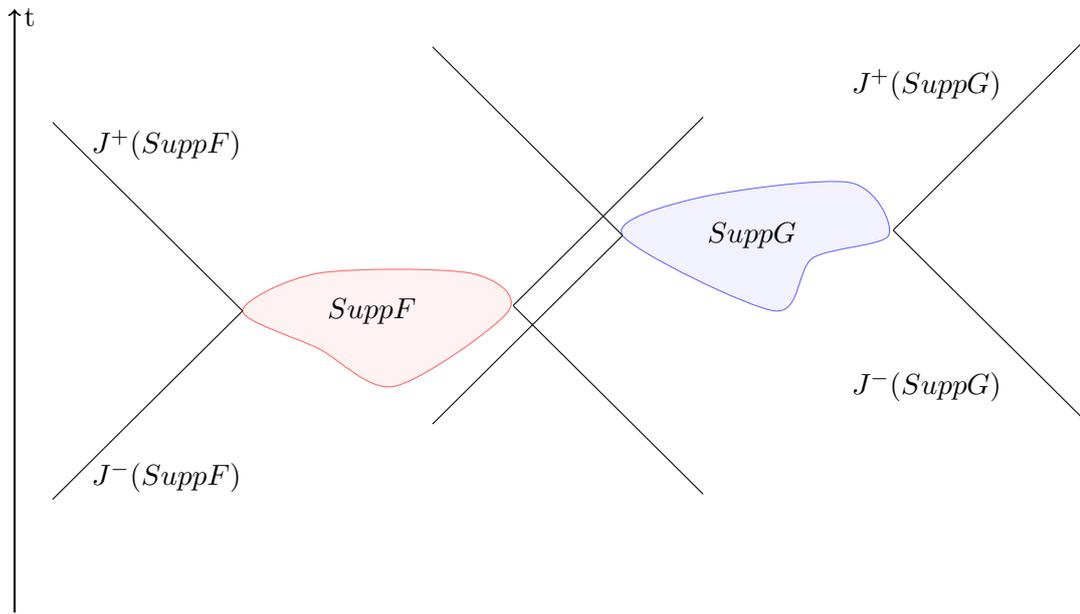
1. Se $x \succeq y$ vale $\varphi(x) \cdot_T \varphi(y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y) + \frac{i}{2} \Delta_R(x, y)$.
2. Se $y \succeq x$ vale $\varphi(x) \cdot_T \varphi(y) = \varphi(y) \cdot \varphi(x) + \frac{i}{2} \Delta_R(y, x) = \varphi(y) \cdot \varphi(x) + \frac{i}{2} \Delta_A(x, y)$.

Se ora definiamo il *propagatore di Dirac* $\Delta_D(x, y)$ come la media tra il propagatore ritardato e quello avanzato:

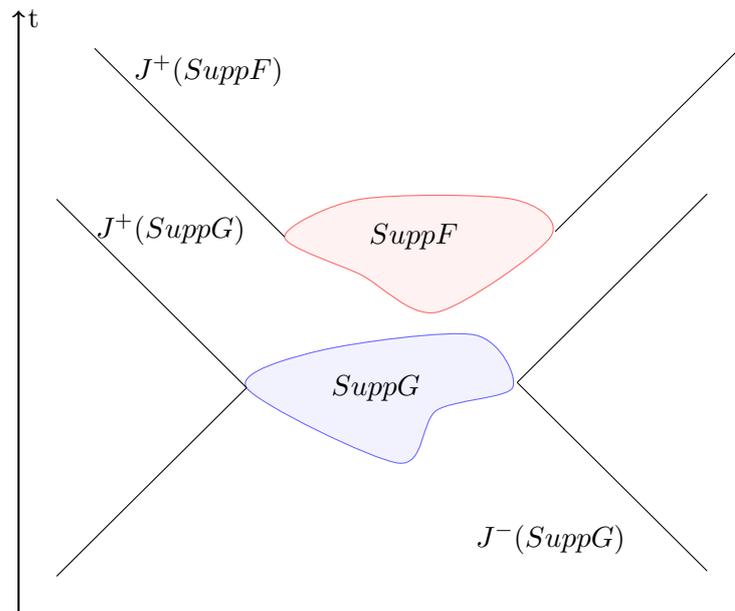
$$\Delta_D(x, y) = \frac{\Delta_R(x, y) + \Delta_A(x, y)}{2} = \begin{cases} \frac{\Delta_R}{2}(x, y) & \text{se } x \succeq y, \\ \frac{\Delta_R}{2}(y, x) & \text{se } y \succeq x, \end{cases} \quad (2.1.4)$$

otteniamo la seguente espressione per il prodotto tempo ordinato relativo al prodotto \star :

$$F \cdot_T G := \mathcal{M} e^{\Gamma i \Delta_D} F \otimes G \quad \text{con } F, G \in (\mathcal{F}_{reg}, \star), \quad (2.1.5)$$



(a)



(b)

Figura 2.1.1: In figura (a) sussiste la relazione $F \gtrsim G$ poiché F e G non sono causalmente connessi. In figura (b), invece, si ha $F \gtrsim G$ in quanto $SuppF$ si trova nel futuro causale di $SuppG$. In entrambi i casi vale la relazione $J^+(SuppF) \cap J^-(SuppG) = \emptyset$.

con gli operatori \mathcal{M} e Γ definiti come nel capitolo 1.

Osserviamo che è sempre possibile aggiungere una funzione simmetrica al propagatore di Dirac senza modificare le richieste di simmetria sul prodotto tempo ordinato. Nel Capitolo 1, al fine di implementare a livello algebrico la regolarizzazione dei prodotti di funzionali locali, è stato mostrato come le due algebre $(\mathcal{F}_{reg}, \star)$ e $(\mathcal{F}_{reg}, \star_\omega)$ siano tra loro isomorfe (si veda in particolare la Sottosezione 1.3.6). Per costruire un prodotto tempo ordinato che sia compatibile con il prodotto non commutativo definito sull'algebra $(\mathcal{F}_{reg}, \star_\omega)$ modifichiamo dunque la seconda proprietà imposta su tale prodotto richiedendo che valga piuttosto:

$$F \cdot_T G = F \star_\omega G \text{ se } J^+(SuppF) \cap J^-(SuppG) = \emptyset. \quad (2.1.6)$$

Per implementare questa condizione dobbiamo semplicemente sostituire il propagatore di Dirac in (2.1.5) con il *propagatore di Feynman relativo a ω_2* così definito:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'(\mathcal{M} \times \mathcal{M}) \ni \Delta^F(x, y) &:= i\Delta_D(x, y) + \omega_2^s(x, y) = \omega_2(x, y) - \frac{i}{2}\Delta(x, y) + i\frac{\Delta_R(x, y) + \Delta_A(x, y)}{2} = \\ \omega_2(x, y) - i\frac{\Delta_R(x, y) - \Delta_A(x, y)}{2} &+ i\frac{\Delta_R(x, y) + \Delta_A(x, y)}{2} = \omega_2(x, y) + i\Delta_A(x, y), \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

dove, come di consueto, con $\omega_2(x, y)$ abbiamo indicato la funzione a due punti di uno stato di Hadamard e con $\omega_2^s(x, y)$ la sua parte simmetrica. Possiamo pertanto ridefinire il prodotto tempo ordinato nel modo seguente:

$$F \cdot_T G := \mathcal{M} e^{\Gamma \Delta^F} F \otimes G, \quad F, G \in (\mathcal{F}_{reg}, \star_\omega). \quad (2.1.8)$$

Nel caso particolare in cui come stato di Hadamard venga utilizzato il vuoto di Minkowski, il propagatore di Feynman così ottenuto $(\Delta_0^F(x, y))$ coincide con quello usualmente incontrato nei corsi di fisica *a meno di un fattore i* :

$$\Delta_0^F(x, y) = \Delta_+(x, y) + i\Delta_A(x, y). \quad (2.1.9)$$

Il propagatore di Feynman da noi definito costituisce una distribuzione su tutta la varietà $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$, in quanto somma di distribuzioni ben definite su tale varietà. Per questo motivo, ad esempio, il prodotto tempo ordinato tra due campi regolari $\varphi(x) \cdot_T \varphi(y)$ costituisce un oggetto ben definito per qualunque coppia $(x, y) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}$. Anticipando ciò che sarà studiato nei prossimi paragrafi, l'azione della distribuzione Δ^F può essere definita univocamente su una coppia qualunque di funzioni $f, g \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$ i cui supporti abbiano un'intersezione non nulla $(Supp(f) \cap Supp(g) \neq \emptyset \in \mathcal{M} \times \mathcal{M})$ e, di conseguenza, $Supp(f \otimes g)$ intersechi la diagonale $(x, x) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}$. Pertanto, il prodotto tempo ordinato risulta essere ben definito all'interno dell'algebra $(\mathcal{F}_{reg}, \star_\omega)$ delle *osservabili regolari*. La costruzione appena studiata, tuttavia, fissa il prodotto tempo ordinato tra due *osservabili locali* non lineari ovunque tranne che sulla diagonale. Quando infatti si tenta di definire una generica potenza del propagatore di Feynman (necessaria per calcolare il prodotto tempo ordinato tra funzionali locali generici) su tutto lo spazio si ottengono delle quantità mal definite e divergenti. L'idea corretta è dunque quella di definire le potenze del propagatore di Feynman come distribuzioni su tutto lo spazio meno la diagonale ed estendere solo in seguito tali distribuzioni ai punti $x = y$. Tuttavia, questa procedura di estensione soffre di una ambiguità nella scelta dell'estensione stessa. Tale ambiguità, che corrisponde di fatto all'usuale *libertà di rinormalizzazione*, verrà studiata nel seguito del capitolo (Sezione 2.4).

Osserviamo infine come la procedura di estensione del prodotto tempo ordinato possa

essere applicata esclusivamente al caso dei *funzionali locali* e non a quello più generale dei *funzionali microcausali*. Se si tenta infatti di estendere il prodotto tempo ordinato ai funzionali non locali (contenuti nell'insieme dei funzionali microcausali) si ottengono delle divergenze che non possono essere risolte in alcun modo. Ciò, tuttavia, non costituisce una limitazione significativa, in quanto le Lagrangiane di interazione comunemente studiate sono date da funzionali locali e l'algebra delle osservabili è generata dai campi locali.

Per il momento, siamo interessati a capire come il prodotto tempo ordinato possa essere utilizzato per ottenere una rappresentazione dei campi interagenti all'interno dell'algebra delle osservabili liberi, assumendo di aver già risolto i problemi legati alla rinormalizzazione.

2.2 La formula di Bogoljubov

Il nostro obiettivo consiste ora nel trovare un modo per trattare le teorie di campo interagenti mediante un approccio perturbativo. In generale, infatti, non è possibile costruire un'algebra delle osservabili analoga a quella ottenuta nel capitolo precedente quando nella densità Lagrangiana figurino dei termini di interazione. Ciò che intendiamo pertanto fare è trovare un modo per rappresentare i campi interagenti all'interno dell'algebra delle osservabili liberi ($\mathcal{F}_{\mu c, \star \omega, *}$) sotto forma di serie formali nel parametro di accoppiamento λ .

Iniziamo introducendo la *Lagrangiana di interazione* V come la densità Lagrangiana definita in (2.1.1) lasciata integrandola con un cutoff spatio-temporale $f \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$. Ciò consente di definire correttamente il seguente funzionale:

$$V := -\frac{\lambda}{n} \int d^4x f(x) \varphi^n(x) \in \mathcal{F}_{loc}. \quad (2.2.1)$$

Come vedremo, in alcuni casi la parte spaziale del cut-off f potrà poi essere rimossa, calcolando così quello che viene comunemente chiamato il *limite adiabatico*.

Utilizzando il prodotto T-ordinato studiato nella sezione precedente (e assumendo che esso possa essere esteso ai funzionali locali) possiamo ora definire l'esponenziale tempo ordinato della Lagrangiana di interazione nel modo seguente:

$$S(V) := \sum_{n \geq 0} \frac{i^n}{n!} (V \cdot_T \dots \cdot_T V)_{n \text{ volte}} = T(e^{iV}), \quad (2.2.2)$$

dove con la notazione $T(A, B)$ indichiamo il prodotto tempo ordinato di due generiche osservabili A e B . La serie presente nella definizione (2.2.2) deve essere interpretata come una *serie formale di potenze* nel parametro di accoppiamento λ . In generale, infatti, la convergenza di tale serie non è garantita e, al contrario, in numerose situazioni fisiche di interesse essa presenta un comportamento divergente. Questo problema viene generalmente superato assumendo che i risultati fisici ottenuti mediante l'approccio perturbativo possano essere interpretati come *serie asintotiche*.

La matrice $S(V)$ appena definita può essere utilizzata per ottenere la rappresentazione di un'osservabile della teoria interagente come serie formale di potenze in λ i cui coefficienti sono elementi contenuti all'interno dell'algebra libera. Tale rappresentazione prende il nome di *formula di Bogoljubov* ed è così definita:

$$R_V(F) := -i \left. \frac{d}{d\alpha} S(V)^{-1} \star S(V + \alpha F) \right|_{\alpha=0} = S(V)^{-1} \star (S(V) \cdot_T F). \quad (2.2.3)$$

La formula di Bogoljubov può essere applicata ad un funzionale locale qualsiasi $F \in \mathcal{F}_{loc}$ o a prodotti tempo ordinati di funzionali locali $F_1 \cdot_T \dots \cdot_T F_n$, con $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}_{loc}$. È importante notare che il prodotto \star (costruito con la funzione a due punti di uno stato di Hadamard) ed il prodotto \cdot_T , sebbene siano singolarmente associativi, non lo sono mutualmente. Inoltre, specifichiamo che la notazione $S^{-1}(V)$ indica l'inverso della matrice S rispetto al prodotto \star e non al prodotto tempo ordinato. Possiamo ottenere un'espressione esplicita per $S^{-1}(V)$ imponendo che valga:

$$S^{-1}(V) \star S(V) = \mathbb{1}, \quad (2.2.4)$$

ed espandendo $S^{-1}(V)$ in potenze positive di V :

$$S^{-1}(V) = \Lambda_0 + \Lambda_1 + \Lambda_2 + \dots \quad (2.2.5)$$

Combinando la (2.2.4) con la (2.2.5) otteniamo la seguente equazione:

$$\Lambda_0 \star \mathbb{1} + \Lambda_1 \star \mathbb{1} + i\Lambda_0 \star V + \Lambda_2 \star \mathbb{1} + i\Lambda_1 \star V - \Lambda_0 \star \left(\frac{V \cdot_T V}{2} \right) + \dots = \mathbb{1}. \quad (2.2.6)$$

Risolviendo tale equazione in modo ricorsivo e filtrando i termini nelle varie potenze di V si ottengono le seguenti espressioni per gli addendi dell'espansione in serie di $S^{-1}(V)$:

$$\begin{aligned} \Lambda_0 &= \mathbb{1}, & (2.2.7) \\ \Lambda_1 &= -iV, \\ \Lambda_2 &= -V \star V + \frac{V \cdot_T V}{2}, \\ &\dots \end{aligned}$$

che risulteranno utili nel seguito.

Studiando l'evoluzione temporale dei campi interagenti in rappresentazione di interazione è possibile mostrare in modo intuitivo il fatto che $R_V(\Phi_g)$ costituisce effettivamente una rappresentazione di un campo della teoria interagente. Noi ora vogliamo invece verificare in che modo $R_V(\Phi_g)$ costituisca effettivamente una soluzione delle equazione di campo interagente. Iniziamo considerando la seguente espressione:

$$R_V(\Phi_{Pg}), \quad (2.2.8)$$

dove con P indichiamo l'usuale operatore differenziale $P = \square - m^2$ che compare nelle equazioni di campo classiche della teoria libera. Per la definizione data in (2.2.3) avremo:

$$R_V(\Phi_{Pg}) = S^{-1}(V) \star (S(V) \cdot_T \Phi_{Pg}). \quad (2.2.9)$$

Utilizziamo ora le espressioni esplicite dei funzionali e delle loro derivate. Si ha:

$$\Phi_{Pg} = \int d^4x \varphi(x) P_x g(x) \ ; \ \frac{\delta \Phi_{Pg}}{\delta \varphi} = P_x g(x), \quad (2.2.10)$$

e:

$$S(V) = \mathbb{1} + iV - \frac{V \cdot_T V}{2} + \dots \quad \text{e} \quad \frac{\delta S(V)}{\delta \varphi} = i \frac{\delta V}{\delta \varphi} - V \cdot_T \frac{\delta V}{\delta \varphi} + \dots = iS(V) \cdot_T \frac{\delta V}{\delta \varphi}. \quad (2.2.11)$$

Esplicitiamo ora il prodotto tempo ordinato che compare in (2.2.9):

$$S(V) \cdot_T \Phi_{Pg} = S(V) \cdot \Phi_{Pg} + \left\langle \frac{\delta S(V)}{\delta \varphi(x)}, \Delta^F(x, y) \frac{\delta \Phi_{Pg}}{\delta \varphi(y)} \right\rangle. \quad (2.2.12)$$

Il pairing $\langle \dots \rangle$ può essere riscritto nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\delta S(V)}{\delta \varphi(x)}, \Delta^F(x, y) \frac{\delta \Phi_{Pg}}{\delta \varphi(y)} \right\rangle &= iS(V) \cdot_T \int \int d^4x d^4y \frac{\delta V}{\delta \varphi(x)} \Delta^F(x, y) P_y g(y) = \\ &- S(V) \cdot_T \int d^4x \frac{\delta V}{\delta \varphi(x)} g(x) = -S(V) \cdot_T V^{(1)}(g). \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

Nel passare dalla prima alla seconda riga abbiamo utilizzato il fatto che $\Delta^F(x, y) = \omega_2(x, y) + i\Delta_A(x, y)$ ed il fatto che la funzione a due punti ed il propagatore avanzato soddisfano le seguenti proprietà (studiate nel precedente capitolo):

$$\int \omega_2(x, y) P_y g(y) d^4y = 0 \quad \text{e} \quad \int \Delta_A(x, y) P_y g(y) d^4y = g(x). \quad (2.2.14)$$

Se ora sostituiamo l'espressione appena trovata in (2.2.9), otteniamo:

$$R_V(\Phi_{Pg}) = S^{-1}(V) \star (S(V) \cdot \Phi_{Pg} - S(V) \cdot_T V^{(1)}(g)) = \Phi_{Pg} - R_V(V^{(1)}(g)), \quad (2.2.15)$$

e dunque:

$$R_V(\Phi_{Pg} + V^{(1)}(g)) = \Phi_{Pg}. \quad (2.2.16)$$

Abbiamo pertanto mostrato che la formula di Bogoljubov mappa le equazioni di campo interagenti off-shell nelle equazioni di campo libero. Quando valutiamo l'espressione (2.2.16) su uno stato ω che sia soluzione delle equazioni di campo libere, otteniamo il valore 0 in quanto in generale si ha:

$$\omega(\Phi_{Pg} \star A) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}_{loc}. \quad (2.2.17)$$

Pertanto $R_V(\Phi_{Pg})$ costituisce una soluzione delle equazioni di campo interagenti.

Concludiamo questo paragrafo studiando alcune importanti proprietà della formula di Bogoljubov. Dalle richieste imposte sul prodotto tempo ordinato, discende la seguente proprietà di fattorizzazione causale soddisfatta dalla matrice S :

$$S(A + B + C) = S(A + B) \star S(B)^{-1} \star S(B + C) \quad \text{se} \quad A \succeq C, \quad \forall B \in \mathcal{F}_{loc}. \quad (2.2.18)$$

Consideriamo ora due diverse Lagrangiane di interazione V_f e $V_{f'}$ le quali differiscono l'una dall'altra per via dei cutoff f ed f' . Definiamo la differenza $h := f - f'$ e, dato un'osservabile $A \in \mathcal{F}_{loc}$, assumiamo che valga la seguente proprietà causale:

$$Supp h \cap J^-(Supp A) = \emptyset, \quad (2.2.19)$$

ovvero le due interazioni coincidono nel passato causale di A . Siamo ora interessati a capire come siano legate tra loro le due rappresentazioni $R(A) := R_{V_f}(A)$ e $R'(A) := R_{V_{f'}}(A)$ dell'osservabile A ottenute mediante le due diverse Lagrangiane di interazione e le rispettive formule di Bogoljubov. Iniziamo con l'osservare che, per via della richiesta (2.2.19), varrà:

$$V_h = V_f - V_{f'} \succeq A. \quad (2.2.20)$$

Calcoliamo ora la seguente espressione:

$$\begin{aligned} S(V_f + \mu A) &= S(V_h + V_{f'} + \mu A) = \\ &S(V_h + V_{f'}) \star S(V_{f'})^{-1} \star S(V_{f'} + \mu A) = \\ &S(V_f) \star S(V_{f'})^{-1} \star S(V_{f'} + \mu A). \\ \implies S(V_f)^{-1} \star S(V_f + \mu A) &= S(V_{f'})^{-1} \star S(V_{f'} + \mu A). \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

Derivando rispetto al parametro μ e calcolando in $\mu = 0$ si ottiene dunque:

$$R(A) = R'(A) \quad \text{con } A \in \mathcal{F}_{loc}, \quad (2.2.22)$$

ovvero le due rappresentazioni dell'osservabile A coincidono se la differenza tra le interazioni si manifesta solo nel futuro dell'osservabile stessa. Nel caso particolare in cui $Supp g \cap J^-(Supp A) = \emptyset$, ovvero l'interazione si accenda solo nel futuro dell'osservabile A avremo che $R(A) = A$, cioè l'osservabile interagente coincide con quella libera.

Consideriamo ora una situazione differente in cui valga la seguente relazione:

$$Supp h \cap J^+(Supp A) = \emptyset \implies A \succeq V_h, \quad (2.2.23)$$

ovvero la differenza tra i cutoff è non nulla nel passato dell'osservabile A . Studiamo la seguente espressione:

$$\begin{aligned} S(V_f + \mu A) &= S(\mu A + V_{f'} + V_h) = \\ &= S(\mu A + V_{f'}) \star S^{-1}(V_{f'}) \star S(V_{f'} + V_h) = \\ &= S(\mu A + V_{f'}) \star S^{-1}(V_{f'}) \star S(V_f). \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

Definiamo ora il seguente operatore unitario:

$$U(f, f') := S^{-1}(V_{f'}) \star S(V_f), \quad (2.2.25)$$

e valutiamo l'espressione (2.2.24) in $\mu = 0$, ottenendo:

$$S(V_f) = S(V_{f'}) \star U(f, f'). \quad (2.2.26)$$

Moltiplicando per $S^{-1}(V_f)$ entrambi i membri dell'equazione (2.2.24) otteniamo:

$$S^{-1}(V_f) \star S(V_f + \mu A) = U^{-1}(f, f') \star S^{-1}(V_{f'}) \star S(V_{f'} + \mu A) \star U(f, f'). \quad (2.2.27)$$

Derivando rispetto al parametro μ e calcolando in $\mu = 0$ otteniamo infine:

$$R(A) = U^{-1}(f, f') \star R'(A) \star U(f, f'), \quad (2.2.28)$$

ovvero abbiamo dimostrato che le due rappresentazioni dei campi interagenti sono tra loro unitariamente equivalenti.

2.3 Calcolo grafico del valore di aspettazione di osservabili interagenti

In questo paragrafo vengono presentate ed analizzate le regole grafiche che consentono di semplificare il calcolo del valore medio di osservabili della teoria interagente (si veda ad esempio [BDP19]).

Per prima cosa, vediamo come si possa esprimere in modo compatto il prodotto star ed il prodotto tempo ordinato di n osservabili. Sfruttando la proprietà di associatività dei prodotti è possibile ricavare la seguente relazione per i prodotti \star :

$$A_1 \star \dots \star A_n = \mathcal{M} \left[e^{\sum_{1 \leq i < j \leq n} \int \omega_2(x^i - x^j) \frac{\delta}{\delta \varphi(x_i)} \otimes \frac{\delta}{\delta \varphi(x_j)} dx^i dx^j} (A_1 \otimes \dots \otimes A_n) \right], \quad A_i \in \mathcal{F}_{loc}, \quad (2.3.1)$$

dove, come di consueto, con il simbolo $\omega_2(x, y)$ indichiamo la funzione a due punti di uno stato di Hadamard. In modo analogo è possibile dimostrare che per il prodotto \cdot_T sussiste la seguente relazione:

$$A_1 \cdot_T \dots \cdot_T A_n = \mathcal{M} \left[e^{\sum_{1 \leq i < j \leq n} \int \Delta^F(x^i - x^j) \frac{\delta}{\delta \varphi(x_i)} \otimes \frac{\delta}{\delta \varphi(x_j)} dx^i dx^j} (A_1 \otimes \dots \otimes A_n) \right], \quad A_i \in \mathcal{F}_{loc}. \quad (2.3.2)$$

Nel Capitolo 1 abbiamo osservato come il valore di aspettazione delle osservabili valutato su uno stato ω la cui funzione a due punti sia utilizzata per definire i prodotti deformati può essere semplicemente ottenuto calcolando l'osservabile stessa in $\varphi = 0$. Combinando questa osservazione con le equazioni (2.3.1) e (2.3.2) è possibile ottenere delle regole grafiche che semplifichino il calcolo dei valori di aspettazione delle osservabili. Per dare un'idea di come tali regole grafiche possano essere ricavate analizziamo il seguente esempio.

Consideriamo la Lagrangiana di interazione V :

$$V = -\lambda \int f(x) \varphi^n(x) dx. \quad (2.3.3)$$

Calcoliamo ora il seguente valore di aspettazione:

$$\omega(V \cdot_T V \cdot_T \Phi_{f_1} \cdot_T \Phi_{f_2}) = V \cdot_T V \cdot_T \Phi_{f_1} \cdot_T \Phi_{f_2} \Big|_{\varphi=0}. \quad (2.3.4)$$

Possiamo utilizzare la relazione (2.3.2) per esprimere i prodotti tempo ordinati:

$$\begin{aligned} V \cdot_T V \cdot_T \Phi_{f_1} \cdot_T \Phi_{f_2} \Big|_{\varphi=0} = & \quad (2.3.5) \\ \mathcal{M} \left[e^{\int \Delta^F(x_1 - x_2) \frac{\delta}{\delta \varphi(x_1)} \otimes \frac{\delta}{\delta \varphi(x_2)} dx_1 dx_2} e^{\int \Delta^F(x_1 - x_3) \frac{\delta}{\delta \varphi(x_1)} \otimes \frac{\delta}{\delta \varphi(x_3)} dx_1 dx_3} \times \right. \\ & e^{\int \Delta^F(x_1 - x_4) \frac{\delta}{\delta \varphi(x_1)} \otimes \frac{\delta}{\delta \varphi(x_4)} dx_1 dx_4} e^{\int \Delta^F(x_2 - x_3) \frac{\delta}{\delta \varphi(x_2)} \otimes \frac{\delta}{\delta \varphi(x_3)} dx_2 dx_3} \times \\ & \left. e^{\int \Delta^F(x_2 - x_4) \frac{\delta}{\delta \varphi(x_2)} \otimes \frac{\delta}{\delta \varphi(x_4)} dx_2 dx_4} e^{\int \Delta^F(x_3 - x_4) \frac{\delta}{\delta \varphi(x_3)} \otimes \frac{\delta}{\delta \varphi(x_4)} dx_3 dx_4} \times \right. \\ & \left. V(\varphi(x_1)) \otimes V(\varphi(x_2)) \otimes \Phi_{f_1}(x_3) \otimes \Phi_{f_2}(x_4) \right] \Big|_{\varphi=0}. \end{aligned}$$

L'espressione in (2.3.5) può essere calcolata espandendo gli esponenziali in serie e calcolando le derivate funzionali delle osservabili. È di fondamentale importanza osservare che soltanto un numero finito dei termini che si ottengono dall'espansione in serie degli esponenziali fornisce un risultato non nullo. In particolare, gli unici contributi non nulli si ottengono facendo agire le derivate funzionali un numero di volte sufficiente ad eliminare dalle osservabili la dipendenza esplicita dai campi, in modo tale che il contributo non si annulli quando calcolato in $\varphi = 0$. Allo stesso tempo, però, le derivate funzionali non devono essere applicate un numero eccessivo di volte per evitare di ottenere un contributo nullo derivando una costante. Nel caso specifico dell'espressione (2.3.2) sono presenti i seguenti tre contributi non nulli:

$$n! \lambda^2 \int f(x_1) f(x_2) (\Delta^F(x_1 - x_2))^n dx_1 dx_2 \int f_1(x_3) f_2(x_4) \Delta^F(x_3 - x_4) dx_3 dx_4. \quad (2.3.6)$$

$$\begin{aligned} (n-1)! \lambda^2 \int \int \Delta^F(x_3 - x_1) f_1(x_3) (\Delta^F(x_1 - x_2))^{n-1} \\ f(x_1) f(x_2) \Delta^F(x_4 - x_2) f_2(x_4) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4. \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

$$\begin{aligned} (n-1)! \lambda^2 \int \int \Delta^F(x_3 - x_2) f_1(x_3) (\Delta^F(x_1 - x_2))^{n-1} \\ f(x_1) f(x_2) \Delta^F(x_4 - x_1) f_2(x_4) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4. \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

Il termine (2.3.6), ad esempio, si ottiene considerando l'ordine n -esimo dell'espansione del primo esponenziale ed il primo ordine dell'espansione dell'ultimo esponenziale in (2.3.5) (oltre, chiaramente, all'ordine zero di tutti gli altri esponenziali).

