



**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI GENOVA  
SCUOLA POLITECNICA**

**DIPARTIMENTO DI ARCHITETTURA E DESIGN  
CORSO DI LAUREA IN ARCHITETTURA (V.O.)**

Sessione di Laurea Marzo 2021

# **Una costruzione, molte teorie.**

**Il ponte Mosca sulla Dora a Torino  
e le risposte della meccanica strutturale**

**Relatore**

*Prof. Federico Focè*

**Co-Relatore**

*Arch.-Ing. Silvia Tanturli*

**Candidato**

*Barbara Martini*

Anno Accademico 2020/2021



## Indice

<b>1. Cenni biografici su Carlo Bernardo Mosca</b>	
1.1. <i>Carlo Bernardo Mosca: progettista, urbanista, uomo politico</i>	1
1.2. <i>Una vita alla continua ricerca di razionalità</i>	11
1.3. <i>Il contesto urbanistico</i>	16
<b>2. Il Ponte Mosca sulla Dora Riparia a Torino</b>	17
<b>3. L'analisi elastica di Alberto Castigliano (1878)</b>	
3.1. <i>Modello geometrico del ponte</i>	30
3.2. <i>Impostazione dell'analisi elastica</i>	31
3.3. <i>Analisi elastica tenendo conto della presenza dei giunti di malta</i>	35
3.4. <i>Analisi elastica senza tener conto dei giunti di malta</i>	41
3.5. <i>Influenza del rapporto fra i moduli elastici di pietra e malta</i>	45
3.6. <i>Influenza di cedimenti alle imposte</i>	51
<b>4. La <i>Dissertazione</i> di laurea del nipote Carlo Mosca (1873)</b>	
4.1. <i>Analisi dei due meccanismi di collasso per la ricerca dello spessore delle spalle</i>	55
4.2. <i>Verifiche di resistenza</i>	60
<b>5. Giovanni Curioni e il suo <i>metodo pratico</i> (1873)</b>	
5.1. <i>Discussione critica del Metodo pratico</i>	64
5.2. <i>Applicazione al Ponte Mosca</i>	70
<b>6. La cosiddetta “regola di Méry” (1840)</b>	
6.1. <i>Sfogliando il Mémoire di Méry</i>	73
6.2. <i>Applicazione al Ponte Mosca</i>	75
<b>7. L'unica soluzione esatta: l'arco a tre cerniere</b>	
7.1. <i>Riflessioni critiche sulla ricerca della “vera” curva delle pressioni</i>	77
7.2. <i>Applicazione al Ponte Mosca</i>	84
<b>8. Il metodo delle aree di stabilità di Alfred Durand-Claye (1867)</b>	
8.1. <i>Ragioni a favore</i>	85
8.2. <i>Costruzione delle aree di stabilità per infinita resistenza a compressione</i>	88
8.3. <i>Costruzione delle aree di stabilità per resistenza finita a compressione</i>	95
8.4. <i>Applicazione al Ponte Mosca</i>	98
<b>Conclusioni</b>	102
<b>Bibliografia</b>	103



## 1. Cenni biografici su Carlo Bernardo Mosca

### 1.1. Carlo Bernardo Mosca: progettista, urbanista, uomo politico

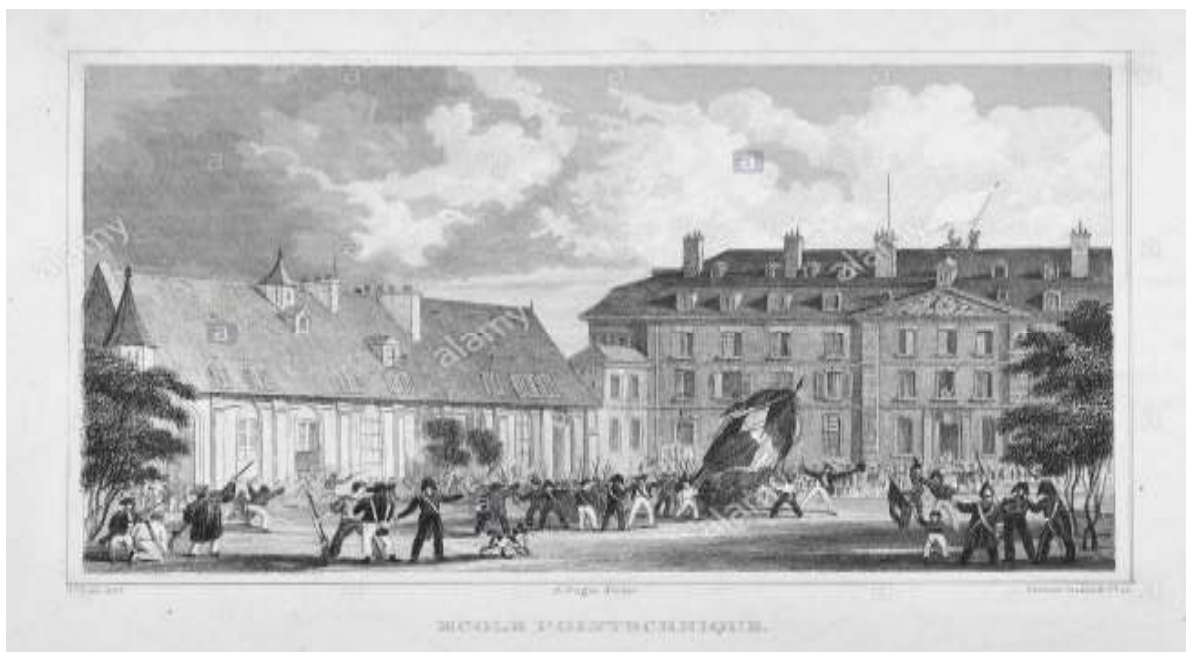
Il futuro costruttore del ponte oggetto di questa tesi, Carlo Bernardo Mosca, nasce a Occhieppo Superiore, paesino nel comune di Biella, il 6 novembre del 1792, da una famiglia semplice, leale, sincera, che trova ricchezza nel lavoro, nobiltà nelle virtù, che indirizza i propri figli (è primogenito di sette figli) alla retta via con una buona educazione e una soda istruzione.

A Graglia frequenta le scuole primarie, a Biella quelle secondarie e a Casale il liceo, che termina a quindici anni grazie ad un forte sentimento del dovere. Con calma si prepara negli studi, ben diverso da tanti suoi coetanei che scelgono di andare al lavoro molto presto.

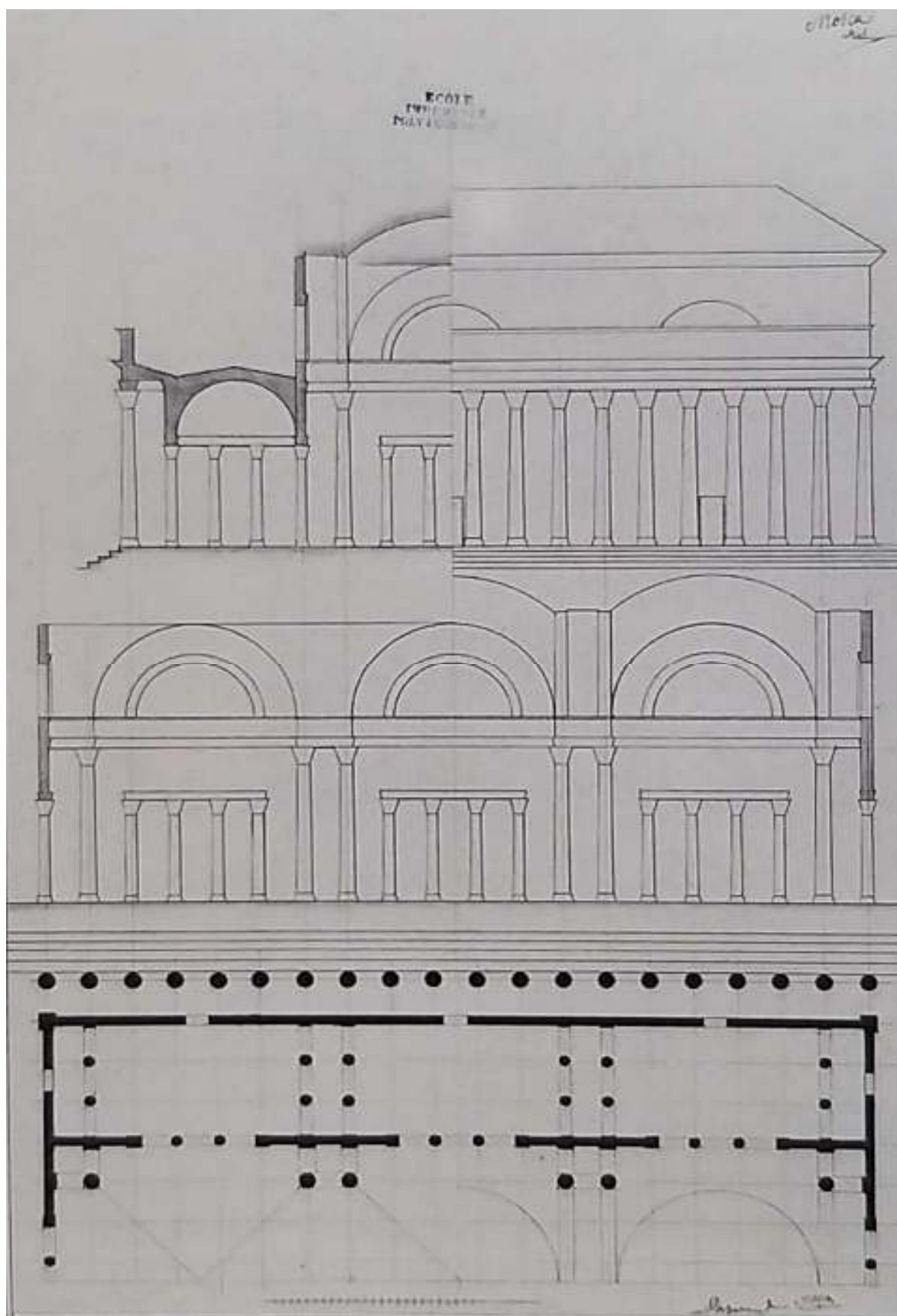
Dopo il liceo, a quindici anni si presenta a Torino al concorso per entrare all'École Polytechnique di Parigi, l'istituzione universitaria più prestigiosa e all'avanguardia nella formazione delle nuove leve di ingegneri, ma pur risultando uno dei migliori, non può essere accettato non avendo compiuto ancora sedici anni. L'anno dopo si ripresenta al concorso, svoltosi a Genova, e finalmente si aggiudica il posto per Parigi; qui in soli due anni (1809-1811) si diploma con una votazione così alta che lo pone tra gli allievi destinati a seguire Napoleone in Russia, ma le necessità economiche della famiglia lo spingono a frequentare per un solo anno l'École des ponts et chaussées, dove vince il primo premio per il concorso di idraulica e il secondo per l'architettura civile.



Ritratto di Carlo Bernardo Mosca

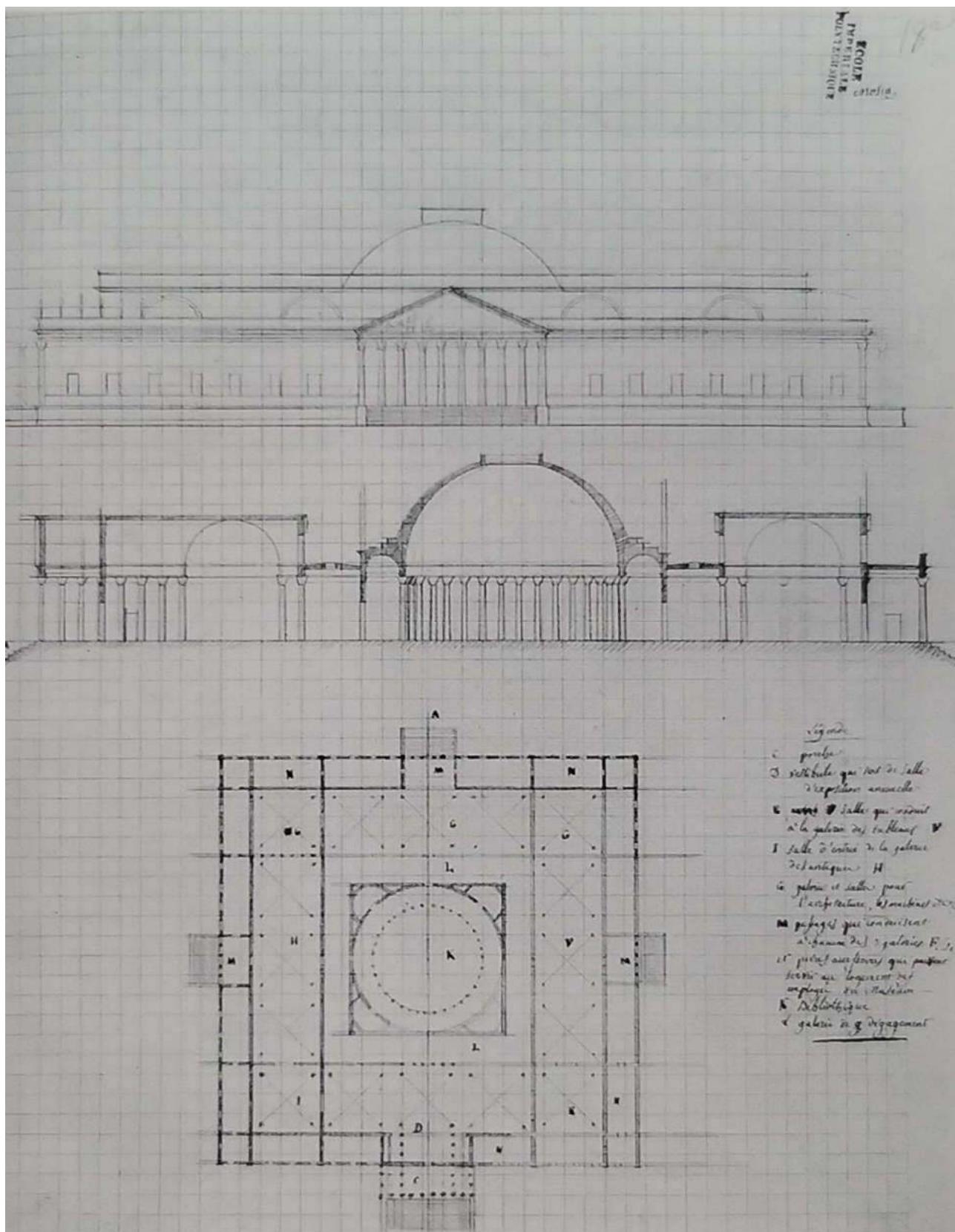


Vecchia stampa - École Polytechnique de Paris



Carlo Bernardo Mosca, studio di edificio colonnato, scala grafica muta, 1811, inchiostro su carta 61x48 cm, controfirmato da J.-N.-L. Durand,, professore di composizione, da École Imperiale Polytechnique, Mosca, scienze varie, album 623.Cfr.ill.204, da Comoli V., Guardamagna L., Viglino M. (a cura di), *Carlo Bernardo Mosca, un ingegnere architetto tra illuminismo e restaurazione*, 1997, p. 352





Carlo Bernardo Mosca, studio di edificio per esposizioni, 1811, 61x48 cm, inchiostro su carta quadrettata, in *École Impériale Polytechnique*, scienze varie, album 623, Cfr. ill. 205, da Comoli V., Guardamagna L., Viglino M. (a cura di), *Carlo Bernardo Mosca, un ingegnere architetto tra illuminismo e restaurazione*, p. 352

Terminati gli studi, nel 1812 inizia la sua carriera quale Ingegnere dei ponti e delle strade a Tulle in Francia e dopo la morte della madre (1813) chiede di essere avvicinato alla famiglia ottenendo il trasferimento a Cairo Montenotte (Savona), dove elabora alcuni progetti.

Nel 1814 viene richiamato a Parigi, minacciata di assalto dalle forze della coalizione antinapoleonica, in qualità di tenente della Guardia Nazionale, lavorando alle fortificazioni esterne di Montmartre.

Dopo la caduta di Napoleone opta per il rientro nel Regno di Sardegna, malgrado lo volessero in Francia, entrando nel servizio del Governo Sardo.

Nel 1814, a ventidue anni, viene inviato a Conflans in Savoia in qualità di delegato del Governo Sardo, sovrintendendo alla reintroduzione delle autorità militari e civili e al riordinamento del Servizio Stradale; in questa occasione ha diversi scontri con le autorità amministrative locali che gli procurano difficoltà fisiche e psicologiche, che lo tormenteranno per tutta la vita e lo costringeranno a recarsi a Ginevra in cura presso il celebre medico Charles De La Rive.

Dopo la guarigione viene incaricato dal generale Paolo Bellosio (1815) di occuparsi di *riconoscere* la Strada Reale di Nizza, quella del litorale di Ponente da Nizza a Savona e quella da Savona a Torino per Aqi e Asti, mentre viene nominato Ingegnere Provvisorio in servizio a Savona.

Nel 1816, il Governo fonda l'Intendenza Generale di Ponti, Acque, Strade e Selve, accorpendo il Genio Civile a quello militare e Mosca viene nominato Ingegnere Civile di Seconda Classe e confermato nel servizio in provincia di Savona.

Destinato al Servizio della Riviera di Ponente e poi per la provincia di Acqui, scrive in quel tempo una memoria sugli esperimenti per migliorare la sicurezza dei minatori addetti alla preparazione dei fornelli da mina.

Con questo incarico prepara numerosi progetti di carattere edile e di progettazione e manutenzione di strade e ponti, come la strada da Ceva a Savona e Finale.

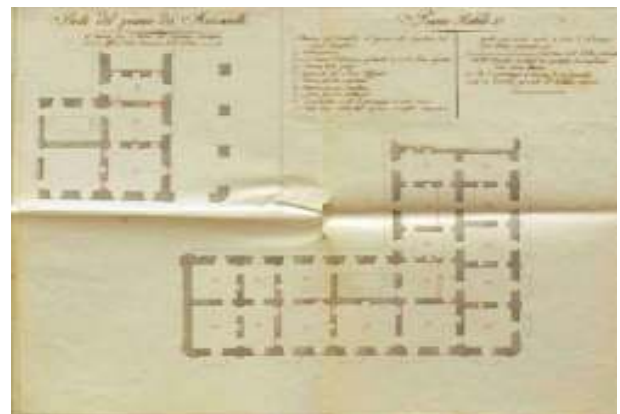
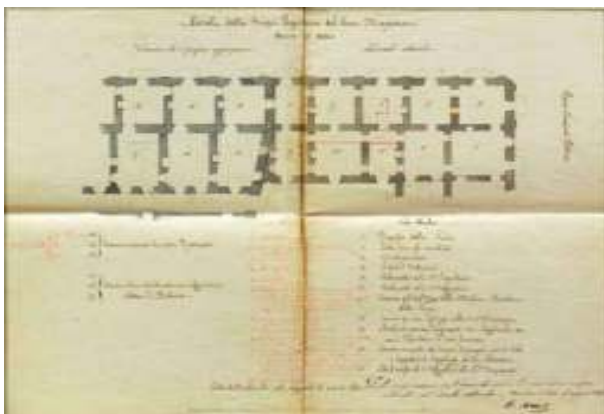
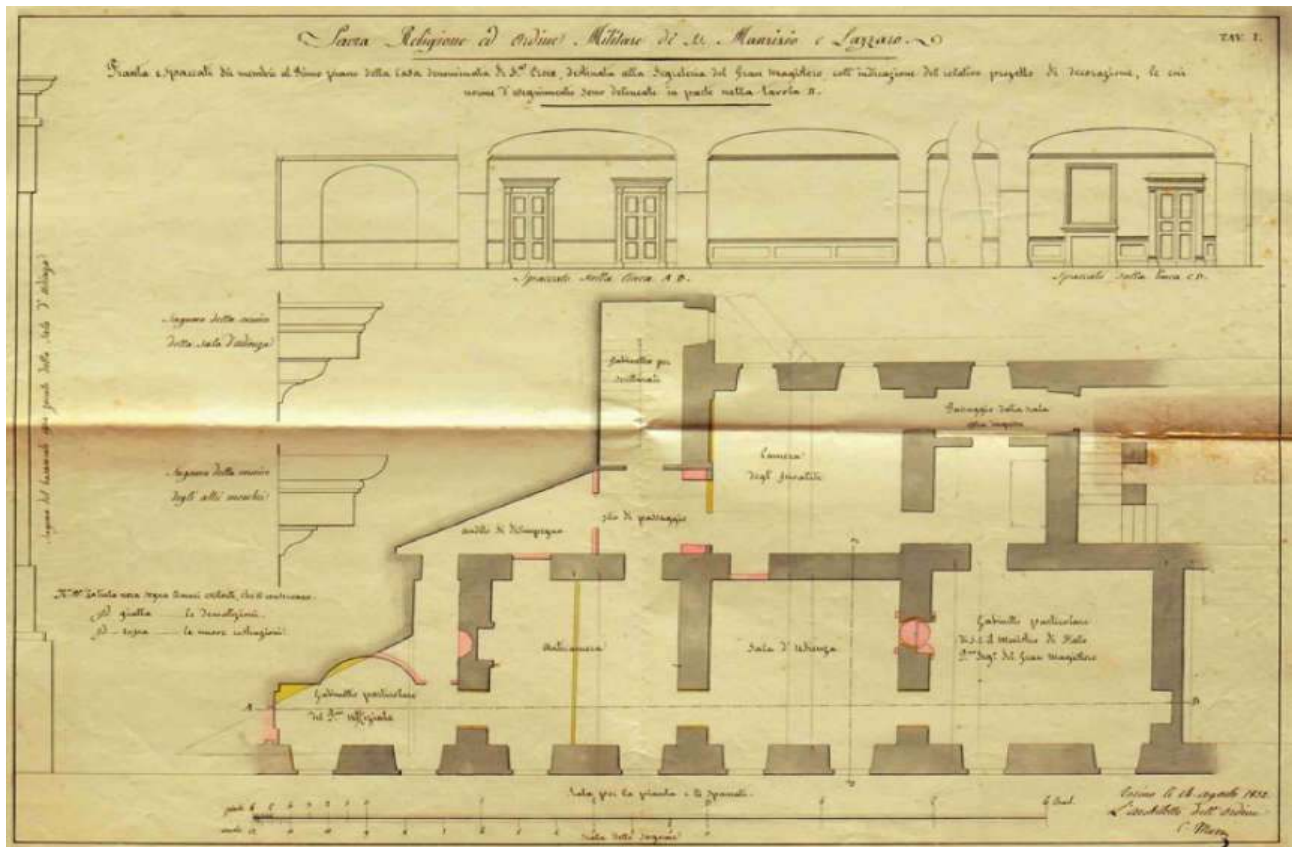


Strada da Savona a Torino per Ceva e Mondovì. Tratto compreso tra Carcare e Millesimo, 53x160 cm, disegno a penna, inchiostro colorato, acquerellato su carta, in Comoli V., Guardamagna L., Viglino M. (a cura di), *Carlo Bernardo Mosca, un ingegnere architetto tra illuminismo e restaurazione*, p. 155.



Nel 1817 viene promosso a Ingegnere di Prima Classe e trasferito un anno dopo a Torino, dove redige il Piano per la strada per Chieri, attraverso Pino Torinese e per Piacenza, il Piano per la circonvallazione di Rivoli e di Moncalieri con il progetto di un ponte in legno sul Po, ripari per ponti in legno sul fiume Orco, Malone e Chivasso.

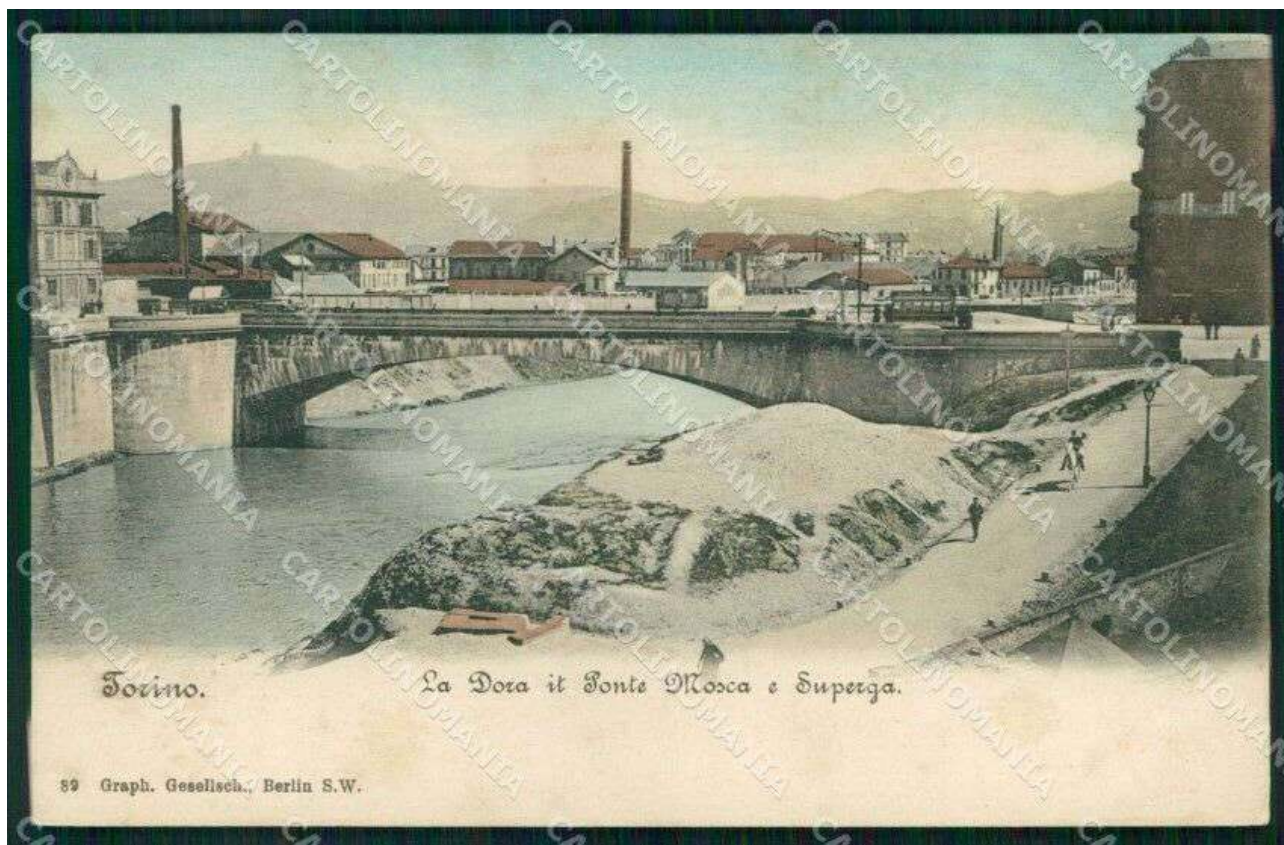
Dopo due anni, nel 1819, l'università di Torino gli conferisce la Laurea di Ingegnere Idraulico senza obbligo di esami per il valore professionale di un ex allievo all'École Polytechnique e viene incaricato, per la prima volta, come ingegnere civile idraulico presso l'ordine Mauriziano.



Carlo Bernardo Mosca, Sacra Religione, ed Ordine Militare dei Santi Maurizio e Lazzaro. Pianta e spaccati al Primo Piano della casa denominata di Santa Croce, destinata alla Segreteria del Gran Magistero, coll'indicazione del relativo progetto di decorazione, le cui norme di esequimento sono delineate in parte nella tavola II, 14 agosto 1832. AOM, case dell'Ordine Mauriziano in Torino, mazzo 12, fascicolo affari diversi n.1. Inchiostro, acquerello e matita

Un anno dopo gli viene dato un incarico delicato e gravoso, quello di segretario del Congresso Permanente e del Consiglio Superiore di Ponti e Strade, che adempie con grandi capacità fino al 1848.

Il 1822 è l'anno fondamentale per l'attività di Mosca, sia per il progetto del ponte sul fiume Tesso a Lanzo, realizzato poi nel 1826 in un elegante arco in mattoni, sia soprattutto per l'avvio dello studio per la realizzazione del ponte sulla Dora Riparia a Torino, con la collaborazione del fratello Giuseppe, divenuto anch'egli ingegnere. La costruzione del ponte, della quale parleremo più in dettaglio nel successivo capitolo, venne iniziata nel 1823 e, dopo una interruzione di circa quattro anni, il ponte venne inaugurato ufficialmente il 15 agosto 1830.



Antica cartolina- La Dora, Ponte Mosca e Superga. Torino

Il Ponte in granito con arco ribassato è l'opera con cui Mosca si assicura la fama, ma anche un esaurimento nervoso che lo costringe a recarsi nuovamente a Ginevra per curarsi.

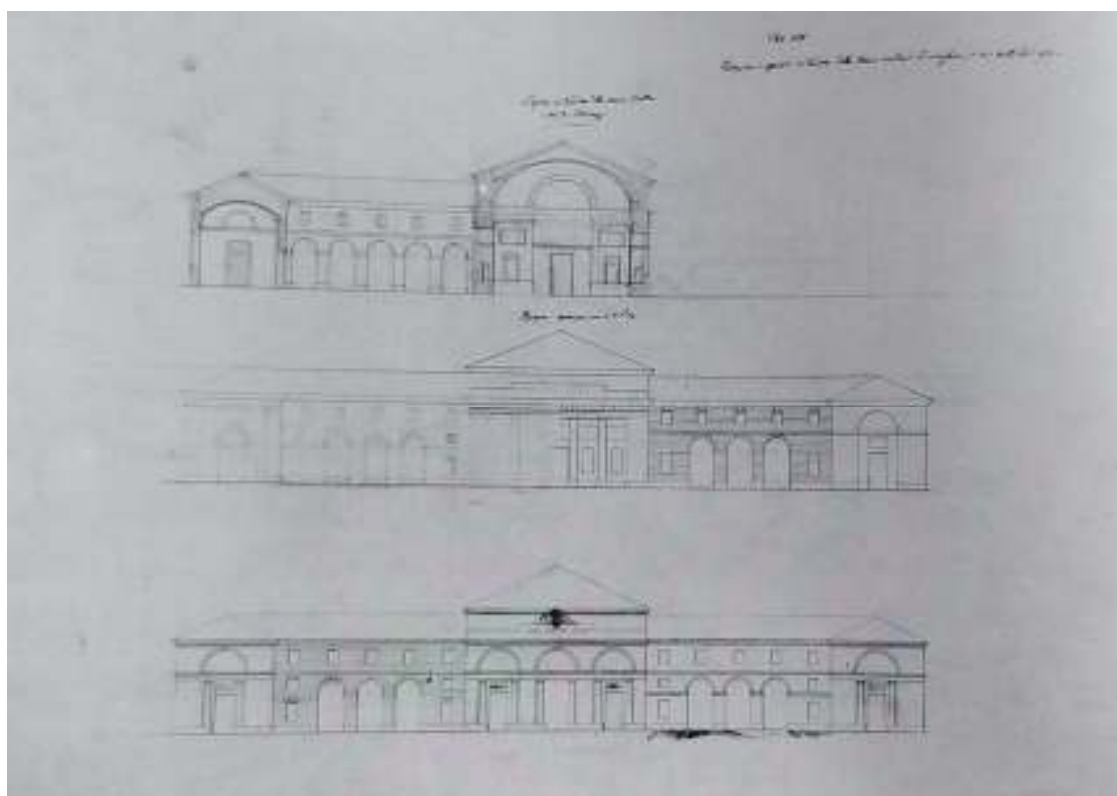
Dalla data del progetto del 1822 alla messa a punto del Capitolato, un anno dopo, fino all'apertura al traffico nel 1830, il ponte è per il nostro ingegnere foriero di grattacapi quali i provvedimenti contro gli appaltatori, la piena del fiume che interrompe e danneggia i lavori in corso, altri incarichi che il Mosca deve sostenere, compresa la preparazione degli apparati funebri di Vittorio Emanuele I e una relazione che ha dovuto preparare per non fare abbattere il Castello di Pargaglia presso Stupinigi.

Nel frattempo viene nominato Ispettore di Seconda Classe del Genio Civile per Alessandria e Genova e professore alla Scuola di Applicazione Militare di Torino, mentre si occupa del progetto per la costruzione di un ponte, che doveva attraversare il Po al termine di Corso Vittorio Emanuele II e di un progetto per la costruzione di una diga.

Un anno dopo l'inaugurazione del ponte, Mosca firma i progetti per i Murazzi (gli imponenti argini del Po) e i marciapiedi del ponte napoleonico.

Dopo essere deceduto anche Carlo Felice nel 1831 e anche per lui aver progettato gli apparati funebri, Mosca riceve la nomina di Ingegnere Architetto dell'Ordine Mauriziano e gli viene affidato il compito di progettare le vasche e la relativa canalizzazione dell'acqua del monumento equestre dedicato a Emanuele Filiberto, dopo essere stato nominato Primo Architetto Idraulico con facoltà di essere impiegato nei lavori per i palazzi reali e qualche tempo dopo realizza anche le nuove scuderie dei Giardini Reali.

L'ingegnere architetto Mosca diviene uno dei dodici membri dell'Ordine Civile di Savoia e ammesso all'Accademia Albertina quale professore onorario.

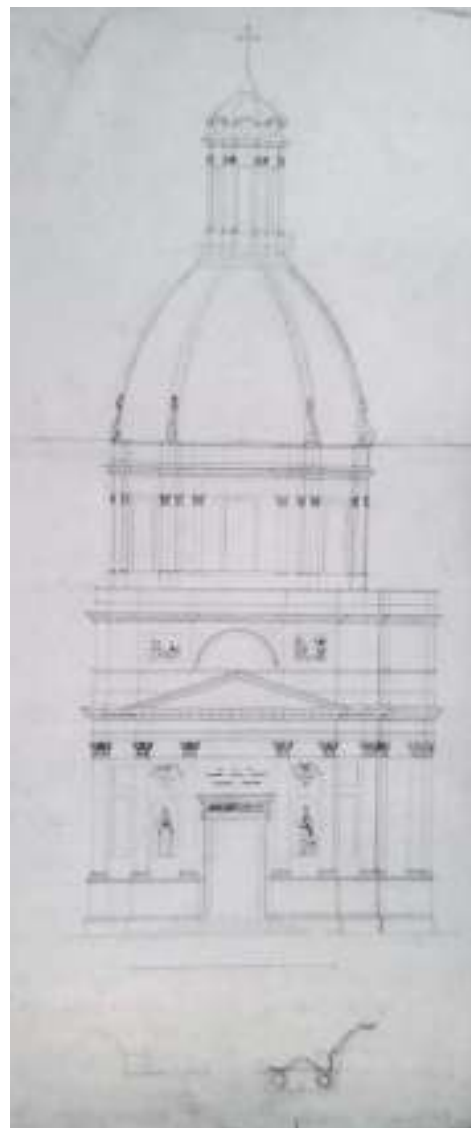


Carlo Bernardo Mosca, Castello di Racconigi, elevazione e spaccato in traverso delle nuove scuderie, 45x62cm, disegno a penna carta, in Comoli V., Guardamagna L., Viglino M. (a cura di), *Carlo Bernardo Mosca, un ingegnere architetto tra illuminismo e restaurazione* pag.76.

Nel 1833 firma il progetto per il salone da ballo di Palazzo Reale e sempre in questo anno viene incaricato di recarsi in Francia e in Inghilterra a studiare il nuovo metodo per la costruzione di ponti sospesi sostenuti da fasci di cavi metallici, messi a punto dell'ingegnere Isambard Kingdom Brunel; accompagnato dall'allievo ingegnere Giuseppe Bella che disegna le opere visitate.

Al termine del viaggio scrive una relazione destinata, con i disegni, a diventare un volume a stampa, ma una ricaduta del male che periodicamente lo tormenta, ne impedisce la pubblicazione. A guarigione avvenuta gli viene dato l'incarico di visionare lavori ai ponti e alle strade nei pressi di Losanna.





Fotografia della Magistrale Basilica dei SS. Maurizio e Lazzaro a Torino, e studio per la facciata e la cupola 88x58 cm, disegno a penna su carta, da Comoli V., Guardamagna L., Viglino M. (a cura di), *Carlo Bernardo Mosca, un ingegnere architetto tra illuminismo e restaurazione*, p.368 (foto) e p.55 (disegno)

Venuto in contrasto con l'intendente generale delle Regie Fabbriche, Conte Trabucco, Mosca chiede al Re di essere esonerato dalla carica di Primo Architetto, ma, per intercessione del marchese Carlo Emanuele Alfieri di Sostegno, non gli è concesso e questa è una di quelle vicende che da un'ulteriore scossa al suo sistema nervoso.

Nello stesso periodo progetta la chiesa del Voto, dedicata alla Madonna delle Grazie a Nizza e la facciata, la gradinata e il rifacimento della cupola della basilica Mauriziana con il fratello Giuseppe.

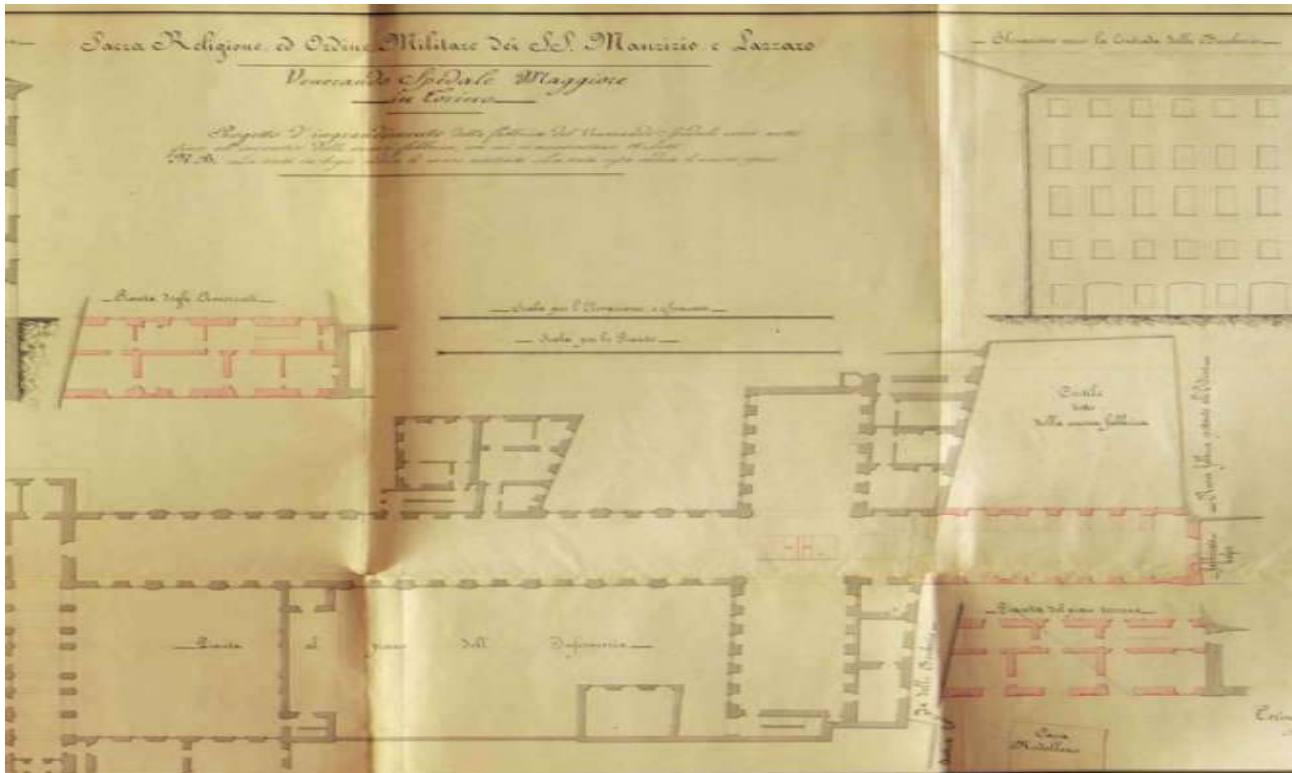
Nel 1837 l'ingegnere prende parte alla Commissione di Studio per il problema ferroviario sullo studio della via da scegliere tra Genova e l'Europa del Nord e stabilire se fosse meglio che ad occuparsene fosse lo Stato o a carico di privati.

Mosca scrive un'interessante relazione in cui evidenzia la difficile conformazione orografica degli Stati Sardi e la necessità di prendere in considerazione che fosse lo Stato ad occuparsi della costruzione delle linee ferroviarie, inoltre per la continuazione della Strada verso Nord è a favore del

proseguimento per Ginevra, da cui si sarebbero potuti raggiungere i porti del Nord Europa, ma questa scelta non viene fatta, penalizzando il Piemonte nei confronti della Lombardia.

Proprio in questo frangente, il suo *Cursus Honorum* si arricchisce della nomina a Ispettore di Prima Classe nel Genio Civile, con il suo ingresso all'istituto Lombardo di Brera e nel Consiglio direttivo della Società promotrice di Belle Arti a Torino, all'Accademia delle Scienze sempre a Torino.

Tra il 1837 e il 1843, Mosca è impegnato nella progettazione e costruzione dell'ampliamento dell'ospedale dei Santi Maurizio e Lazzaro



Carlo Bernardo Mosca, Sacra Religione, ed Ordine Militare dei Santi Maurizio e Lazzaro, Venerando Spedale Maggiore in Torino. Progetto d'ingrandimento della fabbrica del venerando Spedale verso notte, fino all'incontro della nuova fabbrica, con cui si aumentano 18 letti, 3 marzo 1837. AOM, Atti d'incanti e deliberamenti, 1837-1838, volume 33, fascicolo 1, carta 137. Inchiostro, acquerello e matita su carta

Nel frattempo i progetti per la costruzione della linea ferroviaria Genova-Alessandria vanno avanti con un'esamina, da parte del nostro Mosca è di altri ingegneri, dei progetti e dei costi della Società Ligure Piemontese incaricata della costruzione, fino a quando il Re decide che la costruzione stessa deve avvenire a spese dello Stato.

Nel 1847 diventa Primo Ingegnere Architetto dell'Ordine Mauriziano grazie ai meriti nell'amministrazione del patrimonio dello stesso e nel servizio dello Stato.

Mosca fa un primo testamento dove lascia i suoi beni ai fratelli più giovani e alla sorella Giovanna, ma dovrà scriverne un altro perché questi moriranno, pur essendo più giovani, prima di lui.

Tra il 1845 e il 1854, Mosca entra a fare parte del Consiglio Speciale delle Strade Ferrate, il comitato incaricato di sovrintendere l'impianto della rete ferroviaria negli Stati Sardi, presentando una serie di importanti memorie sui tracciati della linea da Genova a Torino, all'impianto delle gallerie e delle stazioni, sulle tecniche e tecnologie da impiegare.

Dopo la proclamazione dello Statuto Albertino, nel 1848, è nominato senatore del Regno per meriti scientifici, impegnandosi nella presentazione di diversi progetti di legge riguardanti i lavori pubblici, entra nel consiglio comunale di Torino e in una commissione destinata a proporre per il Genio Civile, un nuovo ordinamento, ormai destinato a un aggiornamento, date le sempre più moderne esigenze del progresso.

Nel marzo del 1849 progetta la ristrutturazione dell'ospedale Mauriziano di Lanzo, prevedendo il rifacimento pressoché totale delle strutture più antiche, mantenute solo in piccola parte.

Nel 1853 viene nominato accademico di San Luca e l'anno successivo chiede il pensionamento al Genio Civile, motivandolo con l'essere da tempo malato e di non sentirsi più adatto ad un servizio assiduo e l'anno successivo è tra i promotori della Società degli Ingegneri e Architetti di Torino.

Carlo Bernardo Mosca muore nella casa di Rivalta Torinese il 13 luglio 1867, dopo una lunga malattia.



Ritratto di Carlo Bernardo Mosca



### *1.2. Una vita alla continua ricerca di razionalità*

Fin da ragazzo Mosca si dimostra un giovane sano, intelligente e attivo, ma inflessibile con se stesso e con gli altri. Proviene da una famiglia umile con una certa rigidità morale e religiosa, forse anche dovuta alla presenza dello zio materno sacerdote; si impegna fortemente negli studi e dimostra una precocità intellettuale non comune, con la volontà e la necessità di riuscire sempre il migliore. Soprattutto, egli non vuole pesare sulla famiglia e, quando a vent'anni perde prima la madre e poi il padre, si prende cura dei suoi sei fratelli, tutti più giovani di lui.

Una costante nella vita di Mosca è di non tradire mai la verità; non accetta nulla che possa allontanarsi dalla più scrupolosa onestà con atteggiamenti molto duri e severi, in contrasto con la squisita benevolenza verso i suoi famigliari e i più deboli; cosa a cui tiene in maniera particolare è che fosse riparato il danno morale ed economico ingiustamente incontrato, che fosse riabilitato chi era stato ingiustamente colpito, che fosse ricompensato il vero merito, magari non riconosciuto a sufficienza o magari anche calunniato. Anche per questo è di aiuto a molte persone e devolve spesso in beneficenza i suoi onorari.

Questo suo carattere “tutto d'un pezzo” comincia a procurargli dei problemi e a minare lentamente, ma in maniera inesorabile, la sua salute mentale. Insieme alla severità verso se stesso e gli altri, anche la rigidità della fede cattolica e l'austera onestà intellettuale lo portano ad avere scontri e a renderlo particolarmente vulnerabile al comportamento delle persone che non hanno la sua sensibilità e la sua attenzione verso gli altri.

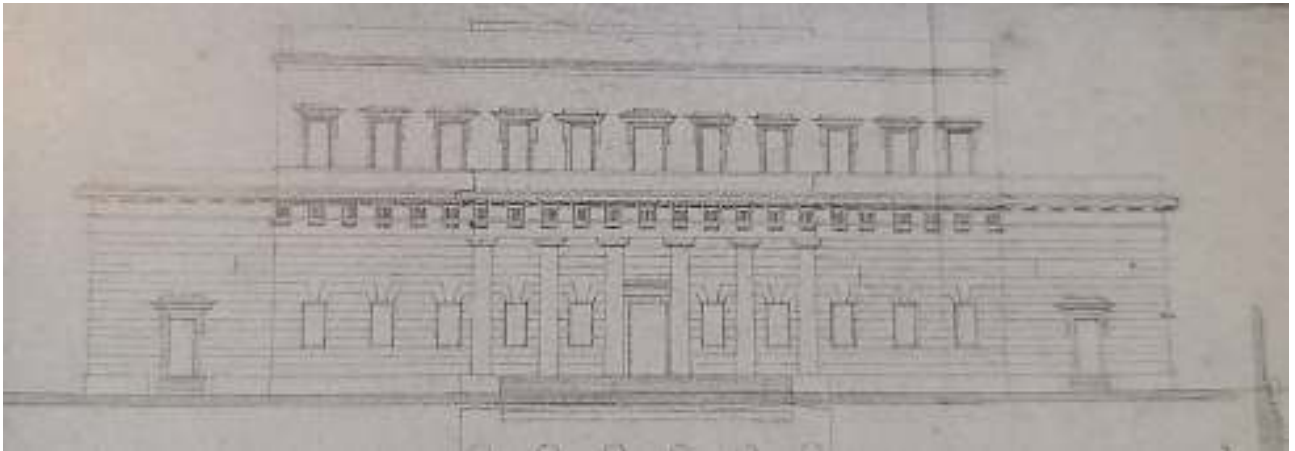
Dai ventidue anni, e in quattro occasioni corrispondenti a momenti critici della sua carriera, i problemi di salute mentale lo costringono per mesi a non poter lavorare, subentrandogli una forma acuta di ipocondria e di depressione con l'aggiunta di una problematica cardiovascolare. Una di queste occasioni coincide con la grande delusione provata di fronte allo scetticismo da parte dei funzionari e dei tecnici dell'amministrazione comunale di Torino per il progetto urbanistico che avrebbe dovuto affiancare quello del ponte sulla Dora.

Queste problematiche di salute rimarranno fino a quando l'ingegnere architetto riuscirà ad accettare il cambiamento storico e il processo di transizione tra la decadenza del modello di spettacolarità dell'antico regime e il modello della ristrutturazione più semplice e modesta, adattandosi alle nuove richieste.

La produzione architettonica di Mosca si configura in forme classico-razionali, non tanto al contesto classico inteso come sistema di ordini e rapporti tra le parti, quanto piuttosto ai valori razionali che si esprimono in esse.

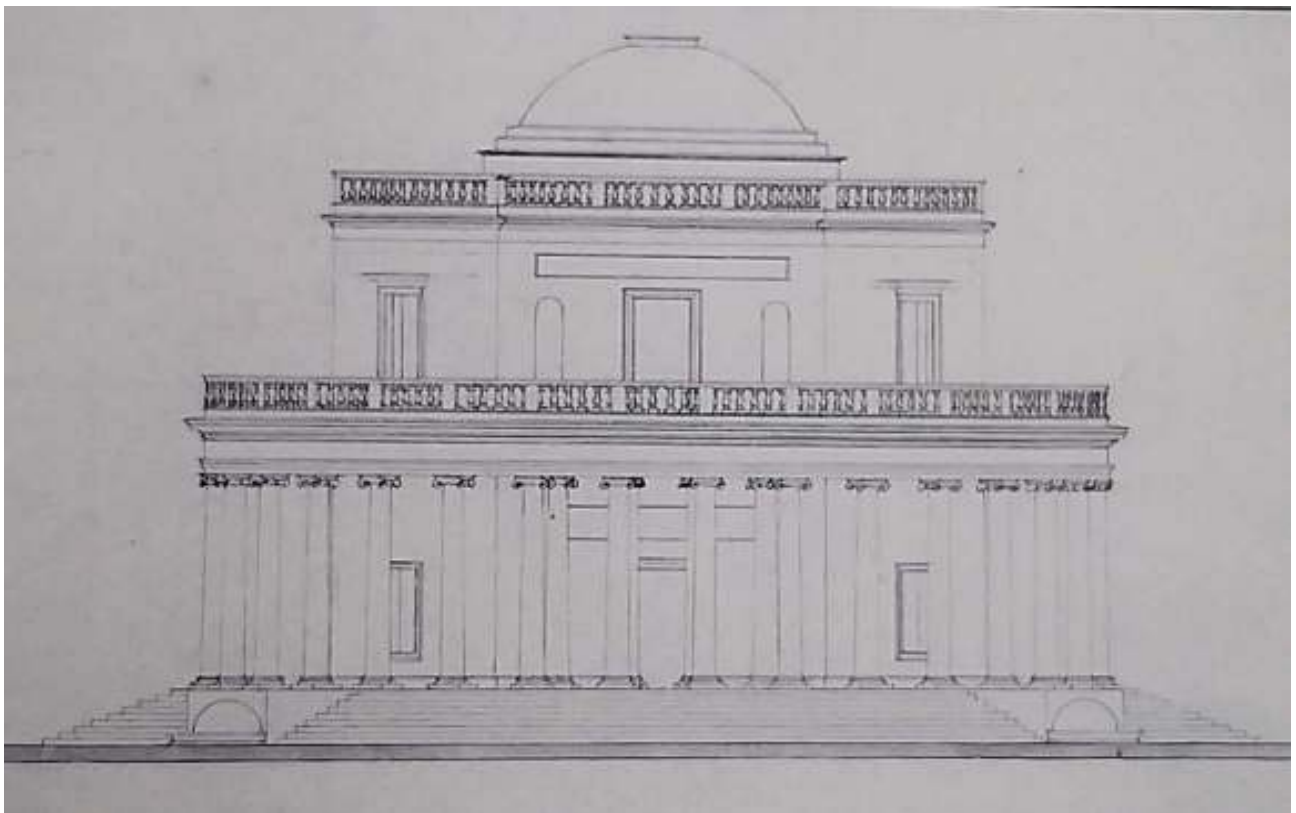
Questa razionalità, sia negli interventi ex-novo, sia nella ristrutturazione di opere esistenti, si evidenzia nel rispetto delle esigenze funzionali, nella ricerca della perfezione tecnica nel costruire, nello studio di soluzioni compatibili con le esigenze economiche della committenza sia nella costruzione che nella conduzione del cantiere. Mosca, infatti, si esercita nel ridisegnare sia elementi

degli ordini architettonici secondo modelli schematici, sia aggregazioni di elementi più complesse combinando diverse unità compositive



Carlo Bernardo Mosca, frontale di edificio a pianta centrale, periptero, con attico e cupola, 25x29 cm, disegno a penna, acquerellato su carta, in Comoli V., Guardamagna L., Viglino M. (a cura di), *Carlo Bernardo Mosca, un ingegnere architetto tra illuminismo e restaurazione*, p. 79.

Nel “Progetto di Banca” si può vedere il risultato di queste esercitazioni, come pure in molti suoi progetti architettonici compare sempre una “corretta pratica professionale” improntata ad un’estrema semplicità che rende chiare le sue parole quando egli afferma di sentirsi più ingegnere che architetto.



Carlo Bernardo Mosca, Progetto di Banca nell’ordine dorico, prospetto frontale dell’edificio, 42x53, disegno a penna, acquerellato su carta, in Comoli V., Guardamagna L., Viglino M. (a cura di), *Carlo Bernardo Mosca, un ingegnere architetto tra illuminismo e restaurazione*, p.78.

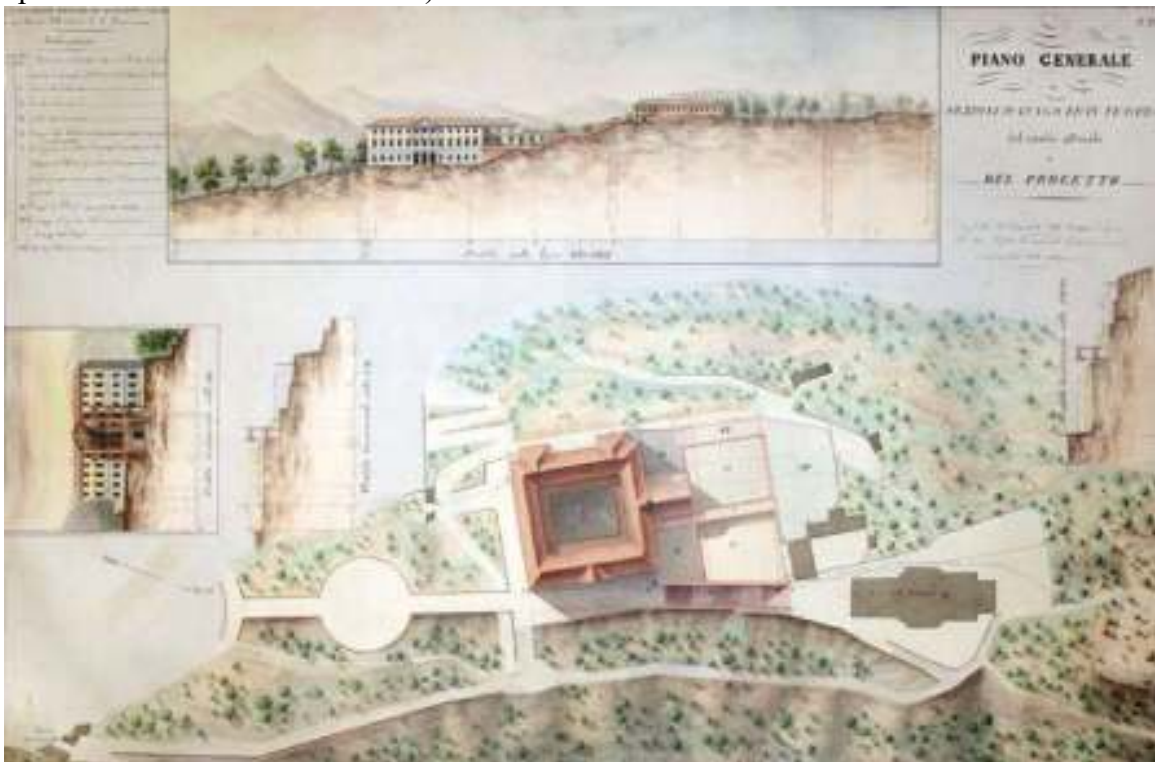
Mosca segue gli insegnamenti del suo docente all'École, il professor Durand, che propone quattro principali categorie che vanno da architetture importanti, quali piazze, ponti, strade a quelle delle abitazioni private, ultime per la loro meno importante funzione sociale.

La legittimazione di Mosca a fare architettura non risiede nel suo bagaglio culturale, che consiste nell'oggettiva, comunicabile e verificabile scienza matematico-sperimentale tipica dell'ingegnere; egli si sente a suo agio con i calcoli dell'idraulica (da ricordare che l'università di Torino gli conferisce la laurea di ingegnere idraulico senza obbligo di esami), ma sempre a disagio nei panni dell'architetto. Difatti egli non ha bisogno di una fondazione metafisica del suo sapere, necessita invece di una vera giustificazione sociale del proprio ruolo.

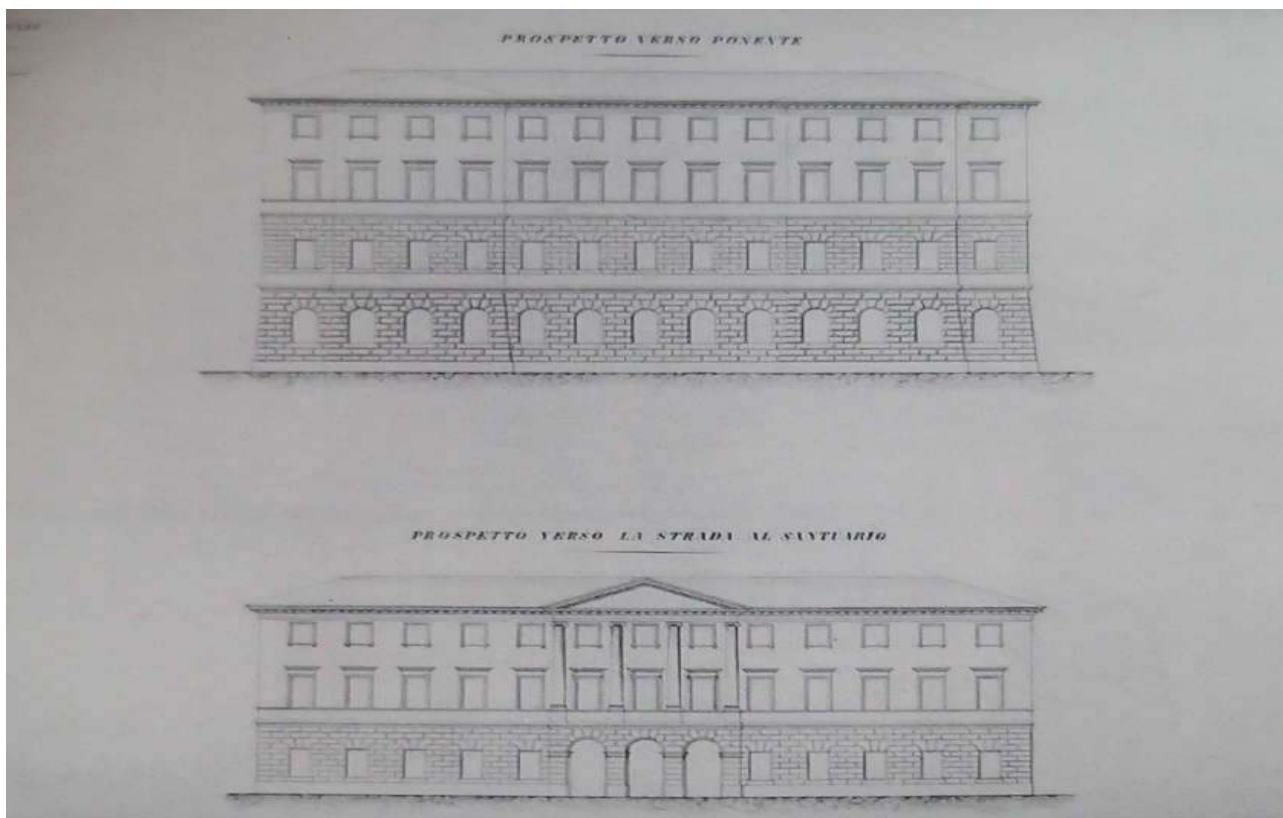
Per Mosca è ovvio che l'architettura sia asemantica, ma quello che per lui non è ovvio è il destino dell'opera che rimane il fine ultimo. Questo sicuramente per il metodo sperimentale che riceve all'École, fatto di esatte proiezioni e calcoli rivolti al rigoroso computo ai fini organizzativi ed economici di tutte le fasi esecutive del progetto.

Chiarificatore di questo atteggiamento sarà sempre l'opposto punto di vista tra l'antagonista architetto Bonsignore e lui stesso: per il primo il disegno architettonico vale più dell'opera, per il secondo il disegno è lo strumento per studiare e rappresentare ciò che verrà costruito. I due lavoreranno assieme a Genova per la sistemazione di Piazza delle Fontane Marose.

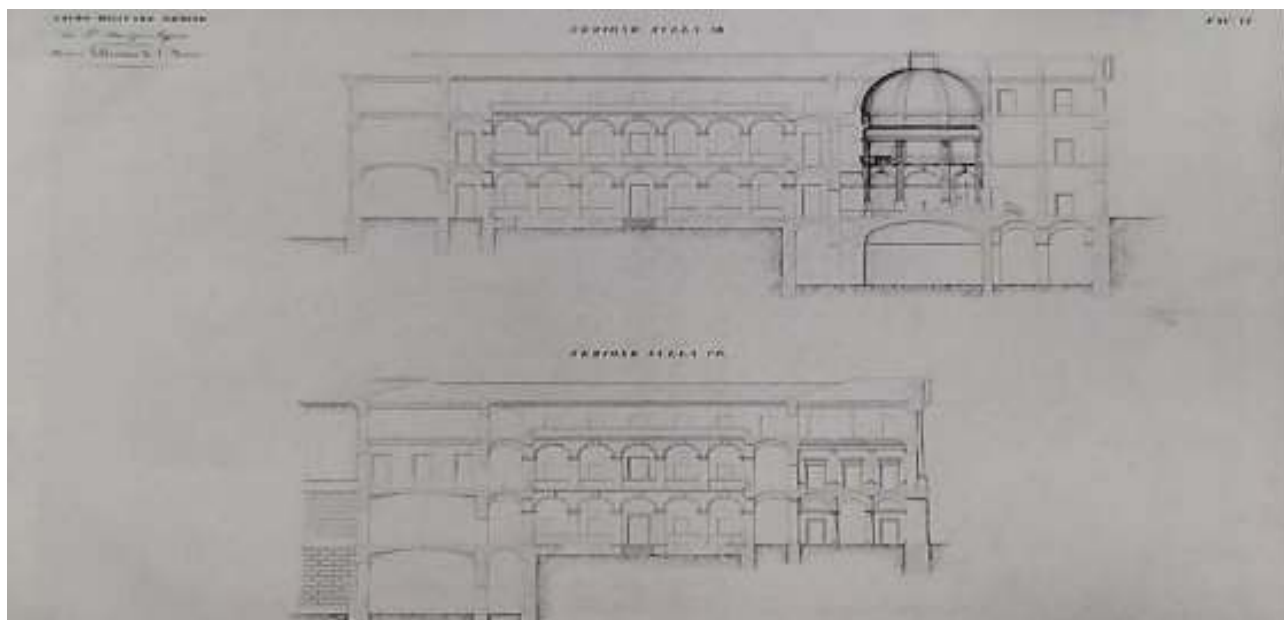
Caratteristica a cui assistiamo sovente da parte di Mosca è quella di demandare ad alcuni elementi nodali la rappresentatività dell'architettura, mantenendo le altre parti volutamente sotto tono. Il suo desiderio è quello di provocare un'impressione simbolica per mezzo delle forme, delle masse, della dimensione dell'Architettura all'interno di un sistema logico nella composizione architettonica. (un esempio è il Lebbrosario di Sanremo).



Atlante di disegni del nuovo Lebbrosario proposto erigersi a S. Remo nel già convento di San Nicola, 1850, inchiostro, acquerello e matita su carta.



Carlo Bernardo Mosca, Prospetto verso ponente e prospetto verso la strada al Santuario. Nuovo Lebbrosario proposto ad erigersi a S. Remo nel già Convento di S. Nicola, scala 1:100, 30 ottobre 1850, 57x84 cm, disegno a penna acquerellato, in Comoli V., Guardamagna L., Viglino M. (a cura di), *Carlo Bernardo Mosca, un ingegnere architetto tra Illuminismo e Restaurazione*, p. 49



Carlo Bernardo Mosca, Sezione AB e CB, Atlante di disegni del Nuovo Lebbrosario proposto ad erigersi a S. Remo nel già Convento di S. Nicola, scala 1:100, 30 ottobre 1850, 57x84 cm, disegno a penna acquerellato, in Comoli V., Guardamagna L., Viglino M. (a cura di), *Carlo Bernardo Mosca, un ingegnere architetto tra Illuminismo e Restaurazione*, p. 50

Interessante è la lettera che Mosca invia all'amico e collega Ernesto Melano a proposito del suo sentirsi "poco architetto": "sento che molte cose mi mancano per adempiere con dignità ad un simile

incarico [quello di Primo Architetto Regio nel 1831], ma l'ho detto e ripetuto più volte e non è colpa mia. Uno dovrebbe essere un artista e io non lo sono, inoltre sento che alla mia età non posso iniziare una nuova carriera (...) mancandomi d'altronde un sufficiente esercizio nel disegno ornato, il tempo e la pazienza per compiere direttamente e da me solo all'affidatomi incarico, stante le mie incombenze di pubblico servizio.”<sup>1</sup>

Qui si rivela il carattere diligente di colui che, ad ogni costo, non vuole deludere le aspettative, sia del committente che di tutti quelli che lo circondano, rivelando un velato senso di inadeguatezza che lascia trapelare l'evoluzione nell'approccio progettuale, ma che risponde con la migliore buona volontà all'esigenza dell'incarico stesso.

Mosca passa dall'esercizio della sperimentazione tecnica dei primi incarichi, quale ingegnere di ponti e strade della Liguria e Torino, alla progettazione delle infrastrutture inserite nello spazio urbano e territoriale attraverso lo studio più complesso e articolato del progetto.

Egli si definisce cittadino e non suddito, si impegna in un ruolo del quale condivide, sì, gli obblighi morali, ma per il quale pretende il rispetto di autonomia di giudizio.

È progettista, gestore e amministratore della sua stessa opera: progetta il lavoro nelle varie fasi d'opera, la portata, il costo, prevede i momenti operativi, la loro successione e il tempo necessario a portarli a compimento, l'impiego quantitativo e qualitativo della manodopera, dalla stesura del progetto fino alla realizzazione dei modelli, secondo un criterio decisionale che sottrae sempre più gradi di libertà interpretativa alla manodopera.

Gli ingegneri come Mosca sono impegnati a migliorare la forza e l'efficienza dello Stato ed hanno come interesse primario il bene dello stesso e non vogliono essere implicati in partigianerie, affermando l'integrità della loro formazione e dei loro progetti.