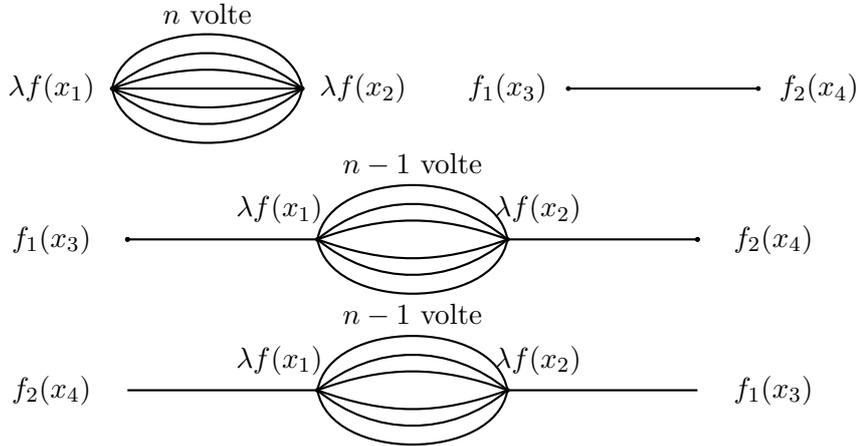
Le precedenti osservazioni possono essere codificate e riassunte in un approccio grafico al calcolo del valore di aspettazione del prodotto di osservabili. Tale approccio si basa sulle seguenti regole:

- Ad ogni osservabile locale viene fatto corrispondere un punto, etichettato con la funzione a supporto compatto che compare nel funzionale corrispondente all'osservabile stessa.
- Da ogni punto si dipartono un numero di linee pari alla potenza dei campi φ che compare nel funzionale corrispondente al punto.
- Ad ogni linea si fa corrispondere la funzione a due punti di uno stato di Hadamard o il propagatore di Feynman della teoria, in base al fatto che si stia considerando un prodotto star o un prodotto tempo-ordinato rispettivamente.
- Devono essere considerati e sommati tutti i diagrammi che possono essere costruiti rispettando la seconda regola, ciascuno accompagnato da un coefficiente combinatorio dovuto alla simmetria del singolo diagramma.

Se applichiamo queste regole all'esempio (2.3.5) da noi analizzato e rappresentiamo il propagatore di Feynman $\Delta^F(x - y)$ con la seguente linea:

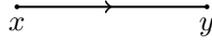


otteniamo i seguenti tre diagrammi:



Questi tre diagrammi corrispondono rispettivamente alle espressioni (2.3.6), (2.3.7) e (2.3.8) ottenute mediante il calcolo funzionale.

In generale, dunque, è possibile esprimere il valore di aspettazione di un generico prodotto di osservabili come somma di diagrammi costruiti seguendo le regole grafiche presentate in precedenza. La necessità di trattare ed utilizzare tipi differenti di prodotti tra le osservabili determina l'esigenza di poter rappresentare in modo differente i diversi propagatori della teoria. Nel corso della tesi utilizzeremo la seguente notazione per indicare graficamente la funzione a due punti di uno stato di Hadamard $\omega_2(x - y)$:



La punta della freccia indica il verso della funzione a due punti $\omega_2(x, y)$. Mentre infatti il prodotto tempo ordinato è un prodotto simmetrico e, di conseguenza, il propagatore di Feynman è simmetrico rispetto allo scambio delle variabili x e y , ciò non vale nel caso del prodotto star e delle funzioni a due punti. Pertanto, è importante indicare esplicitamente in quale ordine siano disposte le osservabili all'interno dei prodotti \star facendo uso di una freccia. La necessità di utilizzare la funzione a due punti in aggiunta al propagatore di Feynman per il calcolo del valore di aspettazione delle osservabili interagenti distingue in modo significativo le teorie di campo quantistico a temperatura nulla da quelle a temperatura finita. Quando infatti si studiano i valori di aspettazione delle osservabili sullo stato di vuoto di Minkowski a $T = 0$ (ω_0) è possibile dimostrare la validità del *teorema di Gell-Mann e Low*. All'interno del formalismo algebrico della pAQFT, il contenuto di tale teorema può essere espresso mediante la seguente uguaglianza:

$$\omega_0(R_V(F)) \equiv \omega_0(S^{-1}(V) \star (S(V) \cdot_T F)) = \frac{\omega_0(S(V) \cdot_T F)}{\omega_0(S(V))} \quad \text{con } F \in \mathcal{F}_{loc}. \quad (2.3.9)$$

Per questo motivo, dunque, nel calcolo dei valori di aspettazione sullo stato di vuoto figurano espressioni contenenti esclusivamente propagatori di Feynman. Quando si lavora con stati a temperatura finita, al contrario, il teorema di Gell-Mann e Low cessa di valere e, pertanto, diventa necessario trattare esplicitamente i prodotti star che compaiono nella rappresentazione dei campi interagenti mediante l'uso delle funzioni a due punti degli stati.

Nel corso dei prossimi capitoli verrà fatto ampio uso delle regole studiate in questo paragrafo per il calcolo del valore di aspettazione delle osservabili. In particolare, se si è interessati a ricavare il valore di aspettazione di un'osservabile della teoria interagente, per quanto visto nella precedente sezione è necessario studiare la seguente quantità:

$$\omega(R_V(F)) = S^{-1}(V) \star (S(V) \cdot_T F)|_{\varphi=0}. \quad (2.3.10)$$

Espandendo le matrici $S^{-1}(V)$ ed $S(V)$ in serie formali nel parametro di accoppiamento λ e troncando le serie ad un certo ordine perturbativo si ottengono delle approssimazioni dell'espressione (2.3.10). Tali approssimazioni possono poi essere calcolate esplicitamente facendo uso delle regole grafiche studiate in quest'ultimo paragrafo. Più in dettaglio questo tipo di analisi sarà utilizzata per ricavare le funzioni a due punti della teoria interagente, ovvero valori di aspettazione del prodotto di osservabili interagenti:

$$\omega(R_V(F) \star R_V(G)) \quad F, G \in \mathcal{F}_{loc}. \quad (2.3.11)$$

2.4 La rinormalizzazione nell'approccio algebrico

2.4.1 Introduzione

In questa sessione viene affrontato il problema della rinormalizzazione seguendo l'approccio descritto in [BF00] e ripreso, ad esempio, in [Düt19].

Come anticipato nei precedenti paragrafi, il prodotto tempo ordinato (T) da noi costruito risulta essere ben definito esclusivamente per i funzionali regolari. Se si tenta infatti di utilizzare tale prodotto per *funzionali locali non lineari* il cui supporto abbia un intersezione non nulla, si ottengono delle espressioni mal definite. Consideriamo ad esempio il funzionale locale $\Phi_f^2(x)$:

$$\Phi_f^2 := \int f(x)\varphi^2(x)dx, \quad (2.4.1)$$

ed il funzionale locale Φ_g^2 definito in modo analogo. Se proviamo a calcolare il prodotto tempo ordinato tra questi funzionali utilizzando la definizione data in (2.1.8), otteniamo la seguente espressione:

$$\begin{aligned} \Phi_f^2 \cdot_T \Phi_g^2 &= \Phi_f^2 \cdot \Phi_g^2 + 4 \int \int f(x)g(y)\Delta^F(x,y)\varphi(x)\varphi(y)dxdy \\ &\quad + 2 \int \int f(x)g(y) (\Delta^F(x,y))^2 dxdy. \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

Il quadrato della distribuzione *propagatore di Feynman*, tuttavia, è un oggetto mal definito nel limite di coincidenza $x \rightarrow y$, ovvero sulla diagonale di \mathcal{M}^2 che indichiamo con d_2 . Più in generale, nel seguito indicheremo con d_n la diagonale di \mathcal{M}^n :

$$d_n := \{(x, \dots, x) \in \mathcal{M}^n\}. \quad (2.4.3)$$

Questi problemi sono dovuti al comportamento singolare di $\Delta^F(x,y)$ sulla diagonale. Al contrario, all'infuori della diagonale, sappiamo che il prodotto tempo ordinato risulta essere ben definito a qualsiasi ordine, in quanto coincide per definizione con il prodotto star costruito utilizzando la funzione a due punti di uno stato di Hadamard. Per questo motivo, l'estensione del prodotto tempo ordinato ai funzionali locali implica la necessità di poter estendere una distribuzione definita su $\mathcal{M}^2 \setminus d_2$ (nello specifico, una generica potenza $(\Delta^F(x,y))^n$) ad una distribuzione ben definita su tutto \mathcal{M}^2 . Inoltre, il problema da noi appena analizzato riguarda lo studio del prodotto tempo ordinato tra due soli funzionali locali (T_2). In generale, tuttavia, è necessario poter definire il prodotto tempo ordinato per un numero arbitrario m di osservabili (T_m). Se, ad esempio, proviamo a calcolare la seguente quantità:

$$\varphi^3(x) \cdot_T \varphi^3(y) \cdot_T \varphi^2(z), \quad (2.4.4)$$

fra i vari contributi otteniamo anche il seguente contributo:

$$72 \cdot \begin{array}{c} x \\ \diagup \quad \diagdown \\ z \quad \quad \quad \\ \diagdown \quad \diagup \\ y \end{array} = 72 \Delta^F(x,z)\Delta^F(y,z)(\Delta^F(x,y))^2. \quad (2.4.5)$$

Anche dopo aver esteso il quadrato del propagatore di Feynman $(\Delta^F(x,y))^2$ alla diagonale d_2 , il prodotto di propagatori presente in (2.4.5) costituisce una distribuzione in $\mathcal{D}'(\mathcal{M} \times \mathcal{M} \times \mathcal{M} \setminus \{d_3\})$ e la sua definizione come elemento di $\mathcal{D}'(\mathcal{M} \times \mathcal{M} \times \mathcal{M})$ richiede un ulteriore procedimento di estensione alla diagonale d_3 . In generale, come mostrato da Epstein e Glaser in [EG73], il generico prodotto tempo ordinato T_m può essere ottenuto ricorsivamente dai prodotti tempo ordinati T_l costruiti per $l \leq m - 1$. Più in dettaglio, è possibile dimostrare che il prodotto T_m risulta fissato su $\mathcal{M}^m \setminus d_m$, dai prodotti T_l con $l \leq m - 1$ e può essere poi esteso a tutto \mathcal{M}^m . Nell'esempio specifico appena considerato, è necessario per prima cosa costruire un'estensione del quadrato del propagatore di Feynman come distribuzione in $\mathcal{D}'(\mathcal{M} \times \mathcal{M})$. Fatto ciò, il prodotto tempo ordinato delle tre osservabili risulta fissato ovunque tranne che sulla diagonale. La distribuzione presente in (2.4.5) può essere quindi infine estesa anche alla diagonale. Tuttavia, come vedremo nei prossimi paragrafi, tali estensioni non sono uniche e la libertà nella loro scelta corrisponde alla *libertà di rinormalizzazione* normalmente incontrata negli approcci ordinari alla teoria

dei campi.

In questo lavoro di tesi sarà analizzato il prodotto tempo ordinato tra al più due osservabili locali. Pertanto la trattazione presentata nella prossima sezione risulta focalizzata esclusivamente su tale situazione, ovvero sul problema della ricerca dell'estensione di una generica potenza del propagatore di Feynman.

2.4.2 Estensione di distribuzioni

Come osservato nell'introduzione, il problema dell'estensione del prodotto tempo-ordinato tra due funzionali locali si riduce al problema di ricercare delle estensioni di $(\Delta^F(x, y))^n \in \mathcal{D}'(\mathcal{M}^2 \setminus d_2)$ che siano definite anche sulla diagonale d_2 . Sfruttano l'invarianza sotto traslazioni spazio-temporali del propagatore di Feynman sullo spazio di Minkowski, inoltre, il problema può essere ulteriormente ridotto alla ricerca di estensioni di distribuzioni appartenenti a $\mathcal{D}'(\mathcal{M} \setminus \{0\})$. In questa sezione, dunque, siamo interessati a studiare in che modo le distribuzioni possano essere estese ad un punto e quale sia la libertà con cui tali estensioni possono essere scelte.

Iniziamo dando una definizione precisa di *estensione di una distribuzione* ad un punto.

Definizione 11. Data una distribuzione $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ si dice che $u_{ext} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ è un'estensione di u se vale:

$$\langle u_{ext}, f \rangle = \langle u, f \rangle \quad \forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\}). \quad (2.4.6)$$

Da questa definizione, risulta evidente che l'estensione di una distribuzione $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ non è unica. Due differenti estensioni u_{ext} e u'_{ext} , infatti, possono differire l'una dall'altra per una qualunque distribuzione che sia supportata unicamente sull'origine. Un importante *teorema di struttura* dell'analisi distribuzionale garantisce che ogni distribuzione Z che sia supportata unicamente sull'origine può essere scritta come combinazione lineare di delta di Dirac e di sue derivate:

$$Z = \sum_a C_a \partial^a \delta. \quad (2.4.7)$$

Quando la distribuzione Z viene valutata su una generica funzione $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ essa restituisce il valore 0, in quanto per definizione f e tutte le sue derivate si annullano sull'origine. Questa libertà di scelta che caratterizza la ricerca di un'estensione può essere ridotta richiedendo che l'estensione stessa preservi il comportamento singolare nell'origine della distribuzione di partenza. Cerchiamo dunque ora un modo per formalizzare questa idea.

Iniziamo con il definire la dilatazione di una distribuzione $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ o, equivalentemente, in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$. Data una funzione $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ si definisce la sua dilatazione f_λ di un fattore $\lambda \in \mathbb{R}$ nel modo usuale:

$$f_\lambda(x) := f(\lambda x). \quad (2.4.8)$$

La dilatazione u_λ della distribuzione u è definita mediante il pullback della dilatazione delle funzioni $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$:

$$\langle u_\lambda, f \rangle := \frac{1}{|\lambda|^d} \left\langle u, f\left(\frac{\cdot}{\lambda}\right) \right\rangle. \quad (2.4.9)$$

Possiamo ora fornire la definizione di una proprietà matematica delle distribuzioni che ne caratterizza il comportamento singolare in un punto.

Definizione 12 (Steinmann scaling degree). Sia u una distribuzione in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$, il suo *Steinmann scaling degree* in 0, denotato con $\text{sd}(u)$, è così definito:

$$\text{sd}(u) := \inf \left\{ r \in \mathbb{R} \mid \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^r \langle u_\lambda, f \rangle = 0, \forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\}) \right\}. \quad (2.4.10)$$

Una definizione del tutto analoga vale per lo Steinmann scaling degree delle distribuzioni in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

Calcoliamo ora, per esempio, lo Steinmann scaling degree della derivata α -esima della funzione delta di Dirac $\delta^{(d)} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Si ha:

$$\begin{aligned} \lambda^r \left\langle \partial^\alpha \delta^{(d)}, \frac{1}{\lambda^d} f\left(\frac{\cdot}{\lambda}\right) \right\rangle &= \lambda^r (-1)^{|\alpha|} \int \frac{1}{\lambda^d} \partial_x^\alpha \left(f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \right) \delta^{(d)} d^d x \\ &= (-1)^{|\alpha|} \lambda^{r-d} \partial_x^\alpha \left(f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \right) \Big|_{x=0} \\ &= (-1)^{|\alpha|} \lambda^{r-d-|\alpha|} \partial_{\bar{x}}^\alpha (f(\bar{x})) \Big|_{\bar{x}=0}, \quad \text{con } \bar{x} := \frac{x}{\lambda}. \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

Si ha pertanto:

$$\text{sd}(\partial^\alpha \delta^{(d)}) = d + |\alpha|. \quad (2.4.12)$$

È possibile calcolare anche lo scaling degree del propagatore di Feynman $\Delta^F(x)$ su uno spazio-tempo di Minkowski di dimensione generica d . Nel caso del campo scalare reale massivo tale propagatore (definito in (2.1.7)) può essere scritto esplicitamente nel modo seguente:

$$\Delta^F(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \frac{e^{ip \cdot x}}{p_0^2 - \mathbf{p}^2 - m^2 + i\epsilon} d^d p. \quad (2.4.13)$$

Mediante il calcolo esplicito si verifica la seguente relazione:

$$\text{sd}(\Delta^F(x)) = d - 2. \quad (2.4.14)$$

Inoltre, è possibile ricavare anche il valore dello scaling degree di una generica potenza del propagatore di Feynman nel caso di spazio-tempo di Minkowski quadridimensionale (si veda [BF00]). Nello specifico si ha:

$$\text{sd}((\Delta^F(x))^n) = 2n. \quad (2.4.15)$$

Date due distribuzioni $u, v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ è possibile dimostrare le seguenti proprietà riguardanti lo scaling degree (per maggiori dettagli si veda, ad esempio, [Düt19]):

- Se α è un multiindice in \mathbb{N}^k , le derivate parziali ∂^α incrementano lo scaling degree di u al massimo di un fattore $|\alpha|$:

$$\text{sd}(\partial^\alpha u) \leq \text{sd}(u) + |\alpha|. \quad (2.4.16)$$

- Se α è un multiindice in \mathbb{N}^k , il prodotto con la funzione x^α decrementa lo scaling degree di u almeno di un fattore α :

$$\text{sd}(x^\alpha u) \leq \text{sd}(u) - |\alpha|. \quad (2.4.17)$$

- Se il prodotto tra le distribuzioni u e v è ben definito allora vale la seguente proprietà:

$$\text{sd}(uv) \leq \text{sd}(u) + \text{sd}(v). \quad (2.4.18)$$

- Se la distribuzione u è omogenea di ordine σ , ovvero $u_\lambda = \lambda^\sigma u$, allora vale:

$$\text{sd}(u) = \sigma. \quad (2.4.19)$$

In letteratura, oltre al concetto di scaling degree, viene comunemente utilizzato anche quello strettamente collegato di *grado di divergenza* (deg) di una distribuzione $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\}$, il quale è così definito:

$$\text{deg}(u) := \text{sd}(u) - d. \quad (2.4.20)$$

Possiamo ora analizzare in che modo una distribuzione $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ può essere estesa ad una distribuzione $u_{ext} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ preservandone lo Steinmann scaling degree. Enunciamo dunque un primo teorema che si applica nel caso in cui lo scaling degree della distribuzione in esame sia minore della dimensione dello spazio su cui essa è definita.

Teorema 2 (Estensione 1). *Data una distribuzione $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ il cui scaling degree sia minore della dimensione d :*

$$\text{sd}(u) < d, \quad (2.4.21)$$

esiste un'unica estensione di u ($u_{ext} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$) che preservi lo scaling degree di u . Tale estensione prende il nome di estensione diretta.

La dimostrazione di questo teorema (ottenuta in [BF00]) si basa sulla costruzione esplicita dell'estensione u_{ext} . Definiamo una funzione liscia $\Theta(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ che valga 1 in un intorno dell'origine. Possiamo allora definire una nuova distribuzione $u^{(n)} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ nel modo seguente:

$$u^{(n)} := (1 - \Theta_{2^n}(x))u = (1 - \Theta(2^n x))u \quad \text{con } n \in \mathbb{N}. \quad (2.4.22)$$

Si può provare che la successione numerica ottenuta testando le distribuzioni $u^{(n)}$ su una generica funzione $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ è una successione di Cauchy e dunque il limite per $n \rightarrow \infty$ di (2.4.22) esiste. Per la dimostrazione di ciò, è essenziale il fatto che valga l'ipotesi (2.4.21) sullo scaling degree di u . Inoltre, è possibile mostrare che la successione u^n converge debolmente ad una distribuzione nel limite $n \rightarrow \infty$. Il limite della successione (2.4.22) costituisce di fatto l'estensione da noi cercata:

$$u_{ext} := \lim_{n \rightarrow \infty} u^{(n)}, \quad (2.4.23)$$

in quanto è possibile mostrare che tale distribuzione possiede lo stesso scaling degree della distribuzione di partenza u .

Per quanto riguarda l'unicità dell'estensione, invece, essa può essere dimostrata sfruttando l'espressione (2.4.12) da noi ricavata per lo scaling degree delle derivate della delta di Dirac. Come osservato in precedenza, infatti, due differenti estensioni u_{ext} e u'_{ext} dovrebbero differire una dall'altra per una combinazione lineare di derivate di $\delta^{(d)}$. Tuttavia, queste distribuzioni possiedono uno scaling degree maggiore o uguale della dimensione d , contrariamente a quanto da noi richiesto riguardo lo scaling degree dell'estensione stessa.

Nel caso del propagatore di Feynman $\Delta^F(x)$ sullo spazio-tempo di Minkowski quadridimensionale, il Teorema 2 garantisce che il prodotto tempo ordinato possa essere esteso senza ambiguità ai *funzionali regolari* i cui supporti abbiano un'intersezione non nulla. Si ha infatti:

$$\text{sd}(\Delta^F(x)) = 2 < 4 = d. \quad (2.4.24)$$

Passiamo ora ad analizzare il problema della ricerca di un'estensione di una distribuzione u nel caso in cui il suo scaling degree sia uguale o maggiore della dimensione dello spazio su cui essa è definita. A riguardo, vale il seguente Teorema.

Teorema 3 (Estensione 2). *Data una distribuzione $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ il cui scaling degree sia finito e maggiore o uguale della dimensione d :*

$$d \leq sd(u) < \infty, \quad (2.4.25)$$

esistono diverse estensioni u_{ext}^ che soddisfano la condizione $sd(u_{ext}^*) = sd(u)$. Inoltre, data una particolare estensione u_{ext} , tutte le altre estensioni u_{ext}^* hanno la seguente forma:*

$$u_{ext}^* = u_{ext} + \sum_{|a| \leq sd(u) - d} C_a \partial^a \delta^{(d)} \quad \text{con } C_a \in \mathbb{C} \quad (2.4.26)$$

L'aggiunta del termine $\sum_{|a| \leq sd(u) - d} C_a \partial^a \delta^{(d)}$ prende il nome di rinormalizzazione finita e le costanti C_a sono chiamate costanti di rinormalizzazione.

Il fatto che due estensioni differiscano per l'aggiunta di un fattore $\sum_{|a| \leq sd(u) - d} C_a \partial^a \delta^{(d)}$ è motivato da un'argomentazione analoga a quella utilizzata per dimostrare l'unicità nel teorema (2). In questo caso, in particolare, essendo $sd(u) \geq d$ è possibile aggiungere tutte quelle distribuzioni supportate sull'origine aventi scaling degree minore dello scaling degree di u , ovvero tutte le derivate della delta di Dirac $\partial^a \delta^{(d)}$ con $|a| \leq sd(u) - d$.

Analizziamo ora in che modo è possibile ottenere un'estensione $u_{ext} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ della nostra distribuzione $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ (come mostrato in [BF00]). Iniziamo definendo il sottospazio delle funzioni $\mathcal{D}_\xi(\mathbb{R}^n)$ come lo spazio delle funzioni lisce a supporto compatto le cui derivate nell'origine si annullino fino all'ordine ξ :

$$\mathcal{D}_\xi(\mathbb{R}^d) := \left\{ h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \mid \partial^a h(0) = 0 \quad \text{per } |a| \leq \xi \right\}. \quad (2.4.27)$$

È evidente che l'insieme $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ è contenuto nell'insieme $\mathcal{D}_\xi(\mathbb{R}^n)$.

Se ora poniamo:

$$\xi = sd(u) - d = \deg(u), \quad (2.4.28)$$

la nostra distribuzione u ammette un'unica estensione \bar{u} in \mathcal{D}'_ξ avente $sd(\bar{u}) = sd(u)$. Per dimostrare ciò, sfruttiamo il fatto che ogni funzione $h \in \mathcal{D}_\xi$ può essere scritta nel modo seguente:

$$h(x) = \sum_{|a| = |\xi| + 1} x^a g_a(x) \quad \text{con } g_a(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d). \quad (2.4.29)$$

L'estensione $\bar{u} \in \mathcal{D}'_\xi$ può essere dunque ottenuta nel modo seguente:

$$\langle \bar{u}, h \rangle := \sum_{|a| = |\xi| + 1} \langle \overline{x^a u}, g_a \rangle, \quad (2.4.30)$$

dove, nel termine di destra, abbiamo indicato con $\overline{x^a u}$ l'unica estensione diretta della distribuzione $x^a u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$, ottenuta mediante il Teorema 2. Il Teorema 2 può essere infatti applicato alla distribuzione $x^a u$, in quanto, per le proprietà dello scaling degree, si ha:

$$sd(x^a u) \leq sd(u) - (|\xi| + 1) \leq d - 1 < d. \quad (2.4.31)$$

Avendo dimostrato l'esistenza di unica estensione $\bar{u} \in \mathcal{D}'_\xi(\mathbb{R}^d)$, sfruttiamo ora tale risultato per costruire un'estensione $u_{ext} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Innanzi tutto, definiamo un proiettore $W : \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{D}_\xi(\mathbb{R}^d)$ nel modo seguente:

$$W(f(x)) = f(x) - \sum_{|a| \leq |\xi|} \partial^a f(x)|_{x=0} \omega_a(x) \quad \text{con } f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \quad (2.4.32)$$

dove con $\omega_a(x)$ abbiamo indicato una famiglia di funzioni lisce a supporto compatto che soddisfino la seguente relazione:

$$\partial^b \omega_a(x) = \delta_b^a, \quad \text{con } a, b \in \mathbb{N}^d \text{ e } |a|, |b| \leq |\xi|. \quad (2.4.33)$$

Con la notazione δ_b^a abbiamo indicato la delta di Kronecker rispetto ai multiindici a e b , definita come il prodotto delle ordinarie delta di Kronecker calcolate rispetto ad ogni coppia di indici. Se, ad esempio, si ha $a = (a_1, a_2)$ e $b = (b_1, b_2)$, la corrispondente delta risulta definita nel modo seguente:

$$\delta_b^a = \delta_{b_1}^{a_1} \cdot \delta_{b_2}^{a_2}. \quad (2.4.34)$$

Evidentemente, per costruzione, si ha $\partial^b W(f(x))|_{x=0} = 0 \quad \forall |b| \leq \xi$, ovvero $W(f(x)) \in \mathcal{D}_\xi$. Inoltre, si ha $W(h(x)) = h(x) \quad \forall h \in \mathcal{D}_\xi$, da cui concludiamo che W è un operatore *idempotente* e che $\text{Ran}(W) = \mathcal{D}_\xi$. Abbiamo pertanto mostrato che l'operatore W è il proiettore da noi cercato.

Possiamo ora concludere la dimostrazione del teorema utilizzando il proiettore W per costruire un'estensione u_{ext} della distribuzione u . Definiamo dunque u_{ext} nel modo seguente:

$$\langle u_{ext}, f \rangle := \langle \bar{u}, W(f) \rangle \quad \forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d). \quad (2.4.35)$$

Evidentemente, u_{ext} costituisce un'estensione della distribuzione u , in quanto data una qualunque funzione $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ si ha:

$$\langle u_{ext}, g \rangle = \langle \bar{u}, W(g) \rangle = \langle \bar{u}, g \rangle = \langle u, g \rangle. \quad (2.4.36)$$

Inoltre, è possibile mostrare che, come richiesto, lo scaling degree dell'estensione u_{ext} da noi costruita coincide con quello della distribuzione u di partenza.

Nel caso dello spazio di Minkowski quadridimensionale, come visto in (2.4.15), le potenze del propagatore di Feynman di un campo scalare massivo hanno uno scaling degree uguale o maggiore della dimensione dello spazio d . La necessità di utilizzare tale potenze per calcolare il prodotto tempo-ordinato delle osservabili locali comporta dunque la necessità di estendere tali distribuzioni a distribuzioni definite su tutto lo spazio. Come visto nel Teorema 3, queste estensioni possono essere ottenute direttamente, ma non sono uniche. L'ambiguità che caratterizza l'estensione del prodotto tempo-ordinato viene trattata anche negli approcci tradizionali alla teorie di campo quantistico e prende il nome di *libertà di rinormalizzazione*. Nei prossimi paragrafi studieremo una tecnica che consente di ottenere delle espressioni esplicite per le estensioni delle potenze del propagatore di Feynman da noi cercate.