Anche lavorare a stretto contatto con gli ambienti di corte lo porta ad incontrare diverse difficoltà; egli, infatti, preferisce assolvere i suoi doveri di “burocrate di alto livello” come sovrintendente tecnico piuttosto che perdersi nello studio di decorazioni di maniera legate alla moda del momento.

Questa insofferenza per le mode artistiche e i problemi delle decorazioni *à la page* sono per Mosca dovute alla concezione per cui l'arbitrio dell'architettura è il “buon gusto”, cioè un criterio di carattere sociale se non addirittura mondano.

Secondo Mosca, infatti, due criteri di giudizio precedono in importanza il “buon gusto”: la coerenza stilistica e il decoro.

L'architettura di Mosca è razionalista e conservatrice, difatti dal punto di vista linguistico utilizza forme consolidate dall'uso, mentre la composizione si fonda su argomenti oggettivi, costruttivi, funzionali, organizzativi, e quindi esprimibili indipendentemente da qualsiasi scelta artistica.

Resta viva in lui, sempre presente negli scritti e nelle opere, l'attenzione ai problemi e alla situazione economica dello Stato, da indurlo ad utilizzare modi vecchi e nuovi, ereditati dai regimi pre-rivoluzionari misti a sentimenti religiosi e altri tratti dall'epopea napoleonica, ma con una

---

<sup>1</sup> Fasoli V., *Progetti per la città: i casi di Torino e Berna*, in Comoli V., Guardamagna L., Viglino M. (a cura di), *Carlo Bernardo Mosca, un ingegnere architetto tra Illuminismo e Restaurazione*, Guerini Associati, Milano 1997, p.101



filosofia di austerità nei costumi, di prudenza e di abnegazione di sé con assoluta dedizione alla “cosa pubblica”.

Inoltre, non si può dimenticare il suo costante impegno tecnico e amministrativo, attraverso ruoli istituzionali, le sue osservazioni, la sua presenza nelle discussioni che contribuiscono al rapido processo di qualificazione e innovazione nel settore della costruzione di ponti.

### *1.3. Il contesto urbanistico*

La città di Torino rimane lo spazio di realizzazione dell'ingegnere Carlo Bernardo Mosca con la costruzione dei Murazzi lungo il fiume Po, con la cura delle proprietà dell'Ordine dei santi Maurizio e Lazzaro e soprattutto con il suo avveniristico ponte sulla Dora Riparia.

Proprio per incentivare l'ampliamento di questa zona della città e il compimento della piazza Emanuele Filiberto verso il ponte di Dora, le abitazioni private erano state incentivate con l'esenzione per trenta anni di ogni imposta e per ridefinire l'uscita nord della città si dovevano trovare soluzioni al notevole dislivello altimetrico tra la città vecchia e il corso del fiume.



Torino fine '800

Il dibattito era proseguito fino alla presentazione nel 1821 da parte di Mosca di un inedito ponte ad un solo arco di cinquanta metri di lunghezza che risolveva, a fronte del rettilineamento della Dora



Riparia, il problema della scelta tipologica del ponte da costruirsi e soprattutto del dibattito che spesso nasceva sul preferire la progettazione e costruzione di un ponte obliquo oppure retto



Rabbini A., planimetria del Nuovo Ponte di Dora e sue adiacenze, 210 mm = 700 m, 53x 75 cm, disegno a penna, inchiostro colorato, acquerellato su carta, in Comoli V., Guardamagna L., Viglino M. (a cura di), *Carlo Bernardo Mosca, un ingegnere architetto tra illuminismo e restaurazione*, p. 154.

Mosca viene scelto quale funzionario al servizio dell'utilità pubblica per le sue grandi capacità tecniche e scientifiche che la formazione a Polytechnique di Parigi gli aveva assicurato e per l'alta considerazione dell'École stessa in quanto fucina di progettisti altamente qualificati.

Tale processo avrebbe portato Mosca ad una nuova e aggiornata professionalità civile con le caratteristiche di criteri di razionalità, economia e decoro quali garanzie per un prodotto qualificato ottenuto mediante scelte ponderate e suggerite dal sito, dalla funzione e dalle regole delle scienze esatte; ad esempio della sua integrità professionale, basti pensare che egli stesso rivendica il ruolo specifico di Ingegnere di Ponti e Strade per eliminare ogni rischio di improvvisazione, come invece succedeva precedentemente quando un ingegnere idraulico poteva avere competenze in materia di progettazione.

Dalla scala tecnica e architettonica si passa a quella urbanistica per un approccio più proiettato verso la connotazione territoriale e istituzionale di Nazione. Sono certamente evidenti gli esiti dell'analisi funzionale relativa alla viabilità e ai flussi di traffico e dell'analisi tecnica legata alla topografia del territorio.

Altrettanto attenta è la soluzione con cui Mosca risolve in maniera semplice, ma più che decorosa, l'ingresso della città. È qui che si riconosce all'ingegnere architetto singolari capacità di pianificazione e di gestione e, soprattutto, una sensibilità nel saper cogliere le caratteristiche di un contesto così stratificato e complesso, riservando l'area topografia più elevata a residenza e

salvaguardando le strutture produttive preesistenti; infatti il tema del ponte è inserito da Mosca nel contesto più ampio dell'ampliamento della città verso nord, nella zona dove sorgevano già le protindustrie e i canali produttivi di energia di matrice idraulica. Il progetto prevedeva una forte ristrutturazione con edifici previsti su alti basamenti, ma che sarebbero risultati troppo costosi anche per la scarsa redditività dovuta alla presenza di costruzioni e laboratori artigianali di modesta fabbricazione e perciò fu ridimensionato per decisione dell'amministrazione municipale nel 1830 con la costruzione urgente del ponte e di due semplici edifici, eliminando i portici e ampliando la sezione stradale, arretrando l'area edificabile verso i terreni in forte pendenza.

Nella scelta progettuale e di cantiere Mosca si relaziona sicuramente alla crisi economica e produttiva che stava segnando lo Stato Restaurato, andando alla ricerca di nuove fonti energetiche per la produzione di ferro per la costruzione di ponti sospesi sui modelli francesi e inglesi, che aveva studiato nel suo viaggio di un anno all'estero, ma poi prediligendo la pietra piemontese per continuare ad incentivare l'abilità mineraria del luogo.

## 2. Il Ponte Mosca sulla Dora Riparia a Torino

Nel 1823 Carlo Bernardo Mosca redigeva i *Capitoli d'appalto*<sup>2</sup> nei quali troviamo raccolte tutte le previsioni tecniche ed economiche per la realizzazione del suo progetto definitivo per il ponte sulla Dora Riparia. Definitivo, dicevamo, perché Mosca aveva inizialmente pensato a due altre soluzioni a tre archi, una obliqua e una retta, con pile nell'alveo del fiume.

Dopo aver esaminato accuratamente tutte le circostanze del luogo, ponderate le varie difficoltà, quali l'ampiezza del letto del fiume, la sua obliquità lungo l'asse, il corso rapido in piena, egli si risolse infine a favore di un ponte ad una sola arcata, inizialmente prevista di 50 metri di corda, poi ridotta a 45 metri anche su parere del Congresso permanente di ponti e strade, con una freccia all'intradosso di 5,50 m.

L'opera venne eseguita fra il 1823 e il 1830, con un'interruzione dei lavori di quattro anni, dal 1824 a tutto il 1827, per l'insorgere di contestazioni.

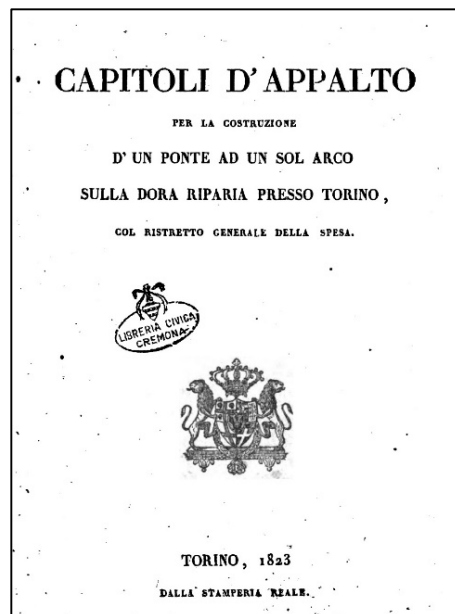


Fig.1 Frontespizio dei *Capitoli d'appalto*

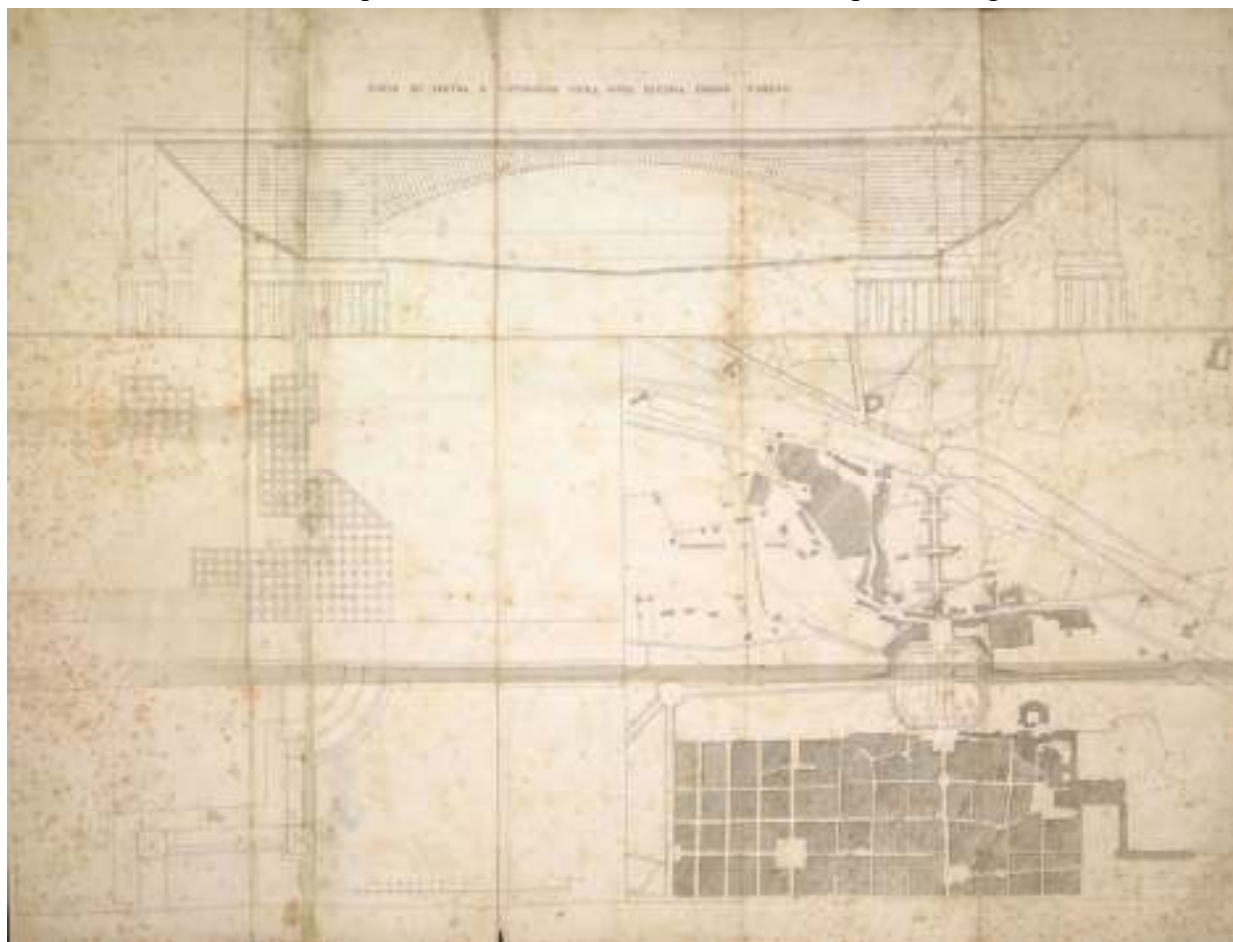


Fig.2 Tavola generale allegata ai *Capitoli d'appalto* redatti da Mosca nel 1823

<sup>2</sup> Mosca C.B., *Capitoli d'appalto per la costruzione d'un ponte ad un sol arco sulla Dora Riparia presso Torino, col ristretto generale della spesa*, Stamperia Reale, Torino 1823

Aperta al pubblico il 15 agosto 1830, venne spontaneamente intitolata Ponte Mosca, denominazione che, dopo la morte dell'autore nel 1867, l'amministrazione municipale rese ufficiale nel 1868.

L'aspetto molto slanciato dell'arcata dovuto al forte ribassamento è accentuato dalle strombature *en corne de vache* le quali, partendo dal terzo corso dalle imposte, formano sulla fronte un secondo arco di apertura un po' maggiore e con saetta di soli 3,75m, avente tangente in chiave comune con l'arco di intradosso. La scelta a favore di queste strombature, oltre a rendere più armonica la forma



Fig.3. Veduta prospettica del Ponte Mosca sulla Dora Riparia, 1835. Biblioteca civica centrale, Cartografico 8/6.78  
© Biblioteche civiche torinesi

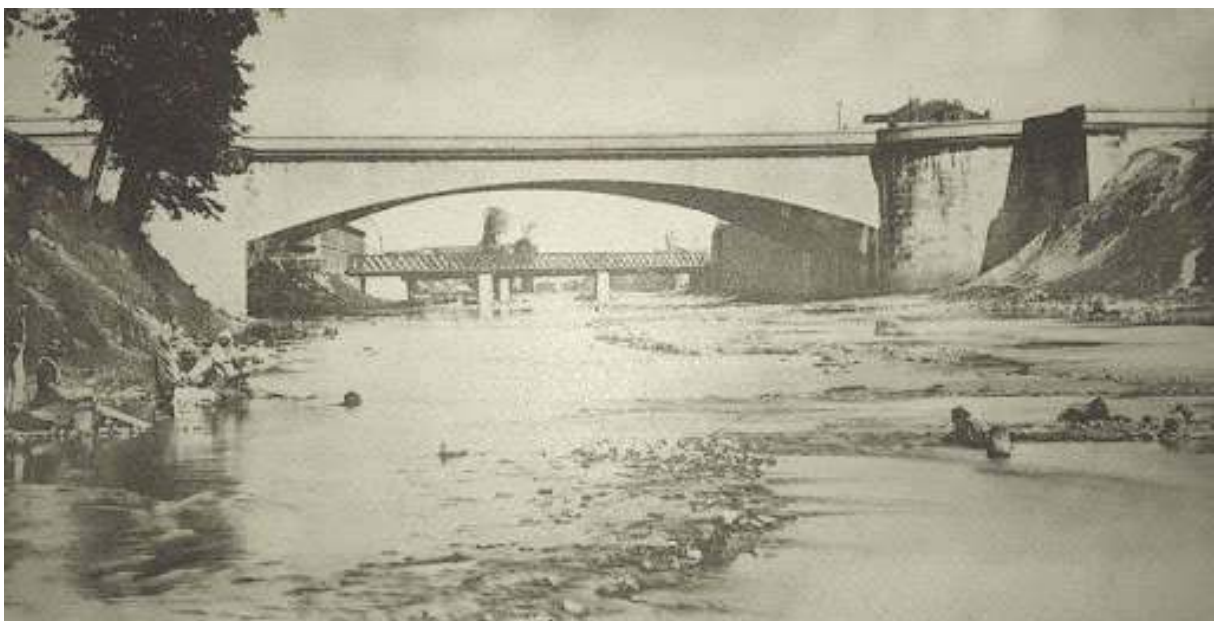


Fig.4 Fotografia di fine '800, con i tre ponti sulla Dora Riparia e il ponte Mosca in primo piano



dell'arcata, venne adottata anche per facilitare lo sfogo delle acque in caso di piene. Anche la forma circolare delle spalle, che verso la base fanno da rostri, concorre a favorire il passaggio della corrente.

L'arcata è formata da 93 corsi di conci in gneiss del Malanaggio, vicino a Pinerolo: i corsi alle due imposte hanno uno spessore all'intradosso di 0,6377m, mentre gli altri 91 hanno tutti lo stesso spessore di 0,4999m. Ogni corso orizzontale è formato da soli 6 o 7 conci. L'altezza dell'arcata in chiave è di 1,50m, alle imposte di circa 2m.

Le spalle di appoggio dell'arcata, anch'esse in gneiss del Malanaggio, erano previste a progetto con uno spessore di base di 12m e l'aggiunta per ciascuna di esse di due speroni larghi 3m e lunghi 6m di nella direzione dei parapetti; in sede costruttiva, la spalla destra venne realizzata con spessore di 12,45m e speroni lunghi 6,02m e la spalla sinistra con spessore di 12,54m e speroni lunghi 5,58m. La larghezza del ponte è di 12,70m

Tutti questi dati sono ripresi dalla *Dissertazione*<sup>3</sup> che il nipote del progettista, Carlo Mosca, redasse nel 1873 per l'ottenimento del Diploma di Ingegnere civile presso la Scuola d'Applicazione di Torino. Ad essa ci affidiamo qui per la dettagliata descrizione della vicenda costruttiva dell'opera e le belle tavole che l'accompagnano. Su di essa torneremo, per altre ragioni meno elogiative, nel Cap.4 quando discuteremo le analisi di natura meccanica svolte dal neo ingegnere.

Per le fondazioni delle spalle si dovette prosciugare prima il sito fino ad arrivare a 2,30 metri sotto il livello delle magre. A tale profondità furono collocati, a interasse di 1metro, pali di quercia di 30cm di diametro, lunghi da 9 a 12 metri, muniti di puntazza di ferro del peso di 8kg, infissi verticalmente nel terreno tramite battipali con massa da 400 a 500kg, sollevata da squadre di 25 a 30

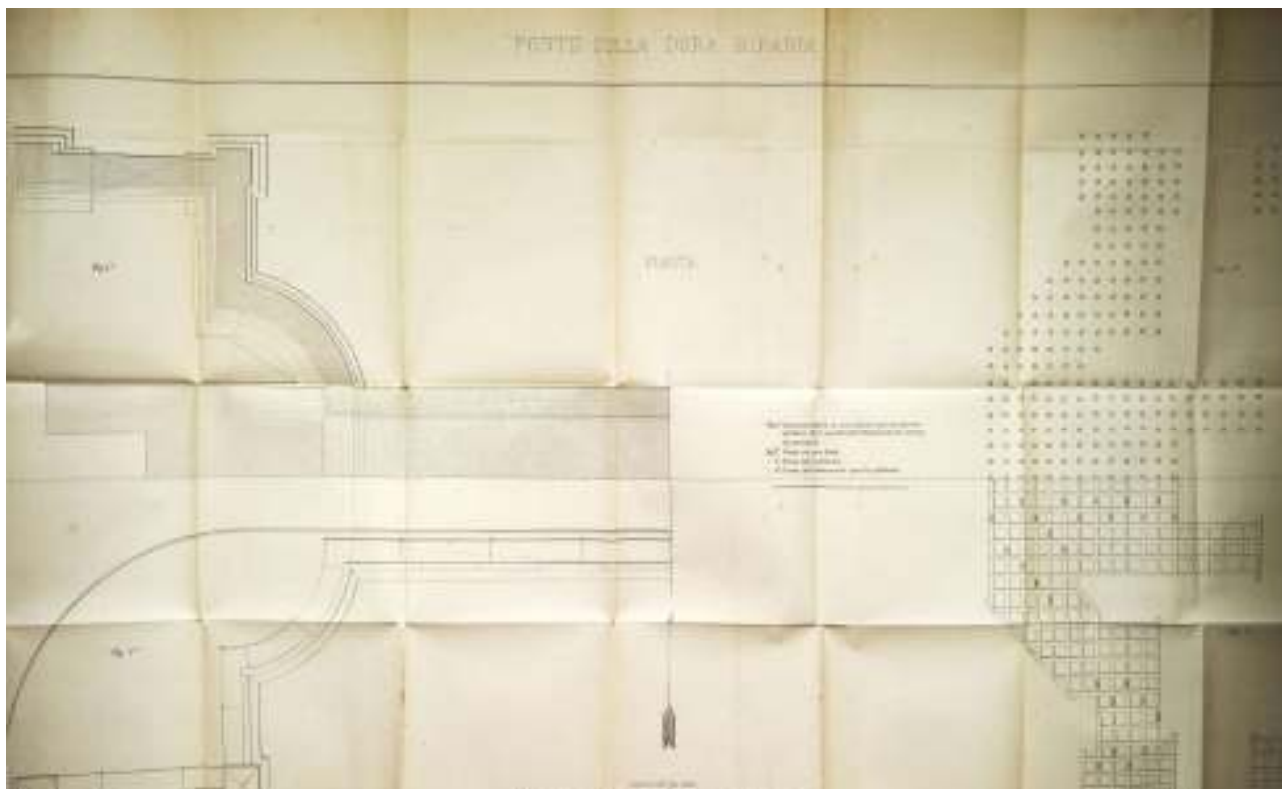


Fig.5. Pianta delle fondazioni della spalla destra (da Mosca C, 1873)

<sup>3</sup> Mosca C., *Il ponte Mosca sulla Dora Riparia presso Torino*, Dissertazione presentata alla Commissione esaminatrice per ottenere il diploma di Ingegnere civile, Stamperia dell'Unione Tipografico-Editrice, Torino 1873

uomini; nel complesso, circa 200 uomini erano impiegati simultaneamente su ciascuna sponda. Terminata l'infissione dei pali per le spalle, si passò a quelli per sostenere i muri circolari d'ala e i muri di prolungamento.

Sulle teste dei pali, tagliate a livello, vennero poi posate longarine di quercia con sezione di 25cm per 30cm, in direzione longitudinale e trasversale, riunite tra loro con caviglie di ferro, a metà legno nell'interno, e a coda di rondine, ma sempre a metà legno, sul perimetro delle fondazioni, in modo da formare una intelaiatura solida. Gli spazi fra le longarine furono riempiti con malta di calce e polvere di tegole ben cotte (il cosiddetto *ceroso*) passata al setaccio in proporzione eguali in peso, fino al livello delle teste dei pali, formando platea. Su questa si pose un primo corso formato di massi alti 50cm, a cui si sovrapposero altri 3 corsi simili con due riseghe, e poi altri 5 corsi orizzontali ciascuno alto 60cm, "formanti lateralmente le spalle, e la cui parte superiore costituiva il letto di posa o piano d'imposta dell'arco. Infine altri sette corsi orizzontali furono aggiunti alle parti circolari delle spalle e rettangolari dei muri di prolungamento. A questo punto i lavori furono sospesi e lasciati rassodare per una intera stagione, affinché la muratura prendesse la necessaria consistenza per sostenere la spinta dell'arco a costruirsi" (p.34)

Per quanto riguarda la grande arcata, il disegno di progetto prevedeva le seguenti misure:

- luce all'intradosso: 45m
- raggio di intradosso: 48,773m
- saetta all'intradosso: 5,50m
- sviluppo dell'arco di intradosso: 46,776m

Rispetto a queste misure, Mosca prevede di aumentare la saetta d'intradosso ben sapendo che, all'atto del disarmo e della successiva posa della sovrastruttura, si sarebbe verificato un inevitabile calo dipendente dalla curva della stessa arcata, dal numero dei conci che la compongono, dallo spessore delle commessure, dal grado di essiccazione della malta. Per questa ragione egli decise di rialzare l'arco di 25cm in chiave di modo che, ferma restando la luce di 45m all'intradosso, l'armatura avrebbe dovuto essere costruita per ottenere i seguenti nuovi valori:

- raggio di intradosso: 48,896m
- saetta all'intradosso: 5,75m
- sviluppo dell'arco di intradosso: 46,934m

con uno sviluppo dell'arco rialzato maggiore di 16,2 cm rispetto a quello di progetto.

Per poter ottenere la massima precisione nell'esecuzione dell'armatura di sostegno e dell'arcata secondo i nuovi valori sopra indicati, fu costruita una platea di 450 metri quadrati, perfettamente piana, sulla quale disegnare al vero la figura dell'arco da costruirsi e prendere le ordinate e le ascisse da riportare in elevato. Questi lavori preparatori iniziarono l'8 aprile 1823 col disegno dell'arcata e il 3 maggio dello stesso anno anche il disegno dell'armatura venne terminato.

La stessa armatura, concepita sul tipo di quelle di Perronet, venne poi costruita in 45 giorni. Essa era formata da 10 cavalletti a tre corsi di puntoni, a sezione rettangolare 30 cm per 35cm, collegati tra loro da staffe formate da travi uguali; la distanza dei tre cavalletti più vicini a ciascuna fronte dell'arco era di 1,175 metri da asse ad asse, a causa del maggior peso dei conci delle fronti, quella tra



asse ed asse dei quattro cavalletti intermedi era di 1,440 metri. Ognuno di essi era sostenuto al centro da tre ordini di pali legati tra di loro in modo da costituire un solido appoggio; sul dorso dei cavalletti e in corrispondenza di ciascuna fila di cunei era disposto un dossale regolabile per facilitare l'inserimento dei vari cunei. Alle due estremità i puntoni poggiavano contro ritti addossati verticalmente alle spalle tramite su cunei di frassino, come le travi di sostegno al centro dei cavalletti, per poter ottenere un abbassamento regolare e simultaneo di ogni parte dell'armatura.

Il 13 agosto 1823 veniva posato il primo concio. Procedendo con il solo ausilio di argani, taglie corde e cunei, “due soli posatori con qualche operaio sull'armatura e pochi uomini lavoranti agli argani erano capaci di collocare a sito in una sola giornata circa 9 conci pesanti in media più di cinque tonnellate ciascuno; e per tal modo tutti i 651 conci componenti l'arco, e pesanti insieme circa 3250 tonnellate, vennero collocati in opera in 75 giorni di lavoro utile”. L'8 novembre 1823 venne posata l'ultima pietra in chiave “e si chiuse il volto con pieno successo, dopo sette mesi di lavoro, a partire dal giorno 8 aprile, in cui si cominciarono le operazioni sull'area pel tracciamento dell'arco”.

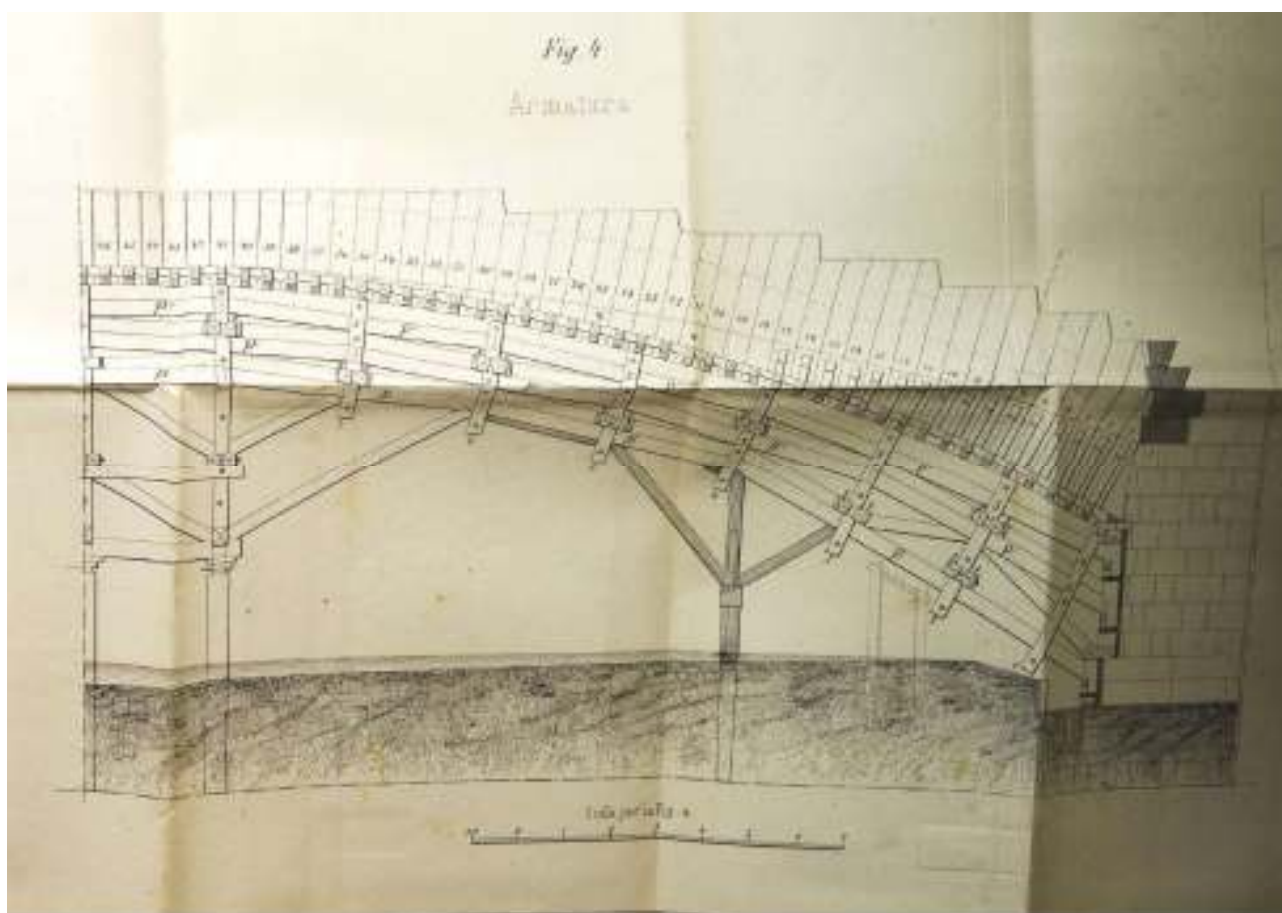


Fig.6. Dettaglio dell'armatura (da Mosca C, 1873)

Tenendo conto che i 93 conci in granito formanti i fronti dell'arcata avrebbero mantenuto lo spessore di progetto, Mosca pensò di recuperare la suddetta differenza di 16,2 cm predisponendo giunti in malta con spessori e posizioni opportunamente scelti per “guidare” gli effetti del disarmo, in modo da favorire che le pressioni si distribuissero sull'intera superficie dei giunti evitando il rischio della loro apertura nelle zone critiche presso le imposte e la chiave.

Consapevole che al disarmo i giunti presso le imposte tendono a chiudersi all'intradosso e ad aprirsi all'estradosso e, al contrario, i giunti presso la chiave tendono ad aprirsi all'intradosso e a chiudersi all'estradosso, Mosca predispose le commessure da riempire di malta facendole più spesse all'intradosso presso le imposte e all'estradosso presso la chiave, dove cioè era atteso che esse tendessero a ridursi, lasciando priva di giunti di malta la parte centrale di ogni semivolta.