2.4.3 Esempio $\lambda\varphi^4$

Siamo ora interessati a verificare l'equivalenza tra i problemi di estendibilità delle potenze del propagatore di Feynman (incontrati nello studio della rinormalizzazione in rappresentazione posizione) con i problemi di convergenza degli integrali comunemente studiati negli approcci tradizionali alla teoria dei campi, basati sulla rappresentazione impulso. Per fare ciò, consideriamo l'esempio specifico di un campo scalare reale massivo che contenga all'interno della sua densità Lagrangiana un termine di interazione proporzionale alla quarta potenza dei campi:

$$\mathcal{L}_{int} = -\lambda\varphi^4. \quad (2.4.37)$$

Nell'ambito della teoria algebrica di campo, proviamo a calcolare il seguente valore di aspettazione sullo stato di vuoto di Minkowski ω^0 :

$$\omega^0 (R_V(\varphi(x) \cdot_T \varphi(y) \cdot_T \varphi(x') \cdot_T \varphi(y'))) , \quad (2.4.38)$$

Utilizzando le regole grafiche presentate nella Sezione 2.3 è possibile verificare che al secondo ordine perturbativo è presente un contributo proporzionale al diagramma riportato in Figura 2.4.1

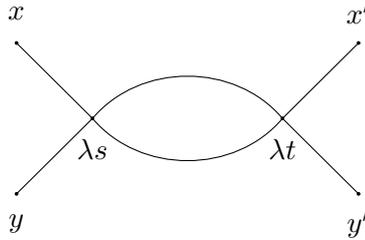


Figura 2.4.1: Diagramma in rappresentazione posizione.

Tale diagramma contiene al suo interno un loop corrispondente al quadrato del propagatore di Feynman $(\Delta^F(s, t))^2$. Se, in modo intuitivo, si tenta di definire tale distribuzione mediante il teorema di convoluzione, si ottiene il seguente risultato:

$$(\Delta^F(s - t))^2 = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 q e^{iq(s-t)} \int d^4 k \frac{1}{k^2 + m^2 + i\epsilon} \frac{1}{(q - k)^2 + m^2 + i\epsilon}. \quad (2.4.39)$$

dove abbiamo utilizzato la forma esplicita del propagatore di Feynman per il campo scalare reale massivo riportata in (2.4.13).

Proviamo ora a calcolare la sezione d'urto per un processo di scattering di due particelle scalari con quadriimpulsi p_1 e p_2 fissati, in due particelle della stessa specie ma con quadriimpulsi p'_1 e p'_2 . Per svolgere tale conto utilizziamo le regole diagrammatiche di Feynman per la teoria $\lambda\varphi^4$ (si vedano ad esempio le note [Dav06] per una derivazione di tali regole). Al secondo ordine perturbativo è presente un diagramma di Feynman che assume la forma riportata in Figura 2.4.2.

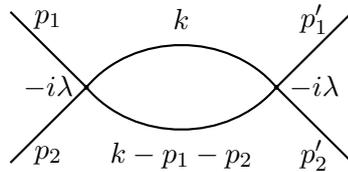


Figura 2.4.2: Diagramma di Feynman per lo scattering $\varphi\varphi \rightarrow \varphi\varphi$

Utilizzando le regole di Feynman il loop presente nel diagramma viene fatto corrispondere ad il seguente integrale sugli impulsi del prodotto di due propagatori di Feynman:

$$\int d^4 k \frac{1}{k^2 + m^2 + i\epsilon} \frac{1}{(p_1 + p_2 - k)^2 + m^2 + i\epsilon}. \quad (2.4.40)$$

L'integrale in (2.4.40) coincide con quello ottenuto in (2.4.39) e fornisce una quantità divergente. Infatti, passando in coordinate polari in \mathbb{R}^4 , è immediato verificare che nel limite $|k| \rightarrow \infty$ si ottiene una divergenza di tipo logaritmico.

È possibile dimostrare che la procedura di rinormalizzazione basata sulle tecniche distribuzionali studiata in questo capitolo fornisce risultati equivalenti a quelli ottenuti utilizzando le tecniche di regolarizzazione usualmente impiegate negli approcci standard alla QFT.

Nel prossimo paragrafo vedremo come ottenere un'espressione esplicita per l'estensione di una generica potenza del propagatore di Feynman.

2.4.4 Rinormalizzazione delle funzioni a 2-punti mediante la rappresentazione di Källén-Lehmann

In questo paragrafo analizziamo una tecnica esplicita di rinormalizzazione applicabile allo studio del prodotto tempo-ordinato di due osservabili. Questo tipo di approccio, utilizzato per ottenere le estensioni delle potenze del propagatore di Feynman, è descritto, ad esempio, in [Fre09] e nell'Appendice C di [DF04].

Per quanto visto nel precedente capitolo, la n -esima potenza della funzione a due punti dello stato di vuoto sullo spazio-tempo di Minkowski $\Delta_+^n(x, m)$ è una distribuzione ben definita. È possibile dimostrare che tale potenza può essere espressa come un integrale sul quadrato della massa M^2 della funzione a due punti $\Delta_+(x, M)$ moltiplicata per un'appropriata funzione peso $\rho_n(M^2)$. Tale rappresentazione prende il nome di *rappresentazione spettrale di Källén-Lehmann*. Più in dettaglio, è possibile dimostrare che vale la seguente relazione:

$$\Delta_+^n(x, m) = \int_{(nm)^2}^{\infty} \rho_n(M^2) \Delta_+(x, M) dM^2, \quad (2.4.41)$$

con la funzione $\rho_n(M^2)$ così definita:

$$\rho_n(M^2) := \frac{1}{(2\pi)^{3(n-1)}} \int d^3\mathbf{q}_1 \dots \int d^3\mathbf{q}_n \prod_{j=1}^n \left(\frac{1}{2\omega_{q_j}} \right) \delta^{(3)} \left(\sum_{j=1}^n \mathbf{q}_j \right) \delta \left(\sum_{j=1}^n \omega_{q_j} - M \right). \quad (2.4.42)$$

Nel caso specifico di $n = 2$, ad esempio, si ottiene:

$$\rho_2(M^2) = \frac{1}{16\pi^2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}}. \quad (2.4.43)$$

L'espressione (2.4.43) è ricavata esplicitamente nella "Appendice B".

È possibile verificare direttamente che $\rho_n(M^2)$ cresce come M^{2n-4} per $M \rightarrow \infty$ e che l'integrale in dM^2 presente in (2.4.41) è convergente. Tuttavia, se si tenta di ricavare un'espressione analoga alla (2.4.43) per le potenze del propagatore di Feynman $(\Delta^F(x, M))^n$ sostituendo $\Delta_+(x, M)$ con $\Delta^F(x, M)$ si ottengono degli integrali in dM^2 che presentano divergenze ultraviolette. Questo comportamento corrisponde all'impossibilità, descritta all'inizio del paragrafo, di ottenere direttamente le potenze del propagatore di Feynman come distribuzioni ben definite su tutto lo spazio-tempo. D'altro canto, tuttavia, sappiamo che il propagatore di Feynman $\Delta^F(x, M)$ coincide, all'infuori dell'origine, con $\pm\Delta_+(x, M)$, dove il segno \pm dipende dal segno di x_0 (si veda la definizione del propagatore di Feynman data in (2.1.7)). Pertanto, all'infuori dell'origine, è possibile utilizzare la seguente espressione per una generica potenza $(\Delta^F(x, M))^n \in \mathcal{D}'(\mathcal{M}) \setminus \{0\}$:

$$(\Delta^F(x, m))^n = \int_{(nm)^2}^{\infty} \rho_n(M) \Delta^F(x, M) dM^2 \in \mathcal{D}'(\mathcal{M}) \setminus \{0\}. \quad (2.4.44)$$

Vogliamo ora capire come si possa ottenere un'estensione di (2.4.44) che sia ben definita anche nell'origine. Per fare ciò, per quanto visto nella dimostrazione del Teorema 3,

dobbiamo innanzi tutto trovare un'estensione di (2.4.44) che sia ben definita sullo spazio delle funzioni $\mathcal{D}_\xi(\mathbb{R}^4)$, con $|\xi| = \text{sd}((\Delta^F)^n) - d = 2n - 4$. Consideriamo dunque l'azione del propagatore di Feynman su una funzione $f \in \mathcal{D}_\xi(\mathcal{M})$:

$$\int d^4x \Delta^F(x, M) f(x). \quad (2.4.45)$$

Sfruttiamo ora il fatto che il propagatore di Feynman, a meno di un fattore i , è una soluzione fondamentale dell'equazione di campo classica, ovvero:

$$(\square - M^2) \Delta^F(x, M) = i\delta(x). \quad (2.4.46)$$

Più in generale, data una costante $a \in \mathbb{C}$, vale la seguente relazione:

$$(\square - a) \Delta^F(x, M) = (M^2 - a) \Delta^F(x, M) + i\delta(x). \quad (2.4.47)$$

Applicando ora $n - 1$ volte l'operatore $(\square - a)$, si ottiene la seguente espressione:

$$\begin{aligned} (\square - a)^{(n-1)} \Delta^F(x, M) &= (\square - a)^{(n-2)} ((M^2 - a) \Delta^F(x, M) + i\delta(x)) \\ &= \dots \\ &= (M^2 - a)^{(n-1)} \Delta^F(x, M) + \mathcal{P}_{2n-4}. \end{aligned} \quad (2.4.48)$$

Con il simbolo \mathcal{P}_{2n-4} abbiamo denotato una combinazione lineare di delta di Dirac $\delta(x)$ e di sue derivate fino all'ordine $2n - 4$, ottenuta applicando l'operatore $(\square - a)^{(n-2)}$ alla delta:

$$\mathcal{P}_{2n-4} := \sum_{j=0}^{2n-4} C_j \partial^j \delta(x). \quad (2.4.49)$$

L'espressione (2.4.45) può dunque essere riscritta nel modo seguente:

$$\int d^4x \Delta^F(x, M) f(x) = \int d^4x \frac{1}{(M^2 - a)^{n-1}} \Delta^F(x, M) (\square - a)^{n-1} f(x) \quad \text{con } f \in \mathcal{D}_\xi. \quad (2.4.50)$$

La distribuzione \mathcal{P}_{2n-4} , infatti, non fornisce nessun contributo quando applicata ad una funzione $f \in \mathcal{D}_\xi$, in quanto per definizione f e tutte le sue derivate fino all'ordine $2n - 4$ si annullano nell'origine.

Per quanto appena visto, possiamo definire esplicitamente l'estensione $(\bar{\Delta}^F(x, m))^n \in \mathcal{D}'_\xi(\mathcal{M})$ da noi cercata nel modo seguente:

$$\langle (\bar{\Delta}^F(x, m))^n, f(x) \rangle := \int d^4x \int_{(nm)^2}^{\infty} \frac{\rho_n(M)}{(M^2 - a)^{n-1}} \Delta^F(x, M) (\square - a)^{n-1} f(x) dM^2. \quad (2.4.51)$$

Le potenze del propagatore di Feynman rinormalizzate saranno pertanto date dalla composizione dell'estensione $(\bar{\Delta}^F(x, m))^n$ con un proiettore W definito come in (2.4.32). Tuttavia, è possibile mostrare che la distribuzione $(\bar{\Delta}^F(x, m))^n \circ W$ differisce dalla distribuzione $(\bar{\Delta}^F(x, m))^n$ solamente per una combinazione lineare di delta di Dirac e di sue derivate fino all'ordine $|\xi|$, ovvero per la libertà di rinormalizzazione già analizzata nella sottosezione precedente.

In conclusione, abbiamo mostrato che, a meno di una scelta dell'usuale libertà di rinormalizzazione, la potenza n -esima rinormalizzata del propagatore di Feynman può essere scritta come la seguente distribuzione in $\mathcal{D}'(\mathcal{M})$:

$$(\Delta_{rin}^F(x, m))^n = (\square - a)^{n-1} \int_{(nm)^2}^{\infty} dM^2 \rho_n(M) \frac{1}{(M^2 - a)^{n-1}} \Delta^F(x, M), \quad (2.4.52)$$

dove le derivate devono essere intese in senso distribuzionale. È importante sottolineare come l'integrale sulle masse in (2.4.52) sia convergente grazie alla presenza del fattore $(M^2 - a)^{n-1}$ che risolve le divergenze ultraviolette accennate in precedenza. L'espressione (2.4.52) risulta pertanto ben definita.

Concludiamo questo paragrafo mostrando come differenti scelte della costante a nell'espressione (2.4.52) corrispondano a differenti scelte di rinormalizzazione. Per semplicità consideriamo il caso $n = 2$ e la differenza tra il quadrato del propagatore ottenuto con costante 0 e quello ottenuto con una generica costante a :

$$\begin{aligned} & (\Delta_{rin,0}^F(x, m))^2 - (\Delta_{rin,a}^F(x, m))^2 \tag{2.4.53} \\ = & \square \int_{(2m)^2}^{\infty} dM^2 \rho_2(M) \left(\frac{1}{M^2} - \frac{1}{M^2 - a} \right) \Delta^F(x, M) \\ & + a \int_{(2m)^2}^{\infty} dM^2 \rho_2(M) \frac{1}{M^2 - a} \Delta^F(x, M). \end{aligned}$$

Sfruttando il fatto che $\Delta^F(x, M)$ è una soluzione fondamentale dell'equazione di campo classica si ottiene:

$$(\Delta_{rin,0}^F(x, m))^2 - (\Delta_{rin,a}^F(x, m))^2 = -i \int_{(2m)^2}^{\infty} dM^2 \rho_2(M) \left(\frac{a}{M^2(M^2 - a)} \right) \delta(x), \tag{2.4.54}$$

ovvero le due distribuzioni differiscono una dall'altra per una delta di Dirac. Ciò è in accordo con quanto affermato dal Teorema 3 poiché, essendo lo scaling degree del quadrato del propagatore di Feynman pari a 4 ed essendo $d = 4$ l'unica libertà di rinormalizzazione consiste nella possibilità di aggiungere all'estensione un termine $C\delta(x)$.

2.5 Stati KMS per la teoria interagente

Nei precedenti paragrafi abbiamo studiato la costruzione della teoria algebrica per un sistema interagente mediante un approccio perturbativo. In particolare, abbiamo visto come sia possibile ottenere una rappresentazione dei campi interagenti attraverso la *formula di Bogoljubov* dopo aver definito e ricavato un'espressione esplicita per il *prodotto tempo-ordinato*. In quest'ultima sezione, invece, focalizziamo l'attenzione sugli stati della teoria per studiare come la presenza di un'interazione ne modifichi le proprietà. Più in dettaglio, siamo interessati a capire in che modo sia possibile descrivere stati che possiedano proprietà fisiche sensate all'interno della teoria interagente. In particolare, vogliamo analizzare la costruzione di stati di equilibrio a temperatura finita sotto l'evoluzione temporale determinata da una Lagrangiana contenente un termine di interazione. Per fare ciò, seguiamo il lavoro di Fredenhagen e Lindner proposto in [FL14], riportandone e riassumendone i risultati principali (a riguardo, si vedano anche le introduzioni agli articoli [BDP19] e [BFP20]). Così facendo capiremo come costruire uno stato $\omega^{\beta, V}$ che soddisfi la condizione KMS (definita nella seconda sezione del precedente capitolo) per la teoria interagente.

Iniziamo definendo il tipo di interazione che intendiamo trattare. Come visto in precedenza, la Lagrangiana di interazione V può essere definita moltiplicando la densità Lagrangiana \mathcal{L}_{int} con una funzione a supporto compatto g :

$$V := \int g(x) \mathcal{L}_{int}(x) d^4x. \tag{2.5.1}$$

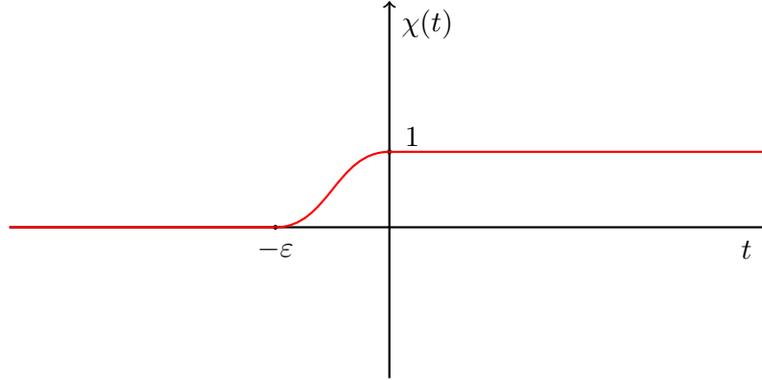


Figura 2.5.1: Accensione liscia dell'interazione

Per la funzione g scegliamo una forma particolare che descriva un'accensione liscia dell'interazione ad un tempo finito (ad esempio al tempo $t = 0$). Assumiamo dunque che la funzione $g(x)$ possa essere fattorizzata nel modo seguente:

$$g(x) := \chi(t)h(\mathbf{x}), \quad (2.5.2)$$

dove:

- $\chi(t)$ è una funzione liscia che vale costantemente 0 per $(t < -\varepsilon)$ e vale costantemente 1 per $t \geq 0$, come in figura.
- $h(\mathbf{x})$ è una funzione a supporto compatto della variabile spaziale \mathbf{x} e rappresenta pertanto un cut-off spaziale.

Come vedremo nel seguito di questa sezione, la costruzione proposta da Fredenhagen e Lindner si basa sulla ricerca di un operatore $U(t)$ che leghi tra l'oro l'evoluzione temporale libera e quella interagente. In [FL14] viene dimostrato come tale operatore possa essere ottenuto esplicitamente nel caso in cui si consideri un'interazione il cui supporto sia descritto da una funzione $g(x)$ come quella definita in (2.5.2). Tale dimostrazione si basa sulla validità di un assioma fondamentale delle teorie algebriche di campo, noto come *time-slice axiom* e soddisfatto sia nel caso di campi liberi che interagenti [CF08]. Questo assioma, che costituisce una forma debole del determinismo della teoria in funzione delle condizioni iniziali, implica che uno stato possa essere completamente caratterizzato dal suo valore di aspettazione su osservabili supportate in un intorno di una superficie di Cauchy fissata. Per i nostri scopi potremo estendere questo intorno ai punti di \mathcal{M} che si trovano nel futuro di Σ_0 , ovvero al sottoinsieme Σ^+ di \mathcal{M} così definito:

$$\Sigma^+ = \{p \in \mathcal{M} | t(p) > 0\}. \quad (2.5.3)$$

Per questo motivo, risulta sufficiente restringere l'attenzione alla ricerca dell'operatore $U(t)$ esclusivamente per le osservabili supportate in Σ^+ . A questo punto, è possibile sfruttare le proprietà causali della matrice S studiate nella Sezione 2.2. Grazie all'equazione ricavata in (2.2.22), sappiamo che la rappresentazione all'interno dell'algebra libera delle osservabili interagenti supportate in un sottoinsieme $\mathcal{O} \subset \Sigma^+$ non risente dei cambiamenti del supporto dell'interazione che avvengono nel futuro, ovvero in $\mathcal{M} \setminus J^-(\mathcal{O})$. Inoltre, per via dell'equazione (2.2.28) sappiamo anche che cambiamenti dell'interazione localizzati nel passato di $t = 0$ producono rappresentazioni unitariamente equivalenti dei campi interagenti supportati su Σ^+ . Ciò consente di scegliere la forma particolare definita in (2.5.2) per

il supporto $g(x)$ dell'interazione, a meno di scelte unitariamente equivalenti per la rappresentazione delle osservabili interagenti. Effettuando tale scelta (in cui l'interazione rimane spenta fino al tempo $t = -\varepsilon$ per poi essere lasciata costante dal tempo $t = 0$ in avanti) è possibile ricavare un'espressione perturbativa per i valori di aspettazione sugli stati KMS della teoria interagente in termini di stati KMS della teoria libera ([FL14]). Inoltre, come fatto nella parte finale di questa sezione, si verifica esplicitamente l'indipendenza dei risultati così ottenuti dalla forma esplicita della funzione di cut-off temporale $\chi(t)$ e dunque da una particolare scelta della rappresentazione dei campi interagenti. Ciò implica che gli operatori unitari che legano tra l'oro le diverse rappresentazioni unitariamente equivalenti commutino con tutti gli elementi dell'algebra delle osservabili, non contribuendo dunque in alcun modo al calcolo del loro valore di aspettazione.

Per comprendere meglio la costruzione degli stati KMS per la teoria interagente presentata in [FL14], iniziamo considerando il caso più semplice in cui l'Hamiltoniana totale del sistema $H = H_0 + H_{int}$ sia a disposizione e l'operatore $e^{-\beta H}$ sia un operatore di classe traccia su di un opportuno spazio di Hilbert. Per quanto visto nel precedente capitolo, la ricerca degli stati KMS della teoria interagente si riduce in questo caso alla ricerca degli stati di Gibbs. Osserviamo ora che in questa situazione l'evoluzione temporale del sistema interagente (τ_t^I) e quella libera (τ_t) per un'osservabile A della teoria sono legate nel modo seguente:

$$\tau_t^I(A) := e^{itH} A e^{-itH} = e^{itH} e^{-itH_0} e^{itH_0} A e^{-itH_0} e^{itH_0} e^{-itH} = U(t) \tau_t(A) U^*(t), \quad (2.5.4)$$

avendo definito nel modo seguente l'operatore $U(t)$ che collega l'evoluzione temporale interagente a quella libera:

$$U(t) := e^{itH} e^{-itH_0}. \quad (2.5.5)$$

L'operatore $U(t)$ può essere utilizzato per costruire uno stato di Gibbs per la teoria interagente (ω_I^β) partendo da uno stato di Gibbs della teoria libera (ω^β). È infatti possibile dimostrare che la funzione di variabile reale $t \rightarrow \omega^\beta(AU(t))$ può essere estesa al piano complesso per $Im(t) \in [0, \beta]$ per una qualunque osservabile A (si veda, ad esempio, [Ara73]). Pertanto, lo stato di Gibbs ω_I^β può essere costruito sfruttando la seguente relazione:

$$\omega_I^\beta(A) := \frac{Tr(Ae^{-\beta H})}{Tr(e^{-\beta H})} = \frac{Tr(Ae^{-\beta H} e^{\beta H_0} e^{-\beta H_0})}{Tr(e^{-\beta H} e^{\beta H_0} e^{-\beta H_0})} = \frac{\omega^\beta(AU(i\beta))}{\omega^\beta(U(i\beta))}. \quad (2.5.6)$$

L'idea proposta da Fredenhagen e Lindner è quella di generalizzare la costruzione (2.5.6), valida per gli stati KMS che siano anche stati di Gibbs, al caso più generale di uno stato KMS qualsiasi nel contesto dell'approccio algebrico alle teorie di campo, ricavando un operatore $U(t)$ che leghi l'evoluzione temporale del sistema libero a quella del sistema interagente in presenza di una Lagrangiana d'interazione come quella descritta in (2.5.1).

Per prima cosa, iniziamo definendo l'evoluzione temporale interagente per un funzionale. Consideriamo ad esempio un'osservabile lineare Φ_f . Allora, come già visto nel precedente capitolo, l'evoluzione temporale libera per tale osservabile è definita nel modo seguente:

$$\tau_t(\Phi_f) := \int f(x_0 - t, \mathbf{x}) \varphi(x) d^4x. \quad (2.5.7)$$

Tale definizione si estende naturalmente ad un generico funzionale F contenuto nell'algebra delle osservabili supportato nel futuro di Σ_0 . L'evoluzione temporale interagente τ_t^V in presenza dell'interazione (2.5.1) è definita utilizzando la formula di Bogoljubov (2.2.3) per la rappresentazione delle osservabili interagenti nel modo seguente:

$$\tau_t^V(R_V(F)) := R_V(\tau_t(F)). \quad (2.5.8)$$

In [FL14], sfruttando la proprietà di fattorizzazione causale (2.2.18), viene mostrato come l'operatore $U(t)$ che collega l'evoluzione temporale libera a quella interagente mediante la seguente relazione (che generalizza l'equazione (2.5.4)):

$$\tau_t^V(R_V(F)) = U(t) \star \tau_t(R_V(F)) \star U^{-1}(t) \quad \text{per } t > 0 \text{ e } \text{Supp}F \subset J^+(\Sigma_0), \quad (2.5.9)$$

possa essere scritto nel modo seguente nel caso in cui $t > 0$:

$$U(t) = S_V(\tau_t(V) - V), \quad (2.5.10)$$

dove con $S_V(\cdot)$ abbiamo indicato la *matrice S relativa*:

$$S_V(A) := S^{-1}(V) \star S(V + A) \quad \text{con } A \in \mathcal{F}_{\mu c}. \quad (2.5.11)$$

Inoltre, viene anche mostrato come l'operatore $U(t)$ soddisfi la seguente relazione di *cociclo*:

$$U(t + s) = U(t) \star \tau_t(U(s)), \quad (2.5.12)$$

e come il generatore K di tale relazione, per un'interazione del tipo (2.5.1), possa essere scritto nel modo seguente:

$$K = \int \dot{\chi}(t) h(\mathbf{x}) R_V(-\mathcal{L}_{int}(x)) d^4x, \quad (2.5.13)$$

avendo indicato con $\dot{\chi}$ la derivata temporale della funzione $\chi(t)$.

L'operatore $U(t)$ può essere dunque utilizzato per generalizzare l'espressione (2.5.6) al caso di nostro interesse. Infatti, è possibile dimostrare che per ogni osservabile F la funzione di variabile reale:

$$t \rightarrow \omega^\beta(F \star U(t)) \quad \text{con } F \in \mathcal{F}_{\mu c} \quad (2.5.14)$$

può essere continuata analiticamente nel piano complesso per $\text{Im}(t) \in [0, \beta]$ e che uno stato KMS per la teoria interagente $\omega^{\beta, V}$ è correttamente definito dalla seguente relazione (che generalizza l'espressione (2.5.6)):

$$\omega^{\beta, V}(F) := \frac{\omega^\beta(F \star U(i\beta))}{\omega^\beta(U(i\beta))}. \quad (2.5.15)$$

In [FL14], inoltre, viene ricavata la seguente espressione perturbativa per il calcolo del valore di aspettazione di un'osservabile F sullo stato $\omega^{\beta, V}$:

$$\omega^{\beta, V}(F) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \int_{\beta S_n} du_1 \dots du_n \omega^{\beta, c}(F \otimes \tau_{iu_1} K \otimes \dots \otimes \tau_{iu_n} K), \quad (2.5.16)$$

dove il dominio di integrazione è dato dal sottoinsieme di \mathbb{R}^n $\beta S_n := \{(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 < u_1 < \dots < u_n < \beta\}$ mentre con $\omega^{\beta, c}$ abbiamo indicato le *funzioni di correlazione connesse*¹ associate allo stato KMS della teoria libera ω^β .

È importante evidenziare due proprietà dello stato $\omega^{\beta, V}$ descritto dall'espressione perturbativa (2.5.16). Per prima cosa, i valori di aspettazione delle osservabili interagenti ottenuti utilizzando lo stato $\omega^{\beta, V}$ non presentano una dipendenza esplicita alla funzione $\chi(t)$ che descrive il processo di accensione dell'interazione. Nei prossimi capitoli forniremo

¹Le funzioni di correlazione connesse ad n -punti sono le funzioni di correlazione ottenute dal calcolo del valore di aspettazione di n campi escludendo i contributi provenienti dai grafici in cui non tutti i punti corrispondenti ai campi siano connessi tra loro.

una verifica diretta di questo fatto in alcune situazioni particolari. Ciò consente, a livello pratico, di considerare i risultati ottenuti accendendo l'interazione ad un tempo finito come validi anche nel limite in cui l'interazione sia accesa a tempi infinitamente distanti nel passato. Questa osservazione discende direttamente dalle proprietà di equilibrio sotto l'evoluzione temporale soddisfatte dagli stati KMS. Immaginiamo di traslare l'accensione χ dell'interazione indietro nel tempo di un fattore $-t^*$ con $t^* > 0$. Indichiamo con il simbolo V_{-t^*} l'interazione traslata:

$$V_{-t^*} := \int \chi(t+t^*)h(\mathbf{x})\mathcal{L}_{int}(x) d^4x. \quad (2.5.17)$$

Valutiamo ora il valore medio di un'osservabile locale A supportato nel futuro di Σ_0 e appartenente alla nuova teoria interagente su uno stato $\omega^{\beta, V_{-t^*}}$ che soddisfi la condizione KMS per la nuova evoluzione temporale. Utilizzando la definizione (2.5.15) si ottiene immediatamente la seguente uguaglianza:

$$\omega^{\beta, V_{-t^*}}(R_{V_{-t^*}}(A)) = \frac{\omega^{\beta}(R_{V_{-t^*}}(A) \star U'(i\beta))}{\omega^{\beta}(U'(i\beta))}, \quad (2.5.18)$$

dove con $U'(t)$ è stata indicato l'operatore che collega l'evoluzione temporale libera a quella interagente determinata dall'interazione V_{-t^*} :

$$U'(t) = S_{V_{-t^*}}(\tau_t(V_{-t^*}) - V_{-t^*}). \quad (2.5.19)$$

Osserviamo ora che, essendo lo stato ω^{β} uno stato KMS rispetto all'evoluzione temporale libera τ_t , si ha per definizione la seguente uguaglianza:

$$\omega^{\beta}(F) = \omega^{\beta}(\tau_t(F)) \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.5.20)$$

Componendo lo stato ω^{β} in (2.5.18) con la traslazione temporale τ_{t^*} si ottiene dunque la seguente catena di uguaglianze:

$$\begin{aligned} \frac{\omega^{\beta}(R_{V_{-t^*}}(A) \star U'(i\beta))}{\omega^{\beta}(U'(i\beta))} &= \frac{\omega^{\beta}(R_V(\tau_{t^*}(A)) \star U(i\beta))}{\omega^{\beta}(U(i\beta))} \\ &= \omega^{\beta, V}(R_V(\tau_{t^*}(A))) = \omega^{\beta, V}(\tau_{t^*}^V(R_V(A))). \end{aligned} \quad (2.5.21)$$

Nell'ultimo passaggio è stata usata la definizione dell'evoluzione temporale interagente fornita in (2.5.8). Concludiamo ora la dimostrazione utilizzando il fatto che lo stato $\omega^{\beta, V}$ soddisfa la condizione KMS per l'evoluzione temporale interagente. Pertanto si ha:

$$\omega^{\beta, V_{-t^*}}(R_{V_{-t^*}}(A)) = \omega^{\beta, V}(R_V(A)). \quad (2.5.22)$$

Considerando il limite $t^* \rightarrow \infty$ abbiamo dunque dimostrato come i valori di aspettazione ottenuti accendendo l'interazione ad un tempo finito continuano ad essere validi anche nel caso limite in cui l'interazione sia stata accesa in un tempo infinitamente distante nel passato.