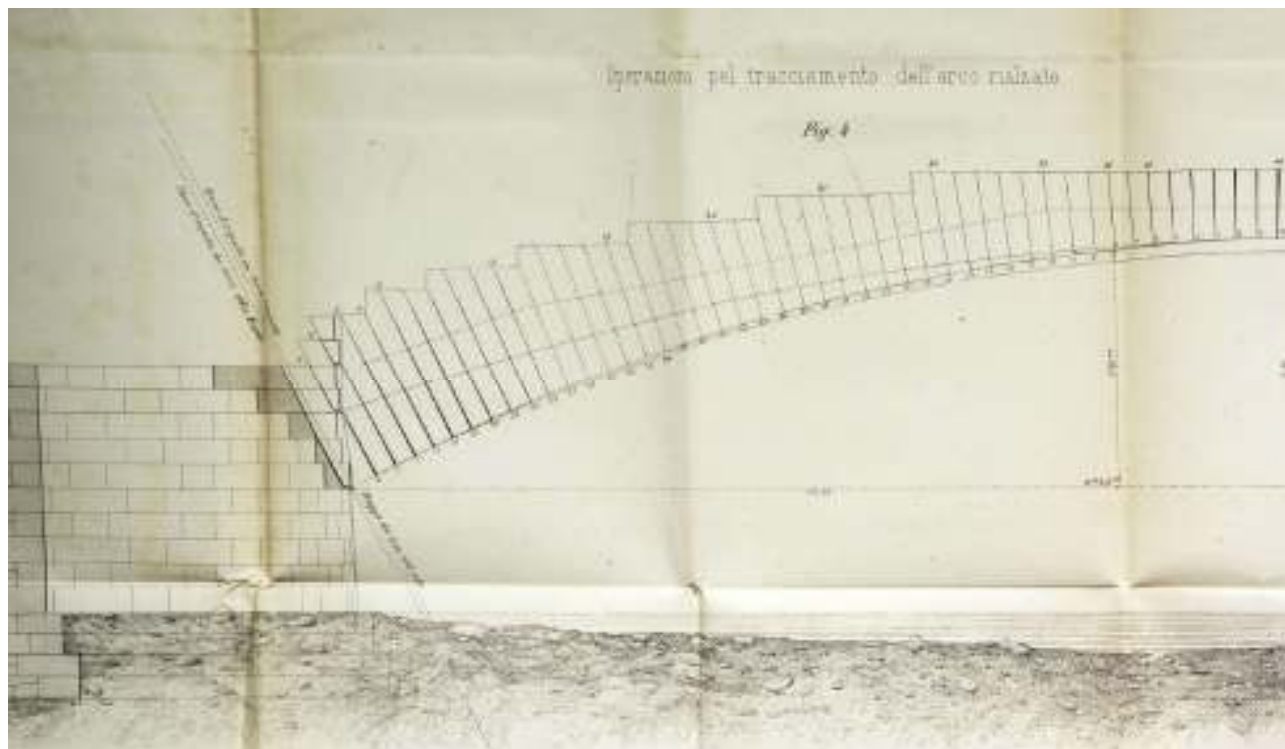


Fig. 7. Giunti di malta con spessore variabile e linee tracciate sui fianchi per seguire gli effetti del disarmo (da Mosca C., 1873)

Al termine dell'esecuzione dell'arcata, gli spessori delle commessure (in mm), numerate per ciascuna metà di volta a partire da 1 (imposta) fino a 47 (chiave), risultarono i seguenti<sup>4</sup>:

Per i primi 11 giunti a partire da ogni imposta			Per i giunti dal 37 al 47 a cavallo della chiave		
Giunto	intradosso	estradosso	Giunto	intradosso	estradosso
1	9	3,7	37	0	1
2	8	2,7	38	0	1
3	8	3,4	39	0	2
4	7	3,3	40	0	2
5	7	3,2	41	0	3
6	6	3	42	0	3
7	5	2,4	43	0	4
8	5	2,3	44	0	6
9	4	2	45	0	7
10	3	1,4	46	0	8
11	2	0,9	47	0	8
<b>Totale</b>	<b>64</b>	<b>28,3</b>	<b>Totale</b>	<b>0</b>	<b>45</b>

<sup>4</sup> Questi valori sono riportati da Castigliano e da lui utilizzati per svolgere la sua analisi elastica tenendo conto anche del lavoro di deformazione della malta. Si veda il Cap.III

Per farsi un'idea dell'attenzione posta nella fase di costruzione della grande arcata e del suo disarmo, ci sembra opportuno lasciare la parola al rendiconto di Carlo Mosca: "A tutta prima il lavoro progrediva un po' lentamente, perché i conci dei primi corsi, per la loro mole, presentavano qualche difficoltà e richiedevano molte precauzioni; gli operai non erano ancora avvezzi a tale lavoro, ed erano necessarie le massime cure a prevenire ogni infausto accidente. La maggior difficoltà stava nel collocamento dei conci delle faccie, i quali, avendo una piccola base, stante lo smusso della strombatura, tendevano sempre ad inclinarsi all'infuori; si sostenevano mediante puntelli, che posavano sul travetto inferiore e sotto il dente, che si era lasciato alle pietre per tale oggetto" (p.48) "Fra i corsi si collocavano all'intrados le lamine di piombo aventi lo spessore della commessura fissato sul tracciamento; ed i conci intermedi (che si collocavano sempre dopo quelli delle faccie) si rialzavano all'intrados con sottili cunei di ferro finchè il loro piano superiore coincidesse perfettamente con quello dei conci di fronte" (p.48) "Nell'intervallo di tempo in cui la posa delle pietre era sospesa per la preparazione degli apparecchi sui ponti di servizio, si caricò l'armatura al suo mezzo con un volume di pietre, da impiegarsi poi nei corsi presso la chiave, di m.c. 47,38 di un peso maggiore di 130000 kg." (p.48) "Prima di riprendere la posa del 4° corso si verificò l'ordinata del 3°, e la si trovò più bassa di 5mm a sinistra, e di un centimetro a destra; si pensò che ciò potesse provenire da un leggero movimento dell'armatura, e difatti si trovò un lieve abbassamento alla staffa N°4, ed un piccolo rialzo alla staffa Num.6. Si decise di continuare il caricamento sopra l'armatura oltre le staffe verticali del castello di mezzo (...) Si aggiunse un volume di m.c.36,78, il quale, col precedente forma il volume totale di m.c.84,16. E siccome il rialzo dell'armatura alla staffa N°6 non poteva aver luogo senza un abbassamento all'estremità del primo puntone p, si pensò di rendere più rigido il sistema mediante l'aggiunta di un appoggio all'estremità del primo puntone (fig.4, tav.II). Il sostegno suddetto vi è segnato con tratteggio" (p.48)

Il giorno 11 set 1828 venne iniziata la posa del 4° corso "da ambo le parti, cioè con due squadre, e così si continuò fino alla fine. Malgrado tutta l'attenzione di tenere le ordinate più elevate, tuttavia si osservò in esse una tendenza ad abbassarsi, e ciò fino alle ordinate 16 e 17. Dopo il corso 27 al contrario vi era tendenza all'innalzamento. Collocato il corso N°8, si osservò un movimento nella commessura fra il corso N°3 e il corso N°4. Tutti i corsi dopo il N°4 si abbassavano in massa (...) Dopo il corso N°27 le ordinate erano alquanto più elevate, le ascisse più deboli, e l'inclinazione dei conci alquanto maggiore di quella presunta (...) Si corresse tale differenza nelle ascisse, collocando fra i conci sottili lamine di piombo, in modo da ottenere delle commessure parallele; ma ciò non bastò a correggere l'inclinazione dei conci colla verticale. L'armatura intanto andava rimettendosi nella sua posizione normale, a misura che la posa dei conci avanzava (...) Fatta la correzione sulle ascisse e sulle ordinate, restava a correggersi la differenza osservata nell'inclinazione dei conci; ad un tal fine (...) si modificò come segue [cioè come nella Tabella prima riportata] la scala dello spessore delle commessure all'estrados, che dal tracciamento fatto sull'area doveva cominciare al corso N°38, e che invece si fece partire dal corso 36 (...) ferma restando la condizione, che i conci si toccassero all'intrados"(p.50) "Per diminuire tuttavia lo spessore delle due commessure laterali alla chiave, si stimò opportuno di aumentare lo spessore delle pietre all'estrados di cinque millimetri" (p.51)

“Tutti i conci del volto si collocarono a secco, ed a misura che un corso era ultimato, si otturava la commessura all’estradosso con stoppa .Collocato il corso N°33 si ripulì con diligenza l’estrados del volto, e, tolta la stoppa, si lavarono le commessure mediante una pompa munita di appositi tubi di cuoio, che si fece agire prima di riempire le commessure con cemento di calce e sabbia; e ciò affinché le pietre, essendo ben pulite ed umide, il cemento potesse più facilmente scorrere in tutte le commessure, e riempire esattamente tutti i vani: a misura che si lavavano le commessure si otturavano nuovamente, tanto all’estrados quanto all’intrados. Collocato il corso N°39, si cominciò a colare il cemento liquido nelle commessure, togliendovi prima la stoppa all’estrados; vedevasi come il cemento scorreva uniformemente per tutte le commessure e mettevasi a livello: a misura che il cemento prendeva consistenza, si ricaricava con nuovo cemento, finché le commessure non furono perfettamente riempite. Nel giorno 8 novembre si collocò l’ultima pietra di mezzo nel corso della chiave, e si chiuse il volto con pieno successo, dopo sette mesi di lavoro, a partire dal giorno 8 aprile, in cui si cominciarono le operazioni sull’area pel tracciamento dell’arco. Nel giorno successivo si batterono le pietre della chiave e terminò il riempimento delle commessure con cemento” (p.51)

A partire dal 21 novembre iniziarono le fasi di disarmo: “si allentarono i cunei sotto i travetti della chiave e delle due controchiavi, il che produsse un abbassamento di circa due centimetri nei tre corsi. Si allentarono per una seconda volta i suddetti cunei, e battendo con mazze di legno le pietre dei tre corsi, si ottenne un abbassamento totale di tre centimetri e mezzo circa. Negli ultimi giorni di novembre si fecero i preparativi per il disarmamento. Si demolirono le steccaie in giro alle spalle; si prepararono delle pedane per comunicare facilmente da una parte all’altra: si fissarono vari capi saldi e si segnarono sulle due fronti volto cinque grandi linee (che vedonsi punteggiate nella fig.4 della tav.III) affine di riconoscere il menomo movimento dei conci, riferendoli a punti fissi di livello, vicino all’imposta dell’arco” (pp.51-52).

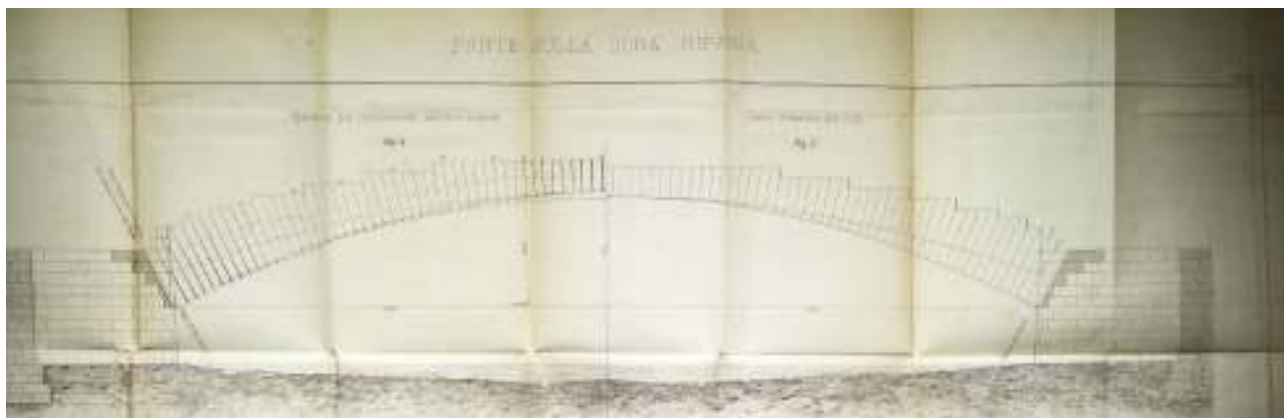


Fig.8 Vista delle due semiarcate, prima del disarmo (a sinistra) e dopo il disarmo (a destra) (da Mosca C., 1873)

Oltre a queste precauzioni, si raschiò dai giunti dell’intrados e dell’estrados il cemento fino alla profondità di tre centimetri, per evitare nel cedimento dell’arco qualsiasi scheggiamento degli spigoli, questi vani furono nuovamente riempiti a fine lavori (p.52).

Prima di cominciare il disarmamento, si rilassarono tutte le chiavarde a vite dell’armatura, affinché non fosse per nulla impedito ogni suo movimento, e si rimossero dall’armatura i sostegni ausiliari di cui sopra dicemmo. Terminate queste operazioni, venti giorni circa dopo la chiusura

dell'arco si cominciò il rallentamento dell'armatura. Sotto i colpi delle mazze i 240 cunei che supportavano i cavalletti, presero a scorrere uniformemente ed insensibilmente con moto quasi simultaneo per effetto del peso dell'arco e dell'armatura; questo movimento fu sospeso e ripetuto ad intervalli, finché si riconobbe che avea toccato il suo termine il cedimento dell'arco, e che i cunei più non supportavano che il peso della sola armatura. È da notarsi che, a misura che il disarmamento procedeva, non si sentì verun scroscio che indicasse qualche movimento parziale od anormale; e ciò è novella prova della diligenza usata nell'esecuzione.

Terminato il disarmamento, nel quale s'impiegarono cinque giorni, si abbassò del tutto l'armatura e si cominciò a scomporla. Mediante i capi saldi collocati lungo le due faccie del volto si riconobbe come il cedimento avesse avuto luogo regolarmente dalla chiave all'imposta "Nessuna rottura ebbe luogo nelle cinque linee tracciate sulle faccie, cosicchè il cedimento fu il risultato di un movimento d'articolazione dei conci tra di loro senza il minimo spostamento sui giunti. A misura che il volto si abbassava, le commessure all'intrados presso l'imposta, e quelle all'estrados presso la chiave diminuivano di spessore, finché si ottenne il parallelismo. Si osservò però una tendenza ad aprirsi all'estrados presso l'imposta" (p.53)

"Prima di fare i timpani e di collocare le cornici ed i parapetti, era d'uopo che il volto facesse tutto il cedimento possibile: perciò in gennaio e febbraio 1829 si caricò il volto di una massa di ciottoli di m.c. 1854 il cui peso, calcolato a 1500kg il m.c., dà un totale di kg. 2781000, peso assai superiore a quello dei timpani, e del sovraccarico massimo accidentale, che il volto avrebbe in seguito dovuto sostenere. I ciottoli formavano un prisma regolare contenuto da un solido tavolato verticale che si era preparato sulle due faccie; il peso era maggiore presso la chiave che sui fianchi, come si vede dal profilo di esso prisma, segnato nella fig.2, tav.II.

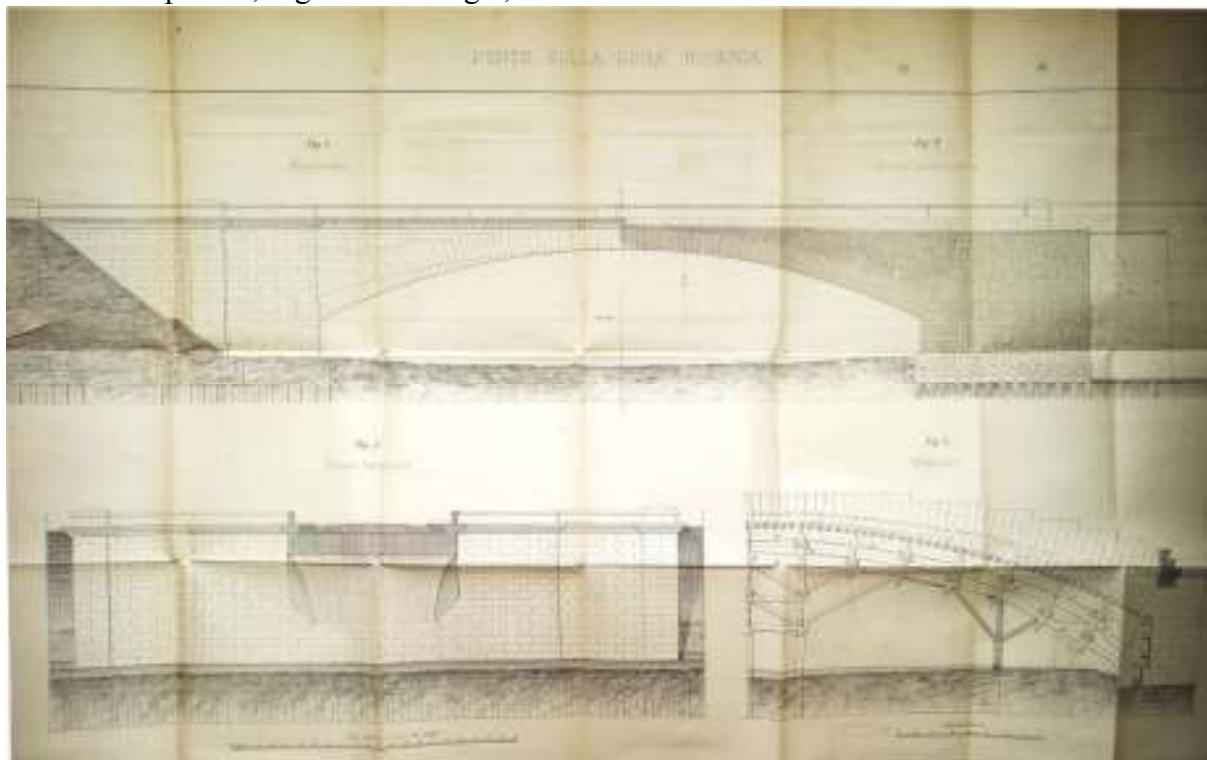


Fig.9. Tavola generale, dove è ben visibile anche la strombatura sul fronte e sotto l'arco (da Mosca C., 1873)

Si lasciò caricato il volto durante quattro mesi e più (quindi grosso modo fino a giugno-luglio 1829); poscia si impiegarono man mano i ciottoli nella muratura interna dei muri circolari, adoperando prima tutti quelli, che erano disposti sui fianchi del volto, senza toccare a quelli della chiave, dimodochè il volto venne a trovarsi così con tutto il suo carico sul mezzo e libero sui fianchi, ciò che dovea produrre il massimo cedimento e servire di tutta prova. Si trovò che l'aggiunta di questo carico di ciottoli avea prodotto un nuovo cedimento di 0,065 (metri), il quale, aggiunto a quello già ottenuto nel disarmamento di 0,125, forma il cedimento totale di 0,19, Il totale rialzo della *curva di posa*, essendo di 0,26 ne risultò un cedimento minore di 0,07 di quello che sarebbe stato necessario per passare dalla *curva di posa* all'arco vero progettato. La curva definitiva dell'arco vedesi rialzata di 0,07 sopra quella dell'arco vero calcolato in progetto nella fig.5, tav.III, che rappresenta l'arco già preparato per ricevere i timpani" (p.54) (...) "Si osservò, che delle cinque linee tracciate sulle fronti del volto, dopo il totale cedimento, quella orizzontale fra i conci 36 a destra e 36 a sinistra avea acquistata una saetta di 0,03, senza però la menoma rottura o discontinuità nei giunti. L'arco conservò la sua perfetta curvatura, né fu osservata in alcuna sua parte la minima deformazione" (p.54)

"Potendosi allora considerare l'arco come solidamente stabilito ed in condizioni favorevoli alla continuazione dei lavori, si procedette alla collocazione dei corsi orizzontali di collegamento dell'estrados dei conci con quelli che terminano le spalle (...)

Collocate poi le pietre della cornice, si coprì l'intera superficie dell'arco e delle spalle con uno strato di cemento bituminoso dello spessore di 15 centimetri, ben battuto finchè divenisse affatto duro; sovra esso ne fu disteso un secondo di 7 centimetri misto con ghiaia fin e leggermente battuto; con ogni cura si evitò nei due strati la menoma discontinuità. Per mezzo di questa cappa la filtrazione delle acque fu completamente impedita. Terminata questa operazione si riempì lo spazio fino a livello della carreggiata con strati regolari di terra, e, quando il tutto fu ben assettato e ridotto alla forma prescritta, si collocarono i lastroni dei marciapiedi con lieve pendenza verso il messo della strada e difesi dai veicoli da piccoli paracarri di pietra. Si eseguì poi il selciato sopra uno strato di sabbia e ghiaia dello spessore medio di 15 centimetri, e lo si coprì con uno strato di sabbia di 5 centimetri" (p.55). (...)

Nel chiudere la descrizione di quest'opera, accennerò che tutti i conci costituenti l'arco, tutte le pietre delle parti viste, delle cornici, delle fascie, dei marciapiedi e dei parapetti sono di gneiss del Malanaggio presso Pinerolo; le faccie viste furono lavorate a grana fina, e i conci intermedi dell'arco furono lavorati con egual finitezza per tre faccie. Furono pure adoperate, ma in piccol numero, pietre provenienti dalla cava di Cumiana, ma solo internamente nelle fondazioni e nelle spalle; e ciò perché il granito di Cumiana, più duro forse di quelle del Malanaggio, è più facile a sgretolarsi, e contenendo particelle di ferro è soggetto a macchie che deturpano il bell'aspetto dell'opera (come si può osservare nel ponte sul Po, a Torino).

Quest'opera, incominciata nel 1823, non poté essere ultimata che nel 1830, perché più volte e con varii avvicendamenti interrotta, poi nuovamente ripresa (...) Il lavoro fu abbandonato dall'appaltatore tre anni dopo il suo cominciamento; e poi dopo qualche intervallo fu ripreso ad economia dal Governo, colla direzione dell'autore e del suo fratello ingegnere Giuseppe, e fu



condotto a termine con esito soddisfacente, essendo costato il ponte, compresi gli accessi, L.1348552,39” (p.56)

A completamento della descrizione fatta da Carlo Mosca nella sua *Dissertazione* del 1873, riportiamo qui anche le belle tavole che si trovano in uno scritto di pochi successivo redatto da Giovanni Angelo Reycend<sup>5</sup> in difesa di certe soluzioni urbanistiche concepite da Mosca nel suo progetto di sistemazione della zona intorno

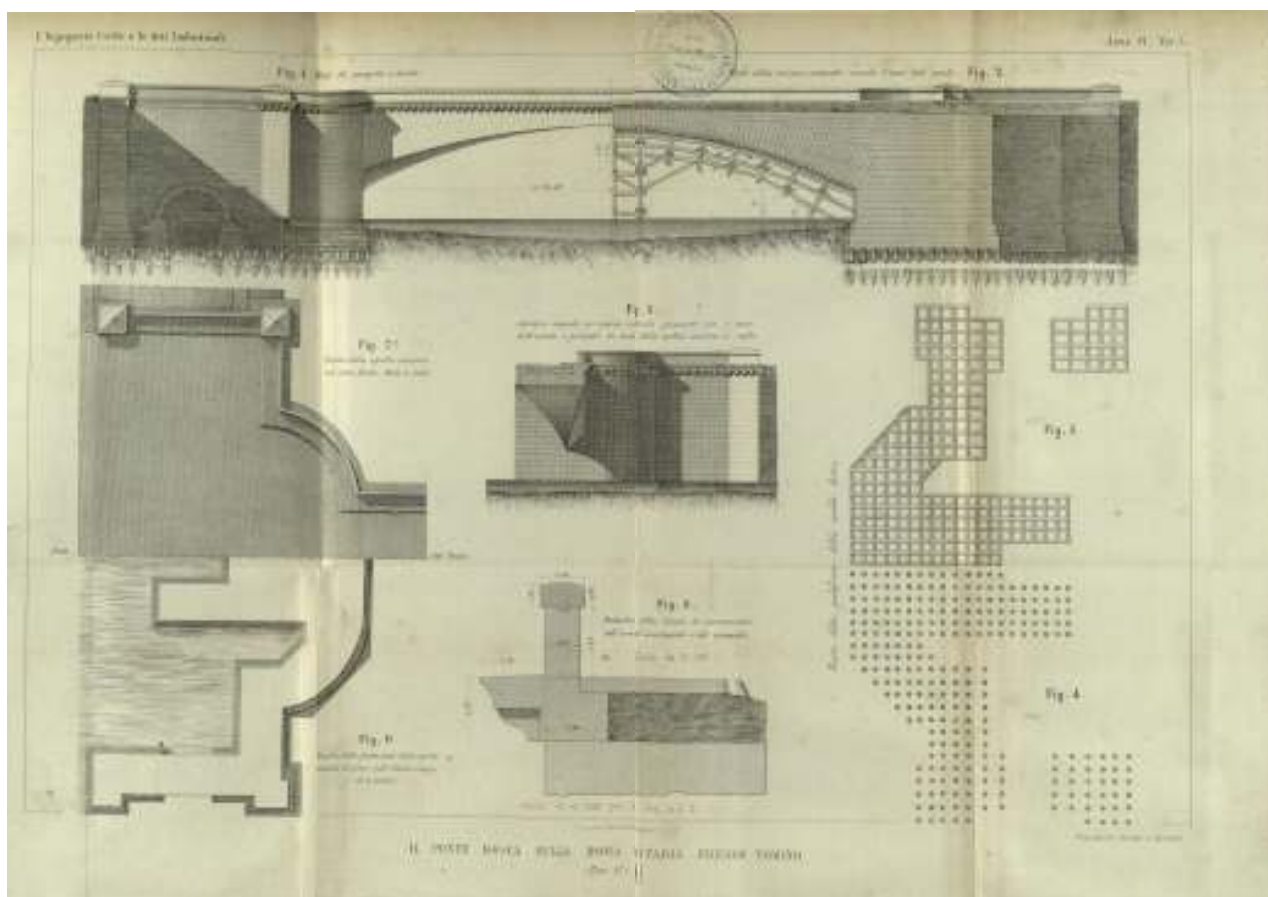


Fig. 10. Tavola tratta da Reycend G.A. 1880: Fig.1 Metà del prospetto a monte; Fig. 2 Metà della sezione verticale secondo l'asse del ponte; Fig. 3 Particolare del muro circolare; Figg. 4 e 5 Pianta della palificata della spalla destra; Fig. 6 Sezione delle fondazioni della spalla sinistra al piano dell'ultima risega; Fig. 7 Pianta della spalla sinistra ad opera finita, Fig. 8 Particolare della cornice di coronamento dell'arco, del marciapiede e del parapetto.

<sup>5</sup> Reycend G.A., *Il ponte Mosca sulla Dora Riparia presso Torino ed il Murazzo del nuovo corso Napoli*, Tip. e Lit. Camilla e Bertolero, Torino 1880

### 3. L'analisi elastica di Alberto Castigliano (1878)

L'attenzione da noi rivolta al ponte Mosca è dovuta non solo all'interesse che tale opera riveste dal punto di vista tecnico-costruttivo, come si è visto nel precedente capitolo, ma anche al fatto che esso, a distanza di quasi cinquant'anni dal suo completamento, divenne oggetto di uno dei primissimi impieghi dei metodi elastici alle strutture voltate in muratura.

Ci riferiamo all'analisi svolta nel 1878 da Alberto Castigliano<sup>6</sup> sulla base del suo teorema sulle derivate del lavoro di deformazione, analisi che, assieme ad altre proposte negli stessi anni dai fondatori della meccanica dei sistemi elastici iperstatici, segna un punto di non ritorno nella vicenda storica della teoria delle volte in muratura.



Alberto Castigliano  
(Asti 1847-Milano 1888)

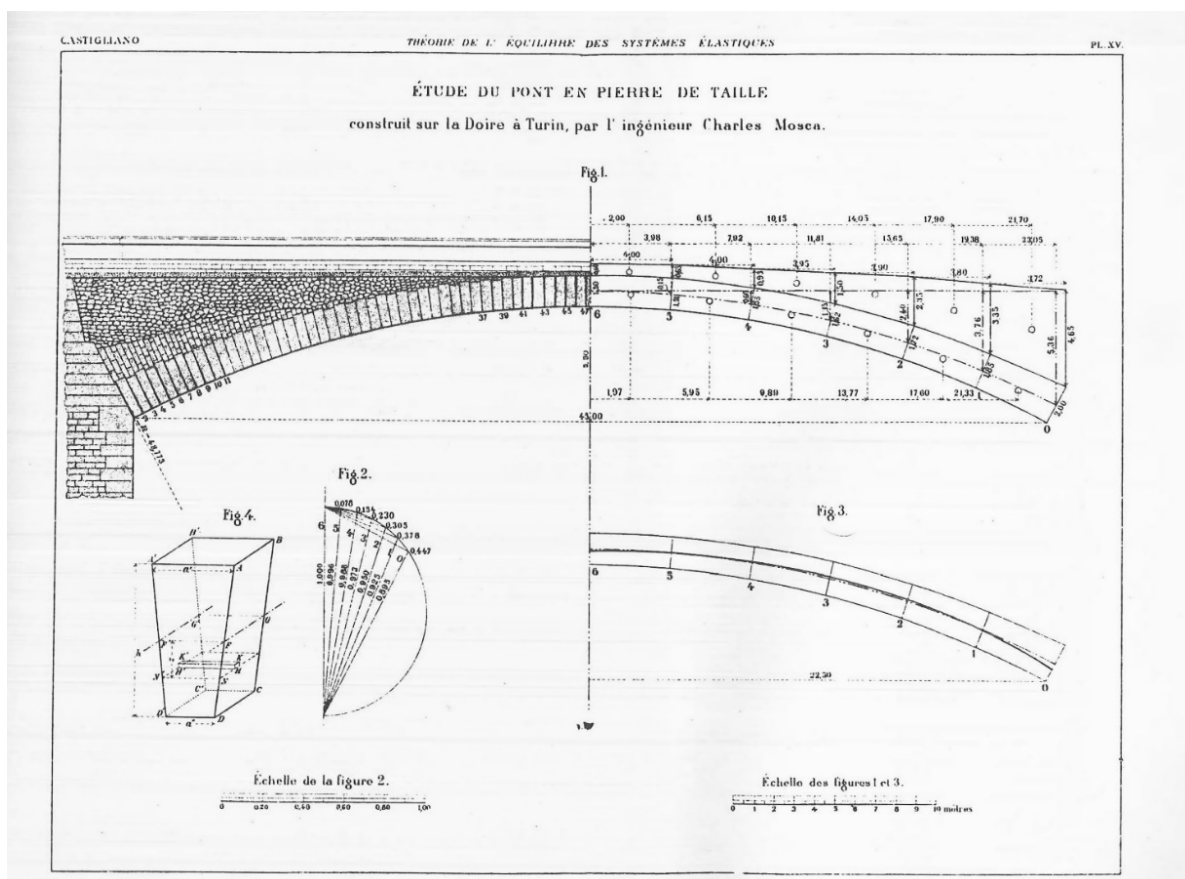


Fig.1. Planche con i disegni di Castigliano per lo svolgimento dell'analisi elastica

<sup>6</sup> L'analisi di Castigliano è contenuta, con minime variazioni, nei seguenti testi: Castigliano A., *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications*, A.F.Negro, Turin 1879, pp.458-478, in francese; Strade ferrate dell'Alta Italia, *Applicazioni pratiche della teoria sui sistemi elastici*, Studi dell'Ufficio d'Arte, Milano 1878, pp.125-140, in italiano. La versione in italiano è inserita nel volume Benvenuto E., Nascé V. (a cura di), *Alberto Castigliano. Selecta 1984*, Editrice Levrotto Bella, Torino 1984, alla quale ci riferiamo in questa esposizione.

### 3.1. Modello geometrico del ponte

Qui di seguito riportiamo il modello geometrico del ponte nel testo di Castigliano e quello da noi dedotto con Grasshopper, entrambi costruiti con i seguenti dati di progetto per la luce  $l$ , la saetta  $f_i$ , il raggio  $r_i$  e l'ampiezza  $\alpha_i$  all'intradosso, la corda  $l_e$ , la saetta  $f_e$ , il raggio  $r_e$  e l'ampiezza  $\alpha_e$  all'estradosso e lo spessore in chiave  $h_0$  e alle imposte  $h_6$  (le lunghezze sono in metri).

$l$	$f_i$	$r_i$	$\alpha_i$	$l_e$	$f_e$	$r_e$	$\alpha_e$	$h_0$	$h_6$
45	5,50	48,772	54°56'42"	46,846	5,226	55,102	50°18'42"	1,50	2,01

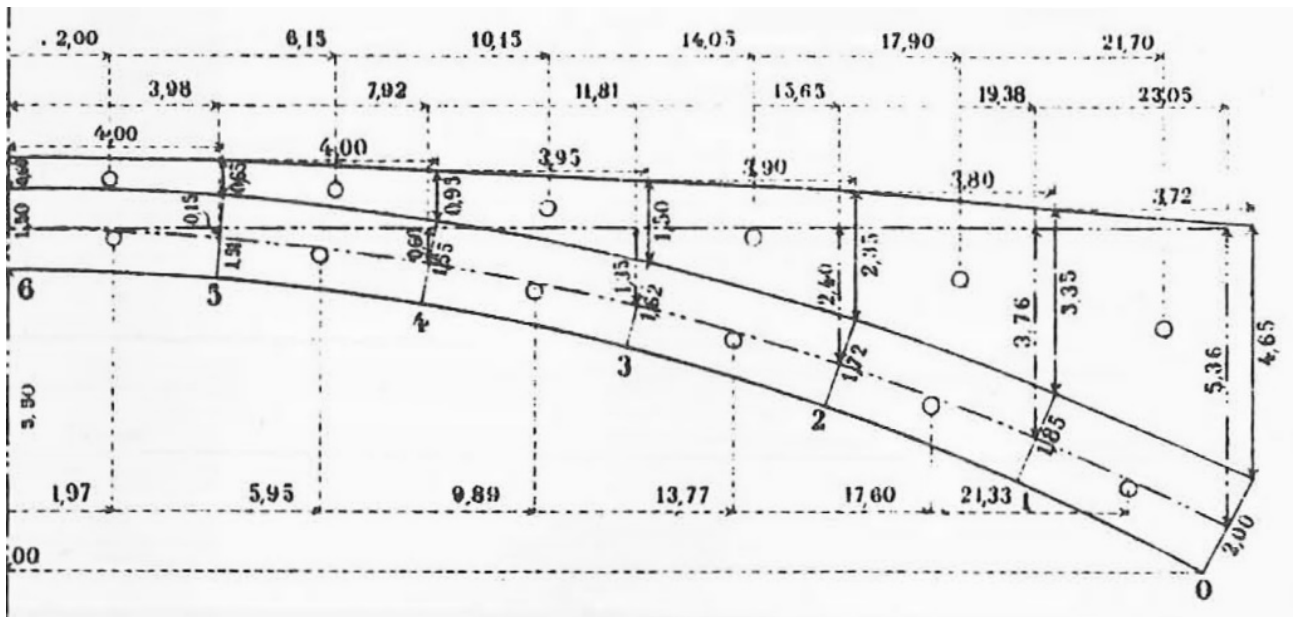


Fig.2. Riproduzione del modello geometrico di Castigliano per svolgere l'analisi elastica del ponte Mosca

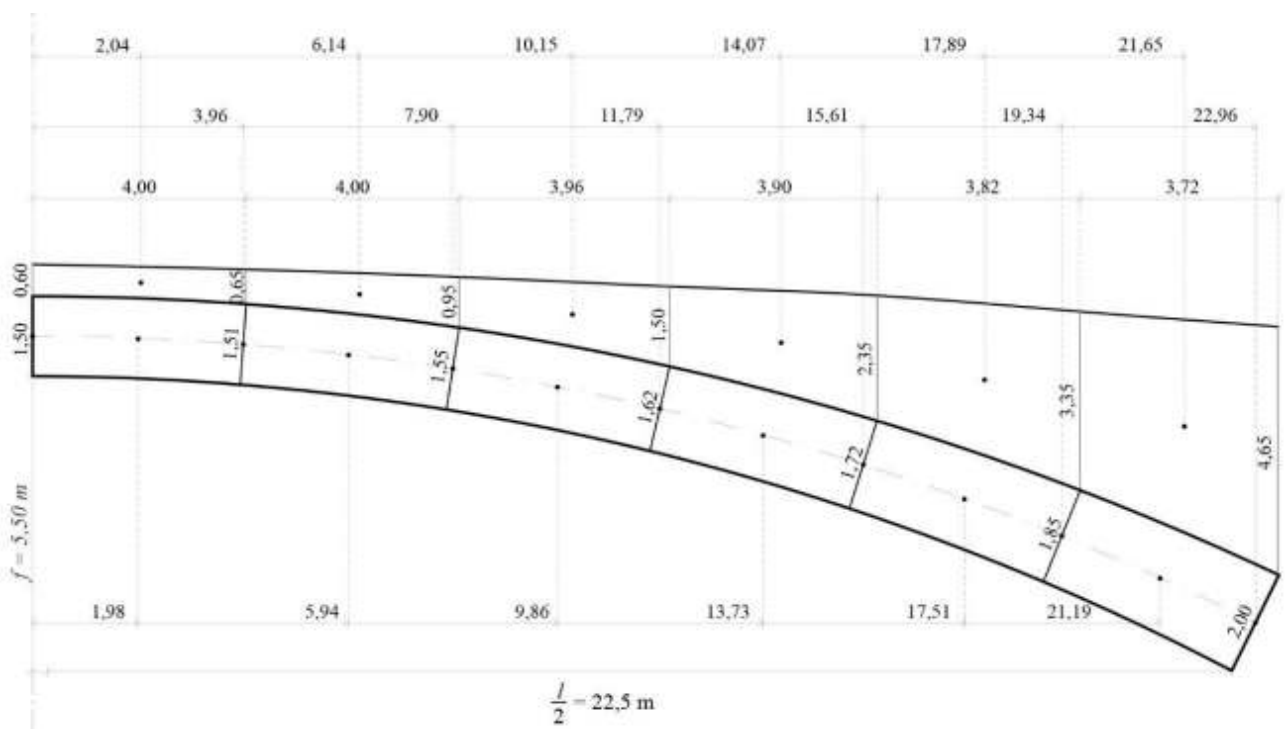


Fig.3. Modello geometrico elaborato con Grasshopper per svolgere l'analisi elastica del ponte Mosca

Nei due modelli geometrici le altezze effettive delle parti sovrastanti l'arcata, ovvero quelle dei rinfianchi in muratura di pietrame con peso specifico  $\gamma_r = 2300 \text{ kg/m}^3$ , del riempimento in terra battuta con peso specifico  $\gamma_t = 1600 \text{ kg/m}^3$ , della massicciata stradale con peso specifico  $\gamma_s = 1800 \text{ kg/m}^3$ , nonché la presenza di un sovraccarico di esercizio di  $600 \text{ kg/m}^2$ , sono trasformate in equivalenti altezze di muratura della volta dividendo i numeri precedenti per il peso specifico  $\gamma_v = 2750 \text{ kg/m}^3$  del granito di Malanaggio.