La seconda importante osservazione riguarda invece il *limite adiabatico*. Sebbene infatti lo stato $\omega^{\beta, V}$ sia stato ricavato assumendo che l'interazione V definita in (2.5.1) abbia un supporto spaziale compatto, Fredenhagen e Lindner hanno dimostrato come tale stato continui ad essere ben definito e a rispettare la condizione KMS per l'evoluzione temporale interagente anche se il cut-off spaziale viene rimosso. Questo limite, chiamato appunto limite adiabatico, è ottenuto considerando il limite $h(\mathbf{x}) \rightarrow 1$. La dimostrazione di quest'ultima proprietà è basata sulla rapida (esponenziale) velocità di decrescenza delle funzioni ad n -punti connesse degli stati KMS della teoria libera $\omega^{\beta, c}$ per punti con grandi separazioni spaziali.

Capitolo 3

Campo scalare reale: interazione quadratica

Introduzione al capitolo

In questo capitolo applicheremo la costruzione algebrica studiata in precedenza ad uno specifico sistema fisico. Più in dettaglio, il sistema che intendiamo studiare è quello di un *campo scalare reale massivo interagente* a temperatura finita T . L'interazione trattata è descritta da una densità Lagrangiana quadratica nei campi, ovvero una perturbazione della massa del campo stesso, accesa in modo liscio ad un tempo finito. L'obiettivo è quello di ricavare e studiare quantità fisiche di interesse, come le funzioni di correlazione della teoria o il valore medio di osservabili locali. Le funzioni di correlazione, in particolare, rappresentano oggetti di importanza fondamentale nell'ambito delle teorie di campo, in quanto consentono di studiare fenomeni fisici e caratteristiche importanti del sistema. Inoltre, tramite la *formula di riduzione LSZ*, le funzioni di correlazione possono essere utilizzate per calcolare gli elementi della matrice S nei processi di scattering (si veda a riguardo [Dav06] e [Sre07]).

Nella prima parte del capitolo, la funzione a 2-punti del sistema viene ricavata al primo ed al secondo ordine perturbativo componendo uno stato KMS per la teoria libera, che indicheremo con la notazione ω^β , con la formula di Bogoljubov descritta nel precedente capitolo. Come mostrato in [BDP19] questo approccio, in cui l'effetto dell'interazione è tenuto in considerazione esclusivamente al livello algebrico dei campi, coincide con quanto fatto in altri approcci tradizionalmente utilizzati nel contesto delle teorie di campo a temperatura finita, come ad esempio quello di *Keldish-Schwinger* (si veda [Kam04] per maggiori informazioni su questa tecnica). In particolare, viene mostrato come le espressioni ottenute in questo modo non siano invarianti sotto traslazioni temporali e presentino una dipendenza esplicita dalla funzione $\chi(t)$ che descrive il modo in cui l'interazione si attiva nel tempo, anche dopo che l'interazione è stata definitivamente accesa. Questo comportamento, che complica l'utilizzo dell'approccio perturbativo, è riconducibile al fatto che lo stato ω^β utilizzato per calcolare la funzione a due punti della teoria non è uno stato KMS per l'evoluzione temporale interagente. Sebbene lo stato ω^β possieda un significato fisico preciso all'interno della teoria libera (rappresenta infatti uno stato termico rispetto all'evoluzione temporale libera τ_t) esso cessa di avere tale significato nel contesto della teoria interagente. Dunque, i problemi incontrati utilizzando lo stato ω^β possono essere risolti considerando l'effetto dell'interazione anche al livello degli stati (e non solo al livello degli osservabili) utilizzando uno stato $\omega^{\beta,V}$ che rispetti la condizione KMS per l'evoluzione temporale interagente. Come visto nell'ultima sezione del precedente capito-

lo, tale stato può essere ottenuto utilizzando la costruzione proposta da Fredenhagen e Lindner in [FL14].

Nella parte conclusiva del capitolo viene ricavata esplicitamente la funzione a due punti della teoria interagente al primo ordine perturbativo utilizzando il nuovo stato $\omega^{\beta,V}$. Il risultato così ottenuto viene dunque analizzato e confrontato con quello calcolato in precedenza facendo uso dello stato ω^β .

3.1 Sistema fisico in esame

Il sistema fisico che vogliamo studiare è quello di un *campo scalare reale massivo interagente*. L'interazione trattata è un'interazione quadratica nei campi accesa in modo liscio ad un tempo finito e rappresenta dunque una perturbazione della massa iniziale del campo scalare. La densità Lagrangiana del sistema può essere pertanto scritta nel modo seguente:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \frac{1}{2}m_1^2\varphi^2 + \frac{1}{2}(m_1^2 - m_2^2)\chi(t)h(\mathbf{x})\varphi^2. \quad (3.1.1)$$

Con m_1 ed m_2 abbiamo indicato rispettivamente la massa iniziale e finale del campo, con $h(\mathbf{x})$ un cut-off spaziale e con $\chi(t)$ il cut-off temporale che descrive l'accensione liscia dell'interazione al tempo $t = 0$, definito come nell'ultimo paragrafo del precedente capitolo. Quando $\chi(t)$ assume il valore costante 1 la massa iniziale del campo m_1 viene sostituita dalla nuova massa m_2 . La Lagrangiana di interazione V coinciderà dunque con il seguente funzionale:

$$V = \int \frac{1}{2}(m_1^2 - m_2^2)\chi(t)h(\mathbf{x})\varphi^2(x) d^4x. \quad (3.1.2)$$

Nei prossimi paragrafi intendiamo studiare il sistema quantistico caratterizzato dalla densità Lagrangiana (3.1.1), focalizzando l'attenzione sulla ricerca di espressioni perturbative per le funzioni a due punti degli stati termici della teoria. In particolare, come anticipato nell'introduzione, il nostro obiettivo consiste nel ricavare e confrontare le funzioni a due punti ottenute utilizzando uno stato $\omega^\beta \circ R_V$ (ovvero la composizione di uno stato KMS della teoria libera con la formula di Bogoljubov) con quelle ricavate mediante l'uso di uno stato $\omega^{\beta,V}$ costruito seguendo l'approccio proposto in [FL14]. La scelta della Lagrangiana di interazione (3.1.2) è giustificata da due motivazioni. Per prima cosa risulta interessante osservare come anche nel caso più semplice possibile, ovvero quello di un'interazione quadratica nei campi, l'utilizzo di stati differenti a temperatura finita determini differenze fondamentali nel calcolo del valore di aspettazione degli osservabili. In secondo luogo, le equazioni di campo classiche che discendono dalla densità Lagrangiana (3.1.1) possono essere risolte in modo esatto, in quanto al loro interno figura esclusivamente un termine di interazione lineare nei campi. Come vedremo nella prossima sezione, ciò consente di ottenere esplicitamente una funzione a due punti della teoria interagente risolvendo perturbativamente le equazioni del moto e di confrontare tale risultato con quelli ottenuti utilizzando il formalismo della mappa di Bogoljubov e degli stati KMS descritti in [FL14].

3.2 Soluzione dell'equazione di campo interagente

Consideriamo la densità Lagrangiana (3.1.1) nel limite adiabatico $h(\mathbf{x}) \rightarrow 1$:

$$\mathcal{L}_{h=1} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \frac{1}{2}m_1^2\varphi^2 + \frac{1}{2}(m_1^2 - m_2^2)\chi(t)\varphi^2. \quad (3.2.1)$$

Da tale Lagrangiana discendono le seguenti equazioni del moto per il campo φ :

$$(\square - m_1^2)\varphi(x) = (m_2^2 - m_1^2)\chi(t)\varphi(x). \quad (3.2.2)$$

Il nostro obiettivo è ora quello di utilizzare l'equazione (3.2.2) per ricavare la funzione a due punti della teoria interagente. In particolare, siamo interessati ad ottenere la funzione $\omega_2^\beta(x, y)$ non come una soluzione esatta di (3.2.2), ma, piuttosto, risolvendo tale equazione differenziale in modo perturbativo. Per fare ciò, iniziamo scrivendo la funzione $\omega_2^\beta(x, y)$ attraverso una decomposizione in modi (che indichiamo con il simbolo $T_{\mathbf{p}}(t)$):

$$\omega_2^\beta(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p} \left[\frac{1}{1 - e^{-\beta\omega_p}} \overline{T_{\mathbf{p}}}(t_x) T_{\mathbf{p}}(t_y) - \frac{1}{1 - e^{\beta\omega_p}} T_{\mathbf{p}}(t_x) \overline{T_{\mathbf{p}}}(t_y) \right] e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}. \quad (3.2.3)$$

Come di consueto con ω_p abbiamo indicato la frequenza del campo libero, ovvero $\omega_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_1^2}$. Sostituendo l'espressione (3.2.3) nell'equazione (3.2.2) otteniamo la seguente equazione differenziale per il generico modo $T_{\mathbf{p}}(t)$:

$$(\omega_p^2 + \partial_t^2) T_{\mathbf{p}}(t) = (m_1^2 - m_2^2) \chi(t) T_{\mathbf{p}}(t). \quad (3.2.4)$$

Siamo interessati a risolvere il corrispondente problema di Cauchy richiedendo come condizione iniziale che la funzione a due punti della teoria interagente coincida con quella della teoria libera per tempi antecedenti all'accensione dell'interazione, ovvero per $t < -\varepsilon$. Pertanto, richiediamo che il modo $T_{\mathbf{p}}(t)$ coincida con quello della teoria libera $T_{\mathbf{p}}^0(t)$ per $t < -\varepsilon$:

$$T_{\mathbf{p}}(t)|_{t < -\varepsilon} := T_{\mathbf{p}}^0(t) = \frac{e^{i\omega_p t}}{\sqrt{2\omega_p}}. \quad (3.2.5)$$

Per ottenere una soluzione approssimata, supponiamo ora che il modo $T_{\mathbf{p}}(t)$ possa essere espanso mediante una serie perturbativa nel termine di interazione $(m_1^2 - m_2^2)\chi(t)$:

$$T_{\mathbf{p}}(t) = \sum_{n \geq 0} \mathcal{F}_{\mathbf{p}}^{(n)}(t). \quad (3.2.6)$$

È possibile mostrare che tale serie esiste ed è una serie convergente nel parametro di interazione $(m_1^2 - m_2^2)$. Per determinare esplicitamente i termini $\mathcal{F}_{\mathbf{p}}^{(n)}$ inseriamo l'espansione (3.2.6) in (3.2.4), ottenendo così la seguente equazione:

$$\sum_{n \geq 0} (\partial_t^2 + \omega_p^2) \mathcal{F}_{\mathbf{p}}^{(n)} = \chi(t) (m_1^2 - m_2^2) \sum_{n \geq 0} \mathcal{F}_{\mathbf{p}}^{(n)}. \quad (3.2.7)$$

Filtrando in base all'ordine delle potenze nell'interazione $(m_1^2 - m_2^2)\chi(t)$ otteniamo le seguenti equazioni differenziali per i termini $\mathcal{F}_{\mathbf{p}}^{(n)}(t)$:

$$\begin{aligned} (\partial_t^2 + \omega_p^2) \mathcal{F}_{\mathbf{p}}^{(0)}(t) &= 0, \\ (\partial_t^2 + \omega_p^2) \mathcal{F}_{\mathbf{p}}^{(1)}(t) &= \chi(t) (m_1^2 - m_2^2) \mathcal{F}_{\mathbf{p}}^{(0)}(t), \\ &\dots \\ (\partial_t^2 + \omega_p^2) \mathcal{F}_{\mathbf{p}}^{(n)}(t) &= \chi(t) (m_1^2 - m_2^2) \mathcal{F}_{\mathbf{p}}^{(n-1)}(t). \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

Osserviamo che la soluzione della prima equazione è data dal modo $T_{\mathbf{p}}^0(t)$ della teoria libera. I termini $\mathcal{F}_{\mathbf{p}}^{(n)}|_{n \geq 1}$ di ordine successivo possono essere ottenuti in modo ricorsivo conoscendo il propagatore ritardato $\Delta_R(x, y)$ per l'operatore $P := (\partial_t^2 + \omega_p^2)$. Tale propagatore è stato ricavato, a meno di un segno, nella prima sezione del capitolo 1 ed è dato dalla seguente espressione:

$$\Delta_R(t) = \theta(t) \frac{\sin(t\omega_k)}{\omega_k}. \quad (3.2.9)$$

Le soluzioni delle equazioni (3.2.8) possono essere dunque scritte nel modo seguente:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\mathbf{P}}^{(0)}(t) &= \frac{e^{i\omega_p t}}{\sqrt{2\omega_p}}, & (3.2.10) \\ \mathcal{T}_{\mathbf{P}}^{(1)}(t) &= \Delta_R(\chi(m_1^2 - m_2^2)\mathcal{T}_{\mathbf{P}}^{(0)})(t), \\ \mathcal{T}_{\mathbf{P}}^{(2)}(t) &= \Delta_R\left(\chi(m_1^2 - m_2^2)\Delta_R(\chi(m_1^2 - m_2^2)\mathcal{T}_{\mathbf{P}}^{(0)})\right)(t), \\ &\dots\end{aligned}$$

Esplicitando infine l'azione del propagatore ritardato otteniamo il seguente risultato:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\mathbf{P}}^{(0)}(t) &= \frac{e^{i\omega_p t}}{\sqrt{2\omega_p}}, & (3.2.11) \\ \mathcal{T}_{\mathbf{P}}^{(1)}(t) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\theta(t-t') \sin(\omega_p(t-t'))}{\omega_p} \chi(t')(m_1^2 - m_2^2) \frac{e^{i\omega_p t'}}{\sqrt{2\omega_p}} dt', \\ \mathcal{T}_{\mathbf{P}}^{(2)}(t) &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\theta(t-t') \sin(\omega_p(t-t'))}{\omega_p} \times \\ &\quad \frac{\theta(t'-t'') \sin(\omega_p(t'-t''))}{\omega_p} (m_1^2 - m_2^2)^2 \chi(t')\chi(t'') \frac{e^{i\omega_p t''}}{\sqrt{2\omega_p}} dt' dt'', \\ &\dots\end{aligned}$$

Prima di utilizzare il risultato ottenuto in (3.2.11) per calcolare le correzioni alla funzione a due punti $\omega_2^\beta(x, y)$ della teoria interagente, valutiamo l'integrale che compare nel termine $\mathcal{T}_{\mathbf{P}}^1(t)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\mathbf{P}}^{(1)}(t) &= \int_{-\infty}^t \frac{e^{i\omega_p(t-t')} - e^{-i\omega_p(t-t')}}{2i\omega_p} \chi(t')(m_1^2 - m_2^2) \frac{e^{i\omega_p t'}}{\sqrt{2\omega_p}} dt' & (3.2.12) \\ &= \frac{(m_1^2 - m_2^2)}{i(2\omega_p)^{\frac{3}{2}}} \left[e^{i\omega_p t} \int_{-\infty}^t \chi(t') dt' - \int_{-\infty}^t \chi(t') e^{-i\omega_p(t-2t')} dt' \right].\end{aligned}$$

Sfruttando la forma del supporto della funzione $\chi(t)$ il primo integrale può essere scomposto nel modo seguente:

$$\frac{(m_1^2 - m_2^2)}{i(2\omega_p)^{\frac{3}{2}}} e^{i\omega_p t} \int_{-\infty}^t \chi(t') dt' = \frac{(m_1^2 - m_2^2)}{i(2\omega_p)^{\frac{3}{2}}} e^{i\omega_p t} \left[\int_{-\varepsilon}^0 \chi(t') dt' + \int_0^t 1 dt' \right]. \quad (3.2.13)$$

Evidentemente, il primo addendo in (3.2.13) fornisce un risultato finito, in quanto integrale di una funzione liscia su un supporto compatto. Al contrario, il secondo addendo contribuisce con un termine proporzionale in modulo a t , ovvero con una crescita lineare nei tempi. È inoltre possibile mostrare che il secondo integrale in (3.2.12) fornisce esclusivamente contributi finiti che, dunque, non possono cancellare la crescita trovata in (3.2.13). Analizzando le espressioni esplicite per i termini $\mathcal{T}_{\mathbf{P}}^{(n)}$ della serie ottenuti in (3.2.11) è possibile verificare che, in generale, il modulo del termine n -esimo presenta una crescita polinomiale di grado n nella variabile temporale t . Tali crescite polinomiali nel tempo prendono il nome di *effetti secolari*.

Utilizziamo ora le espressioni ricavate in (3.2.11) per calcolare le correzioni perturbative delle funzione a due punti al primo ed al secondo ordine. L'ordine 0, ottenuto approssimando i modi $T_{\mathbf{P}}(t)$ in (3.2.3) con il solo termine $\mathcal{T}_{\mathbf{P}}^0(t)$, corrisponde alla funzione

a due punti di uno stato KMS della teoria libera ottenuta nella Sezione 2.2 del capitolo 1. Per quanto riguarda la correzione al primo ordine, essa può essere calcolata sommando i contributi ottenuti sostituendo al prodotto $\bar{T}_{\mathbf{p}}(t_x)T_{\mathbf{p}}(t_y)$ dei modi nell'espressione (3.2.3) il prodotto $\bar{\mathcal{T}}_{\mathbf{p}}^{(1)}(t_x)\mathcal{T}_{\mathbf{p}}^{(0)}(t_y)$ e il prodotto $\bar{\mathcal{T}}_{\mathbf{p}}^{(0)}(t_x)\mathcal{T}_{\mathbf{p}}^{(1)}(t_y)$ dei termini della serie perturbativa. Effettuando tale sostituzione si ottengono i due seguenti contributi:

$$\begin{aligned} \text{I}^a := & \int dt_s (m_1^2 - m_2^2) \frac{\chi(t_s)}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p} \frac{\sin(\omega_p(t_x - t_s))}{\omega_p} \theta(t_x - t_s) \times \\ & \left[\frac{e^{-i\omega_p(t_s - t_y)}}{(1 - e^{-\beta\omega_p})2\omega_p} - \frac{e^{i\omega_p(t_s - t_y)}}{(1 - e^{\beta\omega_p})2\omega_p} \right] e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}, \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

e

$$\begin{aligned} \text{II}^a := & \int dt_s (m_1^2 - m_2^2) \frac{\chi(t_s)}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p} \frac{\sin(\omega_p(t_y - t_s))}{\omega_p} \theta(t_y - t_s) \times \\ & \left[\frac{e^{-i\omega_p(t_x - t_s)}}{(1 - e^{-\beta\omega_p})2\omega_p} - \frac{e^{i\omega_p(t_x - t_s)}}{(1 - e^{\beta\omega_p})2\omega_p} \right] e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}. \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

Le correzioni al secondo ordine della funzione a due punti della teoria interagente possono essere invece ottenute sostituendo al prodotto dei modi in (3.2.3) il prodotto di un termine della serie perturbativa di ordine 0 con uno di ordine 2 o il prodotto di due termini di ordine 1. In questo modo si ottengono le tre seguenti correzioni perturbative:

$$\begin{aligned} \text{I}^b = & \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p} \int_{\mathbb{R}^2} dt_s dt_z \theta(t_x - t_s) \theta(t_s - t_z) \frac{\sin(\omega_p(t_x - t_s)) \sin(\omega_p(t_s - t_z))}{\omega_p^2} \times \\ & \left[\frac{e^{-i\omega_p(t_z - t_y)}}{(1 - e^{-\beta\omega_p})2\omega_p} - \frac{e^{i\omega_p(t_z - t_y)}}{(1 - e^{\beta\omega_p})2\omega_p} \right] (m_1^2 - m_2^2)^2 \chi(t_s) \chi(t_z) e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}, \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

$$\begin{aligned} \text{II}^b = & \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p} \int_{\mathbb{R}^2} dt_s dt_z \theta(t_y - t_s) \theta(t_s - t_z) \frac{\sin(\omega_p(t_y - t_s)) \sin(\omega_p(t_s - t_z))}{\omega_p^2} \times \\ & \left[\frac{e^{-i\omega_p(t_x - t_z)}}{(1 - e^{-\beta\omega_p})2\omega_p} - \frac{e^{i\omega_p(t_x - t_z)}}{(1 - e^{\beta\omega_p})2\omega_p} \right] (m_1^2 - m_2^2)^2 \chi(t_s) \chi(t_z) e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}, \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

$$\begin{aligned} \text{III}^b = & \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p} \int_{\mathbb{R}^2} dt_s dt_z \theta(t_x - t_s) \theta(t_y - t_z) \frac{\sin(\omega_p(t_x - t_s)) \sin(\omega_p(t_y - t_z))}{\omega_p^2} \times \\ & \left[\frac{e^{-i\omega_p(t_s - t_z)}}{(1 - e^{-\beta\omega_p})2\omega_p} - \frac{e^{i\omega_p(t_s - t_z)}}{(1 - e^{\beta\omega_p})2\omega_p} \right] (m_1^2 - m_2^2)^2 \chi(t_s) \chi(t_z) e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}. \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

Come vedremo nei prossimi paragrafi, i risultati appena ricavati mediante la risoluzione perturbativa dell'equazione di campo interagente per la funzione a due punti della teoria possono essere calcolati anche nel contesto della teoria algebrica di campo. Essi possono essere ottenuti valutando il valore di aspettazione del prodotto di campi interagenti su uno stato termico. In particolare, le espressioni da (3.2.14) a (3.2.18) corrispondono ai risultati che si ottengono espandendo la formula di Bogoljubov per la rappresentazione dei campi interagenti (ovvero tenendo in considerazione l'effetto dell'interazione sugli osservabili), ma calcolando la funzione a due punti utilizzando uno stato ω^β che sia uno stato KMS per la teoria libera e non per quella interagente.

3.3 Funzione a due punti sullo stato ω^β

3.3.1 Correzione al primo ordine perturbativo

In questa sezione calcoliamo ed analizziamo la correzione al primo ordine perturbativo della funzione a due punti della teoria interagente, componendo uno stato ω^β che sia uno stato KMS per l'evoluzione temporale libera con la formula di Bogoljubov per la rappresentazione dei campi interagenti. Come vedremo, il risultato così ottenuto, considerandone il limite adiabatico, coincide con quello ricavato nella precedente sezione e presenta le problematiche descritte nell'introduzione al capitolo.

L'espressione che vogliamo calcolare è la seguente¹:

$$\begin{aligned} \omega_2^\beta(x, y) &:= \omega^\beta(R_V(\varphi(x)) \star R_V(\varphi(y))) \\ &= \omega^\beta(S(V)^{-1} \star [S(V) \cdot_T \varphi(x)] \star S(V)^{-1} \star [S(V) \cdot_T \varphi(y)]) \xrightarrow{\text{I ordine}} \\ &\omega^\beta(\varphi(x) \star \varphi(y)) + \omega^\beta([-iV \star \varphi(x) + iV \cdot_T \varphi(x)] \star \varphi(y)) + \\ &\omega^\beta(\varphi(x) \star [-iV \star \varphi(y) + iV \cdot_T \varphi(y)]). \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo trascurato tutti i termini di ordine superiore al primo nell'interazione V e abbiamo utilizzato l'espressione esplicita per la matrice $S(V)^{-1}$ ricavata nella seconda sezione del precedente capitolo. Il termine di ordine 0, che indichiamo con il simbolo $\omega_2^{\beta, (0)}$ corrisponde alla funzione a due punti di uno stato KMS della teoria libera:

$$\omega_2^{\beta, (0)} = \omega^\beta(\varphi(x) \star \varphi(y)), \quad (3.3.2)$$

in accordo con quanto trovato nella precedente sezione. Calcoliamo ora la prima delle due correzioni perturbative presenti in (3.3.1) che, per comodità, indichiamo con la notazione Z_1 :

$$Z_1 := \omega^\beta([-iV \star \varphi(x) + iV \cdot_T \varphi(x)] \star \varphi(y)), \quad (3.3.3)$$

utilizzando la teoria descritta ed analizzata nei precedenti capitoli. Per calcolare i prodotti star e tempo-ordinati facciamo uso delle seguenti derivate funzionali:

$$\frac{\delta V}{\delta \varphi} = (m_1^2 - m_2^2)\chi(t_x)h(\mathbf{x})\varphi(x) =: \lambda f(x)\varphi(x), \quad (3.3.4)$$

$$\frac{\delta \varphi(x)}{\delta \varphi(y)} = \delta^{(4)}(x - y), \quad (3.3.5)$$

dove abbiamo definito la costante di accoppiamento $\lambda = (m_1^2 - m_2^2)$ e il cut-off $f(x) = \chi(t_x)h(\mathbf{x})$.

¹Con il simbolo \star indichiamo il prodotto non commutativo ottenuto utilizzando la funzione a due punti della teoria libera dello stato ω^β .