Poiché per svolgere l'analisi elastica è necessario riferirsi alla linea d'asse della volta, il cui raggio non è dato nel modello di Castigliano né è reperibile in altre fonti ove è descritto il ponte, con Grasshopper abbiamo ricostruito la misura di tale raggio in modo da tracciare perpendicolarmente ad esso la direzione dei 7 giunti fittizi che dividono la semiarcata in 6 tronconi aventi lo stesso sviluppo misurato sulla linea media<sup>7</sup>.

La parte sovrastante l'arco è anch'essa suddivisa da ideali giunti verticali tracciati dai punti nei quali i giunti radiali intersecano l'estradosso della volta.

Nelle tabelle qui riportate sono raccolti, per i due modelli geometrici, i valori delle seguenti quantità necessarie al calcolo:

- aree dei 6 tronconi di volta e di carico (e loro somma, anche moltiplicata per il peso specifico di  $2750 \text{ kg/m}^3$  della pietra di Malanaggio) compresi fra il giunto in chiave e tutti i giunti successivi;
- momenti delle suddette aree rispetto al centro dei giunti alla loro destra;
- angoli fra il giunto in chiave e tutti i giunti successivi, con i loro seni e coseni (per Castigliano abbiamo indicato solo i valori dei seni e coseni perché nella sua trattazione gli angoli non sono riportati);
- componenti normali e tangenziali ai giunti dei pesi dei 6 tronconi e bracci della spinta, cioè le distanze verticali fra il centro della chiave e i centri dei giunti successivi.

Il confronto fra i nostri numeri e quelli assunti da Castigliano mostra alcune piccole differenze, dovute al diverso grado di precisione dei due modelli geometrici.<sup>8</sup> Come vedremo, tali differenze danno luogo ad inevitabili piccole discrepanze nei risultati numerici delle analisi.

---

<sup>7</sup> Castigliano considera che questi tronconi siano lunghi 4 m, il che implicherebbe che lo sviluppo fra il centro del giunto in chiave e il centro del giunto alle imposte sia di 24 m. Nel nostro modello ricostruito con Grasshopper i tronconi risultano leggermente più corti di quelli di Castigliano, ma questa differenza non ha influenza sui risultati perché la lunghezza dei tronconi è raccolta fattor comune nell'espressione del lavoro di deformazione calcolato sostituendo gli integrali con sommatorie.

<sup>8</sup> Ad esempio, abbiamo notato che i valori dati da Castigliano per i seni e i coseni degli angoli che i giunti fanno con la verticale non forniscono lo stesso valore dell'angolo quando se ne fa la funzione inversa. Altre approssimazioni sono probabilmente dovute alla determinazione delle aree e dei loro baricentri, e quindi dei bracci nel calcolo dei momenti.

Modello di Castigliano								
Tronchi	volta		carico		volta e carico		volta e carico×2750	
	area	momento	area	momento	area	momento	peso P	momento Pb
Tronco 0-1	5,930	11,92	2,5	4,95	8,430	16,87	23182,5	46392,5
Tronco 0-2	11,958	47,16	5,7	20,46	17,658	67,62	48559,5	185955
Tronco 0-3	18,203	105,67	10,539	50,67	28,742	156,34	79040,5	429935
Tronco 0-4	24,783	187,93	18,046	103,15	42,829	291,08	117779,8	800470
Tronco 0-5	31,816	292,89	28,876	186,49	60,692	479,38	166903,0	1318295
Tronco 0-6	39,400	422,7	43,756	312,55	83,156	735,25	228679,0	2021937,5

Modello di Castigliano								
Angolo	deg	rad	sen	cos	Psin	Pcos	Braccio <i>H</i>	
fra chiave e giunto 1	assente	assente	0,078	0,996	1815	22962	0,15	
fra chiave e giunto 2	assente	assente	0,154	0,988	7480	47987	0,6	
fra chiave e giunto 3	assente	assente	0,23	0,973	18177	76890	1,35	
fra chiave e giunto 4	assente	assente	0,305	0,95	35915	111897	2,4	
fra chiave e giunto 5	assente	assente	0,378	0,925	63085	154385	3,76	
fra chiave e giunto 6	assente	assente	0,447	0,895	102217	204655	5,36	

Modello ricostruito con Grasshopper								
Tronchi	volta		carico		volta e carico		volta e carico×2750	
	area	momento	area	momento	area	momento	peso P	momento Pb
Tronco 0-1	5,965	11,789	2,427	4,670	8,392	16,459	23078,7	45261,0
Tronco 0-2	12,041	47,164	5,546	19,693	17,588	66,857	48365,8	183857,4
Tronco 0-3	18,341	106,153	10,293	49,077	28,634	155,230	78743,2	426883,6
Tronco 0-4	24,974	188,764	17,722	99,886	42,696	288,650	117415,2	793786,2
Tronco 0-5	32,048	294,920	28,525	181,693	60,573	476,613	166574,9	1310684,7
Tronco 0-6	39,667	424,380	43,279	304,283	82,946	728,663	228101,4	2003822,2

Modello ricostruito con Grasshopper								
Angolo	deg	rad	sen	cos	Psin	Pcos	Braccio <i>H</i>	
fra chiave e giunto 1	4,3823	0,0765	0,07641	0,99708	1763	23011	0,151	
fra chiave e giunto 2	8,7646	0,1530	0,15238	0,98832	7370	47801	0,605	
fra chiave e giunto 3	13,1469	0,2295	0,22745	0,97379	17910	76679	1,358	
fra chiave e giunto 4	17,5292	0,3059	0,30119	0,95356	35365	111963	2,406	
fra chiave e giunto 5	21,9115	0,3824	0,37317	0,92776	62161	154542	3,744	
fra chiave e giunto 6	26,2938	0,4589	0,44297	0,89653	101043	204501	5,363	



### 3.2 Impostazione dell'analisi elastica

Per svolgere l'analisi elastica della struttura del ponte, che è simmetrica e simmetricamente caricata, Castigliano considera ovviamente solo una semiarcata (ad es. quella destra). Per la doppia iperstaticità del sistema, egli assume come reazioni iperstatiche la spinta  $H = N_0$  in chiave, applicata nel centro del giunto stesso e con verso di compressione, e il momento in chiave  $M = M_0$ , assunto con verso antiorario (Fig.4).

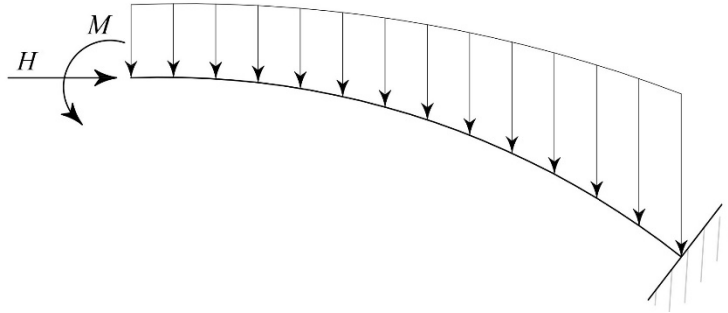


Fig.4. Schema della semiarcata con le due reazioni iperstatiche  $H$  e  $M$  in chiave

Le grandezze in gioco sono, con le nostre notazioni<sup>9</sup>:

- $h_i$  altezza del giunto  $i$ -esimo (con  $i = 0, 6$ )
- $A_i$  area del giunto  $i$ -esimo di profondità unitaria (con  $i = 0, 6$ );
- $J_i = \frac{1}{12} h_i^3$  momento d'inerzia rispetto all'asse baricentrico del giunto  $i$ -esimo (con  $i = 0, 6$ );
- $P_i$  peso della parte di arcata e di carico compresa fra il giunto in chiave e il giunto  $i$ -esimo, delimitata dalla verticale per l'estradosso del giunto  $i$ -esimo (con  $i = 1, 6$ );
- $a_i$  braccio verticale della spinta in chiave rispetto al centro del giunto  $i$ -esimo (con  $i = 1, 6$ );
- $b_i$  braccio orizzontale del peso  $P_i$  rispetto al centro del giunto  $i$ -esimo (con  $i = 1, 6$ )
- $\varphi_i$  angolo formato fra la verticale e la direzione del giunto  $i$ -esimo (con  $i = 1, 6$ )
- $e_i$  eccentricità del punto di applicazione della risultante sul giunto  $i$ -esimo (con  $i = 0, 6$ );

Ciò premesso, le tre caratteristiche di sollecitazione sui giunti prendono l'espressione:

$$N_i = H \cos \varphi_i + P_i \sin \varphi_i \quad \text{forza normale sul giunto } i\text{-esimo (con } i = 0, 6);$$

$$M_i = M_0 - H a_i + P_i b_i \quad \text{momento rispetto al centro del giunto } i\text{-esimo (con } i = 0, 6);$$

$$T_i = H \sin \varphi_i - P_i \cos \varphi_i \quad \text{forza di taglio sul giunto } i\text{-esimo (con } i = 0, 6);$$

Per poter applicare il suo metodo di analisi elastica, Castigliano deve calcolare il lavoro di deformazione compiuto dalle azioni interne. Trascurando il contributo della forza di taglio, il lavoro di deformazione  $L_N$  dovuto alla forza normale e  $L_M$  dovuto al momento flettente si esprimono, tenendo conto che per simmetria occorre raddoppiare il lavoro sulla semiarcata in esame per tener conto dell'altra semiarcata

$$L_N = 2 \frac{1}{2E_s} \int \frac{N(s)}{A(s)} ds \quad (1)$$

$$L_M = 2 \frac{1}{2E_s} \int \frac{M(s)}{J(s)} ds \quad (2)$$

<sup>9</sup> Nelle notazioni qui assunte i giunti sono numerati al contrario rispetto a Castigliano, nel senso che il nostro giunto 0 è la chiave (mentre è l'imposta per Castigliano).

Castigliano approssima l'integrale che esprime il lavoro  $L_N$  col metodo dei trapezi e quello che esprime il lavoro  $L_M$  col metodo più preciso di Cavalieri-Simpson, per cui le loro espressioni divengono, raccogliendo a fattor comune anche la lunghezza costante  $l_t$  dei tratti in cui la semiarcata è stata suddivisa:

$$L_N = 2 \frac{1}{2E_s} \int \frac{N(s)}{A(s)} ds = 2 \frac{l_t}{2E} \left( \frac{1}{2} \frac{N_0^2}{A_0} + \frac{N_1^2}{A_1} + \frac{N_2^2}{A_2} + \frac{N_3^2}{A_3} + \frac{N_4^2}{A_4} + \frac{N_5^2}{A_5} + \frac{1}{2} \frac{N_6^2}{A_6} \right) \quad (3)$$

$$L_M = 2 \frac{1}{2E_s} \int \frac{M(s)}{J(s)} ds = 2 \frac{l_t}{2E} \frac{1}{3} \left( \frac{M_0^2}{J_0} + 4 \frac{M_1^2}{J_1} + 2 \frac{M_2^2}{J_2} + 4 \frac{M_3^2}{J_3} + 2 \frac{M_4^2}{J_4} + 4 \frac{M_5^2}{J_5} + \frac{M_6^2}{J_6} \right) \quad (4)$$

Il lavoro di deformazione totale sull'intera arcata, dato dalla somma  $L_N + L_M$ , è quindi

$$L = 2 \frac{l_t}{2E} \left\{ \left( \frac{1}{2} \frac{N_0^2}{A_0} + \frac{N_1^2}{A_1} + \dots + \frac{N_5^2}{A_5} + \frac{1}{2} \frac{N_6^2}{A_6} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{M_0^2}{J_0} + 4 \frac{M_1^2}{J_1} + \dots + 2 \frac{M_4^2}{J_4} + 4 \frac{M_5^2}{J_5} + \frac{M_6^2}{J_6} \right) \right\} \quad (5)$$

### 3.3. Analisi elastica tenendo conto della presenza dei giunti di malta

La prima delle due analisi di Castigliano prende in considerazione l'effettiva costituzione dell'arcata per come realmente costruita, cioè tiene conto della presenza dei giunti in malta con spessore variabile come riportato nella tabella seguente, pur adottando una schematizzazione semplificata in base alla quale gli 11 giunti a partire dalle due imposte vengono concentrati in un giunto unico alle stesse imposte sommando i vari spessori all'intradosso e all'estradosso, e i giunti dal 37 di destra al 37 di sinistra a cavallo della chiave vengono concentrati in un giunto unico in chiave sommando analogamente i vari spessori.

Per i primi 11 giunti a partire da ogni imposta			Per i giunti dal 37 al 47 a cavallo della chiave		
Giunto	intradosso	estradosso	Giunto	intradosso	estradosso
1	9	3,7	37	0	1
2	8	2,7	38	0	1
3	8	3,4	39	0	2
4	7	3,3	40	0	2
5	7	3,2	41	0	3
6	6	3	42	0	3
7	5	2,4	43	0	4
8	5	2,3	44	0	6
9	4	2	45	0	7
10	3	1,4	46	0	8
11	2	0,9	47	0	8
<b>Totale</b>	<b>64</b>	<b>28,3</b>	<b>Totale</b>	<b>0</b>	<b>45</b>

In sintesi, Castigliano considera per ogni imposta un giunto avente spessore  $a' = 0,0283\text{m}$  all'estradosso e  $a'' = 0,064\text{m}$  all'intradosso, e in chiave per la semiarcata considerata, un semigiunto avente spessore  $a' = 0,0045\text{m}$  all'estradosso e  $a'' = 0$  all'intradosso. Si osservi che, considerando

solo una semiarcata, il lavoro associato al giunto di un'imposta e al semigiunto in chiave va poi raddoppiato per tener conto dell'altra imposta e dell'altro semigiunto in chiave.

Per quantificare il lavoro di deformazione associato a questi cunei, supposti in granito, Castigliano fornisce la seguente relazione<sup>10</sup>

$$\frac{1}{2E} \frac{a+a'}{2} \left( \frac{N_i^2}{A_i} + \frac{M_i^2}{J_i} + \frac{a-a'}{a+a'} \frac{4M_i N_i}{h_i A_i} \right) \quad (6)$$

dove  $N_i$  e  $M_i$  sono la forza normale e il momento flettente sui giunti da considerare, cioè quello di imposta e quello in chiave della semiarcata in esame. Quindi, indicato con  $E$  il modulo elastico della malta, per tener conto della presenza di quest'ultima al posto del granito occorre sottrarre al lavoro di deformazione di una semiarcata, pensata tutta in granito, il lavoro dato dalla precedente formula (6) e sommare quello dato dalla stessa formula con  $E$  al posto di  $E$ , cioè in definitiva occorre sommare il contributo

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{E} - \frac{1}{E} \right) \frac{a+a'}{2} \left( \frac{N_i^2}{A_i} + \frac{M_i^2}{J_i} + \frac{a-a'}{a+a} \frac{4M_i N_i}{h_i A_i} \right) \quad (7)$$

dove i contributi in  $N_i$  e  $M_i$  si riferiscono, ovviamente, solo al giunto 0 e al giunto 6. In questa espressione si ha, per il giunto all'imposta

$$\frac{a+a''}{2} = 0,04615 \quad \text{e} \quad 4 \frac{a-a'}{a+a'} = 1,547 \quad (8a,b)$$

e, per il semigiunto in chiave<sup>11</sup>

$$\frac{a+a''}{2} = 0,0225 \quad \text{e} \quad 4 \frac{a-a'}{a+a'} = -4 \quad (9a,b)$$

È ora opportuno completare la scrittura del lavoro di deformazione che si ottiene sommando la (5) e la (7). Per fare ciò si tratta di inserire nella (5) e nella (7) i valori dei vari parametri geometrici e delle espressioni di  $N_i$  e  $M_i$  in funzione delle iperstatiche  $H$  e  $M$ , e, punto delicato, di “omogeneizzare” i contributi di lavoro stabilendo un rapporto fra il modulo elastico  $E$  del granito e il modulo elastico  $E$  della malta. A quest'ultimo riguardo Castigliano scrive: “Ora, nessuna esperienza attendibile si ha sulla compressibilità del granito e delle malte: siccome però le malte quando sono fresche, come appunto avveniva al ponte Mosca, devono essere molto compressibili, mentre invece il granito è sicuramente pochissimo compressibile, si supporrà qui che la compressibilità della malta adoperata nei giunti del ponte Mosca, fosse, all'epoca del disarmo e della successiva costruzione dei rin fianchi, cento volte maggiore di quella del granito”<sup>12</sup>.

<sup>10</sup> Questa formula (6) è stata dedotta da Castigliano nel suo testo *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications*, A.F.Negro, Turin 1879, p.

<sup>11</sup> In questa analisi su mezza arcata noi stiamo considerando un giunto di malta ad una sola imposta e solo mezzo giunto di malta in chiave, in previsione di moltiplicare per 2 in modo da tener conto dell'altro giunto all'imposta e dell'altro mezzo giunto in chiave, per cui facciamo uso dei coefficienti 0,04615 e 0,0225. Castigliano, al contrario, considera integralmente i giunti di malta sull'intera arcata, per cui usa i coefficienti 0,0923 e 0,045 doppi dei precedenti. Quando successivamente raccoglie a fattor comune il termine  $2(l/2E)$  divide per 2 i coefficienti trovati.

<sup>12</sup> Castigliano A., p.

Castigliano assume quindi<sup>13</sup>

$$\frac{E'}{E} = \frac{1}{100} \quad (11)$$

per cui il fattore  $\left(\frac{1}{E} - \frac{1}{E'}\right)$  nella (7) diviene

$$\frac{1}{E} - \frac{1}{E'} = \frac{100-1}{E} = \frac{99}{E} \quad (12)$$

Con le sostituzioni di cui si è appena detto, la (5) fornisce per l'intera arcata pensata tutta in granito e coi nostri numeri

$$L_{granito} = 2 \frac{4}{2E} (16,34M^2 - 23,00 \ 2MH + 69,95H^2 + 7758940 \ 2M - 23062756 \ 2H) \quad (13a)$$

mentre coi numeri di Castigliano:

$$L_{granito} = 2 \frac{4}{2E} (16,34M^2 - 22,98 \ 2MH + 70,06H^2 + 7818893 \ 2M - 23249885 \cdot 2H) \quad (13b)$$

Con le suddette sostituzioni, la (7) fornisce per il lavoro dei tre cunei di malta al posto di equivalenti cunei in granito, tenendo conto dei nostri numeri e raccogliendo a fattor comune

$$L_{malta} = 2 \frac{4}{2E} (3,67M^2 - 9,35 \ 2MH + 47,27H^2 + 3404295 \ 2M - 1781300 \cdot 2H) \quad (14a)$$

mentre coi suoi numeri Castigliano trova:

$$L_{malta} = 2 \frac{4}{2E} (3,69M^2 - 9,48 \ 2MH + 47,94H^2 + 3486835 \ 2M - 18148625 \cdot 2H) \quad (14b)$$

Infine, sommando la (13a) e la (14a) otteniamo il lavoro totale per l'intera arcata con i tre giunti in malta localizzati alle imposte e in chiave

$$L = 2 \frac{4}{2E} (20,004M^2 - 32,35 \ 2MH + 117,21H^2 + 11163236 \ 2M - 40875757 \cdot 2H) \quad (15a)$$

mentre Castigliano ottiene

$$L = 2 \frac{4}{2E} (20,03M^2 - 32,46 \ 2MH + 118,00H^2 + 11305728 \ 2M - 41398510 \cdot 2H) \quad (15b)$$

Applicando il teorema sulle derivate del lavoro di deformazione sapendo che lo spostamento e la rotazione in chiave sono nulli si ottiene, coi nostri numeri e dividendo per 2, il sistema di equazioni

$$\begin{cases} \frac{dL}{dH} = -32,35M + 117,21H - 40875757 = 0 \\ \frac{dL}{dM} = 20,004M - 32,35H + 11163236 = 0 \end{cases} \quad (16)$$

risolvendo il quale troviamo

$$\begin{cases} H = 351701 \text{ kg} \\ M = 10826 \text{ kgm} \end{cases} \quad (17)$$

e deduciamo il seguente il valore per l'eccentricità della spinta in chiave

$$e_0 = \frac{M}{H} = 0,0308 \text{ m} \quad (18)$$

<sup>13</sup> Nel testo in italiano è scritto, certamente per svista,  $E' / E = 100$ . Nel testo in francese è invece scritta la (11).

Con i numeri di Castigliano, invece, il teorema sulle derivate del lavoro di deformazione fornisce il sistema di equazioni

$$\begin{cases} \frac{dL}{dH} = -32,46M + 118,00H - 41398510 = 0 \\ \frac{dL}{dM} = 20,03M - 32,46H + 11305728 = 0 \end{cases} \quad (19)$$

risolvendo il quale Castigliano trova<sup>14</sup>

$$\begin{cases} H = 352990 \text{ kg} \\ M = 7690 \text{ kgm} \end{cases} \quad (20)$$

e determina il seguente il valore per l'eccentricità della spinta in chiave.

$$e_0 = \frac{M}{H} = 0,0217 \text{ m} \quad (21)$$

Le curve delle pressioni corrispondenti alla nostra soluzione (17) e a quella di Castigliano (20) sono rappresentate qui di seguito in Fig.5 e Fig.6.

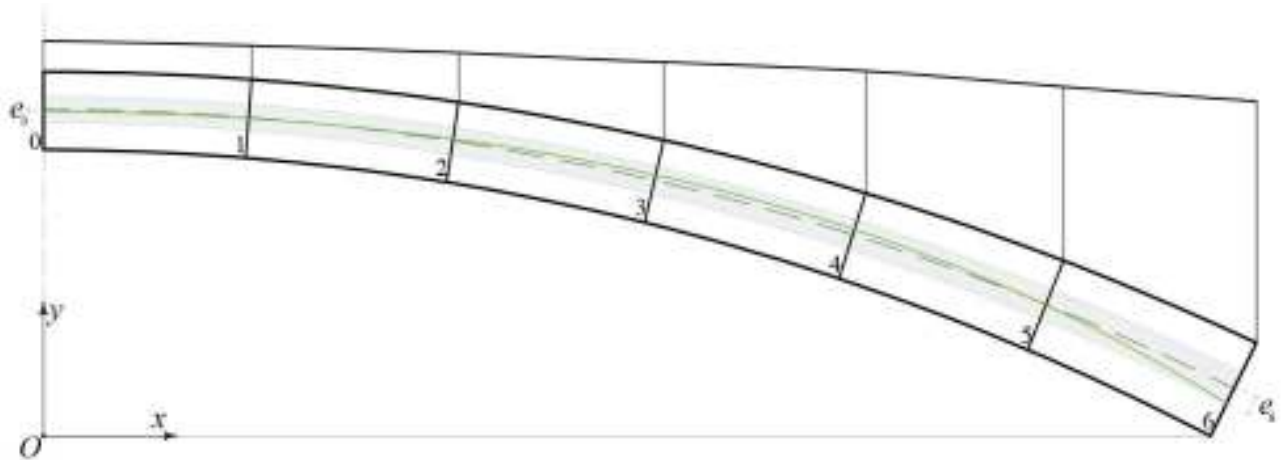


Fig. 5. Curva delle pressioni per la nostra soluzione (17) in presenza dei giunti di malta

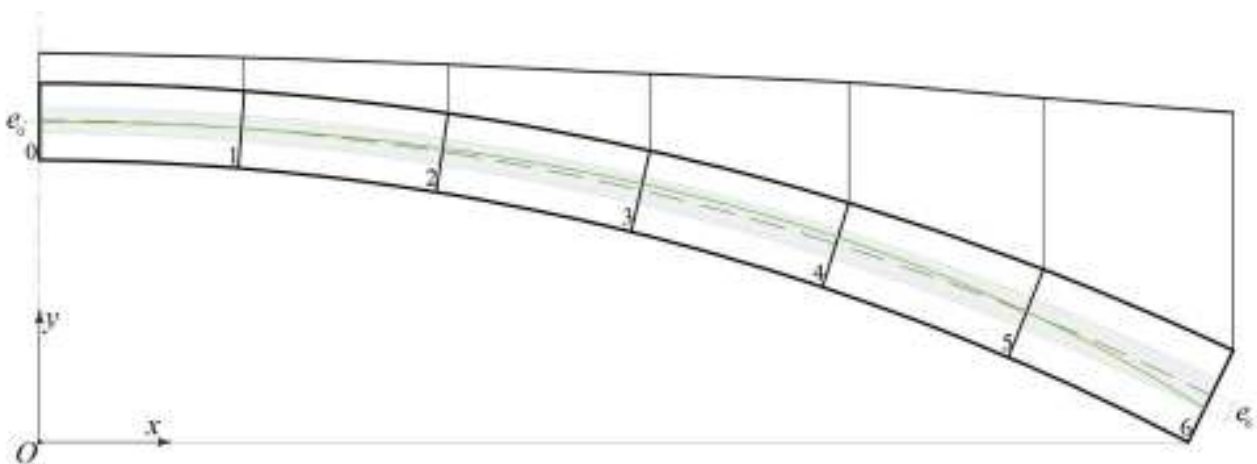


Fig. 6. Curva delle pressioni per la soluzione di Castigliano (20) in presenza dei giunti di malta

<sup>14</sup> Con gli stessi numeri di Castigliano, il sistema delle due equazioni (19) risolto su Excel fornisce la soluzione più precisa con  $H = 352876 \text{ kg}$  e  $M = 7420 \text{ kgm}$



In base alla nostra soluzione (17) e alla soluzione (20) di Castigliano, nelle due Tabelle<sup>15</sup> seguenti riportiamo per tutti i giunti i valori delle sollecitazioni  $M$ ,  $N$ ,  $T$ , delle eccentricità  $e$  comparate con la sesta parte dell'altezza  $h$  dei giunti, e delle tensioni  $\sigma$  all'intradosso e all'estradosso.

Come si vede dall'andamento della curva delle pressioni e dai numeri riportati nelle Tabelle qui sotto, le due soluzioni sono sostanzialmente convergenti e la loro differenza è attribuibile alle piccole discrepanze numeriche dei dati geometrici del modello.

<b>NOI: Caso di volta e carico, con giunti di malta: <math>H=351701,45</math>; <math>M=10826</math></b>							
	$M$	$N$	$T$	$e$	$h/6$	$\sigma_i$	$\sigma_e$
Giunto 0	10826	351701	0	0,0307	0,250	263337	205598
Giunto 1	2790	352437	3863	0,0079	0,252	240743	226060
Giunto 2	-18194	354964	5790	-0,0512	0,258	183571	274447
Giunto 3	-40098	360393	3315	-0,1112	0,270	130791	314139
Giunto 4	-41927	370734	-6033	-0,1130	0,287	130510	300576
Giunto 5	4596	388456	-23296	0,01183	0,308	218033	201920
Giunto 6	128462	416355	-48706	0,3085	0,335	397923	16361

<b>CASTIGLIANO: Caso di volta e carico, con giunti di malta: <math>H=352990</math>; <math>M=7690</math></b>							
	$M$	$N$	$T$	$e$	$h/6$	$\sigma_i$	$\sigma_e$
Giunto 0	7690	352990	0	0,022	0,250	255997	214993
Giunto 1	1135	353385	4571	0,003	0,252	237011	231045
Giunto 2	-18145	356230	6327	-0,051	0,258	<b>275146</b>	<b>184514</b>
Giunto 3	-38895	361627	4296	-0,108	0,270	<b>312155</b>	<b>134305</b>
Giunto 4	-38990	371245	-4237	-0,105	0,287	<b>294915</b>	<b>136765</b>
Giunto 5	-1315	389595	-20955	-0,003	0,308	<b>212905</b>	<b>208305</b>
Giunto 6	137627	418137	-46865	0,329	0,335	412425	3635

Si osservi che i numeri nelle ultime due colonne evidenziati in grassetto nella Tabella di Castigliano, riportati come nel testo originale, vanno invertiti perché a causa del segno delle eccentricità nei giunti da 2 a 5, le tensioni sono maggiori all'estradosso, mentre dalla Tabella risulta il contrario.

Coi nostri numeri, la massima tensione di compressione all'intradosso dell'imposta vale

$$\sigma_6^e = 397923 \text{ kg/m}^2$$

mentre coi numeri di Castigliano vale

$$\sigma_6^e = 412425 \text{ kg/m}^2$$

cioè risulta maggiore del 3,6%.

Rispetto al valore di  $\sigma = 600000 \text{ kg/m}^2$  indicato da Mosca come ammissibile per il granito di Malanaggio, i valori precedentemente calcolati hanno un significativo margine di sicurezza. Al riguardo, Castigliano svolge le seguenti interessanti considerazioni in merito al valore trovato per la massima compressione di  $412425 \text{ kg/m}^2$ , ovvero di  $41,24 \text{ kg/cm}^2$ : “Questa pressione non è certo troppo grande per il granito impiegato nella costruzione del ponte Mosca, ma sarebbe enorme per le malte, alcune delle quali cominciano a schiacciarsi sotto una pressione minore di 40Kgr. Per

<sup>15</sup> In queste Tabelle le forze sono in kg, i momenti in kgm, le lunghezze in m e le tensioni in kg/m<sup>2</sup>.

centimetro quadrato. Tuttavia bisogna qui fare una considerazione importante. Se il disarmo di una vòlta ha luogo dopo che le malte hanno fatto buona presa, esse possono benissimo schiacciarsi sotto la pressione massima sopra determinata, e uscire a poco a poco dai giunti compromettendo così la stabilità della vòlta. Ma se il disarmo ha luogo prima che le malte abbiano fatto buona presa, esse si comprimono bensì maggiormente, ma i grani de sabbia, che le compongono, non possono cadere, perché tenuti insieme dalla calce non ancora indurita. In questo caso la prese delle malte si fa sotto la pressione stessa che esse devono poscia sopportare, ed è quindi evidente che dopo la presa lo schiacciamento non può più aver luogo. Per queste ragioni sembra che le grandi vòlte, nelle quali le massime pressioni per centimetro quadrato sono molto forti, dovrebbero venir disarmate poco tempo dopo la chiusura; mentre invece le vòlte di mediocre o di piccola ampiezza nelle quali le massime pressioni per centimetro quadrato sono sempre una frazione di quelle capaci di produrre lo schiacciamento delle malte, il disarmo potrà farsi anche dopo il rassodamento delle medesime”<sup>16</sup>.

---

<sup>16</sup> Castigliano, pp. 134-135 del testo in italiano.

### 3.4. Analisi elastica senza tener conto dei giunti di malta

La seconda analisi di Castigliano ipotizza che l'arcata del ponte Mosca sia priva dei giunti di malta ed è condotta con lo scopo di valutare quantitativamente, per confronto con l'analisi precedente, l'influenza benefica attribuibile ai giunti di malta.

In questo caso, il lavoro di deformazione è dato, coi nostri numeri, dalla formula (13a) che qui riportiamo

$$L_{granito} = 2 \frac{4}{2E} (16,34M^2 - 23,00 \cdot 2MH + 69,95H^2 + 7758940 \cdot 2M - 23062756 \cdot 2H) \quad (22a)$$

e coi numeri di Castigliano, dalla formula (13b) che qui riportiamo

$$L_{granito} = 2 \frac{4}{2E} (16,34M^2 - 22,98 \cdot 2MH + 70,06H^2 + 7818893 \cdot 2M - 23249885 \cdot 2H) \quad (22b)$$

Le piccolissime differenze ravvisabili nei coefficienti delle due espressioni del lavoro sono al solito attribuibili alle altrettanto piccole differenze numeriche dei due modelli geometrici.