Otteniamo così il seguente risultato:

$$\begin{aligned}
 Z_1 &= \omega^\beta([-iV \star \varphi(x) + iV \cdot_T \varphi(x)] \star \varphi(y)) = & (3.3.6) \\
 &\omega^\beta\left(\left[-iV \cdot \varphi(x) - i \int dz dt \omega_2^{\beta,(0)}(z,t) \lambda \varphi(z) f(z) \delta^{(4)}(x-t) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + iV \cdot \varphi(x) + i \int dz dt \Delta^F(z,t) \lambda \varphi(z) f(z) \delta^{(4)}(x-t)\right] \star \varphi(y)\right) = \\
 &\omega^\beta\left(\left[-i \int dz (\omega_2^{\beta,(0)}(z,x) - \Delta^F(z,x)) \lambda \varphi(z) f(z)\right] \star \varphi(y)\right) = \\
 &\left[- \int dz \Delta_R(x,z) \lambda \varphi(z) f(z)\right] \star \varphi(y) \Big|_{\varphi=0} = \\
 &- \int \omega_2^{\beta,(0)}(s,y) \Delta_R(x,s) \lambda f(s) ds.
 \end{aligned}$$

Nel passare dalla quarta alla quinta riga abbiamo utilizzato la relazione che per definizione lega il propagatore di Feynman al propagatore ritardato (come visto nel capitolo 2):

$$\Delta^F(z,x) - \omega_2^{\beta,(0)}(z,x) = i\Delta_A(z,x) = i\Delta_R(x,z). \quad (3.3.7)$$

Per esplicitare il risultato ottenuto in (3.3.6) utilizziamo le espressioni ottenute nel primo capitolo per il propagatore ritardato e la funzione a due punti di uno stato KMS della teoria libera. Per comodità, riportiamo di seguito tali espressioni:

$$\Delta_R(x-y) = - \int \frac{1}{(2\pi)^3} \theta(t_x - t_y) \frac{\sin(\omega_k(t_x - t_y))}{\omega_k} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} d^3\mathbf{k}. \quad (3.3.8)$$

$$\omega_2^{\beta,(0)}(x-y) = \int \frac{1}{(2\pi)^3} \left[\frac{e^{-i\omega_p(t_x-t_y)}}{(1-e^{-\beta\omega_p})2\omega_p} - \frac{e^{i\omega_p(t_x-t_y)}}{(1-e^{\beta\omega_p})2\omega_p} \right] e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} d^3\mathbf{p}. \quad (3.3.9)$$

Sostituendo la (3.3.8) e la (3.3.9) in (3.3.6) otteniamo:

$$\begin{aligned}
 Z_1 &= \omega^\beta([-iV \star \varphi(x) + iV \cdot_T \varphi(x)] \star \varphi(y)) = & (3.3.10) \\
 &\frac{1}{(2\pi)^6} \int ds \lambda f(s) \int \int d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{p} \theta(t_x - t_s) \frac{\sin(\omega_k(t_x - t_s))}{\omega_k} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{s})} \times \\
 &\left[\frac{e^{-i\omega_p(t_s-t_y)}}{(1-e^{-\beta\omega_p})2\omega_p} - \frac{e^{i\omega_p(t_s-t_y)}}{(1-e^{\beta\omega_p})2\omega_p} \right] e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{s}-\mathbf{y})}.
 \end{aligned}$$

Consideriamo ora il *limite adiabatico*, ovvero il limite in cui $h(\mathbf{s}) \rightarrow 1$ e $f(s) \rightarrow \chi(t_s)$. Questo limite ci consente di calcolare l'integrale nella parte spaziale della variabile s sfruttando la seguente identità distribuzionale:

$$\int d^3\mathbf{s} e^{i\mathbf{s}\cdot(\mathbf{p}-\mathbf{k})} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{k}). \quad (3.3.11)$$

Tale uguaglianza codifica l'informazione riguardante la conservazione del tri-impulso nei vertici di interazione nel caso in cui si abbia una densità Lagrangiana invariante sotto traslazioni spaziali (condizione ottenuta in questo caso considerando il limite adiabatico). Sfruttando la delta di Dirac sugli impulsi per svolgere una delle due integrazioni in (3.3.10) si ottiene infine il seguente risultato:

$$\begin{aligned}
 Z_1 &= \int dt_s (m_1^2 - m_2^2) \frac{\chi(t_s)}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p} \frac{\sin(\omega_p(t_x - t_s))}{\omega_p} \theta(t_x - t_s) \times \\
 &\left[\frac{e^{-i\omega_p(t_s-t_y)}}{(1-e^{-\beta\omega_p})2\omega_p} - \frac{e^{i\omega_p(t_s-t_y)}}{(1-e^{\beta\omega_p})2\omega_p} \right] e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}. & (3.3.12)
 \end{aligned}$$

Questo risultato coincide con quello ottenuto in (3.2.14) risolvendo in modo perturbativo l'equazione di campo interagente. Ripetendo il conto appena effettuato per la seconda correzione perturbativa presente in (3.3.1), che indichiamo con il simbolo Z_2 :

$$Z_2 := \omega^\beta (\varphi(x) \star [-iV \star \varphi(y) + iV \cdot_T \varphi(y)]), \quad (3.3.13)$$

è possibile riottenere l'espressione ricavata in (3.2.15), che qui riportiamo per comodità:

$$Z_2 = \int dt_s (m_1^2 - m_2^2) \frac{\chi(t_s)}{(2\pi)^3} \int d^3 \mathbf{p} \frac{\sin(\omega_p(t_y - t_s))}{\omega_p} \theta(t_y - t_s) \times \left[\frac{e^{-i\omega_p(t_x - t_s)}}{(1 - e^{-\beta\omega_p})2\omega_p} - \frac{e^{i\omega_p(t_x - t_s)}}{(1 - e^{\beta\omega_p})2\omega_p} \right] e^{-i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}. \quad (3.3.14)$$

Analizziamo ora il termine Z_1 più in dettaglio, cercando di identificare la presenza di termini non invarianti sotto traslazioni temporali. Per fare ciò, decomponiamo la funzione $\sin(\omega_p(t_x - t_s))$ nella somma di due esponenziali immaginari e selezioniamo gli addendi che contengano un esponenziale immaginario dipendente dalla somma $t_x + t_y$. In questo modo otteniamo il seguente contributo, denotato con il simbolo Z_1^+ :

$$Z_1^+ := \int_{-\infty}^{t_x} dt_s (m_1^2 - m_2^2) \frac{\chi(t_s)}{(2\pi)^3} \int d^3 \mathbf{p} \left[\frac{e^{i\omega_p(t_x + t_y - 2t_s)}}{4i\omega_p^2(1 - e^{-\beta\omega_p})} + \frac{e^{-i\omega_p(t_x + t_y - 2t_s)}}{4i\omega_p^2(1 - e^{\beta\omega_p})} \right] e^{-i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}. \quad (3.3.15)$$

Assumiamo ora che i campi $\varphi(x)$ e $\varphi(y)$ siano considerati in due tempi successivi all'accensione definitiva dell'interazione e che si abbia pertanto $\chi(t_x) = \chi(t_y) = 1$. La precedente espressione può essere così riscritta effettuando un'integrazione per parti, ottenendo il seguente termine di bordo:

$$\int d^3 \mathbf{p} \frac{(m_1^2 - m_2^2)}{(2\pi)^3} \left[\frac{e^{i\omega_p(t_y - t_x)}}{8\omega_p^3(1 - e^{-\beta\omega_p})} - \frac{e^{-i\omega_p(t_y - t_x)}}{8\omega_p^3(1 - e^{\beta\omega_p})} \right] e^{-i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}, \quad (3.3.16)$$

ed il seguente integrale:

$$- \int d^3 \mathbf{p} \frac{(m_1^2 - m_2^2)}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_s \dot{\chi}(t_s) \left[\frac{e^{i\omega_p(t_x + t_y - 2t_s)}}{8\omega_p^3(1 - e^{-\beta\omega_p})} - \frac{e^{-i\omega_p(t_x + t_y - 2t_s)}}{8\omega_p^3(1 - e^{\beta\omega_p})} \right] e^{-i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}. \quad (3.3.17)$$

L'integrazione nella variabile t_s in (3.3.17) è stata estesa a $+\infty$ sfruttando l'assunzione precedentemente fatta sui campi (in particolare sul campo $\varphi(x)$) e il fatto che $\dot{\chi}(t_s)$ è una funzione a supporto compatto con $Supp(\dot{\chi}) \subset [-\varepsilon; 0]$. Osserviamo che il termine di bordo in (3.3.16) risulta essere automaticamente una quantità invariante sotto traslazioni temporali dei campi $\varphi(x)$ e $\varphi(y)$, in quanto dipende esclusivamente dalla differenza $t_x - t_y$. Inoltre, esso non presenta nessuna dipendenza esplicita dalla funzione di cut-off temporale $\chi(t_s)$. Al contrario, l'integrale in (3.3.17) costituisce una quantità non invariante sotto l'evoluzione temporale e presenta una dipendenza esplicita dal meccanismo di accensione dell'interazione.

La stessa analisi può essere condotta per il termine (3.3.14). Sommando dunque i due termini di bordo si ricava la seguente espressione (che indichiamo con la lettera A):

$$A := \int d^3 \mathbf{p} \frac{(m_1^2 - m_2^2)}{(2\pi)^3} \left[\frac{e^{i\omega_p(t_y - t_x)}}{4\omega_p^3(1 - e^{-\beta\omega_p})} - \frac{e^{-i\omega_p(t_y - t_x)}}{4\omega_p^3(1 - e^{\beta\omega_p})} \right] e^{-i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}, \quad (3.3.18)$$

mentre combinando tra loro i due restanti contributi si ottiene il seguente risultato (B):

$$B := - \int d^3 \mathbf{p} \frac{(m_1^2 - m_2^2)}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_s \frac{\dot{\chi}(t_s)}{4\omega_p^3} \left[\frac{\cos(\omega_p(t_x + t_y - 2t_s))}{1 - e^{-\beta\omega_p}} - \frac{\cos(\omega_p(t_x + t_y - 2t_s))}{1 - e^{\beta\omega_p}} \right] e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}. \quad (3.3.19)$$

L'integrale B può essere valutato riconoscendo la trasformata della funzione $\dot{\chi}(t_s)$ ed effettuando l'integrazione sulle variabili angolari dopo aver utilizzato le coordinati polari per la variabile \mathbf{p} . In questo modo si ottiene il seguente risultato:

$$B = - \int_0^{+\infty} d|\mathbf{p}| \frac{(m_1^2 - m_2^2)}{(2\pi)^2} \frac{(e^{\beta\omega_p} + 1)}{(e^{\beta\omega_p} - 1)} \frac{i|\mathbf{p}| \sin(|\mathbf{p}||\mathbf{x}-\mathbf{y}|)}{4\omega_p^3 |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \times \left[\hat{\chi}(-2\omega_p) e^{i\omega_p(t_x+t_y)} + \hat{\chi}(2\omega_p) e^{-i\omega_p(t_x+t_y)} \right]. \quad (3.3.20)$$

Se si considera un' accensione istantanea dell'interazione, la funzione $\chi(t_s)$ coincide con la funzione $\theta(t_s)$ e la trasformata della sua derivata è dunque data dalla funzione costante 1. Utilizzando questa approssimazione è possibile verificare direttamente che le derivate rispetto alla variabile $t_x + t_y$ dell'integrale in (3.3.20) (necessarie per studiare quantità fisiche di interesse come l'energia del sistema) forniscono quantità non solo non invarianti rispetto all'evoluzione temporale, ma anche non convergenti a 0 nel limite di grandi tempi $t_x + t_y \rightarrow 0$. Come vedremo nei prossimi paragrafi, questo comportamento deve essere ricondotto al fatto che lo stato ottenuto componendo ω^β con la formula di Bogoljubov non costituisce uno stato KMS per la teoria interagente nemmeno nel limite $t_x, t_y \rightarrow \infty$. Nella sezione 3.4 mostreremo esplicitamente come, utilizzando uno stato $\omega^{\beta,V}$ costruito seguendo l'approccio proposto da Fredenhagen e Lindner in [FL14], il termine (3.3.17) venga cancellato e la correzione perturbativa al primo ordine così ottenuta risulti essere invariante sotto traslazioni temporali.

Nell'analisi appena condotta l'attenzione è stata focalizzata sui termini contenenti una dipendenza dalla somma dei tempi $t_x + t_y$, isolando tali contributi negli esponenziali immaginari presenti nelle espressioni (3.3.12) e (3.3.14). Per completezza, riportiamo ora anche i termini ottenuti in (3.3.12) e (3.3.14) combinando le frequenze degli esponenziali in modo tale da ottenere esclusivamente una dipendenza dalla differenza $t_x - t_y$, indicati rispettivamente con la notazione Z_1^- e Z_2^- :

$$Z_1^- = \frac{(m_1^2 - m_2^2)}{(2\pi)^3} \int d^3 \mathbf{p} \int_{-\infty}^{t_y} dt_s \frac{\chi(t_s)}{4\omega_p^2} \left[\frac{e^{i\omega_p(t_y-t_x)}}{i(1 - e^{-\beta\omega_p})} + \frac{e^{-i\omega_p(t_y-t_x)}}{i(1 - e^{\beta\omega_p})} \right] e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x})}, \quad (3.3.21)$$

$$Z_2^- = \frac{(m_1^2 - m_2^2)}{(2\pi)^3} \int d^3 \mathbf{p} \int_{-\infty}^{t_x} dt_s \frac{\chi(t_s)}{4\omega_p^2} \left[-\frac{e^{i\omega_p(t_y-t_x)}}{i(1 - e^{-\beta\omega_p})} - \frac{e^{-i\omega_p(t_y-t_x)}}{i(1 - e^{\beta\omega_p})} \right] e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x})}. \quad (3.3.22)$$

Utilizzando la forma del supporto della funzione $\chi(t_s)$ è immediato verificare che le espressioni precedenti possono essere sommate ottenendo il seguente risultato (C):

$$C := \frac{(m_1^2 - m_2^2)}{(2\pi)^3} \int d^3 \mathbf{p} \frac{1}{4\omega_p^2} \left[\frac{e^{i\omega_p(t_y-t_x)}}{i(1 - e^{-\beta\omega_p})} (t_y - t_x) + \frac{e^{-i\omega_p(t_y-t_x)}}{i(1 - e^{\beta\omega_p})} (t_y - t_x) \right] e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x})} \quad (3.3.23)$$

L'espressione (3.3.23) è invariante sotto traslazioni temporali:

$$(t_x, t_y) \rightarrow (t_x + \delta t, t_y + \delta t), \quad (3.3.24)$$

in quanto dipende esclusivamente dalla differenza $t_x - t_y$ e si annulla nel limite di coincidenza dei tempi $t_x = t_y$.

In conclusione, per riassumere quanto trovato in questa sezione, abbiamo dimostrato come al primo ordine perturbativo valga la seguente uguaglianza:

$$\omega^\beta(R_V(\varphi(x)) \star R_V(\varphi(y))) = \omega_2^{\beta,(0)}(x, y) + A + B + C + \mathcal{O}(\lambda^2). \quad (3.3.25)$$

3.3.2 Correzione al secondo ordine perturbativo

In questa sezione ricaviamo le correzioni al secondo ordine perturbativo per la funzione a due punti costruita componendo lo stato ω^β , che soddisfa la condizione KMS per l'evoluzione temporale libera, con la formula di Bogoljubov. In questo modo riotterremo i risultati trovati nella Sezione 3.2, utilizzando la tecnica di calcolo grafico studiata nel Capitolo 2. Il vantaggio di questa tecnica consiste nel fatto che essa può essere applicata ad un sistema che presenti una densità Lagrangiana di forma generica. Al contrario, la risoluzione perturbativa dell'equazione di campo analizzata in 3.2 può essere utilizzata solo in presenza di densità Lagrangiane di interazione quadratiche nei campi.

Calcoliamo le correzioni perturbative al secondo ordine nell'interazione V della seguente espressione al secondo ordine in V :

$$\begin{aligned} \omega_2^\beta(x, y) &:= \omega^\beta(R_V(\varphi(x)) \star R_V(\varphi(y))) \\ &= \omega^\beta(S(V)^{-1} \star [S(V) \cdot_T \varphi(x)] \star S(V)^{-1} \star [S(V) \cdot_T \varphi(y)]). \end{aligned}$$

Per fare ciò è necessario utilizzare le espansioni in serie delle matrici $S(V)$ ed $S(V)^{-1}$ ricavate nella seconda sezione del Capitolo 2, fino al secondo ordine in V . In questo modo si ottiene la seguente espressione:

$$\begin{aligned} \omega^\beta &\left(\left[\frac{V \cdot_T V}{2} - V \star V \right] \star \varphi(x) \star \varphi(y) + \left[-\frac{V \cdot_T V}{2} \cdot_T \varphi(x) \right] \star \varphi(y) + \right. \\ &\varphi(x) \star \left[\frac{V \cdot_T V}{2} - V \star V \right] \star \varphi(y) + \varphi(x) \star \left[-\frac{V \cdot_T V}{2} \cdot_T \varphi(y) \right] - \\ &iV \star [iV \cdot_T \varphi(x)] \star \varphi(y) + iV \star \varphi(x) \star iV \star \varphi(y) - iV \star \varphi(x) \star [iV \cdot_T \varphi(y)] - \\ &\left. [iV \cdot_T \varphi(x)] \star iV \star \varphi(y) + [iV \cdot_T \varphi(x)] \star [iV \cdot_T \varphi(y)] - \varphi(x) \star iV \star [iV \cdot_T \varphi(y)] \right). \end{aligned} \quad (3.3.26)$$

Per esplicitare tutti i termini contenuti in (3.3.26) è possibile utilizzare il calcolo funzionale e la definizione di prodotto star e prodotto tempo ordinato. Nell' "Appendice C", a titolo di esempio, è riportata l'analisi relativa al calcolo di due degli addendi presenti in (3.3.26). Tuttavia, il modo più semplice per calcolare l'espressione (3.3.26) è quello di utilizzare le regole grafiche studiate nel precedente capitolo. In quanto la Lagrangiana di interazione V è quadratica nei campi φ , nessun diagramma connesso contiene al suo interno un loop. Inoltre, è possibile verificare esplicitamente come tutti i contributi provenienti dai diagrammi non connessi si cancellino tra l'oro (un esempio di questo fatto è riportato in "Appendice C"). In conclusione, tutti i diagrammi connessi ottenuti dall'espressione (3.3.26) sono riportati in Figura 3.3.1.

Questi grafici possono essere sommati tra loro facendo uso della relazione (3.3.7) che lega il propagatore di Feynman e la funzione a due punti di uno stato ai propagatori ritardato ed avanzato della teoria. In questo modo si ottengono tre contributi riportati in Figura 3.3.2, dove i propagatori avanzato e ritardato sono stati indicati esplicitamente

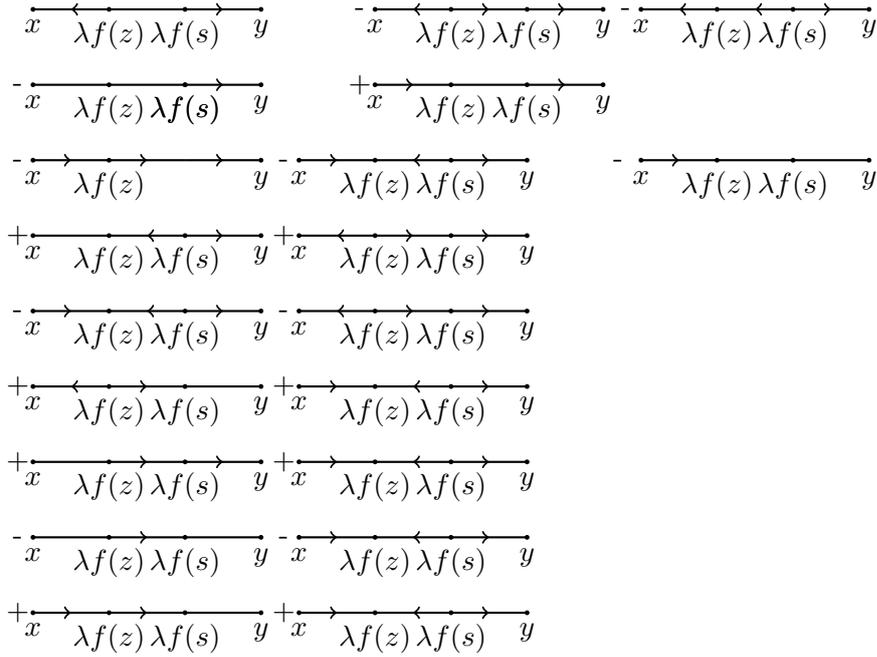


Figura 3.3.1

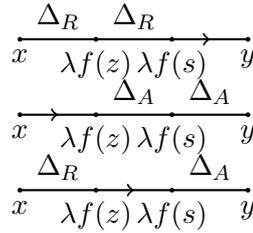


Figura 3.3.2

utilizzando la seguente notazione grafica:

$$\begin{array}{c} \Delta_R \\ \xrightarrow{\quad} \\ x \quad y \end{array} = \Delta_R(x - y), \quad (3.3.27)$$

$$\begin{array}{c} \Delta_A \\ \xrightarrow{\quad} \\ x \quad y \end{array} = \Delta_A(x - y).$$

Utilizzando l'espressione esplicita per i propagatori ritardato e causale scriviamo il contributo corrispondente al primo dei diagrammi riportati in Figura 3.3.2. Così facendo si ottiene il seguente risultato:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^9} \int \int dz ds (m_1^2 - m_2^2)^2 \chi(t_z) \chi(t_s) h(\mathbf{z}) h(\mathbf{s}) \int \frac{\sin(\omega_k(t_x - t_z))}{\omega_k} \theta(t_x - t_z) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{z})} d^3 \mathbf{k} \\ & \times \int \frac{\sin(\omega_p(t_z - t_s))}{\omega_p} \theta(t_z - t_s) e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{z} - \mathbf{s})} d^3 \mathbf{p} \int \left[\frac{e^{-i\omega_q(t_s - t_y)}}{(1 - e^{-\beta\omega_q})2\omega_q} - \frac{e^{i\omega_q(t_s - t_y)}}{(1 - e^{\beta\omega_q})2\omega_q} \right] e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{s} - \mathbf{y})} d^3 \mathbf{q}. \end{aligned} \quad (3.3.28)$$

Se consideriamo ora il limite adiabatico in cui $h \rightarrow 1$, l'integrazione nella parte spaziale delle variabili z ed s fornisce un fattore $(2\pi)^6 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \delta^3(\mathbf{q} - \mathbf{p})$ che può essere utilizzato per calcolare gli integrali negli impulsi \mathbf{k} e \mathbf{q} . L'espressione in (3.3.28) può essere dunque riscritta nel modo seguente:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int dt_s dt_z (m_1^2 - m_2^2)^2 \chi(t_s) \chi(t_z) \int d^3\mathbf{p} \theta(t_z - t_s) \theta(t_x - t_z) \\ & \times \frac{\sin(\omega_p(t_x - t_z)) \sin(\omega_p(t_z - t_s))}{\omega_p^2} \left[\frac{e^{-i\omega_p(t_s - t_y)}}{(1 - e^{-\beta\omega_p})2\omega_p} - \frac{e^{i\omega_p(t_s - t_y)}}{(1 - e^{\beta\omega_p})2\omega_p} \right] e^{-i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}. \end{aligned} \quad (3.3.29)$$

Il termine appena ottenuto coincide con quello ricavato in (3.2.16) risolvendo l'equazione di campo interagente in modo perturbativo. Ripetendo la stessa analisi per gli altri due diagrammi presenti nella Figura 3.3.2, inoltre, è possibile riottenere le espressioni riportate in (3.2.17) e (3.2.18). In questo modo dunque abbiamo verificato, anche al secondo ordine perturbativo, la completa equivalenza tra l'approccio studiato nella seconda sezione del capitolo e l'utilizzo di uno stato ω^β composto con la formula di Bogoljubov per il calcolo di una funzione a due punti della teoria interagente.

3.4 Funzione a due punti sullo stato $\omega^{\beta,V}$

In questa sezione viene calcolata al primo ordine perturbativo la funzione a due punti della teoria interagente componendo con la formula di Bogoljubov uno stato $\omega^{\beta,V}$ costruito mediante l'approccio proposto in [FL14], ovvero uno stato che soddisfi la condizione KMS per l'evoluzione temporale interagente. I risultati così ottenuti sono poi analizzati e messi a confronto con quelli ricavati nei paragrafi precedenti.

3.4.1 Calcolo esplicito sullo stato $\omega^{\beta,V}$

La quantità che vogliamo calcolare al primo ordine perturbativo è la seguente:

$$\omega^{\beta,V} (R_V(\varphi(x)) \star R_V(\varphi(y))). \quad (3.4.1)$$

Per fare ciò utilizziamo l'espressione perturbativa per il calcolo del valore di aspettazione di un'osservabile $R_V(A)$ sullo stato $\omega^{\beta,V}$ introdotta nella Sezione 2.5 del Capitolo 2:

$$\omega^{\beta,V} (R_V(A)) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \int_{\beta S_n} du_1 \dots du_n \omega^{\beta,c} (R_V(A) \otimes \tau_{iu_1} K \otimes \dots \otimes \tau_{iu_n} K). \quad (3.4.2)$$

Nel caso specifico in esame il generatore del cociclo tra l'evoluzione temporale libera ed interagente K (definito in (2.5.13)) è dato dalla seguente espressione:

$$K = R_V(-\dot{V}) = \int \frac{1}{2} (m_2^2 - m_1^2) \dot{\chi}(t) h(\mathbf{x}) R_V(\varphi^2(x)) d^4x. \quad (3.4.3)$$

All'ordine 0 nell'interazione V l'espressione (3.4.2) restituisce, come atteso, la funzione a due punti della teoria libera $\omega_2^{\beta,(0)}$. Se si considera invece la correzione al primo ordine perturbativo ottenuta fissando $n = 0$ e considerando l'espansione al primo ordine della formula di Bogoljubov si ottiene la stessa quantità già calcolata nei precedenti paragrafi.

Pertanto, nel seguito, analizzeremo la restante correzione al primo ordine perturbativo di $\omega^{\beta,V}$ rispetto a ω^β , ottenuta ponendo $n = 1$ e $R_V = \mathbf{1}$:

$$- \int_0^\beta du \omega^{\beta,c}(\varphi(x) \star \varphi(y) \otimes \tau_{iu}(-\dot{V})). \quad (3.4.4)$$

Tale espressione può essere riscritta nel modo seguente, esplicitando la forma delle funzioni di correlazione connesse:

$$(m_1^2 - m_2^2) \int_0^\beta du \int d^4z \omega^\beta(\varphi(x) \star \varphi(z)) \omega^\beta(\varphi(y) \star \varphi(z)) \dot{\chi}(t_z - iu) h(\mathbf{z}) = \quad (3.4.5)$$

$$(m_1^2 - m_2^2) \int_0^\beta du \int d^4z \omega_2^{\beta,(0)}(x, z + e^0 iu) \omega_2^{\beta,(0)}(y, z + e^0 iu) \dot{\chi}(t_z) h(\mathbf{z}),$$

dove abbiamo indicato con $e^0 = (1, 0, 0, 0)$ il quadrivettore unitario avente solo la prima componente non nulla.

Sostituiamo ora in (3.4.5) la forma esplicita della funzione a due punti della teoria libera $\omega_2^{\beta,(0)}(x, y)$ riportata in (3.3.9). Così facendo otteniamo la seguente espressione:

$$(m_1^2 - m_2^2) \int_0^\beta du \int d^4z \frac{1}{(2\pi)^6} \int \int d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{p} \left[\frac{e^{-i\omega_k(t_x - t_z - iu)}}{(1 - e^{-\beta\omega_k})2\omega_k} - \frac{e^{i\omega_k(t_x - t_z - iu)}}{(1 - e^{\beta\omega_k})2\omega_k} \right] e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{z})}$$

$$\times \left[\frac{e^{-i\omega_p(t_y - t_z - iu)}}{(1 - e^{-\beta\omega_p})2\omega_p} - \frac{e^{i\omega_p(t_y - t_z - iu)}}{(1 - e^{\beta\omega_p})2\omega_p} \right] e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{y} - \mathbf{z})} \dot{\chi}(t_z) h(\mathbf{z}). \quad (3.4.6)$$

Consideriamo ora il limite adiabatico $h(\mathbf{z}) \rightarrow 1$. Come già visto in precedenza, anche in questo caso l'integrazione nella parte spaziale della variabile z produce un fattore $(2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{p})$. Utilizzando la delta di Dirac e calcolando i prodotti tra i vari termini presenti in (3.4.6) si ottiene:

$$\frac{(m_1^2 - m_2^2)}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_z \int_0^\beta du \dot{\chi}(t_z) \frac{e^{i(\mathbf{x} - \mathbf{y})\cdot\mathbf{p}}}{(2\omega_p(1 - e^{-\beta\omega_p}))^2} \times$$

$$\left[e^{-i\omega_p(t_y + t_x - 2t_z - 2iu)} + e^{i\omega_p(t_x + t_y - 2t_z - 2iu) - 2\omega_p\beta} + e^{i\omega_p(t_y - t_x) - \beta\omega_p} + e^{i\omega_p(t_x - t_y) - \beta\omega_p} \right]. \quad (3.4.7)$$

Se ora svolgiamo l'integrazione nella variabile u , otteniamo il seguente risultato ($D + E$):

$$D + E := \frac{(m_1^2 - m_2^2)}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_z \dot{\chi}(t_z) \frac{e^{i(\mathbf{x} - \mathbf{y})\cdot\mathbf{p}}}{4\omega_p^2(1 - e^{-\beta\omega_p})^2} \left[\frac{\cos(\omega_p(t_x + t_y - 2t_z))}{\omega_p} \right.$$

$$\left. - \frac{\cos(\omega_p(t_x + t_y - 2t_z))e^{-2\beta\omega_p}}{\omega_p} + 2e^{-\beta\omega_p} \cos(\omega_p(t_x - t_y))\beta \right]. \quad (3.4.8)$$

L'integrazione nella variabile temporale t_z può essere compiuta per il terzo addendo (E), in quanto esso non dipende da tale variabile. Sfruttando la forma del supporto della funzione $\dot{\chi}$ si ottiene la seguente espressione, indipendente dalla funzione di cut-off temporale χ :

$$E = \frac{(m_1^2 - m_2^2)}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p} \frac{e^{i(\mathbf{x} - \mathbf{y})\cdot\mathbf{p}}}{2\omega_p^2(1 - e^{-\beta\omega_p})^2} e^{-\beta\omega_p} \cos(\omega_p(t_x - t_y))\beta. \quad (3.4.9)$$

Riscriviamo ora i primi due addendi presenti in 3.4.8, la cui somma è stata indicata con la lettera D . In particolare, utilizziamo la seguente relazione algebrica che lega tra loro i *fattori di Bose*:

$$\frac{1 - e^{-2\beta\omega_p}}{(1 - e^{-\beta\omega_p})^2} = \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega_p}} + \frac{1}{e^{\beta\omega_p} - 1}. \quad (3.4.10)$$

Pertanto si ha:

$$D = \int d^3\mathbf{p} \frac{(m_1^2 - m_2^2)}{(2\pi)^3} \int dt_z \frac{\dot{\chi}(t_z)}{4\omega_p^3} \left[\frac{\cos(\omega_p(t_x + t_y - 2t_z))}{1 - e^{-\beta\omega_p}} - \frac{\cos(\omega_p(t_x + t_y - 2t_z))}{1 - e^{\beta\omega_p}} \right] e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}. \quad (3.4.11)$$

Osserviamo come la correzione al primo ordine D sia uguale ed opposta alla correzione B ricavata nella Sezione 3.3 (si veda l'espressione (3.3.19)). Pertanto, l'approssimazione della funzione a due punti della teoria interagente calcolata utilizzando lo stato $\omega^{\beta,V}$ non presenta una dipendenza esplicita dal cut-off temporale χ e, come atteso, risulta essere invariante sotto le traslazioni temporali.