Dal teorema delle derivate del lavoro otteniamo, coi nostri numeri, il seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} \frac{dL}{dH} = -23,00M + 69,94H - 23062756 = 0 \\ \frac{dL}{dM} = 16,33M - 23,00H + 7758940 = 0 \end{cases} \quad (23)$$

risolvendo il quale troviamo

$$\begin{cases} H = 323204 \text{ kg} \\ M = -19804 \text{ kgm} \end{cases} \quad (24)$$

e deduciamo il seguente valore per l'eccentricità in chiave

$$e_0 = \frac{M}{H} = -0,0613 \text{ m} \quad (25)$$

Con i numeri di Castigliano, invece, il teorema delle derivate del lavoro fornisce il seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} \frac{dL}{dH} = -22,98M + 70,06H + 7818893 = 0 \\ \frac{dL}{dM} = 16,34M - 22,98H + 23249885 = 0 \end{cases} \quad (26)$$

risolvendo il quale Castigliano trova

$$\begin{cases} H = 324710 \text{ kg} \\ M = -21800 \text{ kgm} \end{cases} \quad (27)$$

e determina il seguente valore per l'eccentricità della spinta in chiave

$$e_0 = \frac{M}{H} = -0,067 \text{ m} \quad (28)$$

Le curve delle pressioni corrispondenti alla nostra soluzione (24) e a quella di Castigliano (27) sono rappresentate qui di seguito in Fig.7 e Fig.8.

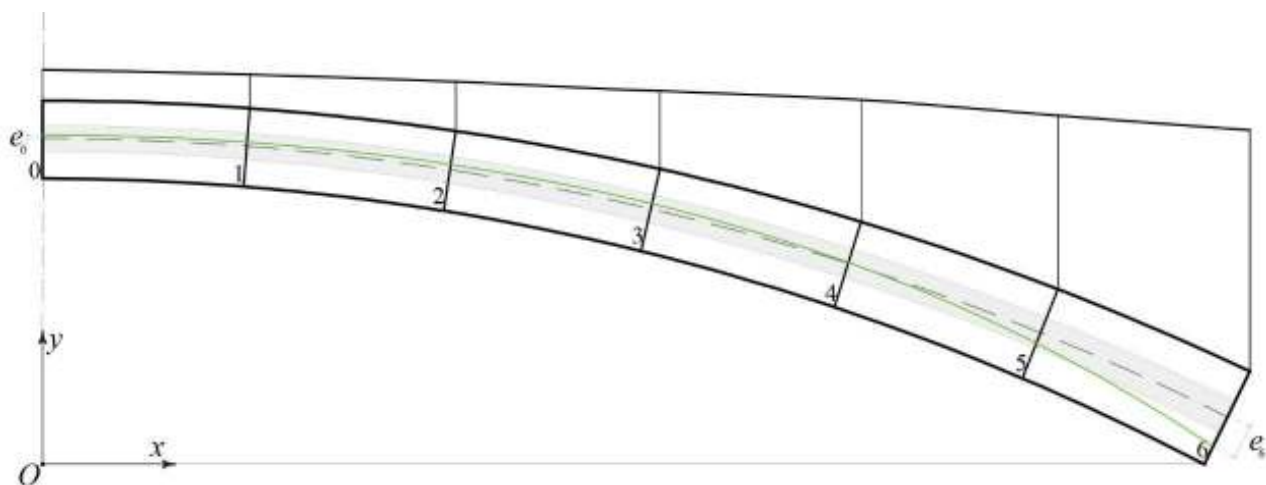


Fig. 7. Curva delle pressioni per la nostra soluzione (24) in assenza dei giunti di malta

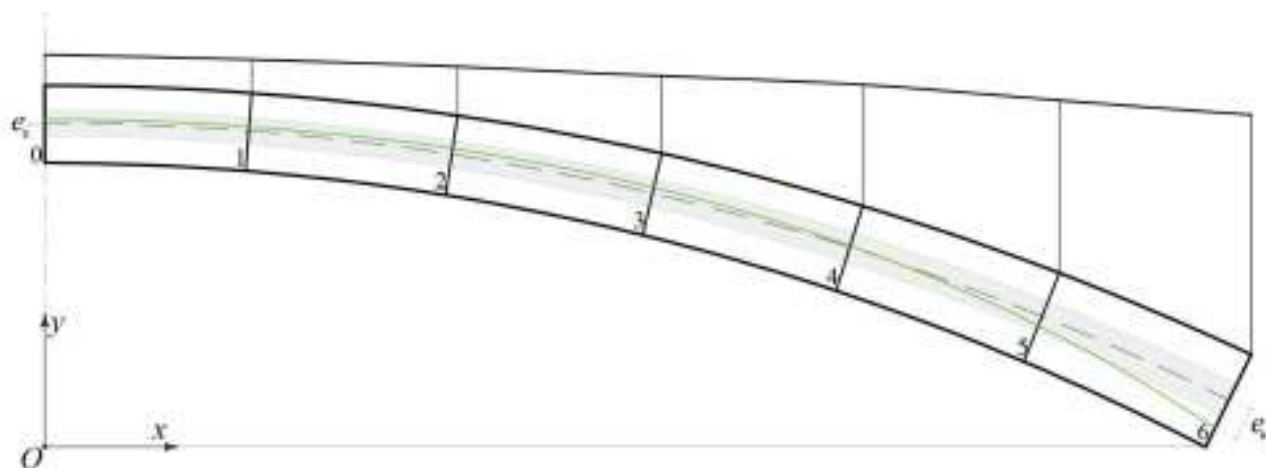


Fig. 8. Curva delle pressioni per la soluzione di Castigliano (27) in assenza dei giunti di malta

Rispetto alla precedente analisi con i giunti di malta, si riconosce che:

- senza i giunti di malta, la curva delle pressioni in chiave parte al di sopra del centro della chiave, mentre era leggermente al di sotto coi giunti di malta;
- senza i giunti di malta, la curva delle pressioni esce al di sotto del terzo medio per buona parte dell'ultimo tronco di volta, ciò che non accadeva invece considerando la loro presenza.

È quindi ragionevole concludere che i giunti di malta operano con beneficio ricentrando la curva delle pressioni all'interno del terzo medio, come peraltro era nelle aspettative dello stesso Mosca. Naturalmente, il risultato ottenuto nell'analisi con i giunti di malta dipende dal valore del rapporto  $E/E' = 100$ , assunto con una certa arbitrarietà da Castigliano, nonché dalla schematizzazione della loro presenza concentrata in soli tre giunti.

Nel successivo paragrafo 3.5 abbiamo ripetuto l'analisi per diversi valori del rapporto  $E/E'$ .

In base alla nostra soluzione (24) e alla soluzione (27) di Castigliano, nelle due Tabelle seguenti riportiamo per tutti i giunti i valori delle sollecitazioni, delle eccentricità comparate con la sesta parte dell'altezza dei giunti, e delle tensioni all'intradosso e all'estradosso.

<b>NOI: Caso di volta e carico, senza giunti di malta: <math>H=323204</math>; <math>M=-19804</math></b>							
	$M$	$N$	$T$	$e$	$h/6$	$\sigma_i$	$\sigma_e$
Giunto 0	-19804	323204	0	-0,0613	0,250	162658	268281
Giunto 1	-23522	324022	1685	-0,0726	0,252	152687	276482
Giunto 2	-31575	326799	1447	-0,0966	0,258	131982	289695
Giunto 3	-32013	332642	-3166	-0,0962	0,270	132145	278525
Giunto 4	-3964	343560	-14616	-0,0115	0,287	191704	207785
Giunto 5	80671	362017	-33930	0,2228	0,308	337110	54260
Giunto 6	250664	390806	-61329	0,6414	0,335	566696	-177834

<b>CASTIGLIANO: Caso di volta e carico, senza giunti di malta: <math>H=324710</math>; <math>M=-21800</math></b>							
	$M$	$N$	$T$	$e$	$h/6$	$\sigma_i$	$\sigma_e$
Giunto 0	-21800	324710	0	-0,067	0,250	assente	assente
Giunto 1	assente	assente	assente	assente	0,252	assente	assente
Giunto 2	assente	assente	assente	assente	0,258	assente	assente
Giunto 3	assente	assente	assente	assente	0,270	assente	assente
Giunto 4	assente	assente	assente	assente	0,287	assente	assente
Giunto 5	assente	assente	assente	assente	0,308	assente	assente
Giunto 6	259691,4	392832,45	-61329	0,66	0,335	assente	assente

Anche in questo caso le due soluzioni sono sostanzialmente convergenti e le loro piccole differenze dipendono dalle discrepanze numeriche fra i dati desumibili dai due modelli geometrici e ad approssimazioni del calcolo manuale condotto da Castigliano<sup>17</sup>

Nella Tabella che raccoglie i nostri valori la tensione all'estradosso dell'imposta ha segno meno (cioè sarebbe di trazione). Ovviamente non può essere così, per cui determiniamo la sezione di imposta effettivamente reagente e di conseguenza la tensione massima all'intradosso utilizzando, in prima approssimazione, la formula del 3u.

In base al valore dell'eccentricità  $e_6 = 0,641$  m da noi trovato si ha:

$$u_6 = \frac{1}{2} h_6 - e_6 = \frac{1}{2} 2,01 - 0,641 = 0,364 \text{ m}$$

$$\sigma_6^e = 2 \frac{N_6}{3u_6 \cdot 1} = 2 \frac{390806}{3 \cdot 0,364 \cdot 1} = 715762 \text{ kg/m}^2$$

In base al valore dell'eccentricità  $e_6 = 0,66$  m trovato da Castigliano si ha:

$$u_6 = \frac{1}{2} h_6 - e_6 = \frac{1}{2} 2,01 - 0,66 = 0,345 \text{ m}$$

$$\sigma_6^e = 2 \frac{N_6}{3u_6 \cdot 1} = 2 \frac{392827}{3 \cdot 0,345 \cdot 1} = 759086 \text{ kg/m}^2$$

con una differenza di circa il 6% in più rispetto al valore da noi trovato, dovuta al valore leggermente maggiore dell'eccentricità.

<sup>17</sup> Anche in questo caso, con gli stessi numeri di Castigliano il sistema delle equazioni (27) risolto su Excel produce la seguente soluzione leggermente diversa e più precisa  $H = 324671$  kg e  $M = -21905$  kgm, con eccentricità  $-0,0674$  m.



Occorre aggiungere che, per determinare l'area effettivamente reagente all'imposta, Castigliano non fa uso della formula del  $3u$ , bensì usa la seguente procedura iterativa, più coerente con la sua analisi. Egli determina inizialmente la posizione dell'asse neutro sul giunto d'imposta supponendo che resista A trazione e, coi suoi dati, trova la distanza  $y = 0,508\text{m}$  dell'asse neutro dall'estradosso, per cui l'altezza della parte compressa risulterebbe  $\frac{1}{2}2,01 + 0,508 = 1,513\text{m}$  e quella parte tesa  $\frac{1}{2}2,01 - 0,508 = 0,497\text{m}$ . Per determinare di quanto si aprirà all'estradosso il giunto di imposta egli suppone che la vera sezione resistente all'imposta sia uguale a quella alla parte compressa, che arrotonda per semplicità a  $1,50\text{m}$  a partire dall'intradosso. Ora, mentre per i giunti dalla chiave al penultimo l'altezza "apparente" è uguale a quella "resistente" perché la curva delle pressioni non esce dal terzo medio, nel giunto d'imposta cambia l'altezza, che diventa di  $1,50\text{m}$ , cambia il suo centro (che viene a trovarsi a  $0,75\text{m}$  dall'intradosso) e quindi cambiano i bracci della spinta e dei pesi e il momento rispetto a tale nuovo centro. Parimenti, cambiano la forza normale e la forza di taglio perché nell'ultimo tratto di volta cambia la linea d'asse e quindi l'angolo che la tangente al nuovo asse fa con la verticale, nonché l'area e il momento d'inerzia. In sostanza, tenendo conto di questi cambiamenti, riscrive le espressioni del momento, della forza normale e della forza di taglio sul giunto d'imposta, ricalcola il lavoro di deformazione dalle cui derivate poste uguali a zero trova la nuova soluzione  $H = 333960\text{kg}$  e  $M = -11120\text{kgm}$ . Inseriti questi valori nelle formule del momento e della normale all'imposta, egli calcola la nuova eccentricità, che risulta di  $0,30\text{m}$  verso l'intradosso, maggiore di  $\frac{1}{2}1,50 = 0,25\text{m}$ , per cui si avrebbero ancora trazioni all'estradosso. Ripetendo quindi la procedura, egli calcola la nuova posizione dell'asse neutro e trova  $y = 0,62\text{m}$  dall'estradosso e le altezze della parte premuta  $\frac{1}{2}1,50 + 0,62 = 1,37\text{m}$  e della parte tesa  $\frac{1}{2}1,50 - 0,62 = 0,13\text{m}$ . Accontentandosi di questo grado di approssimazione, egli considera l'altezza reagente all'imposta di  $1,37\text{m}$  e conclude che la volta si aprirà quindi di un'altezza di  $2,01 - 1,37 = 0,64\text{m}$ .

Come ultimo affinamento del calcolo dell'altezza effettivamente reagente, Castigliano osserva che, detta  $1,37 - x$  la vera altezza premuta, si può dire che nel primo calcolo con altezza  $2,01$  maggiore della vera di  $0,64 + x$  si è trovata l'altezza di  $1,513\text{m}$ , maggiore della vera di  $0,143\text{m}$ ; con altezza di  $1,50\text{m}$ , maggiore della vera di  $0,13 + x$ , si è trovato l'errore  $x$ ; allora si può stabilire la proporzione  $0,64 + x : 0,143 + x = 0,13 + x : x$ , da cui  $x = 0,042\text{m}$ , per cui l'altezza reagente risulterebbe  $1,37 - 0,042 = 1,328\text{m}$  e l'altezza di apertura verso l'estradosso  $2,01 - 1,328 = 0,682\text{m}$ .

Infine, la tensione massima all'intradosso sarebbe

$$\sigma_6^e = 2 \frac{N_6}{3u_6 \cdot 1} = 2 \frac{403832}{1,328} = 608200 \text{ kg/m}^2 = 60,82 \text{ kg/cm}^2$$

A conclusione delle sue due analisi, Castigliano scrive: "Siccome tale pressione non sarebbe eccessiva pel granito del Malanaggio impiegato nella costruzione della vòlta, vedesi che questa avrebbe potuto essere costrutta con sufficiente solidità anche senza ricorrere alle disposizioni speciali immaginate dal celebre costruttore Ingegnere Carlo Mosca. Però dal confronto dei risultati ottenuti appare manifesto quanto siano state utili tali disposizioni per la stabilità del ponte, giacché esse hanno

ridotto a Kgr. 41,24 per centimetro quadrato la massima pressione, la quale altrimenti sarebbe riuscita di Kgr. 60,82”<sup>18</sup>.

Osserviamo che rispetto all’applicazione della formula del  $3u$  fatta in precedenza considerando i numeri di Castigliano per l’eccentricità  $e_6 = 0,66\text{ m}$  e trovando quindi un’altezza reagente eguale a  $3u_6 = 1,035\text{ m}$  e una tensione massima di compressione pari a  $\sigma_6^e = 759086\text{ kg/m}^2$ , la procedura iterativa adottata da Castigliano è più conservativa perché fornisce un’altezza reagente di  $1,328\text{ m}$  una tensione massima di compressione pari a  $\sigma_6^e = 608200\text{ kg/m}^2$ .

I risultati sinora esposti, al di là delle piccole differenze già riconosciute come conseguenza di approssimazioni diverse per i due modelli geometrici, sono stati trovati per il solo complesso volta-carico e per due valori del rapporto fra i moduli elastici del granito e della malta, ossia  $E/E' = 100$  e  $E/E' = 1$  (caso corrispondente all’assenza di malta).

Inoltre, seguendo la trattazione di Castigliano, abbiamo dato per scontato che le imposte non subiscano cedimenti traslazionali o rotazionali.

Ci proponiamo qui di seguito di quantificare come cambiano i risultati dell’analisi elastica al variare del rapporto  $E/E'$  sia per il complesso volta-carico sia per la sola volta e di stimare quanto la soluzione elastica è sensibile all’effetto di cedimenti alle imposte (supposti simmetrici in modo da considerare solo metà sistema).

### 3.5. Influenza del rapporto fra i moduli elastici di pietra e malta

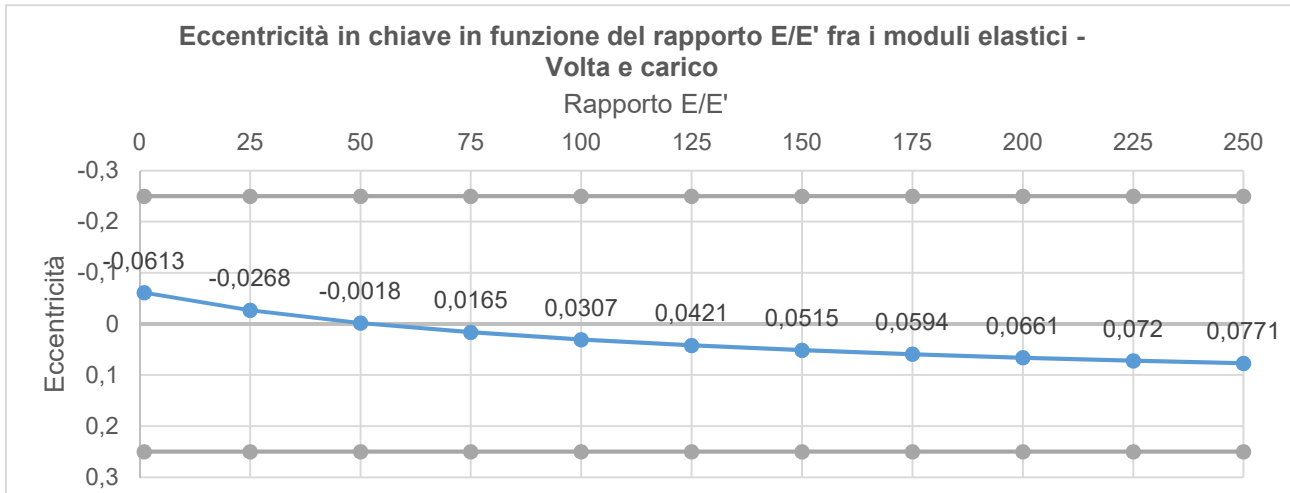
Come si è visto, nella sua analisi elastica in presenza dei giunti di malta Castigliano assume un rapporto fra i moduli elastici di granito e malta eguale 100. Poiché è evidente che la soluzione dell’analisi è fortemente influenzata dal valore di tale rapporto, abbiamo costruito le seguenti Tabelle nelle quali sono riportati nella punteggiata in azzurro i valori delle eccentricità sui giunti in chiave e all’imposta al variare del rapporto fra i moduli da 1 (caso senza malta) a 250, con passo di 25 e nelle due rette in grigio gli estremi inferiore e superiore del terzo medio nei giunti suddetti.

Le Tabelle sono state calcolate sia per il complesso di volta e carico, che è l’unico analizzato da Castigliano e solo per due valori del rapporto fra i moduli, ossia  $E/E' = 100$  e  $E/E' = 1$ , sia per la sola volta. L’analisi di questa seconda circostanza, anche se evidentemente momentanea, può essere interessante per giudicare la soluzione elastica in assenza del carico successivamente portato e per valutare l’influenza che i giunti in malta possono aver avuto prima che il resto dell’opera fosse completato.

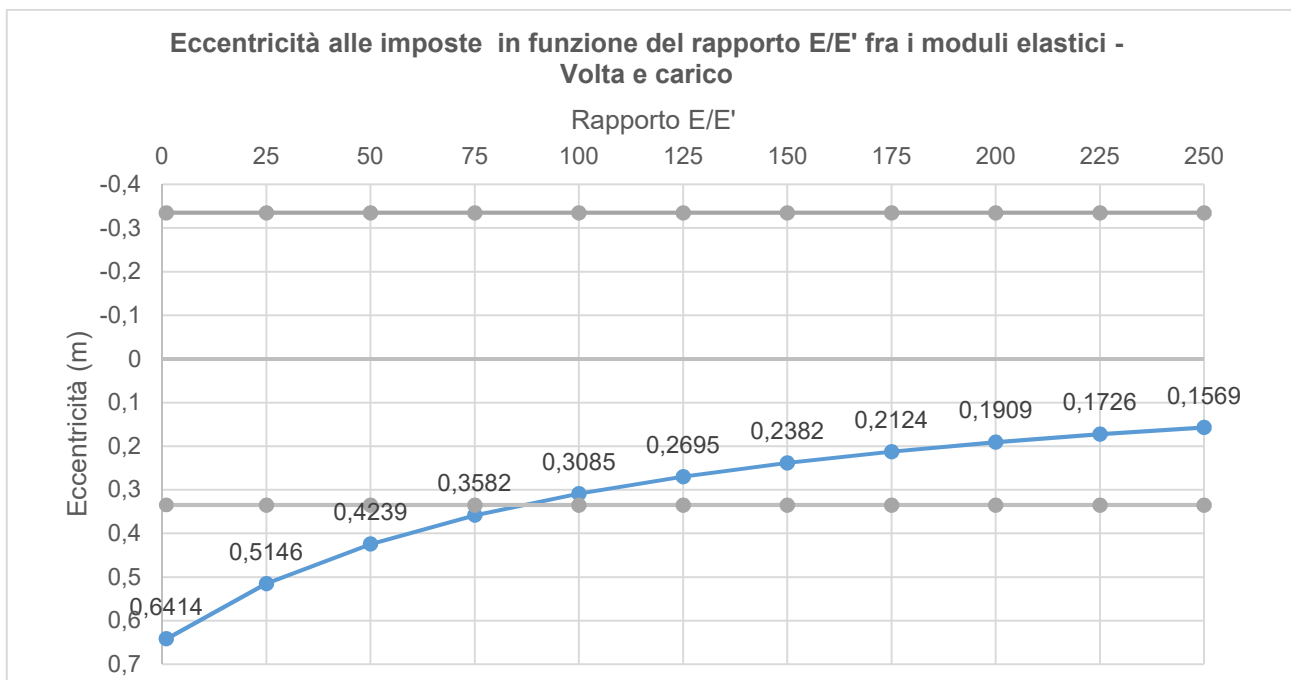
---

<sup>18</sup> Benvenuto E., Nascé V. (a cura di), *Alberto Castigliano. Selecta 1984*, Editrice Levrotto Bella, Torino 1984, p.332, corrispondente alla p.140 della versione italiana.

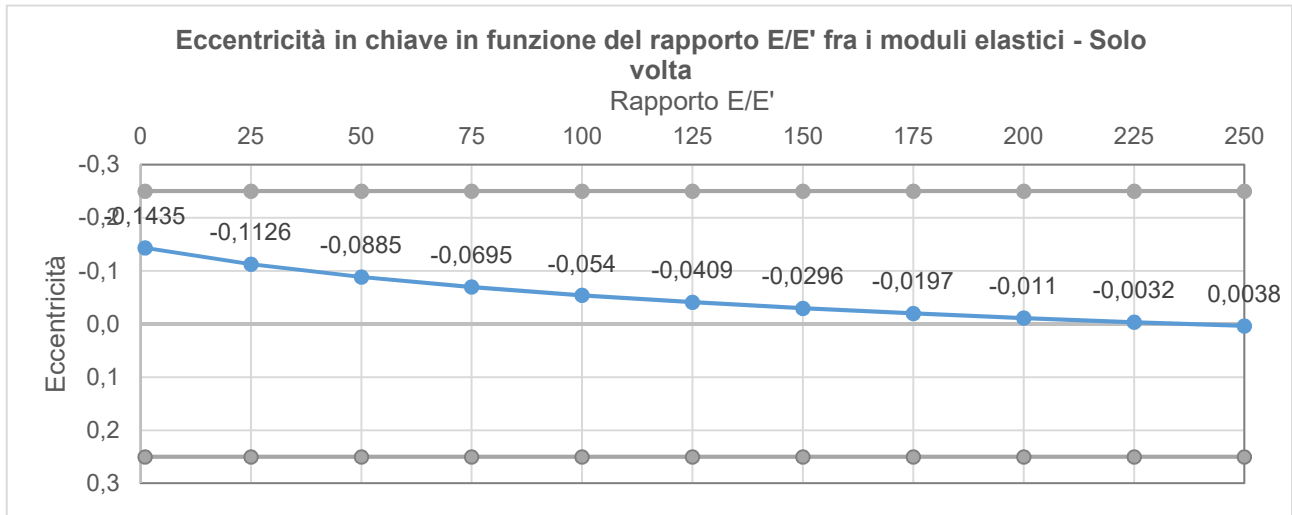
- *Eccentricità in chiave per il complesso di volta e carico*: tenendo conto del valore degli spessori del semigiunto di malta in chiave, e cioè  $a' = 0,0045\text{m}$  all'estradosso e  $a'' = 0$  all'intradosso, si comprende che al crescere della deformabilità della malta (cioè al crescere del rapporto  $E/E'$ ), il punto di applicazione della spinta, posto sensibilmente al di sopra del centro della chiave per  $E/E' = 1$  (caso di assenza di malta), va rapidamente centrandosi al crescere di  $E/E'$  per poi allontanarsi più gradualmente dal centro della chiave, mantenendosi sempre nei limiti del terzo medio.



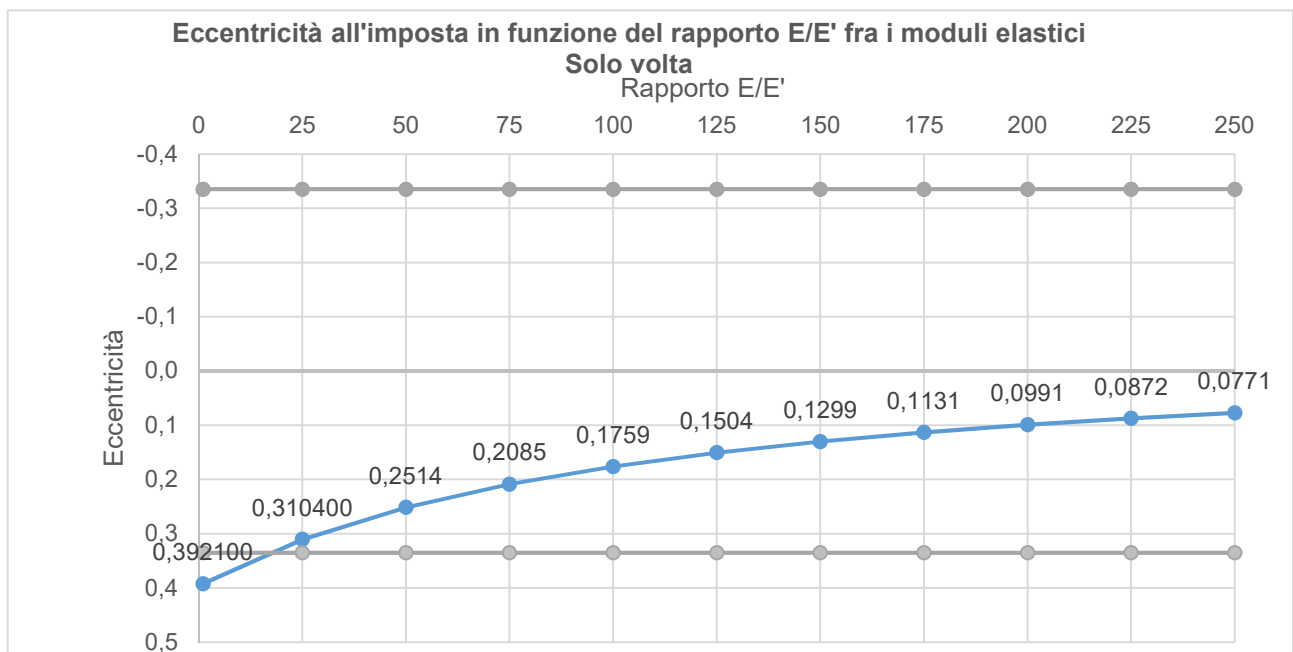
- *Eccentricità all'imposta per il complesso di volta e carico*: tenendo conto del valore degli spessori del giunto di malta all'imposta, ossia  $a' = 0,0283\text{m}$  e all'estradosso e  $a'' = 0,064\text{m}$  all'intradosso, si riconosce anche in questo caso che al crescere della deformabilità della malta (cioè al crescere del rapporto  $E/E'$ ), il punto di applicazione della risultante, posto sotto il terzo medio inferiore per  $E/E' = 1$  (caso di assenza di malta), va rapidamente rientrando nel terzo medio per  $E/E' \approx 85$  avvicinandosi gradualmente verso il centro rimanendo sempre sotto di esso. Il beneficio del giunto di malta con spessore decrescente dall'intradosso all'estradosso si rivela quindi particolarmente significativo, a conferma della scelta adottata dal progettista.



- *Eccentricità in chiave per la sola volta*: anche in questo caso, il punto di applicazione della spinta, posto sensibilmente al di sopra del centro della chiave per  $E / E' = 1$ , va gradualmente centrandosi al crescere di  $E / E'$  rimanendo sopra il centro fin quasi al valore 225, per poi passare al di sotto secondo la tendenza già riconosciuta nel caso del complesso volta-carico.



*Eccentricità all'imposta per la sola volta*: anche in questo caso, il punto di applicazione della risultante, posto sotto il terzo medio inferiore per  $E / E' = 1$ , va rapidamente rientrando nel terzo medio per  $E / E' \approx 20$  avvicinandosi gradualmente verso il centro rimanendo sempre sotto di esso.



In sintesi, tanto per il complesso volta-carico quanto per la sola volta, i giunti di malta con spessori variabili nel modo sopra indicato, portano la curva delle pressioni ad avvicinarsi all'asse dell'arco tanto più quanto la malta è deformabile rispetto al granito. Ciò produce, è vero, un aumento della spinta, ma allo stesso tempo riduce l'eccentricità sul giunto d'imposta sino ad evitarne la parzializzazione e diminuisce conseguentemente il valore delle tensioni massime di compressione.

Nelle 10 Tabelle<sup>19</sup> seguenti sono raccolti per tutti i giunti i valori delle sollecitazioni,  $M$ ,  $N$ ,  $T$ , delle eccentricità  $e$  comparate con la sesta parte dell'altezza  $h$  dei giunti, e delle tensioni  $\sigma$  all'intradosso e all'estradosso al variare del rapporto  $E / E'$  da 25 a 250, con passo 25.