In conclusione, in questa sezione è stata ricavata la seguente uguaglianza al primo ordine perturbativo:

$$\omega^{\beta,V}(R_V(\varphi(x)) \star R_V(\varphi(y))) = \omega_2^{\beta,(0)}(x, y) + A + C + E + \mathcal{O}(\lambda^2). \quad (3.4.12)$$

Questo risultato verrà commentato in dettaglio nel prossimo paragrafo.

3.4.2 Analisi del risultato

La correzione al primo ordine perturbativo della funzione a due punti $\omega^{\beta,V}(R_V(\varphi(x)) \star R_V(\varphi(y)))$ ottenuta nel precedente paragrafo risulta essere invariante sotto traslazioni temporali, in quanto dipende esclusivamente dalla differenza $t_x - t_y$. Questo risultato è dovuto al fatto che lo stato $\omega^{\beta,V}$ utilizzato, al contrario dello stato ω^β , soddisfa la condizione KMS per l'evoluzione temporale della teoria interagente e dunque tale proprietà deve essere soddisfatta ad ogni ordine perturbativo. Inoltre, come anticipato nel Capitolo 2, l'espressione (3.4.12) non presenta nessuna dipendenza esplicita dal cut-off temporale $\chi(t)$.

Il sistema studiato in questo capitolo presenta un'interazione quadratica nei campi e, pertanto, nel limite adiabatico, è possibile ricavare una soluzione esatta per la funzione a due punti di uno stato KMS per la teoria interagente. Tale funzione a due punti, che indichiamo con la notazione ω_{2,m_2}^β , coincide con la funzione a due punti $\omega_2^{\beta,(0)}$ della teoria libera nella quale, però, al posto della pulsazione $\omega_p = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_1^2}$ corrispondente alla massa non perturbata m_1 venga utilizzata la nuova pulsazione $\omega_\lambda := \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_2^2}$ corrispondente alla massa m_2 :

$$\omega_{2,m_2}^\beta(x - y) = \int \frac{1}{(2\pi)^3} \left[\frac{e^{-i\omega_\lambda(t_x - t_y)}}{(1 - e^{-\beta\omega_\lambda})2\omega_\lambda} - \frac{e^{i\omega_\lambda(t_x - t_y)}}{(1 - e^{\beta\omega_\lambda})2\omega_\lambda} \right] e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} d^3\mathbf{p}. \quad (3.4.13)$$

Siamo ora interessati a capire come l'espressione esatta (3.4.13) sia legata ai risultati ottenuti nei precedenti paragrafi al primo ordine perturbativo. Per fare ciò, trattiamo il quadrato della pulsazione ω_λ come una funzione del parametro di accoppiamento $\lambda = (m_1^2 - m_2^2)$:

$$\omega_\lambda^2 = |\mathbf{p}|^2 + m_2^2 = |\mathbf{p}|^2 + m_1^2 - \lambda = \omega_p^2 - \lambda, \quad (3.4.14)$$

ed espandiamo in *serie di Taylor* tale funzione. Per semplicità, consideriamo la trasformata dell'espressione (3.4.13) e assumiamo il limite di coincidenza dei tempi, ovvero il limite in cui si ha $t = t_x = t_y$. L'espressione che intendiamo analizzare è pertanto la seguente:

$$\mathcal{F}(\omega_{2,m_2}^\beta) \Big|_{t_x=t_y=t} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_\lambda} \left[\frac{1}{1 - e^{-\beta\omega_\lambda}} - \frac{1}{1 - e^{\beta\omega_\lambda}} \right]. \quad (3.4.15)$$

Sostituiamo le seguenti espansioni in serie di Taylor al primo ordine in λ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_\lambda} &\approx \frac{1}{\omega_p} + \frac{\lambda}{2\omega_p^3}, \\ \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega_\lambda}} &\approx \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega_p}} + \frac{\lambda}{2\omega_p} \left(\frac{1}{1 - e^{-\beta\omega_p}} \frac{\beta}{e^{\beta\omega_p} - 1} \right), \\ \frac{1}{1 - e^{\beta\omega_\lambda}} &\approx \frac{1}{1 - e^{\beta\omega_p}} - \frac{\lambda}{2\omega_p} \left(\frac{1}{1 - e^{\beta\omega_p}} \frac{\beta}{e^{-\beta\omega_p} - 1} \right), \end{aligned} \quad (3.4.16)$$

nell'espressione (3.4.15). Otteniamo così il seguente risultato:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\omega_{2,m_2}^\beta) \Big|_{t_x=t_y=t} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_p} \left[\frac{1}{1 - e^{-\beta\omega_p}} + \frac{1}{e^{\beta\omega_p} - 1} \right] + \frac{(m_1^2 - m_2^2)}{(2\pi)^3} \frac{\beta}{2\omega_p^2} \times \\ &\left[\frac{1}{1 - e^{-\beta\omega_p}} \frac{1}{e^{\beta\omega_p} - 1} \right] + \frac{(m_1^2 - m_2^2)}{(2\pi)^3} \frac{1}{4\omega_p^3} \left[\frac{1}{1 - e^{-\beta\omega_p}} + \frac{1}{e^{\beta\omega_p} - 1} \right] + \mathcal{O}(\lambda^2). \end{aligned} \quad (3.4.17)$$

Il termine di ordine 0 nel parametro λ corrisponde alla trasformata della funzione a due punti della teoria libera calcolata in $t_x = t_y = t$. Il primo addendo di ordine 1 in λ , invece, costituisce la trasformata del contributo E riportato in (3.4.9) ed è ottenuto espandendo al primo ordine perturbativo in fattori di Bose in (3.4.15). Al contrario, la seconda correzione al primo ordine perturbativo presente in (3.4.17), ottenuta espandendo il fattore ω_λ^{-1} presente in (3.4.15), fornisce la trasformata del termine A ricavato in (3.3.18).

In conclusione, dunque, l'espressione (3.4.17) costituisce la trasformata della funzione a due punti ricavata in (3.4.12) ² confermando così la validità del risultato trovato. Osserviamo inoltre come il calcolo della funzione a due punti effettuato nella Sezione 3.3 utilizzando lo stato ω^β composto con la formula di Bogoljubov riproduca esclusivamente il termine correttivo ottenuto espandendo il fattore ω_λ^{-1} in (3.4.15). Considerando l'effetto dell'interazione V esclusivamente a livello dell'algebra degli osservabili e non a quello degli stati, dunque, non è possibile tenere conto degli effetti di tale interazione sui fattori di Bose che caratterizzano gli stati termici. Questo comportamento, assente nel caso limite di temperatura nulla ($\beta \rightarrow \infty$), evidenzia la necessità di considerare gli stati appropriati per lo studio delle teorie di campo a temperatura finita.

Concludiamo ora il paragrafo osservando come il termine di correzione E ottenuto utilizzando lo stato $\omega^{\beta,V}$ sia costante sotto le traslazioni temporali e non si annulli dunque nel limite di grandi tempi $t_x + t_y \rightarrow \infty$. Ciò dimostra come lo stato $\omega^\beta \circ R_V$ non converga ad uno stato KMS per la teoria interagente $\omega^{\beta,V}$ nemmeno nel limite di grandi tempi. Negli approcci tradizionali alle teorie di campo a temperatura finita (come, ad esempio, il *formalismo di Keldysh-Schwinger*) si fa generalmente uso della seguente proprietà, nota come *ritorno all'equilibrio*:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Omega^\beta(R_V(\tau_t(A))) = \Omega^{\beta,V}(A) \quad \text{con } A \in \mathcal{F}_{loc}, \quad (3.4.18)$$

²Non sono presenti termini corrispondenti al contributo C in quanto quest'ultimo si annulla per $t_x = t_y$.

dove con Ω^β abbiamo indicato uno stato KMS per l'evoluzione temporale del sistema libero mentre con $\Omega^{\beta,V}$ uno stato KMS per la teoria interagente. La dimostrazione di tale proprietà (si veda [BKR78] a riguardo), tuttavia, si basa sull'ipotesi che lo stato in esame soddisfi particolari *condizioni di clustering*. Come visto, nella situazione da noi analizzata in questo capitolo, la proprietà di ritorno all'equilibrio non risulta essere soddisfatta. Di conseguenza, le condizioni di clustering richieste sullo stato non sono rispettate nel caso in esame. Più in generale, è possibile dimostrare come la proprietà di ritorno all'equilibrio cessa di valere nel caso in cui si considerino densità Lagrangiane contenenti potenze di secondo e quarto grado nei campi φ ed il limite adiabatico $h \rightarrow 1$ venga calcolato precedentemente al limite di grandi tempi. Per un'analisi dettagliata a riguardo si veda la referenza [DFP17].

3.5 Calcolo di un'osservabile locale

In quest'ultima sezione viene brevemente studiato il valore di aspettazione di un particolare osservabile locale della teoria interagente. In questo caso sarà necessario utilizzare la teoria della rinormalizzazione studiata nel precedente capitolo.

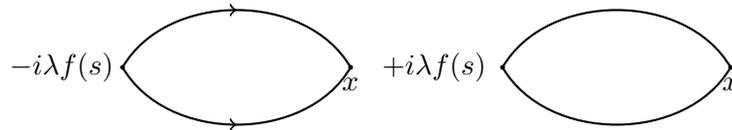
Il valore di aspettazione che intendiamo calcolare è il seguente:

$$\omega^\beta(R_V(\varphi^2(x))). \quad (3.5.1)$$

In particolare, siamo interessati a valutare la correzione al primo ordine perturbativo nell'interazione V :

$$\omega^\beta(-iV \star \varphi^2(x) + iV \cdot_T \varphi^2(x)). \quad (3.5.2)$$

Utilizzando le regole grafiche studiate in precedenza, tale correzione può essere rappresentata mediante i seguenti diagrammi:



Tali diagrammi corrispondono al seguente integrale:

$$i(m_1^2 - m_2^2) \int ds f(s) \left[(\Delta_\beta^F(s, x))^2 - (\omega_2^{\beta,(0)}(s, x))^2 \right]. \quad (3.5.3)$$

Con la notazione $\Delta_\beta^F(s, x)$ specifichiamo il fatto che il propagatore di Feynman utilizzato nella definizione del prodotto tempo ordinato è quello relativo alla funzione a due punti $\omega_2^{\beta,(0)}$. Il primo dei due diagrammi fornisce direttamente un contributo ben definito mentre il secondo richiede l'uso della teoria della rinormalizzazione. Prima di procedere nel calcolo, osserviamo come sia possibile separare nell'espressione (3.5.3) un contributo a temperatura finita da uno a temperatura nulla. Si ha infatti la seguente relazione tra il quadrato del propagatore di Feynman e il quadrato della funzione a due punti dello stato ω^β :

$$\begin{aligned} (\Delta_\beta^F)^2 - (\omega_2^{\beta,(0)})^2 &= (\Delta_0^F - \Delta_+ + \omega_2^{\beta,(0)})^2 - (\omega_2^{\beta,(0)} + \Delta_+ - \Delta_+)^2 = \\ &= (\Delta_0^F)^2 - \Delta_+^2 + 2i\Delta_A(\omega_2^{\beta,(0)} - \Delta_+). \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

Come di consueto abbiamo indicato con il simbolo Δ_+ la funzione a due punti dello stato di vuoto di Minkowski. Osserviamo che i termini problematici e che necessitano l'uso della rinormalizzazione sono quelli a temperatura nulla.

Per prima cosa, calcoliamo ora il termine di correzione derivante dal terzo addendo presente in (3.5.4). L'integrale che intendiamo analizzare è il seguente (indicato con la lettera Q):

$$Q := 2(m_1^2 - m_2^2) \int ds f(s) \frac{1}{(2\pi)^6} \int d^3\mathbf{k} \frac{\sin(\omega_k(t_x - t_s))}{\omega_k} \theta(t_x - t_s) e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{s})} \times \int d^3\mathbf{p} \left[\frac{e^{-i\omega_p(t_s-t_x)}}{(1 - e^{-\beta\omega_p})2\omega_p} - \frac{e^{i\omega_p(t_s-t_x)}}{(1 - e^{\beta\omega_p})2\omega_p} - \frac{e^{-i\omega_p(t_s-t_x)}}{2\omega_p} \right] e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{s}-\mathbf{x})}. \quad (3.5.5)$$

Come per il calcolo della funzione a due punti, anche in questo caso consideriamo il limite adiabatico $h(\mathbf{s}) \rightarrow 1$ e utilizziamo il fattore $(2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{k})$ che si ottiene dall'integrazione nella componente spaziale della variabile s . Così facendo e scomponendo la funzione seno nella somma di esponenziali immaginari si ottiene il seguente risultato: $Q =$

$$\frac{-2i(m_1^2 - m_2^2)}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_s \int d^3\mathbf{p} \chi(t_s) \frac{e^{i\omega_p(t_x-t_s)} - e^{-i\omega_p(t_x-t_s)}}{2\omega_p} \theta(t_x - t_s) \times \left[\frac{e^{-i\omega_p(t_s-t_x)}}{(1 - e^{-\beta\omega_p})2\omega_p} - \frac{e^{i\omega_p(t_s-t_x)}}{(1 - e^{\beta\omega_p})2\omega_p} - \frac{e^{-i\omega_p(t_s-t_x)}}{2\omega_p} \right]. \quad (3.5.6)$$

Osserviamo ora come svolgendo i prodotti tra gli esponenziali tutti i termini che non contengono una dipendenza dalla variabile t_s all'esponente si cancellano vicendevolmente. Pertanto, l'unico contributo non nullo in (3.5.6) è il seguente:

$$Q = \frac{-i(m_1^2 - m_2^2)}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{t_x} dt_s \int d^3\mathbf{p} \frac{\chi(t_s)}{2\omega_p^2} \frac{1}{1 - e^{\beta\omega_p}} \left[e^{2i\omega_p(t_s-t_x)} - e^{-2i\omega_p(t_s-t_x)} \right]. \quad (3.5.7)$$

Come già visto nei paragrafi precedenti, anche in questo caso è possibile sfruttare la forma del supporto della funzione $\chi(t_s)$ per effettuare un'integrazione per parti, ipotizzando che il tempo t_x sia successivo al tempo dell'accensione definitiva dell'interazione. Così facendo, si ottiene il seguente contributo di bordo:

$$\frac{-(m_1^2 - m_2^2)}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p} \frac{1}{2\omega_p^3(1 - e^{\beta\omega_p})}, \quad (3.5.8)$$

ed il seguente integrale:

$$\frac{(m_1^2 - m_2^2)}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p} \frac{1}{4\omega_p^3(1 - e^{\beta\omega_p})} \left[\hat{\chi}(2\omega_p) e^{-2i\omega_p t_x} + \hat{\chi}(-2\omega_p) e^{2i\omega_p t_x} \right]. \quad (3.5.9)$$

Osserviamo come il termine in (3.5.8) risulti essere costante nel tempo, mentre l'espressione in (3.5.9) non è invariante sotto traslazioni temporali. Tuttavia, data la decrescenza esponenziale nella variabile \mathbf{p} della funzione integranda, per il *lemma di Riemann Lebesgue* il contributo (3.5.9) si annulla nel limite di grandi tempi $t_x \rightarrow \infty$.

Analizziamo ora i primi due addendi presenti nell'espressione (3.5.4). Essendo presente il quadrato del propagatore di Feynman a temperatura nulla, tale contributo può essere trattato utilizzando la tecnica di rinormalizzazione basata sulla rappresentazione di Källén-Lehmann studiata nel precedente capitolo. Più in dettaglio si ha:

$$(\Delta_0^F)_{rin}^2 - \Delta_+^2 = (\square + a) \int_{4m^2}^{\infty} dM^2 \frac{\rho_2(M)}{M^2 + a} i\Delta_A(x) \quad (3.5.10)$$

dove ricordiamo che la derivata deve essere intesa in senso distribuzionale e fatta dunque agire sulle funzioni di prova. Fissiamo ora la libertà di rinormalizzazione imponendo che valga $a = 0$ e sostituiamo l'espressione (3.5.10) in (3.5.3), ottenendo così il seguente integrale (indicato con la lettera R):

$$R := -(m_1^2 - m_2^2) \int ds (\square f(s)) \int_{4m^2}^{\infty} dM^2 \frac{\rho_2(M)}{M^2} \Delta_A(s - x, M). \quad (3.5.11)$$

Utilizziamo ora la seguente espressione esplicita del propagatore avanzato in termini della sua trasformata di Fourier quadrimensionale:

$$\Delta_A(s - x; M) = \int d^4p \frac{i}{(2\pi)^3} \delta(p^\mu p_\mu + M^2) \text{sgn}(p_0) \theta(x_0 - s_0) e^{ip^\mu(s-x)_\mu}. \quad (3.5.12)$$

Sostituiamo la (3.5.12) in (3.5.11) ed utilizziamo la delta di Dirac per calcolare l'integrale sulle masse. Otteniamo così il seguente risultato:

$$R = -(m_1^2 - m_2^2) \int ds \int d^4p (\square f(s)) \frac{\rho_2(\sqrt{p_0^2 - |\mathbf{p}|^2})}{(p_0^2 - |\mathbf{p}|^2)} \frac{i}{(2\pi)^3} \text{sgn}(p_0) \times \\ \theta(x_0 - s_0) \theta(p_0^2 - |\mathbf{p}|^2 - 4m^2) e^{ip^\mu(s-x)_\mu}. \quad (3.5.13)$$

Calcolando ora il limite adiabatico ed utilizzando il fattore $(2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p})$ prodotto dall'integrazione nella componente spaziale della variabile s , si ottiene:

$$R = -i(m_1^2 - m_2^2) \int_{-\infty}^{t_x} dt_s \int dp_0 \ddot{\chi}(t_s) \frac{\rho_2(p_0^2)}{p_0^2} \text{sgn}(p_0) \theta(p_0^2 - 4m^2) e^{-ip_0(t_s - t_x)}. \quad (3.5.14)$$

Analizzando numericamente questo integrale è possibile verificare esplicitamente che esso si annulla nel limite di grandi tempi $t_x \rightarrow \infty$.

Capitolo 4

Campo scalare complesso: elettrodinamica scalare

Introduzione al capitolo

In questo capitolo l'analisi condotta nel Capitolo 3 viene estesa al caso di un campo scalare complesso massivo interagente con un quadripotenziale esterno $A_\mu(x)$.

Nella parte iniziale del capitolo estenderemo gli elementi fondamentali della costruzione algebrica studiati per il caso del campo scalare reale al campo scalare complesso. Dopo di che, presenteremo la forma specifica dell'interazione che intendiamo studiare, ovvero l'accoppiamento con un campo magnetico esterno acceso in modo liscio ad un tempo finito. Ricaveremo quindi la funzione a due punti della teoria interagente, confrontando nuovamente il risultato ottenuto componendo uno stato ω^β con la formula di Bogoljubov con quello ricavato utilizzando uno stato KMS per la teoria interagente. Come vedremo, in questo caso l'analisi viene complicata dalla forma funzionale della densità Lagrangiana di interazione e dalla mancanza di invarianza sotto traslazioni spaziali dell'interazione stessa.

4.1 Campo scalare complesso

Analizziamo ora gli elementi fondamentali necessari ad estendere la teoria algebrica di campo dal caso di un campo scalare reale a quello di un campo scalare complesso φ . Iniziamo definendo il campo complesso φ come combinazione lineare di due campi scalari reali. Siano dunque φ_1 e φ_2 due campi scalari reali indipendenti che soddisfino le seguenti relazioni di commutazione:

$$\begin{aligned}[\varphi_1(x), \varphi_1(y)] &= i\Delta(x, y); \\ [\varphi_2(x), \varphi_2(y)] &= i\Delta(x, y); \\ [\varphi_1(x), \varphi_2(y)] &= 0.\end{aligned}\tag{4.1.1}$$

Definiamo allora il campo φ nel modo seguente:

$$\varphi(x) := \frac{\varphi_1(x) + i\varphi_2(x)}{\sqrt{2}}.\tag{4.1.2}$$

Sfruttando la realtà dei campi φ_n con $n = 1, 2$ si ha:

$$\varphi^\dagger(x) := \frac{\varphi_1(x) - i\varphi_2(x)}{\sqrt{2}}.\tag{4.1.3}$$

Utilizziamo ora le relazioni di commutazione (4.1.1) per determinare le relazioni di commutazione soddisfatte dal campo complesso φ e dal suo coniugato φ^\dagger :

$$\left[\varphi(x), \varphi^\dagger(y) \right] = \left[\frac{\varphi_1(x) + i\varphi_2(x)}{\sqrt{2}}; \frac{\varphi_1(y) - i\varphi_2(y)}{\sqrt{2}} \right] = i \frac{\Delta(x, y)}{2} + i \frac{\Delta(x, y)}{2} = i\Delta(x, y). \quad (4.1.4)$$

In modo analogo è possibile verificare le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} [\varphi(x), \varphi(y)] &= 0, \\ \left[\varphi^\dagger(x), \varphi^\dagger(y) \right] &= 0. \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

Per quanto appena visto, le relazioni di commutazione del campo scalare complesso φ possono essere implementate al livello algebrico richiedendo che il prodotto dei campi φ e φ^\dagger con se stessi coincida con il prodotto puntuale commutativo, mentre il prodotto tra φ e φ^\dagger sia deformato nel seguente prodotto star non commutativo:

$$\varphi(x) \star \varphi^\dagger(y) := \varphi(x) \cdot \varphi^\dagger(y) + \omega_2(x, y). \quad (4.1.6)$$

Come di consueto, con $\omega_2(x, y)$ è stata indicata la funzione a due punti di uno stato di Hadamard, utilizzata nella definizione del prodotto star al fine di implementare a livello algebrico il normal ordering (per maggiori dettagli si veda il Capitolo 1). In generale, dunque, il prodotto star tra due generici osservabili $F, G \in \mathcal{F}_{\mu c}$ può essere definito nel modo seguente:

$$F \star G := \mathcal{M} \left(e^{\int \omega_2 \left(\frac{\delta}{\delta\varphi} \otimes \frac{\delta}{\delta\varphi^\dagger} + \frac{\delta}{\delta\varphi^\dagger} \otimes \frac{\delta}{\delta\varphi} \right)} F \otimes G \right). \quad (4.1.7)$$

Ricordiamo che l'operatore \mathcal{M} definito nel primo capitolo manda il prodotto tensoriale di due funzionali in un singolo funzionale nel modo seguente:

$$\mathcal{M}(F \otimes G)(\varphi) = F(\varphi) \cdot G(\varphi). \quad (4.1.8)$$

Utilizzando le relazioni di commutazione appena ottenute ed il prodotto star di conseguenza definito, l'analisi condotta nei primi due capitoli per il campo scalare reale può essere semplicemente estesa al caso di campo scalare complesso.

4.2 Sistema fisico in esame: elettrodinamica scalare

Il sistema fisico che vogliamo analizzare in questo capitolo è costituito da un campo scalare massivo complesso interagente con un potenziale elettromagnetico esterno A_μ . Quest'ultimo non viene quantizzato, ma, piuttosto, trattato come un campo classico. Definiamo dunque la *derivata covariante* \mathcal{D}_μ nel modo seguente (per maggiori dettagli si veda, ad esempio, [Dav06]):

$$\mathcal{D}_\mu(\varphi) := \partial_\mu \varphi + ieA_\mu \varphi. \quad (4.2.1)$$

Con il simbolo e è stata indicata la costante di accoppiamento tra il campo scalare ed il campo elettromagnetico. La densità Lagrangiana del campo scalare φ interagente con il campo A_μ può essere quindi ottenuta correttamente sostituendo le derivate ordinarie con le derivate covarianti nella densità Lagrangiana del campo libero (*minimal coupling*). Si ha pertanto la seguente espressione:

$$\mathcal{L} = - (\mathcal{D}_\mu \varphi)^\dagger \mathcal{D}^\mu \varphi - m^2 \varphi^\dagger \varphi = \quad (4.2.2)$$

$$- \partial_\mu \varphi^\dagger \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^\dagger \varphi + ieA^\mu (\varphi^\dagger \partial_\mu \varphi - \partial_\mu \varphi^\dagger \varphi) - e^2 A_\mu A^\mu \varphi^\dagger \varphi. \quad (4.2.3)$$

Osserviamo che la densità Lagrangiana di interazione tra il campo scalare quantizzato ed il quadripotenziale A_μ classico contiene al suo interno due termini:

$$\mathcal{L}_{int} = ieA^\mu(\varphi^\dagger\partial_\mu\varphi - \partial_\mu\varphi^\dagger\varphi) - e^2A_\mu A^\mu\varphi^\dagger\varphi. \quad (4.2.4)$$

Il primo termine descrive l'accoppiamento tra il quadripotenziale A^μ e la corrente del campo scalare complesso \mathcal{J}_μ associata all'invarianza della densità Lagrangiana sotto trasformazioni $U(1)$ del campo φ :

$$\mathcal{J}_\mu := ie(\varphi^\dagger\partial_\mu\varphi - \partial_\mu\varphi^\dagger\varphi). \quad (4.2.5)$$

Mentre il primo addendo in \mathcal{L}_{int} dipende dalle derivate del campo φ e presenta una dipendenza lineare nella costante di accoppiamento e , il secondo addendo contiene una dipendenza quadratica nel campo scalare (dunque analoga a quella studiata nel Capitolo 3) e nella costante di accoppiamento.

Il quadripotenziale A_μ che tratteremo nel seguito è dato dalla seguente espressione esplicita:

$$A_\mu(s) = (0, \mathbf{A}(s)). \quad (4.2.6)$$

Come di consueto, con la notazione \mathbf{A} è stato indicato il potenziale vettore del campo magnetico. Ricordiamo che il quadripotenziale elettromagnetico presenta una simmetria di gauge, che può essere fissata liberamente scegliendo la gauge più conveniente. Come vedremo nel seguito più in dettaglio, per l'analisi che sarà condotta, la scelta di gauge migliore sarà quella della *gauge di Lorenz*. Inoltre, all'interno della Lagrangiana di interazione V che sarà trattata nel seguito, la densità Lagrangiana \mathcal{L}_{int} verrà testata sulla usuale funzione di cut-off $\chi(t)h(\mathbf{x})$, in modo analogo a quanto visto nei precedenti capitoli. Il sistema analizzato, dunque, corrisponde fisicamente ad un campo scalare complesso interagente con un campo magnetico di forma generica acceso in modo liscio ad un tempo finito e, da quel momento, lasciato costante. Nelle prossime sezioni studieremo le correzioni al primo ordine perturbativo della funzione a due punti del campo scalare complesso a temperatura finita T , confrontando nuovamente i risultati ottenuti componendo con la formula di Bogoljubov uno stato KMS per la teoria libera (ω^β) con quelli ricavati utilizzando uno stato KMS per la teoria interagente ($\omega^{\beta,V}$).

4.3 Funzione a due punti sullo stato ω^β

La funzione a due punti di cui vogliamo studiare le correzioni al primo ordine perturbativo è data dalla seguente espressione:

$$\omega^\beta \left(R_V \left(\varphi^\dagger(x) \right) \star R_V \left(\varphi(y) \right) \right), \quad (4.3.1)$$

dove con il simbolo V abbiamo indicato la Lagrangiana di interazione del sistema:

$$V = \int \chi(t_x)h(\mathbf{x}) \left[ieA^\mu(\varphi^\dagger\partial_\mu\varphi - \partial_\mu\varphi^\dagger\varphi) - e^2A_\mu A^\mu\varphi^\dagger\varphi \right] d^4x. \quad (4.3.2)$$

Espandendo la formula di Bogoljubov in (4.3.1) come fatto nel capitolo precedente, si ottengono i due seguenti contributi lineari nell'interazione V :

$$\begin{aligned} Z_1 + Z_2 := \\ \omega^\beta \left([-iV \star \varphi^\dagger(x) + iV \cdot_T \varphi^\dagger(x)] \star \varphi(y) \right) + \omega^\beta \left(\varphi^\dagger(x) \star [-iV \star \varphi(y) + iV \cdot_T \varphi(y)] \right). \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

Calcoliamo ora il primo dei due addendi nell'espressione precedente (Z_1). Per fare ciò necessitiamo delle derivate funzionali del funzionale V rispetto ai campi φ e φ^\dagger . Tali derivate possono essere ottenute mediante il calcolo esplicito ed effettuando un'integrazione per parti. Di seguito ne sono riportati i nuclei integrali:

$$\begin{aligned}\frac{\delta V}{\delta \varphi} &= \chi h \left[-ie\partial^\mu (A_\mu \varphi^\dagger) - ieA^\mu \partial_\mu \varphi^\dagger - e^2 A_\mu A^\mu \varphi^\dagger \right], \\ \frac{\delta V}{\delta \varphi^\dagger} &= \chi h \left[ie\partial^\mu (A_\mu \varphi) + ieA^\mu \partial_\mu \varphi - e^2 A_\mu A^\mu \varphi \right].\end{aligned}\quad (4.3.4)$$

Utilizziamo la relazione che lega il propagatore di Feynman e la funzione a due punti $\omega_2^{\beta,(0)}$ al propagatore ritardato per calcolare i prodotti presenti all'interno della parentesi quadra contenuta nel primo addendo. Così facendo si ha:

$$-iV \star \varphi^\dagger(x) + iV \cdot_T \varphi^\dagger(x) = - \int dz \frac{\delta V}{\delta \varphi}(z) \Delta_R(x, z). \quad (4.3.5)$$

Infine, per calcolare il primo addendo, è necessario conoscere la derivata del funzionale riportato in (4.3.5) rispetto al campo φ^\dagger . Mediante il calcolo esplicito ed un'integrazione per parti si ottiene il seguente nucleo integrale:

$$\frac{\delta(4.3.5)}{\delta \varphi^\dagger} = \chi(t_z) h(\mathbf{z}) \left[-ie\partial^\mu A_\mu(z) \cdot \Delta_R(x, z) - 2ieA_\mu(z) \partial^\mu \Delta_R(x, z) + e^2 A_\mu(z) A^\mu(z) \Delta_R(x, z) \right]. \quad (4.3.6)$$

Per semplificare tale espressione è possibile sfruttare la libertà nella scelta di *gauge* per il potenziale A_μ . In particolare, risulta conveniente utilizzare il *gauge di Lorenz*, esprimibile mediante la seguente equazione:

$$\partial^\mu A_\mu(z) = 0. \quad (4.3.7)$$

Compiendo tale scelta di *gauge*, il primo addendo in (4.3.3) assume la seguente forma:

$$Z_1 = - \int ds \omega_2^{\beta,(0)}(s, y) \chi(t_s) h(\mathbf{s}) \left[2ieA_\mu(s) \partial^\mu \Delta_R(x, s) - e^2 A_\mu(s) A^\mu(s) \Delta_R(x, s) \right]. \quad (4.3.8)$$

Prima di proseguire sostituendo le espressioni esplicite della funzione a due punti e del propagatore ritardato, osserviamo che il secondo contributo in (4.3.8) costituisce una correzione al secondo ordine nella costante di accoppiamento e e nel quadripotenziale A_μ . In quanto il nostro obiettivo è quello di ricavare la correzione perturbativa al primo ordine in e della funzione a due punti della teoria interagente, d'ora in avanti trascureremo il termine proporzionale ad e^2 e considereremo esclusivamente il contributo $Z_1^{(1)}$:

$$Z_1^{(1)} := - \int ds \omega_2^{\beta,(0)}(s, y) \chi(t_s) h(\mathbf{s}) \left[2ieA_\mu(s) \partial^\mu \Delta_R(x, s) \right]. \quad (4.3.9)$$

Ripetendo lo stesso calcolo per il secondo addendo in (4.3.3) (Z_2) si ottiene il seguente risultato al primo ordine perturbativo nella costante di accoppiamento e , indicato con la notazione $Z_2^{(1)}$:

$$Z_2^{(1)} := \int ds \omega_2^{\beta,(0)}(x, s) \chi(t_s) h(\mathbf{s}) \left[2ieA_\mu(s) \partial^\mu \Delta_R(y, s) \right]. \quad (4.3.10)$$

Sostituiamo ora le espressioni esplicite per la funzione a due punti $\omega_2^{\beta,(0)}$ ed il propagatore ritardato Δ_R . Per comodità, tali espressioni sono riportate di seguito:

$$\Delta_R(x - s) = - \int \frac{1}{(2\pi)^3} \theta(t_x - t_s) \frac{\sin(\omega_k(t_x - t_s))}{\omega_k} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{s})} d^3\mathbf{k}. \quad (4.3.11)$$

$$\omega_2^{\beta,(0)}(s-y) = \int \frac{1}{(2\pi)^3} \left[\frac{e^{-i\omega_p(t_s-t_y)}}{(1-e^{-\beta\omega_p})2\omega_p} - \frac{e^{i\omega_p(t_s-t_y)}}{(1-e^{\beta\omega_p})2\omega_p} \right] e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{s}-\mathbf{y})} d^3\mathbf{p}. \quad (4.3.12)$$

Utilizzando la forma esplicita (4.2.6) per il quadripotenziale A_μ , il contributo $Z_1^{(1)}$ assume la seguente forma:

$$Z_1^{(1)} = \int_{-\infty}^{t_x} dt_s \int d^3\mathbf{s} \int d^3\mathbf{p} \int d^3\mathbf{k} k_i \frac{2eA_i(\mathbf{s})}{(2\pi)^6} \chi(t_s) h(\mathbf{s}) \frac{\sin \omega_k(t_x - t_s)}{\omega_k} \left[\frac{e^{-i\omega_p(t_s-t_y)}}{(1-e^{-\beta\omega_p})2\omega_p} - \frac{e^{i\omega_p(t_s-t_y)}}{(1-e^{\beta\omega_p})2\omega_p} \right] e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{s}-\mathbf{y})+i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{s})}. \quad (4.3.13)$$

Decomponendo la funzione seno nella somma di esponenziali immaginari e calcolando i prodotti si ottiene il seguente risultato:

$$Z_1^{(1)} = \int_{-\infty}^{t_x} dt_s \int d^3\mathbf{s} \int d^3\mathbf{p} \int d^3\mathbf{k} \frac{eA_i(\mathbf{s})}{(2\pi)^6} \chi(t_s) h(\mathbf{s}) \frac{k_i}{2i\omega_p\omega_k} \left[\frac{e^{i(\omega_k(t_x-t_s)-\omega_p(t_s-t_y))}}{1-e^{-\beta\omega_p}} - \frac{e^{-i(\omega_k(t_x-t_s)+\omega_p(t_s-t_y))}}{1-e^{-\beta\omega_p}} - \frac{e^{i(\omega_k(t_x-t_s)+\omega_p(t_s-t_y))}}{1-e^{+\beta\omega_p}} + \frac{e^{-i(\omega_k(t_x-t_s)-\omega_p(t_s-t_y))}}{1-e^{+\beta\omega_p}} \right] e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{s}-\mathbf{y})+i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{s})} \quad (4.3.14)$$

Consideriamo ora il limite adiabatico $h(\mathbf{s}) \rightarrow 1$. A differenza di quanto visto nel capitolo precedente per il campo scalare reale, in questo caso l'integrazione nella componente spaziale della variabile s non può essere compiuta neanche dopo aver considerato tale limite. La presenza di un potenziale vettore esterno $A_i(\mathbf{s})$, infatti, rompe l'invarianza sotto traslazioni spaziali e, di conseguenza, determina l'impossibilità di ottenere un fattore $\delta(\mathbf{k} - \mathbf{p})$ che esprima la conservazione del triimpulso. Per questo motivo, inoltre, non è possibile identificare a priori alcun termine dipendente esclusivamente dalla differenza $(t_x - t_y)$ e, dunque, invariante sotto traslazioni temporali. I tempi t_x e t_y , infatti, sono moltiplicati da due differenti frequenze ω_k ed ω_p .

Effettuiamo ora un'integrazione per parti assumendo che i campi $\varphi^\dagger(x)$ e $\varphi(y)$ siano supportati nel futuro del tempo $t = 0$ in cui l'interazione viene definitivamente accesa. Così facendo si ottiene il seguente termine di bordo (indicato con la lettera A):

$$A := \int d^3\mathbf{s} \int d^3\mathbf{p} \int d^3\mathbf{k} \frac{eA_i(\mathbf{s})}{(2\pi)^6} \frac{k_i}{2\omega_p\omega_k} \left[\frac{e^{-i\omega_p(t_x-t_y)}}{(1-e^{-\beta\omega_p})(\omega_k + \omega_p)} + \frac{e^{-i\omega_p(t_x-t_y)}}{(1-e^{-\beta\omega_p})(\omega_k - \omega_p)} - \frac{e^{i\omega_p(t_x-t_y)}}{(1-e^{\beta\omega_p})(\omega_k - \omega_p)} - \frac{e^{i\omega_p(t_x-t_y)}}{(1-e^{\beta\omega_p})(\omega_k + \omega_p)} \right] e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{s}-\mathbf{y})+i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{s})}, \quad (4.3.15)$$

ed il seguente integrale (B):

$$B := \int_{-\infty}^{+\infty} dt_s \int d^3\mathbf{s} \int d^3\mathbf{p} \int d^3\mathbf{k} \frac{eA_i(\mathbf{s})}{(2\pi)^6} \dot{\chi}(t_s) \frac{k_i}{2\omega_p\omega_k} \left[-\frac{e^{i(\omega_k(t_x-t_s)-\omega_p(t_s-t_y))}}{(1-e^{-\beta\omega_p})(\omega_k + \omega_p)} - \frac{e^{-i(\omega_k(t_x-t_s)+\omega_p(t_s-t_y))}}{(1-e^{-\beta\omega_p})(\omega_k - \omega_p)} - \frac{e^{i(\omega_k(t_x-t_s)+\omega_p(t_s-t_y))}}{(1-e^{\beta\omega_p})(\omega_p - \omega_k)} + \frac{e^{-i(\omega_k(t_x-t_s)-\omega_p(t_s-t_y))}}{(1-e^{\beta\omega_p})(\omega_p + \omega_k)} \right] e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{s})+i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{s})}. \quad (4.3.16)$$

L'estremo di integrazione nella variabile t_s è stato posto uguale a $+\infty$ sfruttando le proprietà di supporto della funzione $\dot{\chi}(t_s)$ e l'assunzione fatta sul campo $\varphi^\dagger(x)$. Osserviamo

come il termine di bordo restituisca una quantità invariante sotto traslazioni temporali in quanto dipendente esclusivamente dalla differenza $(t_x - t_y)$ e, allo stesso tempo, indipendente dalla forma dell'accensione dell'interazione $\chi(t_s)$. Al contrario, l'integrale in (4.3.16) contiene una dipendenza esplicita dal cut-off temporale e non è invariante sotto traslazioni temporali.

Ripetendo un'analisi analoga a quella appena condotta per il contributo riportato in (4.3.10), è possibile verificare che anche esso fornisce un contributo di bordo invariante sotto traslazioni temporali (C):

$$C := \int d^3\mathbf{s} \int d^3\mathbf{p} \int d^3\mathbf{k} \frac{eA_i(\mathbf{s})}{(2\pi)^6} \frac{k_i}{2\omega_p\omega_k} \left[\frac{e^{-i\omega_p(t_x-t_y)}}{(1-e^{-\beta\omega_p})(\omega_p-\omega_k)} - \frac{e^{-i\omega_p(t_x-t_y)}}{(1-e^{-\beta\omega_p})(\omega_k+\omega_p)} + \frac{e^{i\omega_p(t_x-t_y)}}{(1-e^{\beta\omega_p})(\omega_k+\omega_p)} + \frac{e^{i\omega_p(t_x-t_y)}}{(1-e^{\beta\omega_p})(\omega_k-\omega_p)} \right] e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{s})+i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{s})}, \quad (4.3.17)$$

ed un termine esplicitamente dipendente dalla funzione $\chi(t_s)$ (D):

$$D := - \int_{-\infty}^{+\infty} dt_s \int d^3\mathbf{s} \int d^3\mathbf{p} \int d^3\mathbf{k} \frac{eA_i(\mathbf{s})}{(2\pi)^6} \dot{\chi}(t_s) \frac{p_i}{2\omega_p\omega_k} \left[\frac{e^{i(\omega_p(t_y-t_s)-\omega_k(t_x-t_s))}}{(1-e^{-\beta\omega_k})(\omega_k-\omega_p)} - \frac{e^{-i(\omega_p(t_y-t_s)+\omega_k(t_x-t_s))}}{(1-e^{-\beta\omega_k})(\omega_k+\omega_p)} + \frac{e^{i(\omega_p(t_y-t_s)+\omega_k(t_x-t_s))}}{(1-e^{\beta\omega_k})(\omega_p+\omega_k)} + \frac{e^{-i(\omega_p(t_y-t_s)-\omega_k(t_x-t_s))}}{(1-e^{\beta\omega_k})(\omega_p-\omega_k)} \right] e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{s})+i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{s})}. \quad (4.3.18)$$

I contributi B e D , non invarianti sotto traslazioni temporali, possono essere valutati in modo analogo a quanto fatto nel Capitolo 3. Si consideri, ad esempio, il caso più semplice in cui l'accensione avvenga in modo istantaneo al tempo $t = 0$ ($\chi(t) = \theta(t)$) e il potenziale $\mathbf{A}(\mathbf{s})$ sia uniforme. Questa situazione corrisponde fisicamente all'accensione e spegnimento impulsivo di un campo elettrico uniforme. In questo caso limite la somma dei termini B e D produce il seguente risultato:

$$B + D = \int d^3\mathbf{p} \frac{eA_i}{(2\pi)^3} \frac{p_i}{4\omega_p^3} \frac{1+e^{\beta\omega_p}}{1-e^{\beta\omega_p}} \left[e^{i\omega_p(t_x+t_y)} + e^{-i\omega_p(t_x+t_y)} \right] e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}. \quad (4.3.19)$$

Per semplicità assumiamo ora che il potenziale vettore \mathbf{A} ed il vettore $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ siano tra loro paralleli e fissiamo l'asse Z coincidente con la loro direzione e verso. La parte angolare dell'integrale nella variabile \mathbf{p} può essere così calcolata utilizzando le variabili sferiche. In questo modo si ottiene la seguente espressione:

$$B + D = \int_0^{+\infty} \frac{eA}{(2p)^3} \frac{|\mathbf{p}|^3}{4\omega_p^3} \frac{1+e^{\beta\omega_p}}{1-e^{\beta\omega_p}} \left(\frac{2i \sin(|\mathbf{p}||\mathbf{x}-\mathbf{y}|)}{|\mathbf{p}|^2|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2} - \frac{2i \cos(|\mathbf{p}||\mathbf{x}-\mathbf{y}|)}{|\mathbf{p}||\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \right) \times \left(e^{i\omega_p(t_x+t_y)} + e^{-i\omega_p(t_x+t_y)} \right) d|\mathbf{p}|. \quad (4.3.20)$$

Questo risultato è analogo a quello ottenuto nel Capitolo 3 in (3.3.20) per il caso dell'interazione quadratica nel campo scalare reale. Tuttavia, in questo caso, osserviamo come la presenza della derivata dei campi φ e φ^\dagger nella Lagrangiana di interazione V complichino ulteriormente il comportamento dei termini non invarianti sotto traslazioni temporali nel limite di grandi tempi $t_x + t_y \rightarrow \infty$. Come conseguenza diretta della presenza di termini derivativi nell'interazione, infatti, la funzione integranda appena trovata risulta moltiplicata per un ulteriore fattore $|\mathbf{p}|$ rispetto a quella ottenuta in (3.3.20). Ciò aggrava

il comportamento divergente dell'integrale il quale, dunque, non fornisce un contributo nullo neppure nel limite di grandi tempi.

Nella prossima sezione vedremo come sostituendo lo stato ω^β con uno stato $\omega^{\beta,V}$ costruito seguendo l'approccio proposto in [FL14] sia possibile risolvere i problemi appena analizzati per l'espressione perturbativa della funzione a due punti della teoria interagente.

4.4 Funzione a due punti sullo stato $\omega^{\beta,V}$

In questa sezione viene calcolata la correzione al primo ordine perturbativo nella costante di accoppiamento e della funzione a due punti della teoria interagente, utilizzando uno stato $\omega^{\beta,V}$ che soddisfi la condizione KMS per l'evoluzione temporale interagente.

La quantità che vogliamo calcolare è la seguente:

$$\omega^{\beta,V} \left(R_V(\varphi^\dagger(x) \star \varphi(y)) \right). \quad (4.4.1)$$

Come già fatto nel Capitolo 3, utilizziamo l'espressione perturbativa per il calcolo del valore di aspettazione di un'osservabile $R_V(F)$ sullo stato $\omega^{\beta,V}$ introdotta nell'ultima sezione del Capitolo 2 e qui riportata per comodità:

$$\omega^{\beta,V}(R_V(F)) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \int_{\beta S_n} du_1 \dots du_n \omega^{\beta,c}(R_V(F) \otimes \tau_{iu_1} K \otimes \dots \otimes \tau_{iu_n} K). \quad (4.4.2)$$

In questo caso il generatore del cociclo tra l'evoluzione temporale libera ed interagente K è dato dalla seguente espressione:

$$K = R_V(-\dot{V}) = - \int \dot{\chi}(t_x) h(\mathbf{x}) \left[ie A^\mu(x) R_V(\varphi^\dagger \partial_\mu \varphi - \partial_\mu \varphi^\dagger \varphi) - e^2 A_\mu(x) A^\mu(x) R_V(\varphi^\dagger \varphi) \right] d^4 x. \quad (4.4.3)$$

Al primo ordine nell'interazione V la formula (4.4.2) restituisce, oltre alla correzione trovata nella sezione precedente, anche il seguente contributo, ottenuto fissando $n = 1$ e ponendo $R_V = \mathbb{1}$:

$$E := \int_0^\beta du \omega^{\beta,c}(\varphi^\dagger(x) \star \varphi(y) \otimes \alpha_{iu} \dot{V}). \quad (4.4.4)$$

Sostituiamo ora in (4.4.4) l'espressione esplicita per \dot{V} e trascuriamo il termine di ordine e^2 . Così facendo si ottiene il seguente risultato, denotato $E^{(1)}$:

$$E^{(1)} := ie \int_0^\beta du \int d^4 z \dot{\chi}(t_z - iu) h(\mathbf{z}) A^\mu(z) \times \left[\omega^\beta(\varphi^\dagger(x) \star \partial_\mu \varphi(z)) \cdot \omega^\beta(\varphi(y) \star \varphi^\dagger(z)) - \omega^\beta(\varphi^\dagger(x) \star \varphi(z)) \cdot \omega^\beta(\varphi(y) \star \partial_\mu \varphi^\dagger(z)) \right]. \quad (4.4.5)$$

Calcolando i prodotti star mediante l'uso del calcolo funzionale si ottiene infine la seguente espressione:

$$E^{(1)} = ie \int_0^\beta du \int d^4 z \dot{\chi}(t_z) h(\mathbf{z}) A^\mu(z + iue_0) \times \left[\partial_\mu^z \omega_2^{\beta,(0)}(x, z + iue_0) \omega_2^{\beta,(0)}(y, z + iue_0) - \omega_+^{\beta,(0)}(x, z + iue_0) \partial_\mu^z \omega_2^{\beta,(0)}(y, z + iue_0) \right], \quad (4.4.6)$$

avendo specificato che le derivate parziali delle funzioni a due punti $\omega_2^{\beta,(0)}$ agiscono sulla variabile z . Sostituiamo ora l'espressione esplicita per il potenziale (4.2.6) e per la funzione a due punti (4.3.12). Calcolando il limite adiabatico $h \rightarrow 1$, si ottiene la seguente espressione:

$$E^{(1)} = ie \int_0^\beta du \int d^4 z \int d^3 \mathbf{k} \int d^3 \mathbf{p} \frac{\dot{\chi}(t_z) A_i(\mathbf{z})}{(2\pi)^6} (ip_i - ik_i) \left[\frac{e^{-i\omega_k(t_x - t_z - iu)}}{(1 - e^{-\beta\omega_k})2\omega_k} - \frac{e^{i\omega_k(t_x - t_z - iu)}}{(1 - e^{\beta\omega_k})2\omega_k} \right] \times \\ \left[\frac{e^{-i\omega_p(t_y - t_z - iu)}}{(1 - e^{-\beta\omega_p})2\omega_p} - \frac{e^{i\omega_p(t_y - t_z - iu)}}{(1 - e^{\beta\omega_p})2\omega_p} \right] e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{z}) + i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{z})}. \quad (4.4.7)$$

Svolgendo i prodotti tra gli esponenziali ed integrando nella variabile u , la correzione al primo ordine in e può essere scritta per esteso nel modo seguente:

$$E^{(1)} = ie \int_{-\infty}^{+\infty} \int \int \int \frac{\dot{\chi}(t_z) A_i(\mathbf{z})}{(2\pi)^6} (ip_i - ik_i) \left[\overbrace{-\frac{e^{-i\omega_k(t_x - t_z - i\beta) - i\omega_p(t_y - t_z - i\beta)}}{(1 - e^{-\beta\omega_k})(1 - e^{-\beta\omega_p})(\omega_k + \omega_p)4\omega_p\omega_k}} \right. \\ - \frac{e^{i\omega_k(t_x - t_z - i\beta) - i\omega_p(t_y - t_z - i\beta)}}{(1 - e^{\beta\omega_k})(1 - e^{-\beta\omega_p})(\omega_k - \omega_p)4\omega_p\omega_k} + \frac{e^{-i\omega_k(t_x - t_z - i\beta) + i\omega_p(t_y - t_z - i\beta)}}{(1 - e^{-\beta\omega_k})(1 - e^{\beta\omega_p})(\omega_k - \omega_p)4\omega_p\omega_k} \\ + \frac{e^{i\omega_k(t_x - t_z - i\beta) + i\omega_p(t_y - t_z - i\beta)}}{(1 - e^{\beta\omega_k})(1 - e^{\beta\omega_p})(\omega_p + \omega_k)4\omega_p\omega_k} + \overbrace{\frac{e^{-i\omega_k(t_x - t_z) - i\omega_p(t_y - t_z)}}{(1 - e^{-\beta\omega_k})(1 - e^{-\beta\omega_p})(\omega_k + \omega_p)4\omega_p\omega_k}} \\ + \frac{e^{i\omega_k(t_x - t_z) - i\omega_p(t_y - t_z)}}{(1 - e^{\beta\omega_k})(1 - e^{-\beta\omega_p})(\omega_k - \omega_p)4\omega_p\omega_k} - \frac{e^{-i\omega_k(t_x - t_z) + i\omega_p(t_y - t_z)}}{(1 - e^{-\beta\omega_k})(1 - e^{\beta\omega_p})(\omega_k - \omega_p)4\omega_p\omega_k} \\ \left. - \frac{e^{i\omega_k(t_x - t_z) + i\omega_p(t_y - t_z)}}{(1 - e^{\beta\omega_k})(1 - e^{\beta\omega_p})(\omega_p + \omega_k)4\omega_p\omega_k} \right] e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{z}) + i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{z})} dt_z d^3 \mathbf{z} d^3 \mathbf{k} d^3 \mathbf{p}. \quad (4.4.8)$$

L'obiettivo è ora quello di capire come la correzione appena trovata elimini dalla funzione a due punti della teoria interagente la dipendenza dal cut-off χ e risolva i problemi di non invarianza sotto traslazioni temporali. Per fare ciò, è necessario sommare tra loro i termini contenuti in (4.4.8)($E^{(1)}$), (4.3.16)(A) e (4.3.18)(C) aventi le stesse frequenze negli esponenziali immaginari. Per semplicità, limitiamoci a considerare esclusivamente i termini evidenziati in (4.4.8), in quanto gli altri contributi possono essere studiati mediante un'analisi analoga a quella condotta nel seguito. Sommiamo ai termini evidenziati i contributi aventi la stessa frequenza presenti in (4.3.16)(A) e (4.3.18)(C). Per fare ciò, utilizziamo le seguenti relazioni algebriche che legano tra loro fattori di Bose corrispondenti ad impulsi \mathbf{k} e \mathbf{p} differenti:

$$\frac{1 - e^{-\beta(\omega_k + \omega_p)}}{(1 - e^{-\beta\omega_k})(1 - e^{-\beta\omega_p})} = \\ \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega_p}} + \frac{1}{e^{\beta\omega_p} - 1} - \frac{1}{(1 - e^{-\beta\omega_k})(e^{\beta\omega_p} - 1)} + \frac{1}{(e^{\beta\omega_k} - 1)(1 - e^{-\beta\omega_p})}. \quad (4.4.9)$$

$$\frac{1 - e^{-\beta(\omega_k + \omega_p)}}{(1 - e^{-\beta\omega_k})(1 - e^{-\beta\omega_p})} = \\ \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega_k}} + \frac{1}{e^{\beta\omega_k} - 1} + \frac{1}{(1 - e^{-\beta\omega_k})(e^{\beta\omega_p} - 1)} - \frac{1}{(e^{\beta\omega_k} - 1)(1 - e^{-\beta\omega_p})}. \quad (4.4.10)$$

Sfruttando queste relazioni, i vari addendi possono essere sommati ottenendo il seguente risultato:

$$\begin{aligned}
 & e \int_{-\infty}^{\infty} dt_s \int d^3\mathbf{s} d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{k} \frac{A_i(\mathbf{s})}{(2\pi)^6} \frac{\dot{\chi}(t_s)}{4\omega_p\omega_k} \frac{e^{-i(\omega_k(t_x-t_s)+\omega_p(t_y-t_s))}}{(\omega_p+\omega_k)} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{s})+i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{s})} \\
 & \left[k_i \left[\frac{1}{1-e^{-\beta\omega_p}} - \frac{1}{e^{\beta\omega_p}-1} - \frac{1}{(1-e^{-\beta\omega_k})(e^{\beta\omega_p}-1)} + \frac{1}{(e^{\beta\omega_k}-1)(1-e^{-\beta\omega_p})} \right] - \right. \\
 & \left. p_i \left[-\frac{1}{1-e^{-\beta\omega_k}} + \frac{1}{e^{\beta\omega_k}-1} + \frac{1}{(1-e^{-\beta\omega_k})(e^{\beta\omega_p}-1)} - \frac{1}{(e^{\beta\omega_k}-1)(1-e^{-\beta\omega_p})} \right] \right]. \tag{4.4.11}
 \end{aligned}$$

Per prima cosa, osserviamo che nel caso in cui il potenziale A_μ sia uniforme l'integrazione nella parte spaziale della variabile s produce un fattore $(2\pi)^3\delta(\mathbf{p}+\mathbf{k})$ che può essere utilizzato per calcolare uno dei due integrali nei triimpulsi. In questo caso, il coefficiente tra parentesi quadre si annulla producendo le cancellazioni cercate. Nel caso più generale in cui il potenziale vettore presenti una dipendenza generica dalla variabile spaziale, invece, non risulta nessuna cancellazione apparente. Per capire come l'espressione in (4.4.11) in realtà fornisca un risultato nullo è necessario fare uso della scelta di gauge effettuata all'inizio del capitolo in (4.3.7). Considerando la forma esplicita del quadripotenziale da noi utilizzato, la condizione di Lorenz assume la seguente forma:

$$\partial^\mu A_\mu = 0 \xrightarrow{A_0=0} \partial_i A_i(\mathbf{s}) = 0. \tag{4.4.12}$$

Utilizzando la trasformata di Fourier, l'equazione (4.4.12) si traduce nella seguente *condizione di trasversalità* per il potenziale vettore $\mathbf{A}(\mathbf{s})$:

$$\partial_i A_i(\mathbf{s}) = 0 \xrightarrow{\mathcal{F}} q_i \hat{A}_i(\mathbf{q}) = 0. \tag{4.4.13}$$

Osserviamo ora che l'integrazione nella variabile \mathbf{s} in (4.4.11) produce la trasformata di Fourier del potenziale vettore come funzione del triimpulso $\mathbf{p}+\mathbf{k}$. Sfruttando la seguente relazione algebrica tra i fattori di Bose:

$$\frac{1}{1-e^{-\beta\omega_p}} - \frac{1}{e^{\beta\omega_p}-1} = \frac{1}{1-e^{-\beta\omega_p}} - \frac{e^{-\beta\omega_p}}{1-e^{-\beta\omega_p}} = 1, \tag{4.4.14}$$

l'espressione (4.4.11) può essere riscritta nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
 & e \int_{-\infty}^{\infty} dt_s \int d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{k} \frac{\hat{A}_i(\mathbf{p}+\mathbf{k})}{(2\pi)^6} (k_i + p_i) \frac{\dot{\chi}(t_s)}{4\omega_p\omega_k} \frac{e^{-i(\omega_k(t_x-t_s)+\omega_p(t_y-t_s))}}{(\omega_p+\omega_k)} \\
 & \left[1 - \frac{1}{(1-e^{-\beta\omega_k})(e^{\beta\omega_p}-1)} + \frac{1}{(e^{\beta\omega_k}-1)(1-e^{-\beta\omega_p})} \right] e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = 0, \tag{4.4.15}
 \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza è stata ottenuta facendo uso della condizione di trasversalità (4.4.13) appena dimostrata.

In modo analogo a quanto appena visto, è possibile mostrare che anche i restanti termini presenti in $E^{(1)}$ si ricombinano con i contributi forniti dalle espressioni A e C , producendo delle cancellazioni. In conclusione, dunque, l'approssimazione al primo ordine perturbativo della funzione a due punti della teoria interagente ottenuta facendo uso dello stato ω^β risulta essere profondamente differente da quella ricavata utilizzando lo stato $\omega^{\beta,V}$. Quest'ultima, infatti, contiene al suo interno esclusivamente i contributi A e C ricavati nella sezione precedente:

$$\omega^{\beta,V}(R_V(\varphi^\dagger(x)) \star R_V(\varphi(y))) = \omega_2^{\beta,(0)}(x,y) + A + C + \mathcal{O}(e^2). \tag{4.4.16}$$

Tale risultato sarà analizzato nella prossima sezione.