<b>Volta e carico, con giunti di malta: <math>E/E'=25</math>; <math>H=333570</math>; <math>M=-8949</math></b>							
	$M$	$N$	$T$	$e$	$h/6$	$\sigma_i$	$\sigma_e$
Giunto 0	-8949	333570	0	-0,026828	0,250	198516	246245
Giunto 1	-14238	334358	2477	-0,042582	0,252	183963	258895
Giunto 2	-26995	337045	3027	-0,080093	0,258	150031	284865
Giunto 3	-35241	342737	-809	-0,102822	0,270	130997	292136
Giunto 4	-18060	353445	-11494	-0,051098	0,287	168863	242120
Giunto 5	52711	371635	-30062	0,141836	0,308	293292	108475
Giunto 6	205926	400100	-56738	0,514686	0,335	504878	-106768

<b>Volta e carico, con giunti di malta: <math>E/E'=50</math>; <math>H=341336</math>; <math>M=-636</math></b>							
	$M$	$N$	$T$	$e$	$h/6$	$\sigma_i$	$\sigma_e$
Giunto 0	-636	341336	0	-0,001862	0,250	225863	229252
Giunto 1	-7101	342102	3071	-0,020757	0,252	207871	245243
Giunto 2	-23382	344720	4210	-0,067828	0,258	164007	280793
Giunto 3	-37478	350300	957	-0,106988	0,270	130551	301917
Giunto 4	-28439	360850	-9155	-0,078811	0,287	152119	267474
Giunto 5	31947	378840	-27164	0,084327	0,308	260784	148773
Giunto 6	172591	407063	-53297	0,423992	0,335	458836	-53798

<b>Volta e carico, con giunti di malta: <math>E/E'=75</math>; <math>H=347163</math>; <math>M=5745</math></b>							
	$M$	$N$	$T$	$e$	$h/6$	$\sigma_i$	$\sigma_e$
Giunto 0	5745	347163	347163	0,016548	0,250	246761	216123
Giunto 1	-1604	347911	347911	-0,004609	0,252	226185	234625
Giunto 2	-20528	350479	350479	-0,058572	0,258	174848	277383
Giunto 3	-39014	355974	355974	-0,109597	0,270	130543	308931
Giunto 4	-36084	366406	366406	-0,098480	0,287	139844	286209
Giunto 5	16509	384246	384246	0,042964	0,308	236642	178759
Giunto 6	147722	412287	412287	0,358299	0,335	424501	-14266

<b>Volta e carico, con giunti di malta: <math>E/E'=100</math>; <math>H=351701</math>; <math>M=10826</math></b>							
	$M$	$N$	$T$	$e$	$h/6$	$\sigma_i$	$\sigma_e$
Giunto 0	10826	351701	0	0,0307	0,250	263337	205598
Giunto 1	2790	352437	3863	0,0079	0,252	240743	226060
Giunto 2	-18194	354964	5790	-0,0512	0,258	183571	274447
Giunto 3	-40098	360393	3315	-0,1112	0,270	130791	314139
Giunto 4	-41927	370734	-6033	-0,1130	0,287	130510	300576
Giunto 5	4596	388456	-23296	0,01183	0,308	218033	201920
Giunto 6	128462	416355	-48706	0,3085	0,335	397923	16361

<sup>19</sup> Si ricorda che le forze sono in kg, i momenti in kgm, le lunghezze in m e le tensioni in kg/m<sup>2</sup>. L'eventuale segno negativo nei valori indica trazione e conseguente parzializzazione del giunto



Volta e carico, con giunti di malta: $E/E'=125$ ; $H=355340$ ; $M=14989$							
	$M$	$N$	$T$	$e$	$h/6$	$\sigma_i$	$\sigma_e$
Giunto 0	14989	355340	0	0,042181	0,250	276863	196924
Giunto 1	6401	356065	4141	0,017977	0,252	252648	218960
Giunto 2	-16234	358560	6344	-0,045275	0,258	190787	271872
Giunto 3	-40879	363937	4142	-0,112324	0,270	131194	318111
Giunto 4	-46522	374204	-4937	-0,124323	0,287	123208	311913
Giunto 5	-4866	391832	-21938	-0,012418	0,308	203271	220331
Giunto 6	113112	419618	-47094	0,269559	0,335	376749	40781

Volta e carico, con giunti di malta: $E/E'=150$ ; $H=358324$ ; $M=18475$							
	$M$	$N$	$T$	$e$	$h/6$	$\sigma_i$	$\sigma_e$
Giunto 0	18475	358324	0	0,051559	0,250	288149	189616
Giunto 1	9435	359040	4369	0,026279	0,252	262603	212947
Giunto 2	-14554	361510	6799	-0,040258	0,258	196885	269579
Giunto 3	-41447	366843	4821	-0,112983	0,270	131689	321204
Giunto 4	-50219	377050	-4038	-0,133190	0,287	117364	321065
Giunto 5	-12554	394601	-20824	-0,031815	0,308	191289	235307
Giunto 6	100593	422293	-45772	0,238206	0,335	359487	60705

Volta e carico, con giunti di malta: $E/E'=175$ ; $H=360818$ ; $M=21447$							
	$M$	$N$	$T$	$e$	$h/6$	$\sigma_i$	$\sigma_e$
Giunto 0	21447	360818	0	0,059441	0,250	297739	183352
Giunto 1	12030	361527	4559	0,033275	0,252	271078	207766
Giunto 2	-13091	363975	7179	-0,035966	0,258	202129	267516
Giunto 3	-41863	369271	5388	-0,113365	0,270	132237	323653
Giunto 4	-53250	379428	-3287	-0,140342	0,287	112601	328594
Giunto 5	-18920	396915	-19894	-0,047668	0,308	181379	247718
Giunto 6	90190	424529	-44667	0,212447	0,335	345151	77266

Volta e carico, con giunti di malta: $E/E'=200$ ; $H=362935$ ; $M=24019$							
	$M$	$N$	$T$	$e$	$h/6$	$\sigma_i$	$\sigma_e$
Giunto 0	24019	362935	0	0,066180	0,250	306007	177906
Giunto 1	14281	363637	4721	0,039271	0,252	278398	203241
Giunto 2	-11800	366067	7501	-0,032236	0,258	206702	265642
Giunto 3	-42166	371332	5870	-0,113555	0,270	132815	325620
Giunto 4	-55772	381446	-2650	-0,146213	0,287	108658	334884
Giunto 5	-24274	398878	-19104	-0,060855	0,308	173055	258165
Giunto 6	81410	426427	-43730	0,190913	0,335	333056	91249

<b>Volta e carico, con giunti di malta: <math>E/E'=225</math>; <math>H=364754</math>; <math>M=26271</math></b>							
	$M$	$N$	$T$	$e$	$h/6$	$\sigma_i$	$\sigma_e$
Giunto 0	26271	364755	0	0,072024	0,250	313226	173114
Giunto 1	16257	365452	4860	0,044484	0,252	284800	199242
Giunto 2	-10650	367865	7778	-0,028951	0,258	210735	263929
Giunto 3	-42387	373104	6284	-0,113606	0,270	133405	327218
Giunto 4	-57901	383181	-2101	-0,151105	0,287	105350	340209
Giunto 5	-28836	400567	-18425	-0,071988	0,308	165970	267075
Giunto 6	73903	428058	-42924	0,172647	0,335	322718	103210

<b>Volta e carico, con giunti di malta: <math>E/E'=250</math>; <math>H=366337</math>; <math>M=28263</math></b>							
	$M$	$N$	$T$	$e$	$h/6$	$\sigma_i$	$\sigma_e$
Giunto 0	28263	366337	0	0,077151	0,250	319593	168856
Giunto 1	18009	367029	4981	0,049068	0,252	290456	195675
Giunto 2	-9615	369429	8020	-0,026027	0,258	214328	262354
Giunto 3	-42544	374645	6644	-0,113558	0,270	133997	328528
Giunto 4	-59716	384690	-1625	-0,155232	0,287	102545	344769
Giunto 5	-32767	402034	-17834	-0,081504	0,308	159871	274761
Giunto 6	67411	429476	-42223	0,156960	0,335	313782	113557

### 3.6. Influenza di cedimenti alle imposte

Oltre che dal rapporto fra i moduli elastici del granito e della malta (e anche dalla variazione dello spessore dei giunti), la soluzione elastica risulta inevitabilmente influenzata anche dalla presenza di eventuali cedimenti che potrebbero subire le imposte, soprattutto al momento della messa in forza della volta conseguente al disarmo.

Per quanto dai rendiconti storici sull'esito del calo delle centine non risultino essersi verificati cedimenti, può essere interessante valutare in che termini essi possano modificare le eccentricità trovate nelle analisi precedenti.

A tal fine, consideriamo nuovamente la semiarcata destra incastrata nella sezione d'imposta e soggetta in chiave alle reazioni iperstatiche  $H = X_1$  e  $M = X_2$  prese, al solito, col verso assunto da Castigliano e rappresentato in Fig. Supponiamo che il centro dell'imposta subisca un cedimento orizzontale  $u$  verso l'esterno (quindi concorde col verso della reazione  $H = X_1$ ) e che il giunto d'imposta subisca una rotazione  $\theta$  antioraria (quindi concorde col verso della reazione  $M = X_2$ ).

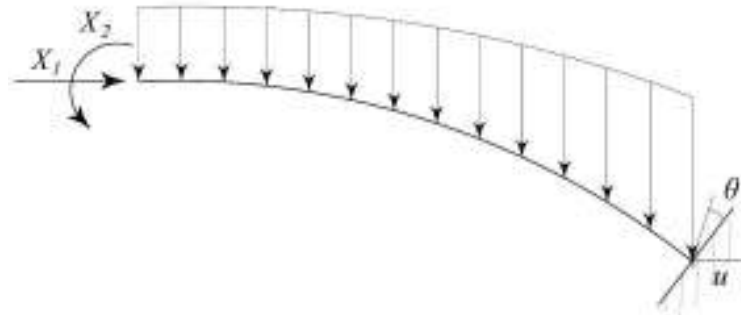


Fig.9. Schema per la risoluzione del sistema due volte iperstatico

Come noto, le equazioni di congruenza di Müller-Breslau diventano, in presenza dei cedimenti e tenendo conto che in chiave sono nulli sia lo spostamento del suo centro sia la rotazione del giunto:

$$\begin{cases} \eta_1 = \eta_{10} + \eta_{11}X_1 + \eta_{12}X_2 + \eta_{1\delta} = 0 \\ \eta_2 = \eta_{20} + \eta_{21}X_1 + \eta_{22}X_2 + \eta_{2\delta} = 0 \end{cases}$$

I primi tre termini in ciascuna di queste equazioni sono gli stessi dedotti dalle derivate del lavoro di deformazione. I restanti coefficienti di  $\eta_{1\delta}$  e  $\eta_{2\delta}$  sono i contributi aggiuntivi dovuti ai cedimenti. Ora, a causa dei segni attribuiti ai cedimenti prima introdotti e del conseguente moto rigido che subisce la semiarcata, i coefficienti  $\eta_{1\delta}$  e  $\eta_{2\delta}$ , che rappresentano rispettivamente lo spostamento del punto di applicazione di  $X_1$ , nella sua direzione e nel suo verso, e la rotazione della sezione di applicazione di  $X_2$ , nella sua direzione e nel suo verso, hanno le seguenti espressioni:

$$\eta_{1\delta} = u - \theta a_6$$

$$\eta_{2\delta} = \theta$$

dove  $a_6 = 5,363$  m è la distanza verticale fra il centro del giunto in chiave e il centro del giunto di imposta.

Per poter quantificare correttamente il valore dei coefficienti  $\eta_{1\delta}$  e  $\eta_{2\delta}$  tenendo fermo il valore degli altri coefficienti già determinati nelle derivate del lavoro di deformazione, occorre ricordare che nell'espressione del lavoro è stato raccolto a fattor comune il termine

$$2 \frac{l_t}{2E}$$

dove  $l_t = 4\text{m}$  è la lunghezza di ciascun tronco in cui è stata suddivisa la semiarcata per il calcolo approssimato degli integrali. Pertanto, ciascuno dei coefficienti  $\eta_{1\delta}$  e  $\eta_{2\delta}$  deve essere moltiplicato per l'inverso del termine prima scritto, ciò che richiede di fissare un valore del modulo elastico  $E$  del granito di cui è fatta l'arcata. Un valore attendibile per il modulo elastico  $E$  reperibile in letteratura è

$$E = 200.000 \text{ kg/cm}^2 = 2.000.000.000 \text{ kg/m}^2$$

per cui il fattore col quale vanno moltiplicati  $\eta_{1\delta}$  e  $\eta_{2\delta}$  risulta

$$\frac{2E}{2l_t} = 500.000.000$$

Tale numero va ulteriormente diviso per 2 perché i coefficienti nel nostro sistema di equazioni (16), nel caso di presenza dei giunti di malta, e (23) nel caso di assenza dei giunti di malta, sono ottenuti raccogliendo il fattore 2. In sintesi, tenendo conto dei cedimenti il sistema di equazioni (16) diventa:

$$\frac{dL}{dH} = -32,35M + 117,21H - 40875757 + 250000000 \quad \eta_{1\delta} = 0$$

$$\frac{dL}{dM} = 20,004M - 32,35H + 11163236 + 250000000 \quad \eta_{2\delta} = 0$$

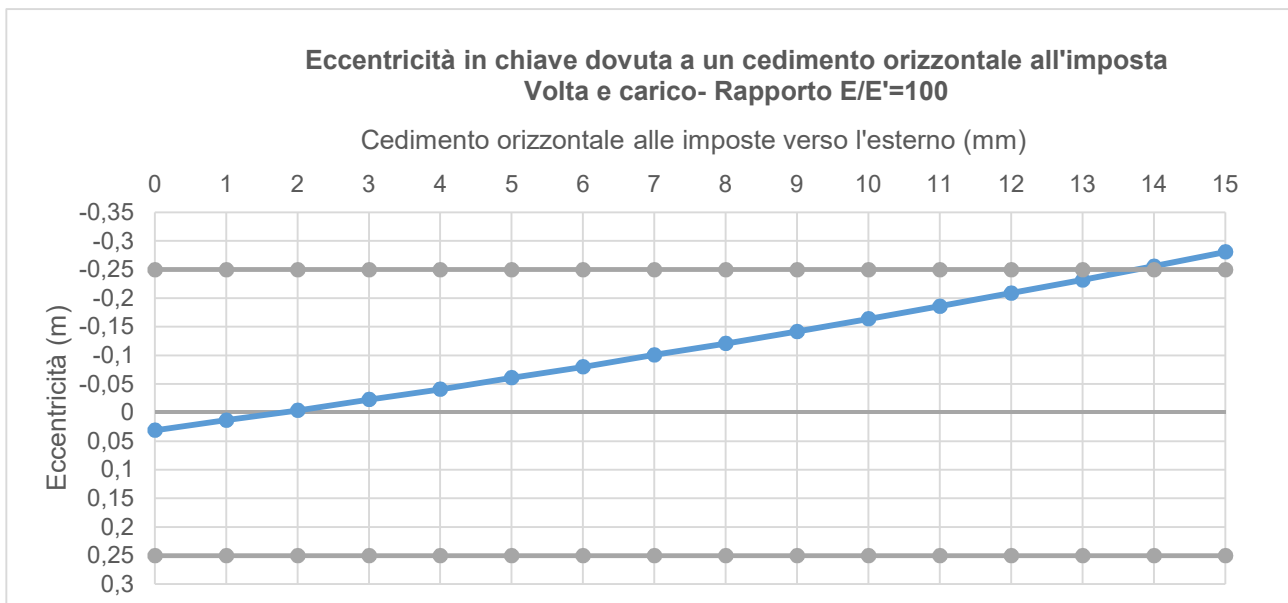
e il sistema di equazioni (23) diventa:

$$\frac{dL}{dH} = -23,00M + 69,94H - 23062756 + 250000000 \quad \eta_{1\delta} = 0$$

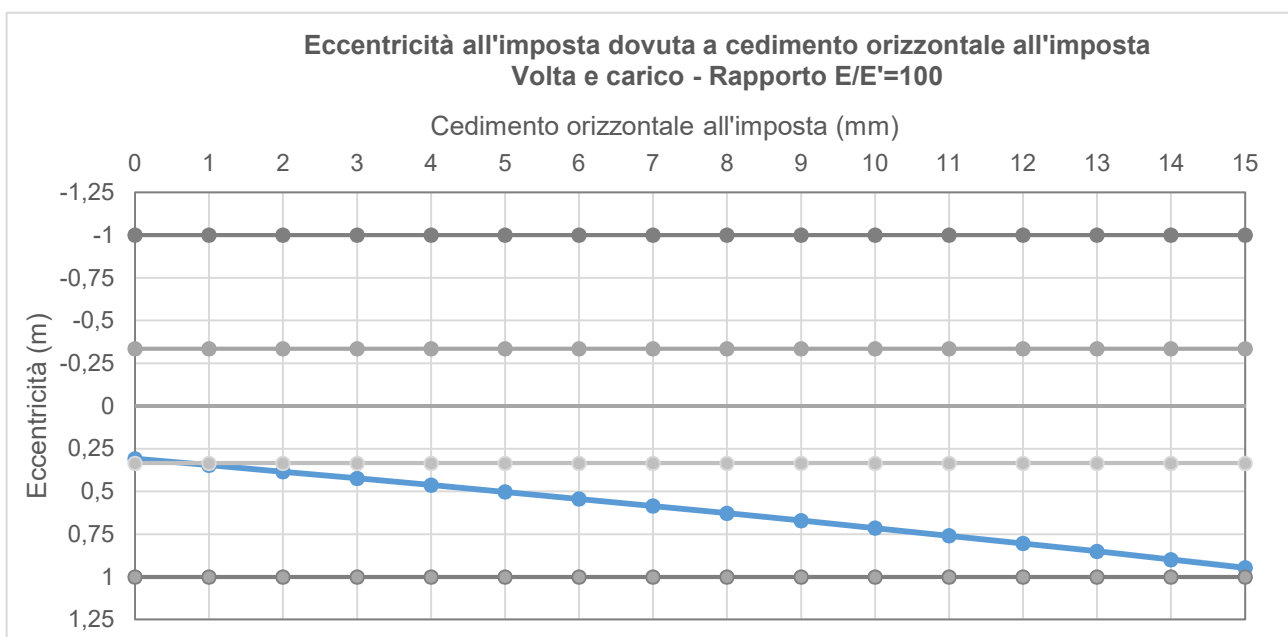
$$\frac{dL}{dM} = 16,33M - 23,00H + 7758940 + 250000000 \quad \eta_{2\delta} = 0$$

*Cedimento orizzontale  $u$  del centro dell'imposta, verso l'esterno.* Le Tabelle che seguono riportano, per il complesso volta-arco e per il rapporto  $E/E' = 100$  assunto da Castigliano, i valori dell'eccentricità in chiave e all'imposta rappresentati dalle punteggiate in azzurro al crescere del cedimento orizzontale  $u$  (in mm) del centro dell'imposta verso l'esterno, con passo di 1mm. In grigio chiaro sono indicate le due rette che definiscono gli estremi del terzo medio, in grigio scuro le rette che definiscono le semialtezze del giunto d'imposta.

In chiave, il punto di applicazione della spinta in assenza di cedimenti si trova dentro al terzo medio, poco sotto il centro del giunto; al crescere del cedimento, esso si sposta rapidamente verso l'alto e per  $u = 14$  mm fuoriesce dall'estremo superiore del terzo medio.

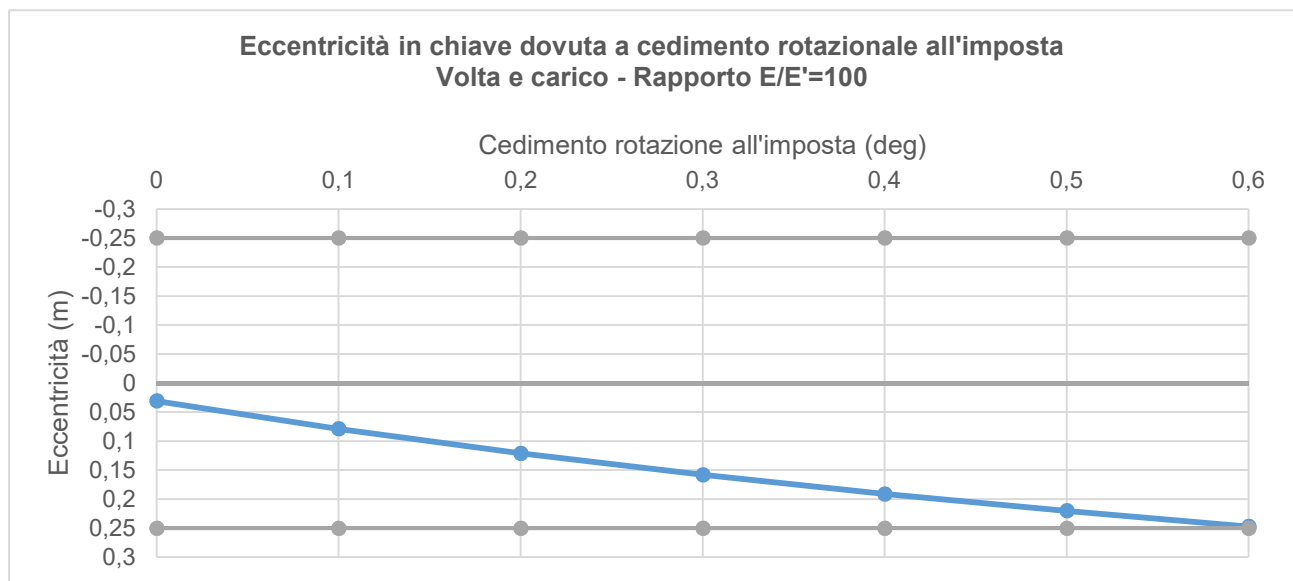


Anche all'imposta il punto di applicazione della risultante in assenza di cedimenti è nel terzo medio sotto il centro del giunto; al crescere del cedimento, esso fuoriesce subito dall'estremo inferiore del terzo medio e per  $u = 15$  mm fuoriesce dall'intradosso del giunto d'imposta.

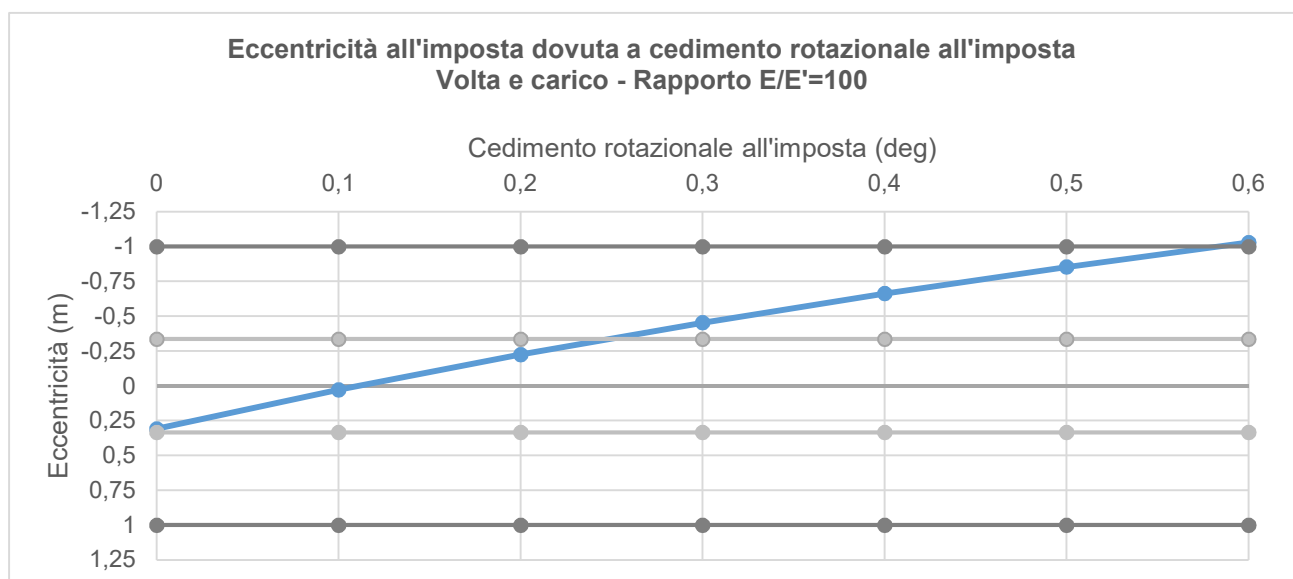


*Cedimento rotazionale  $\theta$  del giunto d'imposta, in senso antiorario (concorde con X2)* Le Tabelle che seguono riportano, per il complesso volta-arco e per il rapporto  $E/E' = 100$  assunto da Castigliano, i valori dell'eccentricità in chiave e all'imposta rappresentati dalle punteggiate in azzurro al crescere del cedimento rotazionale  $\theta$  (in gradi) del giunto d'imposta in senso antiorario, con passo di 0,1 grado. In grigio chiaro sono indicate le due rette che definiscono gli estremi del terzo medio, in grigio scuro le rette che definiscono le semialtezze del giunto d'imposta.

In chiave, il punto di applicazione della spinta in assenza di cedimenti si trova dentro al terzo medio sotto il centro del giunto; al crescere del cedimento rotazionale antiorario l'eccentricità aumenta mantenendosi sempre sotto il centro del giunto e per soli  $0,6^\circ$  raggiunge già l'estremo inferiore del terzo medio.



Anche all'imposta, il punto di applicazione della risultante in assenza di cedimenti si trova dentro al terzo medio sotto il centro del giunto; al crescere del cedimento rotazionale antiorario, esso si alza rapidamente verso l'alto e per un cedimento di poco minore di  $0,6^\circ$  esce dall'estradosso.





#### 4. La *Dissertazione* di laurea del nipote Carlo Mosca (1873)

Come si è già anticipato nel Cap.II, nel 1873 il nipote di Carlo Bernardo Mosca, Carlo, presentò una *Dissertazione* sull'opera progettata dallo zio quarant'anni prima, come studio conclusivo del suo percorso scolastico per ottenere il diploma di ingegnere civile presso la Regia Scuola d'Applicazione di Torino. Un debito verso il caro parente, col quale il laureando intendeva “adempiere un suo vagheggiato disegno, già suggeritogli dal voto del Congresso permanente di Ponti e Strade, e contrastatogli solo dalle dure e molteplici vicende, che travagliarono la sua esistenza”<sup>20</sup>



Fig. 1. Frontespizio della *Dissertazione* di Carlo Mosca

La *Dissertazione* è divisa in quattro parti, due delle quali sono di particolare interesse per farsi un'idea, attraverso la comparazione con l'approccio metodologico di Castigliano, della svolta culturale che proprio in quegli anni stava investendo lo studio delle strutture voltate in muratura. Le analisi compiute da Mosca si collocano infatti lungo una tradizione pre-elastica secondo la quale, in linguaggio moderno, l'arco murario era concepito come un sistema formato di parti indeformabili a contatto monolaterale e scabro le quali, se non adeguatamente dimensionate, possono subire movimenti relativi collassando per formazione di meccanismo rigido. All'interno di questo modello meccanico di origine settecentesca, sul quale la letteratura storica offre alcuni studi<sup>21</sup> di altissima qualità scientifica nella logica dell'analisi a collasso, la cultura ottocentesca, figlia delle nuove conquiste scientifiche relative alla resistenza e alla deformabilità dei solidi, aveva cercato di

<sup>20</sup> Mosca C., *Il ponte Mosca sulla Dora Riparia presso Torino*, Dissertazione presentata alla Commissione esaminatrice per ottenere il diploma di Ingegnere civile, Stamperia dell'Unione Tipografico-Editrice, Torino 1873.

<sup>21</sup> Ci riferiamo, in particolare, al contributo di Alfred Durand-Claye analizzato nel seguito di questo lavoro.

introdurre, in qualche modo, l'ormai irrinunciabile preoccupazione verso le proprietà meccaniche dei materiali. In qualche modo, dicevamo, perché in assenza di una lucida comprensione dei metodi per rimuovere l'indeterminazione di un sistema iperstatico quale è l'arco in muratura, ogni altro tentativo perde senso e attendibilità.

#### 4.1. Analisi dei due meccanismi di collasso per la ricerca dello spessore delle spalle

La parte II della *Dissertazione* si intitola, un po' esageratamente, *Teoria generale dell'equilibrio degli archi depressi*. In realtà, di generale la trattazione del Mosca ha ben poco se comparata con alcuni studi ad essa contemporanei sulla stabilità degli archi, fra i quali spicca, questo sì per rigore e completezza, il contributo di Durand-Claye (1867) del quale ci occuperemo successivamente. I riferimenti di Mosca sono Venturoli e Gauthey, esponenti di una trattatistica sull'arte del costruire nella quale le considerazioni meccaniche sulla stabilità delle volte sui loro piedritti erano ridotte a quanto lo stesso Mosca scrive: "Si può adunque considerare la volta di un ponte come formata da quattro parti, due delle quali verso le imposte rimangono aderenti ai piedritti, le altre due sono fra loro disgiunte in chiave. Ma se l'arco della volta è a monta depressa, se la sua saetta non più di  $1/4$  della corda, le due parti inferiori aderenti ai piedritti più non esistono, facendosi la separazione alle imposte ed alla chiave". Nel caso del ponte Mosca il ribassamento è meno di  $1/8$  per cui "la volta non può cadere se non per due ragioni: o perché i piedritti vengono rovesciati all'infuori o perché vengono spostati scorrendo sulle loro basi"<sup>22</sup>.

Nel caso del ponte in esame, lo studio dell'equilibrio limite del sistema formato dall'arcata fortemente ribassata poggiante sulle due spalle facenti da piedritti si riduce alla ricerca dello spessore della spalla. "E questo spessore si dovrà determinare per modo che, sotto l'azione spingente delle due parti di volta, essi piedritti o spalle non vengano né rovesciati all'infuori, né spostati per moto di scorrimento sulle loro basi".

Lo schema della volta su piedritti considerato da Mosca per svolgere il calcolo dello spessore della spalla è rappresentato nel disegno originale di Fig.2.

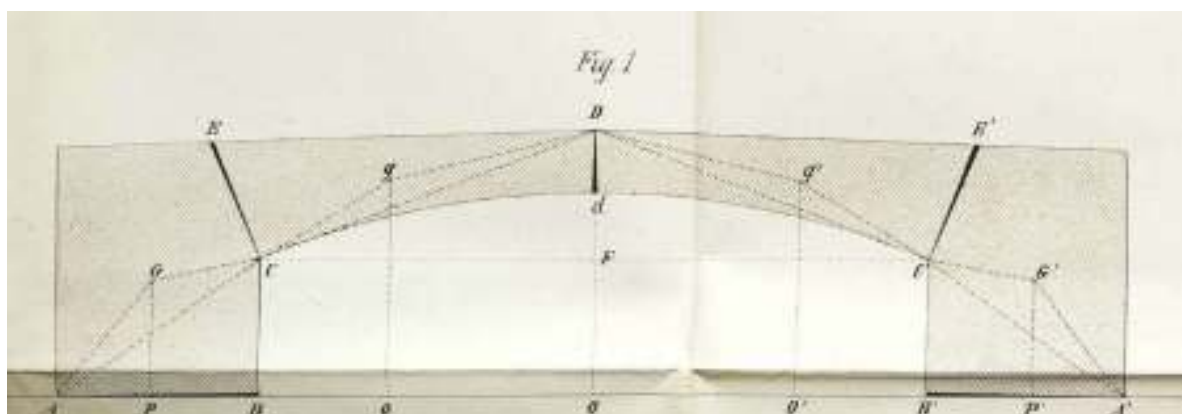


Fig.2. Disegno originale di Mosca per l'analisi dei meccanismi di collasso del sistema arco-spalla

Indicati con  $P$  il peso della spalla e con  $Q$  il peso della semiarcata e della sovrastruttura portata e introdotte le distanze e gli angoli seguenti,

<sup>22</sup> Mosca C., p.14

$$\begin{array}{lll}
AC=l & G\hat{A}C=e & AB=x \\
CD=l & g\hat{C}D=e & BC=y \\
AG=\rho & C\hat{A}B=\mu & CF=x \\
Cg=\rho & D\hat{C}F=\mu & CF=y \\
AP=\varepsilon & BQ=\varepsilon & 
\end{array}$$

Mosca determina l'equazione "che impedisce il rovesciamento delle spalle"

$$\frac{Qx + P\varepsilon}{Q\varepsilon} = \frac{y}{y}$$

e quella "che impedisce lo scorrimento delle spalle sulla loro base"

$$f P + Q = Q \frac{\varepsilon}{y}$$

nella quale  $f$  è il coefficiente di attrito assunto pari a 0,65.

Mosca svolge la ricerca dello spessore della spalla necessario ad evitare i due tipi di meccanismo considerando due diverse sezioni fatte lungo il ponte e profonde l'unità di lunghezza:

- 1) sezione fatta in corrispondenza dei parapetti, definita dalla superficie *cemnddl* comprensiva della semiarcata, del riempimento e dei parapetti e supposta tutta in pietra di Malanaggio. In questo caso, determinata l'area della superficie *cemnddl* come differenza fra l'area *emno* e l'area del settore circolare *cdlo*, egli trova il peso  $Q = 2750 \cdot 127891 = 351700 \text{ kg}$ ;
- 2) sezione fatta in corrispondenza dei marciapiedi. In questo caso il calcolo del peso della semiarcata e del riempimento fino ai marciapiedi è  $Q = 2750 \cdot 102921 = 283032 \text{ kg}$ .

Il peso  $P$  della spalla, supposta in muratura con peso specifico di  $2300 \text{ kg/m}^3$ , espresso in funzione dello suo spessore incognito  $x$ , vale:  $P = 2300 \cdot 9,75x - 5,86587 \text{ kg}$

Inserendo i dati nelle due equazione di equilibrio associate ai meccanismi corrispondenti, Mosca trova per gli spessori minimi da attribuire alla spalla nel caso 1:

$x = 5,22 \text{ m}$  per il meccanismo con ribaltamento della spalla

$x = 13,50 \text{ m}$  per il meccanismo con scorrimento della spalla, con coefficiente di attrito  $f = 0,65$

e nel caso 2:

$x = 4,59 \text{ m}$  per il meccanismo con ribaltamento della spalla

$x = 8,37 \text{ m}$  per il meccanismo con scorrimento della spalla, con coefficiente di attrito  $f_s = 0,65$

Al termine di queste analisi Mosca scrive: "Si potrebbe adunque dare alla spalla uno spessore uniforme compreso almeno fra 13,50m e 8,37m. E per non correre il rischio di prendere una grossezza troppo al disotto di m.13,50, è meglio sicuramente dare alla spalla uno spessore maggiore di m.8,37, munendola di due speroni sulle direzioni dei parapetti, per modochè ivi lo spessore di essa superi m.13.30. E siccome gli spessori avranno una larghezza maggiore di quella del parapetto, così sarà sempre più assicurata la stabilità. In progetto si proponeva lo spessore della spalla di 12 metri con due speroni di 6 metri di lunghezza; sicchè nelle direzioni dei parapetti riusciva di 18 metri lo spessore

della spalla. Inoltre gli spessori avevano 3 metri di larghezza, mentre i parapetti non ne hanno che m. 0,40.<sup>23</sup>

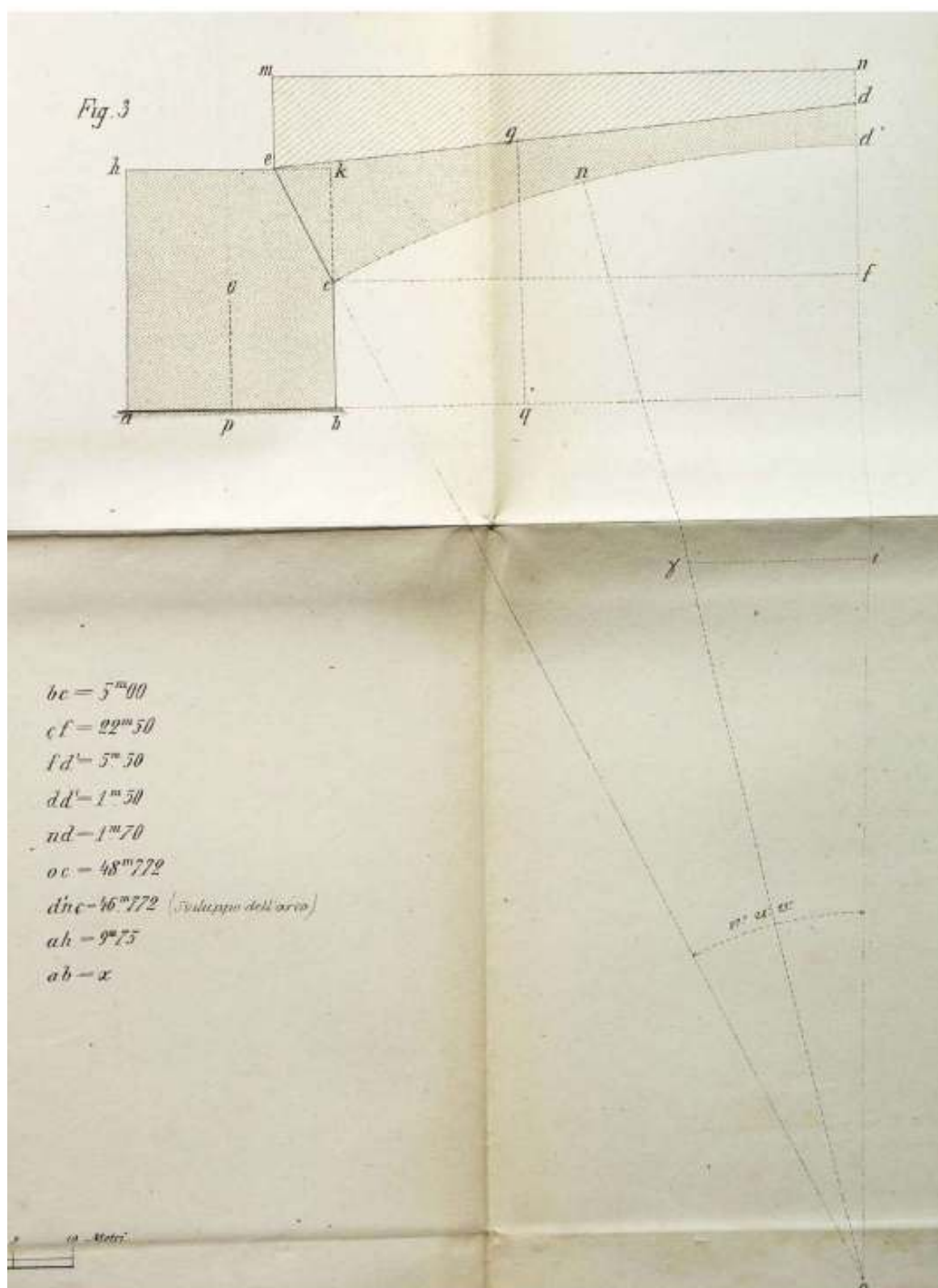


Fig.3. Disegno originale di Mosca per determinare i pesi in gioco nell'analisi dei due meccanismi di collasso

<sup>23</sup> Mosca C., p.25.