4.5 Analisi del risultato

I problemi dell'approccio perturbativo dovuti alla dipendenza esplicita dalla funzione di cut-off χ e alla presenza di termini non invarianti sotto traslazioni temporali incontrati utilizzando lo stato ω^β sono stati risolti facendo uso dello stato $\omega^{\beta,V}$, il quale soddisfa la condizione KMS per la teoria interagente. Come anticipato nella Sezione 3.4.2 del precedente capitolo, componendo uno stato Ω^β che sia KMS per l'evoluzione temporale libera con la formula di Bogoljubov è possibile riottenere uno stato $\Omega^{\beta,V}$ KMS per la teoria interagente nel limite di grandi tempi:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Omega^\beta(R_V(\tau_t(A))) = \Omega^{\beta,V}(A) \quad \text{con } A \in \mathcal{F}_{loc}. \quad (4.5.1)$$

Questo comportamento, noto come *ritorno all'equilibrio*, giustifica la scelta di utilizzare uno stato $\omega^{\beta,V}$ costruito secondo l'approccio proposto in [FL14] per calcolare le funzioni a due punti della teoria interagente. La proprietà (4.5.1), tuttavia, cessa di valere nel caso in cui il supporto spaziale dell'interazione venga esteso a tutto lo spazio (limite adiabatico) prima di considerare il limite di grandi tempi. Questa situazione si presenta frequentemente nello studio di sistemi fisici di interesse e determina problematiche analoghe a quelle incontrate nella Sezione 4.3 utilizzando lo stato ω^β . In [AAP14], ad esempio, la funzione a due punti per un campo scalare complesso interagente con un potenziale elettromagnetico esterno viene ricavata utilizzando il *formalismo di Keldysh-Schwinger*. È possibile dimostrare che tale formalismo risulta essere del tutto analogo a quello da noi utilizzato nella Sezione 4.3 e, dunque, non permette di tenere direttamente in considerazione l'effetto dell'interazione sugli stati, ma esclusivamente a livello degli osservabili. In quanto il supporto dell'interazione studiata in [AAP14] viene direttamente definito su tutto lo spazio, anche nel limite di grandi tempi i risultati ottenuti utilizzando il formalismo di Keldysh-Schwinger (o equivalentemente uno stato ω^β) non coincidono con quelli ottenuti utilizzando uno stato di equilibrio per la teoria interagente. Al contrario, essi mostrano un comportamento divergente nel limite di grandi tempi (*effetti secolari*) il quale complica l'utilizzo dell'approccio perturbativo. Tali problematiche, però, non devono essere ricondotte ad un fallimento dell'approccio perturbativo, ma, piuttosto, ad una errata scelta dello stato utilizzato per calcolare i valori di aspettazione degli osservabili o ad una non corretta scelta dell'ordine in cui vengono calcolati il limite adiabatico (spaziale) e il limite a grandi tempi. Dunque, come mostrato nella Sezione 4.4, l'utilizzo di uno stato $\omega^{\beta,V}$ che soddisfi la condizione KMS per l'evoluzione temporale interagente consente di ottenere valori di aspettazione invarianti sotto traslazioni temporali anche nel caso in cui il limite adiabatico sia calcolato prima del limite di grandi tempi $t \rightarrow \infty$, risolvendo così i problemi descritti in [AAP14].

Conclusioni e futuri sviluppi

Nel corso di questo lavoro di tesi è stato approfondito lo studio dell'evoluzione temporale dei campi quantistici interagenti e degli stati a temperatura finita nel contesto delle teorie termiche di campo. In particolare, è stata applicata un'analisi innovativa per il calcolo delle funzioni a due punti di sistemi fisici a temperatura finita, sviluppata nel contesto delle teorie algebriche di campo. Tradizionalmente, le funzioni a due punti nelle teorie termiche di campo vengono ricavate mediante l'utilizzo del *formalismo del tempo reale*, il quale costituisce un'applicazione particolare della *tecnica di Keldysh-Schwinger* [Kam04]. Tuttavia, come mostrato in [AAP14], in alcune situazioni fisiche di interesse tale approccio presenta gravi problematiche dovute alla comparsa di crescite temporali (*effetti secolari*) all'interno delle espressioni perturbative ottenute per le funzioni a due punti dei sistemi interagenti a temperatura finita. In questo lavoro di tesi, tali problemi sono stati analizzati nel dettaglio ed è stato mostrato esplicitamente come la loro origine sia riconducibile ad un'ipotesi non sempre verificata riguardante gli stati termici delle teorie interagenti. Alla base del funzionamento del formalismo del tempo reale, infatti, si trova l'assunzione che nel *limite di grandi tempi* (ovvero attendendo tempi sufficientemente lunghi dall'accensione dell'interazione) gli stati di equilibrio a temperatura finita (*stati KMS*) della teoria libera convergano in stati KMS della teoria interagente. Tuttavia, come recentemente dimostrato in [DFP17], tale assunzione cessa di valere nel caso in cui il supporto spaziale dell'interazione venga esteso a tutto lo spazio (*limite adiabatico*) prima di considerare il limite di grandi tempi. Ciò viene comunemente fatto nello studio dei sistemi fisici, in quanto, generalmente, la Lagrangiana di interazione è definita fin dall'inizio come una quantità supportata su tutto lo spazio. Nel terzo e nel quarto capitolo della tesi, dunque, è stato mostrato esplicitamente in situazioni fisiche particolari come i problemi incontrati utilizzando gli approcci tradizionali alle teorie di campo a temperatura finita possano essere risolti tenendo in considerazione l'effetto dell'interazione a livello degli stati e non solo a quello delle osservabili. Per fare ciò è stata utilizzata la costruzione perturbativa di stati KMS per le teorie interagenti recentemente proposta in [FL14] nel contesto delle teorie di campo algebriche. La possibilità di risolvere i problemi legati agli effetti secolari riscontrati nello studio delle teorie di campo a temperatura finita e di ottenere risultati differenti da quelli ricavati mediante gli approcci tradizionali a questa materia determina dunque interessanti prospettive di ricerca nell'ambito dello studio delle teorie termiche di campo (TFT).

L'analisi sviluppata in questo lavoro di tesi nel contesto della TFT per campi scalari potrebbe, ad esempio, essere applicata allo studio dei campi fermionici. In questo modo sarebbe possibile calcolare le correzioni termiche a quantità fisiche di interesse, come *sezioni d'urto* e *rate di decadimento*, confrontando i risultati così ottenuti con quelli ricavati mediante gli approcci tradizionali a questa materia. Per rendere possibile questo tipo di analisi, è necessario preliminarmente estendere l'approccio algebrico alle teorie di campo scalare studiate nei primi due capitoli al caso di particelle a spin $\frac{1}{2}$. Infatti, mentre gli

aspetti perturbativi dell'AQFT sono stati ampiamente studiati nel caso dei campi scalari, la loro generalizzazione al caso fermionico costituisce un tema di ricerca tutt'ora attivo. Per via del *teorema spin-statistica*, questa estensione deve implementare le relazioni di anticommutazione dei campi a livello algebrico ed è quindi necessario analizzare in dettaglio le implicazioni che ne conseguono (per alcuni progressi in questa direzione si veda ad esempio [DHP09]).

Le teorie di campo a temperatura finita sono ampiamente applicate anche allo studio della fisica dei plasmi in contesti relativistici. L'indagine della propagazione dei modi collettivi di oscillazione (in particolare, della *legge di dispersione* e del *rate di decadimento* che li caratterizzano) è basata sullo studio dei propagatori della teoria in risposta ad eccitazioni esterne (si veda ad esempio [Bel00] per un'analisi approfondita di questo argomento). Pertanto, l'uso degli stati di equilibrio termico ricavati di [FL14] per il calcolo dei propagatori stessi potrebbe portare a nuove correzioni in grado di indurre comportamenti fisici differenti da quelli predetti utilizzando gli approcci tradizionali alla materia. Inoltre, questo tipo di analisi risulta utile anche per lo studio della fisica dell'universo primordiale. In questo contesto, l'obiettivo è quello di descrivere il comportamento e l'evoluzione della materia in condizioni di temperature estremamente elevate. Generalmente, i fenomeni di trasporto sono descritti per mezzo dell'equazione di Boltzmann o di sue generalizzazioni. Tuttavia, numerosi parametri che compaiono in queste equazioni devono essere stimati e fissati utilizzando le teorie di campo termiche. Dunque, l'uso dell'analisi sviluppata in questo lavoro di tesi potrebbe condurre a differenze significative in queste stime rispetto ai valori ottenuti fino ad oggi.

Infine, lo studio degli stati termici delle teorie interagenti potrebbe essere applicato anche alla risoluzione di alcuni problemi riguardanti la *radiazione di buco nero*. Nella seconda metà dello scorso secolo, Stephen Hawking ha dimostrato che i buchi neri irradiano mediante uno spettro termico. Tale radiazione è un effetto quantistico che emerge nello studio delle teorie di campo su un background geometrico che sta collassando. Quando si tenta di modellizzare la radiazione di Hawking per un campo scalare auto-interagente, le espressioni perturbative che si ottengono utilizzando gli approcci tradizionali alla TFT mostrano la presenza di effetti secolari analoghi a quelli da noi trattati, una volta che le correzioni di ordine superiore al primo vengono tenute in considerazione (si veda a riguardo [AGP16]). Come rimarcato nel primo e nel secondo capitolo di questo lavoro, sappiamo che le teorie di campo quantistico algebriche costituiscono uno strumento ideale per la generalizzazione della QFT al caso di uno spazio-tempo curvo. Pertanto, potrebbe essere interessante studiare in che modo la costruzione analizzata in questa tesi possa essere applicata allo studio di questo argomento per risolvere i problemi incontrati utilizzando approcci differenti.

Appendice A

Dettagli sugli stati di Hadamard

In questa appendice mostriamo come le funzioni U e V che compaiono nella definizione di stati di Hadamard siano fissate dalla geometria della varietà \mathcal{M} e dalla massa m del campo.

Nel seguito useremo più volte la seguente proprietà della *Synge's world function* $\sigma(x, y)$:

$$\nabla_\mu \sigma \nabla^\mu \sigma = 2\sigma, \quad (\text{A.0.1})$$

dove con ∇_μ abbiamo indicato la derivata covariante rispetto alla variabile x . Nel caso dello spazio-tempo di Minkowski la verifica di tale proprietà è immediata:

$$\begin{aligned} \sigma(x, y) &= \frac{(x - y)^2}{2}, \\ \nabla_\mu \sigma(x, y) &= (x - y)_\mu \implies \nabla_\mu \sigma(x, y) \nabla^\mu \sigma(x, y) = (x - y)^2. \end{aligned}$$

Per dimostrare le proprietà di U e V imponiamo ora che la funzione a due punti dello stato di Hadamard sia soluzione dell'equazione di campo:

$$P_x \omega_2(x, y) := (-\square + m^2) \left(\frac{U}{\sigma} + V \log(\sigma) + W \right) = 0. \quad (\text{A.0.2})$$

Esplicitiamo ora l'azione dell'operatore differenziale P_x sul primo addendo:

$$\begin{aligned} P_x \left(\frac{U}{\sigma} \right) &= (-\nabla_\mu \nabla^\mu + m^2) \left(\frac{U}{\sigma} \right) = m^2 \frac{U}{\sigma} - \nabla_\mu \left(\frac{\nabla^\mu U}{\sigma} + U \nabla^\mu \frac{1}{\sigma} \right) = \\ &= \frac{P_x U}{\sigma} - U \square \frac{1}{\sigma} - 2 \nabla^\mu U \nabla_\mu \frac{1}{\sigma} = \frac{P_x U}{\sigma} + U \nabla^\mu \left(\frac{\nabla_\mu \sigma}{\sigma^2} \right) + 2 \nabla^\mu U \frac{\nabla_\mu \sigma}{\sigma^2} = \\ &= \frac{P_x U}{\sigma} + \frac{U \square \sigma}{\sigma^2} - 2 \frac{U \nabla_\mu \sigma \nabla^\mu \sigma}{\sigma^3} + 2 \frac{\nabla^\mu U \nabla_\mu \sigma}{\sigma^2} = \frac{P_x U}{\sigma} + \frac{(\square \sigma - 4)U}{\sigma^2} + 2 \frac{\nabla_\mu U \nabla^\mu \sigma}{\sigma^2}, \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio è stato usata la proprietà (A.0.1). Possiamo notare la presenza di un contributo divergente come $\frac{1}{\sigma^2}$ e di un altro divergente come $\frac{1}{\sigma}$.

Proviamo ora a ripetere lo stesso conto per il secondo addendo. Per fare ciò, assumiamo che la funzione V sia espandibile con una serie di potenze positive in $\sigma(x, y)$:

$$V(x, y) = \sum_{n \geq 0} v_n(x, y) \sigma^n(x, y), \quad (\text{A.0.3})$$

con v_n dei coefficienti lisci. Otterremo pertanto la seguente espressione:

$$\begin{aligned}
 P_x \left(\sum_{n \geq 0} v_n \sigma^n \log \sigma \right) &= m \sum_{n \geq 0} v_n \sigma^n \log \sigma - \nabla^\mu \left[\sum_{n \geq 0} \nabla_\mu (v_n) \sigma^n \log \sigma + \right. \\
 &\quad \left. \sum_{n \geq 0} v_n \nabla_\mu (\sigma^n) \log \sigma + \sum_{n \geq 0} v_n \sigma^n \nabla_\mu (\log \sigma) \right] = \\
 &= P_x \left(\sum_{n \geq 0} v_n \sigma^n \right) \log \sigma - 2 \sum_{n \geq 0} v_n \nabla_\mu (\sigma^n) \frac{\nabla^\mu (\sigma)}{\sigma} - \\
 &\quad \sum_{n \geq 0} v_n \sigma^n \nabla^\mu \left(\frac{\nabla_\mu (\sigma)}{\sigma} \right) - 2 \sum_{n \geq 0} \sigma^{n-1} \nabla_\mu v_n \nabla^\mu \sigma = \\
 &= P_x \left(\sum_{n \geq 0} v_n \sigma^n \right) \log \sigma - 4 \sum_{n \geq 0} n v_n \sigma^{n-1} + 2 \sum_{n \geq 0} v_n \sigma^{n-1} - \\
 &\quad \sum_{n \geq 0} v_n \sigma^{n-1} \square \sigma - 2 \sum_{n \geq 0} \sigma^{n-1} \nabla^\mu \sigma \nabla_\mu v_n,
 \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato nuovamente la proprietà (A.0.1). In questo caso abbiamo ottenuto un contributo divergente come $\frac{1}{\sigma}$ (dagli ultimi tre addendi per $n = 0$) ed un altro che presenta una divergenza logaritmica (il primo addendo).

Se ora applicassimo l'operatore P_x sulla funzione W , essendo quest'ultima liscia, non otterremo nessun termine divergente. Poiché vogliamo richiedere che la funzione a due punti sia soluzione dell'equazione di campo, dovremo ora imporre che la somma di tutti i termini che presentino lo stesso tipo di divergenza si annulli.

I termini con divergenze del tipo $\frac{1}{\sigma^2}$ determinano la seguente equazione per U :

$$(\square \sigma - 4)U + 2\nabla_\mu U \nabla^\mu \sigma = 0, \quad (\text{A.0.4})$$

che può essere risolta fissando una condizione al contorno. In particolare, dal confronto con la forma della funzione a due punti del vuoto, si sceglie normalmente di fissare $[U](x) := U(x, x) = 1$.

I termini con divergenze del tipo $\frac{1}{\sigma}$, invece, determinano la seguente equazione per v_0 :

$$P_x U + 2v_0 - \square \sigma v_0 - 2\nabla^\mu \sigma \nabla_\mu v_0 = 0. \quad (\text{A.0.5})$$

Infine, imponendo che anche il coefficiente della divergenza logaritmica si annulli, si ottiene per tutti gli altri coefficienti v_n :

$$P_x \sum_{n \geq 0} v_n \sigma^n = 0. \quad (\text{A.0.6})$$

Non intendiamo ora approfondire i dettagli della risoluzione di questo sistema di equazioni differenziali. Ciò che invece ci interessa osservare, piuttosto, è il fatto che l'equazione (A.0.4) che fissa la funzione U dipende esclusivamente dalla derivata covariante, ovvero dalla geometria della varietà \mathcal{M} . Nelle equazioni (A.0.5) e (A.0.6) che determinano la funzione V , invece, compare l'operatore P_x , ovvero una dipendenza dalla geometria della varietà \mathcal{M} e dalla massa m del campo. Abbiamo pertanto concluso la nostra dimostrazione.

Appendice B

Rappresentazione di Källén-Lehmann

In questa appendice intendiamo ricavare esplicitamente il quadrato della funzione a due punti dello stato di vuoto sullo spazio-tempo di Minkowski ($\Delta_+^2(x, m)$) per un campo scalare massivo utilizzando la rappresentazione di Källén-Lehmann.

Per prima cosa ricordiamo che la trasformata di Fourier di $\Delta_+^2(x, m)$ è data dalla seguente espressione:

$$\hat{\Delta}_+(p, m) = (2\pi)\theta(p^0)\delta(p^2 + m^2). \quad (\text{B.0.1})$$

Sfruttando il teorema di convoluzione, possiamo scrivere la seguente espressione per il quadrato della funzione a due punti:

$$\Delta_+^2(x, m) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\Delta_+^2(x, m))) = \frac{1}{(2\pi)^4}\mathcal{F}^{-1}(\hat{\Delta}_+(p, m) * \hat{\Delta}_+(p, m)). \quad (\text{B.0.2})$$

Studiamo ora il prodotto di convoluzione $*$ tra le due trasformate della funzione a due punti. Utilizzando la (B.0.1) si ottiene:

$$\begin{aligned} \hat{\Delta}_+(p, m) * \hat{\Delta}_+(p, m) &= \int \int \hat{\Delta}_+(k_1, m)\hat{\Delta}_+(k_2, m)\delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p) d^4k_1 d^4k_2 = \\ &= (2\pi)^2 \int \int \theta(k_1^0)\theta(k_2^0)\delta(k_1 \cdot k_1 + m^2)\delta(k_2 \cdot k_2 + m^2)\delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p) d^4k_1 d^4k_2. \end{aligned} \quad (\text{B.0.3})$$

Per calcolare uno dei due integrali in (B.0.3) sfruttiamo ora il fatto che tale espressione è una funzione di p invariante sotto trasformazioni di Lorentz. Pertanto, possiamo scegliere di valutarla fissando l'impulso p nel modo seguente:

$$p = (p^0, 0, 0, 0). \quad (\text{B.0.4})$$

Sfruttando le δ di Dirac presenti nelle trasformate delle funzioni a due punti per svolgere le integrazioni in dk_1^0 e in dk_2^0 otteniamo la seguente espressione:

$$\begin{aligned} \hat{\Delta}_+(p, m) * \hat{\Delta}_+(p, m) &= (2\pi)^2 \int \int \frac{1}{2\omega_{k_1}} \frac{1}{2\omega_{k_2}} \delta^{(3)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \delta(p^0 - \omega_{k_1} - \omega_{k_2}) d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2 = \\ &= (2\pi)^2 \int \frac{1}{4\omega_k^2} \delta(p^0 - 2\omega_k) d^3\mathbf{k} = (2\pi)^2 \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{4\omega_k^2} \delta(p^0 - 2\omega_k) \kappa^2 d\kappa d\Omega. \end{aligned} \quad (\text{B.0.5})$$

Nell'ultima riga è stato effettuato il passaggio in coordinate polari indicando con la lettera κ il modulo del trivettore \mathbf{k} . Effettuiamo ora il seguente cambio di variabili:

$$\begin{aligned}\kappa &\rightarrow M := 2\omega_k, \\ \kappa^2 &= \frac{M^2}{4} - m^2, \\ \kappa d\kappa &= \frac{M}{2} dM.\end{aligned}$$

Il nuovo estremo inferiore di integrazione corrisponderà dunque al valore $M = 2m$. Effettuando il cambio di variabili e svolgendo l'integrazione nella parte angolare, l'integrale in (B.0.5) può essere riscritto nel modo seguente:

$$16\pi^3 \int_{2m}^{\infty} \frac{1}{4M} \sqrt{\frac{M^2}{4} - m^2} \delta(p^0 - M) dM. \quad (\text{B.0.6})$$

Osserviamo ora che, per via delle proprietà della delta di Dirac, sussiste la seguente relazione:

$$\frac{1}{2M} \delta(p^0 - M) = \theta(p^0) \delta((p^0)^2 - M^2). \quad (\text{B.0.7})$$

Pertanto, effettuando il seguente cambio di variabile:

$$\begin{aligned}M &\rightarrow M^2, \\ dM &= 2M dM.\end{aligned}$$

l'integrale può essere riscritto nel modo seguente:

$$\begin{aligned}16\pi^3 \int_{(2m)^2}^{\infty} \frac{1}{4M} \sqrt{\frac{M^2}{4} - m^2} \theta(p^0) \delta((p^0)^2 - M^2) dM^2 = \\ \pi^2 \int_{(2m)^2}^{\infty} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}} \hat{\Delta}_+(p, M) dM^2, \quad (\text{B.0.8})\end{aligned}$$

dove, per ottenere l'ultima uguaglianza, abbiamo riconosciuto la trasformata della funzione a due punti per lo stato di vuoto di un campo scalare massivo di massa M . Sostituendo l'espressione (B.0.8) nell'equazione (B.0.2) otteniamo infine il seguente risultato:

$$\Delta_+^2(x, m) = \int_{(2m)^2}^{\infty} \rho_2(M^2) \Delta_+(x, M) dM^2 := \frac{1}{16\pi^2} \int_{(2m)^2}^{\infty} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}} \Delta_+(x, M) dM^2. \quad (\text{B.0.9})$$

Osserviamo che la funzione $\rho_2(M^2)$ è costante nel limite di grandi M :

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \rho_2(M^2) = \frac{1}{16\pi^2}. \quad (\text{B.0.10})$$

Appendice C

Calcolo funzionale e diagrammi non connessi

In questa appendice è riportato il calcolo esplicito di due dei contributi presenti nella correzione al secondo ordine perturbativo della funzione a due punti calcolata nella Sezione 3.2 del terzo capitolo:

$$\begin{aligned}\omega_2^\beta(x, y) &:= \omega^\beta(R_V(\varphi(x)) \star R_V(\varphi(y))) \\ &= \omega^\beta(S(V)^{-1} \star [S(V) \cdot_T \varphi(x)] \star S(V)^{-1} \star [S(V) \cdot_T \varphi(y)]). \quad (\text{C.0.1})\end{aligned}$$

Iniziamo calcolando il seguente contributo:

$$\omega^\beta \left(\left(\frac{V \cdot_T V}{2} \right) \star \varphi(x) \star \varphi(y) \right) \quad (\text{C.0.2})$$

Ricordiamo che il prodotto tempo ordinato ed il prodotto star non sono mutualmente associativi. Per calcolare il prodotto tempo ordinato tra i termini di interazione V è necessario calcolarne la derivata funzionale prima e seconda, di cui di seguito sono riportati i rispettivi nuclei integrali:

$$\begin{aligned}V &= \int \frac{1}{2} \lambda f(x) \varphi^2(x) d^4x, \quad (\text{C.0.3}) \\ \frac{\delta V}{\delta \varphi} &= \lambda f(x) \varphi(x), \\ \frac{\delta^2 V}{\delta \varphi^2} &= \lambda f(x) \delta^4(x - y).\end{aligned}$$

Otteniamo dunque:

$$\begin{aligned}\frac{V \cdot_T V}{2} &= \frac{1}{2} \left(V \cdot V + \int \int dz dt \lambda^2 \Delta^F(z, t) f(z) f(t) \varphi(z) \varphi(t) + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} \int \int dz dt \lambda^2 (\Delta^F(z, t))^2 f(z) f(t) \right). \quad (\text{C.0.4})\end{aligned}$$

Calcoliamo ora l'espressione (C.0.2). Per via della valutazione sullo stato ω^β (la cui funzione a due punti è utilizzata per definire il prodotto star) gli unici contributi non nulli sono quelli che non contengono una dipendenza esplicita dai campi φ .

Bibliografia

- [AAP14] E. T. Akhmedov, N. Astrakhantsev e F. K. Popov. «Secularly growing loop corrections in strong electric fields». In: *Journal of High Energy Physics* (2014).
- [AGP16] Emil T. Akhmedov, Hadi Godazgar e Fedor K. Popov. «Hawking radiation and secularly growing loop corrections». In: *Physical Review D* (2016).
- [Ara73] Huzihiro Araki. «Relative hamiltonian for faithful normal states of a von neumann algebra». In: *Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto* 9 (1973).
- [BDP19] João Braga de Góes Vasconcellos, Nicolò Drago e Nicola Pinamonti. «Equilibrium States in Thermal Field Theory and in Algebraic Quantum Field Theory». In: *Annales Henri Poincaré* (2019).
- [Bel00] Michel Le Bellac. *Thermal Field Theory*. Cambridge University Press, 2000.
- [BF00] Romeo Brunetti e Klaus Fredenhagen. «Microlocal Analysis and Interacting Quantum Field Theories: Renormalization on Physical Backgrounds». In: *Communications in Mathematical Physics* (2000).
- [BFP20] Romeo Brunetti, Klaus Fredenhagen e Nicola Pinamonti. «Algebraic approach to Bose-Einstein Condensation in relativistic Quantum Field Theory. Spontaneous symmetry breaking and the Goldstone Theorem». In: (2020). arXiv: 1911.01829 [math-ph].
- [BGP08] Christian Baer, Nicolas Ginoux e Frank Pfaeffe. *Wave Equations on Lorentzian Manifolds and Quantization*. 2008.
- [BKR78] Ola Bratteli, Aki Kishimoto e Derek Robinson. «Stability properties and the KMS condition». In: *Communications in Mathematical Physics* (1978).
- [Bru+15] Romeo Brunetti et al. *Advances in Algebraic Quantum Field Theory*. Springer International Publishing, 2015.
- [CF08] Bruno Chilian e Klaus Fredenhagen. «The Time Slice Axiom in Perturbative Quantum Field Theory on Globally Hyperbolic Spacetimes». In: *Communications in Mathematical Physics* (2008).
- [Dav06] Tong David. «Quantum Field Theory». In: *Lecture notes* (2006).
- [DF04] Michael Dütsch e Klaus Fredenhagen. «Causal perturbation theory in terms of retarded products, and a proof of the action ward identity». In: *Reviews in Mathematical Physics* (2004).
- [DFP17] Nicolò Drago, Federico Faldino e Nicola Pinamonti. «On the Stability of KMS States in Perturbative Algebraic Quantum Field Theories». In: *Communications in Mathematical Physics* (2017).
- [DHP09] Claudio Dappiaggi, Thomas-Paul Hack e Nicola Pinamonti. «the extended algebra of observables for dirac fields and the trace anomaly of their stress-energy tensor». In: *Reviews in Mathematical Physics* (2009).

-
- [Düt19] Michael Dütsch. *From Classical Field Theory to Perturbative Quantum Field Theory*. Birkhäuser Basel, 2019.
- [EG73] H. Epstein e V. Glaser. «The role of locality in perturbation theory». In: *Annales de l'I.H.P. Physique théorique* (1973).
- [FL14] Klaus Fredenhagen e Falk Lindner. «Construction of KMS States in Perturbative QFT and Renormalized Hamiltonian Dynamics». In: *Communications in Mathematical Physics* (2014).
- [Fre09] K. Fredenhagen. «Quantum Field Theory». In: *Lecture notes to the 2009-10 course* (2009).
- [Haa96] Rudolf Haag. *Local Quantum Physics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1996.
- [Hör03] Lars Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003.
- [Kam04] Alex Kamenev. «Many-body theory of non-equilibrium systems». In: *Lectures notes for 2004 Les Houches Summer School on "Nanoscopic Quantum Transport"* (2004).
- [Kel64] L. V. Keldysh. «Diagram technique for nonequilibrium processes». In: *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* (1964).
- [Mat55] Takeo Matsubara. «A New approach to quantum statistical mechanics». In: *Prog. Theor. Phys.* (1955).
- [Mor10] Valter Moretti. *Teoria Spettrale e Meccanica Quantistica*. Springer-Verlag Mailand, 2010.
- [PS95] Michael E. Peskin e Daniel V. Schroeder. *An Introduction to quantum field theory*. Addison-Wesley, 1995.
- [Rad96] Marek J. Radzikowski. «Micro-local approach to the Hadamard condition in quantum field theory on curved space-time». In: *Communications in Mathematical Physics* 179 (1996).
- [Rej16] Kasia Rejzner. *Perturbative Algebraic Quantum Field Theory*. Springer International Publishing, 2016.
- [Sch61] Julian Schwinger. «Brownian Motion of a Quantum Oscillator». In: *Journal of Mathematical Physics* (1961).
- [Sre07] Mark Srednicki. *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 2007.
- [Wal84] Robert M. Wald. *General Relativity*. Chicago Univ. Pr., 1984.
- [Wei05] Steven Weinberg. *The Quantum Theory of Fields*. Cambridge University Press, 2005.