Nell'ultima sezione di questa parte II della *Dissertazione* Mosca svolge il *Calcolo della pressione alla chiave e alle imposte del Ponte sulla Dora*, con lo scopo di confrontare i valori delle tensioni di compressione sui due giunti con il valore che il materiale può sopportare in modo permanente, tradizionalmente assunto pari a  $\frac{1}{10}$  di quello che lo schiaccerebbe per compressione<sup>24</sup>.

Qui, improvvisamente e senza connessione logica, l'indagine passa dallo studio delle *condizioni di collasso* del sistema arcata-spalla alla ricerca delle tensioni di compressione che si avrebbero sui giunti in chiave e alle imposte se l'arco fosse nelle migliori *condizioni di esercizio*, ossia se su tali giunti le forze applicate agissero nei loro centri e perpendicolarmente<sup>25</sup> ad essi in modo da produrre una distribuzione uniforme di tensioni. In effetti, non una parola è fornita dall'autore per giustificare questa modalità di indagine nonostante non vi sia alcun motivo per ritenere che la spinta in chiave e la risultante alle imposte operino nel modo ottimale assunto.

Nell'equilibrio di un arco supposto stabile, infatti, la spinta in chiave e il suo punto di applicazione restano indeterminati finché non si ragiona in termini di teoria dei sistemi elastici iperstatici. La trattazione di Castigliano, al di là delle critiche che si possono muovere dal punto di vista metodologico all'applicazione della teoria elastica agli archi in muratura, è una esemplare esposizione di quale debba essere il percorso da seguire se si vuole razionalmente rimuovere l'indeterminazione statica riguardante il valore della spinta e del suo punto di applicazione.

In questo senso, i risultati numerici ottenuti da Mosca per i valori delle tensioni sui due giunti sono del tutto inattendibili perché basati su ipotesi ingiustificate. Eppure Mosca tira dritto senza la minima esitazione. Anzi, determinati tali valori dividendo la forza agente sui giunti per la loro area<sup>26</sup> - valori che nel caso 1) di sezione lungo i parapetti risultano di 45,90kg/cm<sup>2</sup> in chiave e di 40,12 kg/cm<sup>2</sup> alle imposte e nel caso 2) di sezione lungo i marciapiedi risultano di 36,29kg/cm<sup>2</sup> in chiave e di 18,04 kg/cm<sup>2</sup> alle imposte - egli conclude serenamente in questi termini: "Risulta quindi che, adottando  $\frac{1}{10}$  per coefficiente di stabilità, [la pietra] non dovrebbe essere assoggettata ad una pressione permanente maggiore di 60 kg. per cent. quad. Il che appunto si verifica tanto alla chiave, che all'imposta nelle sezioni superiormente considerate", come se quei valori fossero quelli che effettivamente si realizzano.

Non è tutto. Conservando l'ipotesi non giustificata che la spinta in chiave e la risultante alle imposte operino nel centro di tali giunti e perpendicolarmente ad essi, Mosca svolge l'inutile esercizio

---

<sup>24</sup> Mosca cita al riguardo i nomi di Rondelet, Navier e Poncelet e menziona le "accurate esperienze istituite dall'autore del progetto nell'arsenale di Torino sottoponendo parallelepipedi del Gneiss del Malanaggio a progressive pressioni esercitate da torchi idraulici", dalle quali sarebbe risultato che "la pietra di cui è formato l'arco in questione non possa resistere alla pressione esercitata da un peso maggiore di 600kg per cent. quad. di superficie premuta" (p.28)

<sup>25</sup> Per trovare i valori della spinta in chiave e della risultante alle imposte, Mosca scompone il peso noto  $Q$  in una forza orizzontale (la spinta) certamente perpendicolare al giunto in chiave e supposta passante per il suo centro e in una forza inclinata (la risultante) assunta perpendicolare al giunto di imposta e supposta passante per il suo centro. Ora, queste ultime supposizioni sulla risultante non sono in generale contemporaneamente soddisfatte, perché non è detto che se la risultante è perpendicolare al giunto di imposta essa è passante per il suo centro e, viceversa, se è passante per il centro del giunto di imposta sia perpendicolare ad esso.

<sup>26</sup> Mentre nel caso del giunto in chiave l'altezza è di 1,50m riportata da tutti gli autori, per il giunto di imposta Mosca prende un'altezza di 1,90m, minore di quella assunta da Castigliano (2,01m) e di quella (2,05m) che lo stesso Mosca considera nella successiva trattazione nella parte IV della *Dissertazione*.

di “ricavare qual debba essere lo spessore alla chiave e la larghezza del giunto all’imposta affinché il materiale non sopporti una pressione maggiore di  $\frac{1}{10}$  di quella, sotto cui si schiaccerebbe.”<sup>27</sup>

Non è il caso di ripercorrere questa trattazione, date le inattendibili ipotesi sulle quali è basata e quindi la discutibilità dei risultati dedotti. Vale la pena sottolineare, invece, come questi risultati vengano indirettamente smentiti dall’autore nella parte IV della *Dissertazione*, ove è sviluppato un’ulteriore calcolo delle tensioni sotto ipotesi parzialmente diverse da quelle assunte nella parte II.

#### 4.2 Verifiche di resistenza

La parte IV della *Dissertazione* si intitola *Verificazione della stabilità dell’arco del ponte sulla Dora* ed offre, come sopra dicevamo, un’altra quantificazione delle tensioni basata su ipotesi in parte diverse da quelle assunte nella parte II ma altrettanto ingiustificate.

“Supporremo” scrive Mosca in questa nuova trattazione facente riferimento alla Fig.4, “che il punto di applicazione della spinta orizzontale sia in *M* alla metà di *BC* spessore dell’arco in chiave, e che il punto di applicazione della pressione all’imposta sia in *N*, alla distanza dall’intrados di un terzo del giunto d’imposta *HI*. Di queste ipotesi, la prima è molto prossima al vero, come si può analiticamente dimostrare<sup>28</sup>, e la seconda è favorevole alla stabilità come quella che suppone, che la pressione al giunto di imposta sia zero all’estrados.”<sup>29</sup>

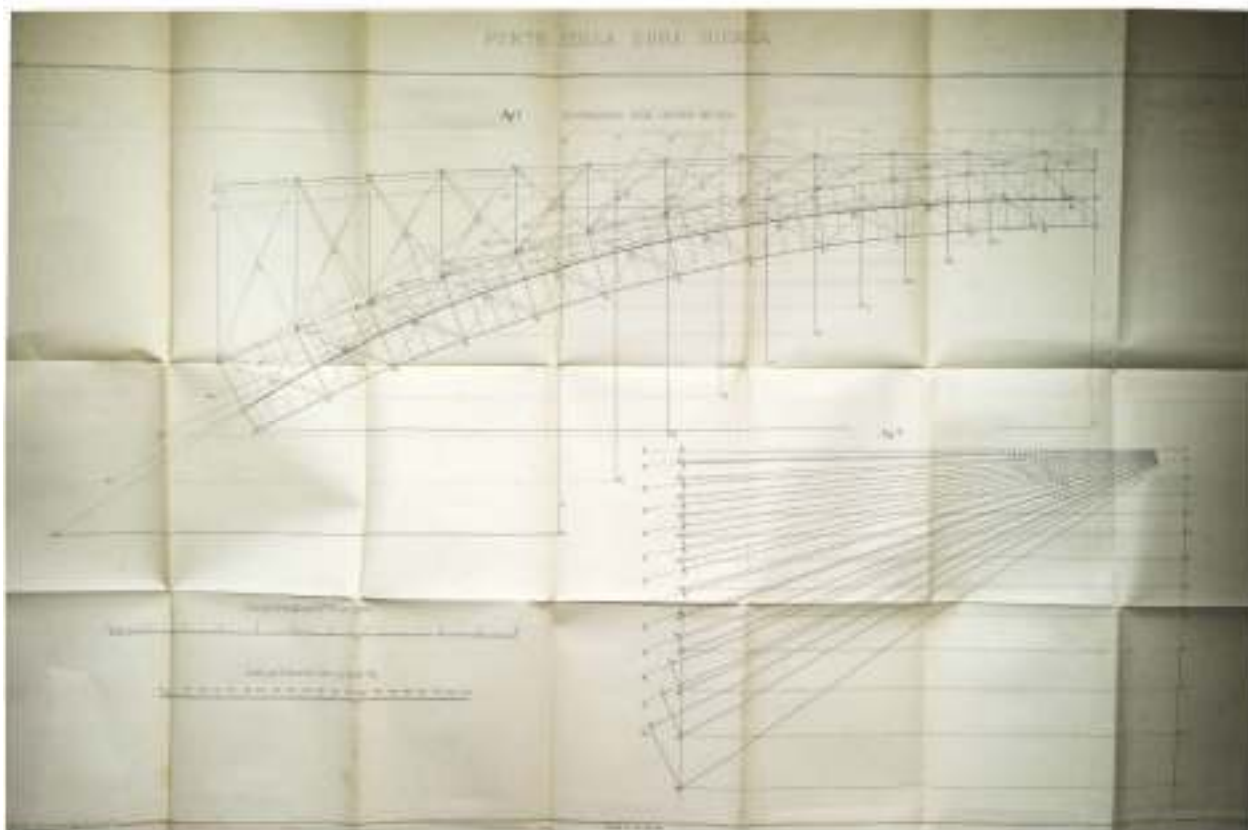


Fig.4. Disegno originale di Mosca per la costruzione grafica della curva delle pressioni sotto le ipotesi di spinta applicata al centro della chiave e risultante alle imposte applicata all’estremo inferiore del terzo medio

<sup>27</sup> Mosca C., p.29

<sup>28</sup> Questa affermazione non è accompagnata da nessuna dimostrazione giustificativa. Non è da escludere, però, che qui Mosca si riferisca al ragionamento di Curioni che discutiamo nel paragrafo 5.1.

<sup>29</sup> Mosca C., p.62



Per costruire la curva delle pressioni in base alle ipotesi suddette Mosca suddivide la semiarcata in 12 parti (quindi considera 13 giunti) profonde l'unità di lunghezza e, considerata anche la presenza del riempimento sui fianchi dell'arco, del suolo stradale, dei parapetti e di un sovraccarico di esercizio di  $600\text{kg/m}^2$ , egli trasforma le altezze effettive in equivalenti altezze di muratura moltiplicandole per il rapporto fra i pesi specifici e costruisce il disegno<sup>30</sup> in Fig.4.:

Determinati graficamente i pesi e i baricentri delle varie parti di arco e carico e trovato il peso totale di  $226000\text{ kg}$  per la semiarcata ed il carico gravante su di essa, Mosca calcola la spinta sul giunto in chiave in base alle ipotesi assunte sui punti di passaggio della curva delle pressioni, trovando il valore  $H = 339500\text{ kg}$ .

Componendo graficamente la spinta con i pesi delle varie porzioni di volta, egli determina su ogni giunto i valori della forza normale  $N$  e della forza di taglio  $T$  e compila le due Tabelle qui riprodotte dal testo originale.

Nella prima Tabella (Fig.5), che serve per la verifica a scorrimento, sono riportati gli angoli  $\alpha$  che i 12 giunti dopo quello in chiave fanno con la verticale, i valori della forza di attrito  $fN$  (con  $f = 0,65$ ) e, in ultima posizione, la colonna dei cosiddetti "coefficienti di stabilità allo scorrimento" ottenuti facendo il rapporto fra la forza di taglio e la forza di attrito. Mosca assume che il coefficiente di stabilità a scorrimento non debba superare il valore  $\frac{4}{5} = \frac{1}{1,25}$ , per cui dall'ultima colonna deduce che "l'arco è più che stabile per quanto riguarda la resistenza allo scorrimento".

Numero d'ordine dei giunti	Angoli dei giunti colla verticale $\alpha$	COMPONENTI DELLE PRESSIONI		Valori dell'attrito $fN$	Coefficienti di stabilità $n^v$
		Normali $N$	Tangenziali $T$		
		chilog.	chilog.	chilog.	
1	1°. 28'. 5"	340000	1500	221000	$1/147,3$
2	3°. 49'. 3"	340500	4400	221325	$1/50,3$
3	6°. 40'. 0"	341400	6100	221910	$1/50,3$
4	8°. 30'. 58"	342800	8000	222820	$1/27,3$
5	10°. 51'. 56"	344800	8200	224120	$1/27,3$
6	13°. 12'. 53"	347500	6700	225870	$1/19,7$
7	15°. 33'. 51"	352000	2900	228800	$1/10,8$
8	17°. 54'. 48"	358000	2300	232700	$1/101,1$
9	20°. 15'. 46"	366000	9200	237900	$1/25,3$
10	22°. 36'. 43"	376000	19200	244400	$1/12,7$
11	24°. 57'. 41"	389000	31800	252850	$1/7,3$
12	27°. 28'. 22"	406000	46000	263900	$1/5,7$

Fig.5. Tabella con i risultati numerici per la verifica a scorrimento

<sup>30</sup> Questo disegno è simile a quello di Castigliano, ma per quanto riguarda l'arcata presenta almeno le seguenti differenze: anzitutto i giunti sono presi perpendicolari alla curva di intradosso e non all'asse geometrico, come è invece richiesto nell'analisi elastica di Castigliano; inoltre, l'altezza del giunto di imposta qui è di  $2,05\text{m}$  mentre nel modello di Castigliano è di  $2,01\text{m}$ . Questa differenza, per quanto piccola, ha una certa influenza sui valori delle tensioni alle imposte.

Nella seconda Tabella (Fig.6), che serve per la verifica di resistenza a compressione, sono riportate le lunghezze  $a$  dei 12 giunti dopo quello in chiave, le distanze  $c$  dei centri di pressione dall'intradosso desunti dal disegno della curva delle pressioni, i valori delle tensioni all'intradosso  $K_i$  e all'estradosso  $K_e$  e, nelle ultime due colonne, i cosiddetti "coefficienti di stabilità" a compressione, ottenuti facendo il rapporto fra le tensioni  $K_i$  e  $K_e$  e il valore  $R$  della tensione di rottura, qui assunta pari a  $R = 4000000 \text{ kg/m}^2$  anziché a  $6000000 \text{ kg/m}^2$  come fatto nella parte II. Seguendo le indicazioni ricorrenti nella trattatistica, Mosca assume che il coefficiente di stabilità non debba superare il valore  $\frac{1}{10}$ , per cui dalle ultime due colonne deduce che "anche per rispetto allo schiacciamento l'arcata trovasi in buone condizioni di stabilità"<sup>31</sup>.

Numero d'ordine dei giunti	Lunghezza dei giunti $a$	Distanza dall'intradosso del punto di applicazione della pressione $c$	Componente normale della pressione $N$	PRESSIONE NORMALE		COEFFICIENTI di stabilità	
				all'intradosso $K_i$	all'estradosso $K_e$	all'intradosso $n_i$	all'estradosso $n_e$
	metri	metri	chilog.	chilog.	chilog.		
1	1,50	0,730	340000	245705	207625	1/16,8	1/19,8
2	1,50	0,750	340500	227000	227000	1/17,5	1/17,5
3	1,50	0,790	341400	192091	253105	1/20,8	1/15,8
4	1,50	0,835	342800	154488	304220	1/25,8	1/13,1
5	1,55	0,900	344800	115674	329227	1/34,5	1/12,7
6	1,65	0,950	347500	113727	305378	1/35,1	1/13,0
7	1,70	0,975	352000	120507	297735	1/30,1	1/13,7
8	1,70	0,985	358000	110769	310406	1/36,1	1/12,8
9	1,75	0,985	366000	131341	286942	1/30,4	1/13,9
10	1,80	0,940	376000	181314	236461	1/22,0	1/16,9
11	1,95	0,810	389000	301225	97748	1/13,0	1/40,9
12	2,05	0,680	406000	396096	0	1/10,9	1/∞

Fig.6. Tabella con i risultati numerici per la verifica a compressione

Come dicevano, anche tutti questi risultati, come già quelli ottenuti nella parte II in merito ai valori delle tensioni, sono minati da un'incertezza di fondo, perché la curva delle pressioni costruita da Mosca non può essere considerata quella che effettivamente si realizza in quanto tracciata sulla base di ipotesi arbitrarie sui suoi punti di passaggio in chiave e alle imposte.

Nonostante questo, o forse proprio per questo, lo studio di Carlo Mosca riveste comunque un interesse storico perché testimonia un *modus operandi* praticato da molti autori nel periodo di transizione che ha preceduto la definitiva svolta in senso elasticista della quale Castigliano è uno dei primi e più significativi esponenti.

<sup>31</sup> Cogliamo l'occasione per osservare che, se lo spessore del giunto di imposta fosse quello assunto da Castigliano, cioè 2,01m anziché 2,05 preso da Mosca, il coefficiente di stabilità alle imposte sarebbe maggiore di 1/10.

Non potendo più rinunciare a mettere in conto le effettive proprietà di resistenza e di deformabilità dei materiali, ma non disponendo ancora degli strumenti concettuali per rimuovere l'indeterminazione statica connessa all'equilibrio di un arco stabile, molti autori di metà Ottocento non ebbero altra scelta che formulare ipotesi più o meno sensate per poter tracciare univocamente la curva delle pressioni e procedere al calcolo delle tensioni interne per verificarne la compatibilità con la resistenza dei materiali. Fra gli innumerevoli metodi che si collocano in questo contesto, nei prossimi capitoli ne vedremo altri due che ci sembrano di interesse, anche se le loro analisi non si riferiscono specificamente al ponte Mosca.

## 5. Giovanni Curioni e il suo *metodo pratico* (1873)

### 5.1. Discussione critica del Metodo pratico

Nello stesso anno 1873 nel quale Carlo Mosca sottoponeva la sua *Dissertazione* alla Commissione esaminatrice per l'ottenimento del diploma di Ingegnere civile, Giovanni Curioni pubblicava il volume I della sua *Appendice all'Arte del fabbricare*, nel quale è proposto ed applicato un *Metodo pratico per determinare le principali dimensioni delle arcate dei ponti in muratura* che ammette le stesse osservazioni critiche mosse allo studio di Mosca.

Come si evince dal titolo, si tratta di un metodo pensato per dimensionare lo spessore dell'arco nel rispetto di prefissati valori ammissibili di tensione e non per verificare lo stato di tensione di un arco con spessore dato. Scrive Curioni: “Nel nuovo metodo che intendiamo esporre per determinare le principali dimensioni di un'arcata, ci proponiamo di trovare la grossezza alla chiave e la grossezza in un altro giunto giudiziosamente scelto,



Giovanni Curioni  
(Invorio Inferiore (Novara) 1831-Torino 1887)

nell'ipotesi che la vòlta sia simmetrica e simmetricamente caricata rispetto al suo giunto verticale. Perciò, ci imponiamo che la pressione media sul giunto verticale alla chiave sia eguale a quella che permanentemente e stabilmente possono sopportare i materiali da impiegarsi alla sommità dell'arcata; supponiamo che la pressione sull'altro giunto, in cui vogliamo trovare la grossezza, passi pel centro

di superficie del giunto medesimo; e ci imponiamo la condizione che la pressione normale, riferita all'unità di superficie, su questo stesso giunto sia pure eguale a quella che permanentemente e stabilmente possono sopportare i materiali.”<sup>32</sup>

Questa procedura di dimensionamento degli spessori sembra razionale perché fa lavorare i giunti prescelti sotto un valore di tensione uniforme ed eguale al massimo ammissibile per il materiale. Essa, tuttavia, non tiene conto che l'arco per il quale sono dimensionati quegli spessori non sarà così “gentile” da far sì che la curva delle pressioni si adatti alle richieste del progettista. Insomma, la distribuzione uniforme delle tensioni sui due giunti prescelti, che implica una curva delle pressioni passante per i centri di quei giunti, è un auspicio e non una certezza.

Lo stesso Curioni doveva essere conscio che non necessariamente si verifichi quanto supposto in sede di



Frontespizio del Vol.I dell'*Appendice all'Arte di fabbricare* contenente il *Metodo pratico*

<sup>32</sup> Curioni G., p.249

dimensionamento dei giunti e non a caso aggiunge: “Esponendo il nostro metodo per determinare le principali dimensioni di un’arcata da progettarsi, non crediamo di dare una soluzione perfetta dell’arduo problema dell’equilibrio delle vòlte; ma sibbene, come lo indica il titolo stesso di questo nostro lavoro, di dare un modesto metodo pratico utile nell’esercizio della carriera dell’ingegnere costruttore, facile ad apprendersi e di assai spedita applicazione. I risultamenti ottenuti applicando questo metodo a molte e svariate arcate, ci hanno intimamente persuasi della sua utilità, e ci hanno portati a concludere che le obbiezioni, che contr’esso si potrebbero muovere, perdono affatto d’importanza quando dalle severe esigenze della teoria si passa a quelle meno imperiose delle pratiche applicazioni.”<sup>33</sup>

Per rispondere anticipatamente alle “obbiezioni” contro il suo metodo, nel punto 2 della sua trattazione Curioni si impegna a ricercarne conferme sulla base di considerazioni meccaniche. Chiamando in causa l’*atout* della deformabilità del materiale di cui è fatta la serraglia, ossia il concio in chiave che chiude l’arco, Curioni osserva che per determinare “se non esattamente, almeno approssimativamente” il punto di applicazione della spinta, “basta tener conto del modo con cui si comporta la serraglia dell’arcata, quando questa si pone in condizioni da poter permanentemente resistere agli sforzi massimi cui deve trovarsi sottoposta”.<sup>34</sup>

Il ragionamento svolto da Curioni è suadente e vale la pena ripercorrerlo nella sua interezza in base alla Fig.1 tratta dall’originale. Considerando una volta simmetrica e simmetricamente caricata, l’ideale giunto BC posto sull’asse dell’arcata nel centro del concio in chiave AA DD subisce, a causa delle deformazione della volta, un piccolo abbassamento verticale acquisendo la posizione *bc* senza cambiare sensibilmente la sua lunghezza. Ora, il concio in chiave “essendo un corpo più o meno elastico, più o meno si deforma sotto l’azione delle forze sollecitanti, leggermente si modifica l’arco AA ; aumenta il raggio di curvatura corrispondente al punto B; ed il centro di curvatura relativo al detto punto, passando da O a O', si abbassa per due motivi, pei cedimenti avvenuti nelle due parti di vòlta fra cui giace la serraglia, per le deformazioni avvenute nella serraglia stessa”.

Per esprimere tali deformazioni della serraglia Curioni considera un altro giunto ideale EF infinitamente prossimo al giunto BC e normale all’arco AA e quindi concorrente nel centro di curvatura O, il quale giunto EF, dopo la deformazione dell’arcata, prende la posizione *ef* normale alla curva *aa* assunta dall’arco iniziale AA e concorrente nel centro di curvatura O'. Si riconosce da ciò che l’elemento di arco BE

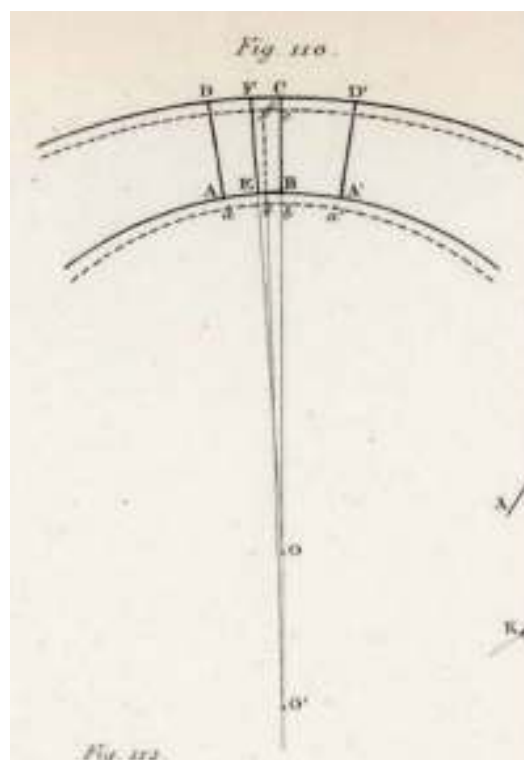


Fig.1. Disegno di Curioni sull’ipotesi di spinta applicata nel centro della chiave

<sup>33</sup> Curioni G., p.250

<sup>34</sup> Curioni G., p.250.

all'intradosso si è accorciato di  $BE - be$  e che l'elemento di arco  $CF$  all'estradosso si è accorciato di  $CF - cf$ . Indicati allora con:

$z_0$  l'altezza  $\overline{BC} = \overline{bc}$  del giunto ideale in chiave;

$\rho$  il raggio di curvatura  $\overline{OB}$  nel punto  $B$  d'intradosso prima della deformazione;

$\rho$  il raggio di curvatura  $\overline{Ob}$  nel punto  $b$  d'intradosso prima della deformazione;

$\theta$  l'angolo infinitesimo  $\widehat{FOC}$ ;

$\theta$  l'angolo infinitesimo  $\widehat{fOc}$ ;

si può scrivere

$$BE = \rho \theta$$

$$be = \rho \theta$$

$$CF = \rho + z_0 \theta$$

$$cf = \rho + z_0 \theta$$

e quindi gli accorciamenti degli elementi d'arco  $BE$  e  $CF$  valgono;

$$BE - be = \rho \theta - \rho \theta$$

$$CF - cf = \rho + z_0 \theta - \rho + z_0 \theta$$

Poiché le tensioni in elementi di fibra compressi sono proporzionali agli accorciamenti e inversamente proporzionali alle loro lunghezze iniziali, introdotte le tensioni  $K_i$  per l'elemento di fibra  $BE$  e  $K_e$  per l'elemento di fibra  $CF$ , Curioni scrive la relazione

$$\frac{K_i}{K_e} = \frac{\rho \theta - \rho \theta}{\rho + z_0 \theta - \rho + z_0 \theta} \frac{\rho + z_0}{\rho}$$

Introdotta poi la distanza  $\delta_0$  fra l'intradosso e il punto di applicazione della spinta, il rapporto fra le tensioni si può anche scrivere

$$\frac{K_i}{K_e} = \frac{2 - 3 \frac{\delta_0}{z_0}}{-1 + 3 \frac{\delta_0}{z_0}}$$

da cui si trae

$$\delta_0 = \frac{1}{3} \frac{2 + 3 \frac{K_i}{K_e}}{1 + \frac{K_i}{K_e}} z_0$$

e quindi, sostituendo in quest'ultima relazione l'espressione del rapporto fra le tensioni, Curioni trova, raccogliendo il fattore  $\frac{1}{2} z_0$

$$\delta_0 = \frac{6 \rho \theta - \rho \theta}{6 \rho \theta - \rho \theta} \frac{\rho + 6 \rho z_0 \theta - 2 \rho + \rho}{\rho + 6 \rho z_0 \theta - 3 \rho + \rho} \frac{z_0 \theta}{z_0 \theta} \frac{1}{2} z_0$$

In questa formula, osserva Curioni, “tanto il numeratore quanto il denominatore (...) hanno due termini eguali, ed essi diversificano soltanto nel terzo termine. Se  $\rho$  è maggiore di  $\rho$ , il termine  $3 \rho + \rho$  è maggiore del termine  $2 \rho + \rho$ , il denominatore della frazione (...) risulta minore del numeratore, il valore di  $\delta_0$  si trova maggiore di  $\frac{1}{2} z_0$ , e quindi la spinta orizzontale trovasi applicata al di sopra del mezzo del detto giunto verticale dell'arcata. Siccome però le deformazioni che può



subire la serraglia, sempre di laterizi o di pietre assai resistenti, sono assai piccole e non suscettive di pratica determinazione, ne consegue che, anche nei casi più sfavorevoli, il valore di  $\rho$  non può essere molto differente dal valore di  $\rho$ , e che quindi anche il valore di  $\delta_0$  non può essere molto differente da quello di  $\frac{1}{2} z_0$ ”.<sup>35</sup>

A conclusione di questo ragionamento, Curioni ritiene quindi di poter affermare che “il punto d’applicazione della spinta orizzontale di un’arcata da ponte, a tutta monta o a monta depressa, è tanto più al di sopra del mezzo del suo giunto verticale alla chiave, quanto più la serraglia è soggetta a deformarsi sotto le pressioni che vi esercitano le due parti di volta fra cui essa giace; che in ogni caso questo punto d’applicazione dista poco dal mezzo dell’indicato giunto; e che, nei calcoli da istituirsi per la determinazione delle principali dimensioni delle arcate, senza tema d’inconvenienti, si può ritenere che la spinta orizzontale alla chiave sia applicata alla metà altezza della chiave medesima”<sup>36</sup>

Questa argomento teorico, esposto con perizia da Curioni, sembra convincente. Viene da chiedersi, però, se la stessa conclusione ottenuta considerando la deformabilità della sola “serraglia” venga confermata quando si mette in conto che, in realtà, ogni concio dell’arco subisce una deformazione e quindi contribuisce a determinare il valore finale del raggio di curvatura  $\rho$ , la cui differenza rispetto al raggio iniziale  $\rho$  è responsabile dell’eccentricità del punto di applicazione della spinta in chiave. Da questo punto di vista, il ragionamento di Curioni non è affatto risolutivo a favore della sua tesi, come non sono risolutive le ulteriori argomentazioni svolte in chiusura dell’esposizione del metodo, laddove l’autore torna nuovamente sull’ipotesi che la spinta operi nel centro della chiave: “Le conclusioni dedotte nel numero 2 e l’avviso da molti valenti costruttori già stato manifestato sul punto d’applicazione della spinta orizzontale di un’arcata alla chiave, ci persuadono che, nei limiti di quell’approssimazione che è permesso ottenere anche nelle pratiche applicazioni, in nessun modo quell’ipotesi può condurre a risultati compromettenti la sicurezza di un’arcata. Per quante arcate siano state da noi osservate ed esaminate, giammai ci venne fatto di riconoscere aprimento dei giunti presso la chiave verso l’intradosso o verso l’estradosso, di maniera che è giuocoforza concludere che per intero trovansi premuti i loro giunti verticali. Può darsi che, per la non perfetta coincidenza del punto d’applicazione della spinta orizzontale col mezzo del giunto verticale di un’arcata, la pressione su questo giunto non sia uniformemente distribuita, ma allora tutto al più può verificarsi il caso di una pressione massima all’intradosso o all’estradosso e d’una pressione nulla all’estradosso o all’intradosso. In questo caso, il più sfavorevole che si può presentare, la massima pressione riferita all’unità di superficie è il doppio della pressione media (...) e quindi tutto al più può avvenire una diminuzione di stabilità alla chiave in modo da essere la stabilità definitiva, determinata da una frazione con valore presso a poco doppio di quello stato assunto per  $n_0$  nell’applicazione delle

<sup>35</sup> Curioni G., pp. 252-253. L’eventualità che il raggio di curvatura finale sia minore di quello iniziale non è trattata da Curioni perché “può solo presentarsi nell’arcata a monta rialzata, con grandi carichi sui fianchi e con piccoli carichi sulla sommità, le quali arcate non si incontrano mai nella costruzione dei ponti moderni” (p.253).

<sup>36</sup> Curioni G., p.253 A sostegno di questo convincimento, Curioni aggiunge che “la conclusione a cui siamo arrivati (...) quantunque basata su considerazioni un po’ differenti, è identica a quella alla quale giunse l’ingegnere Dupuit nel suo prezioso lavoro intitolato *Traité de l’équilibre des voûtes et de la construction des ponts en maçonnerie* (...). L’autorevole giudizio d’un uomo eminente per la scienza e per la pratica, come fu Dupuit, è di gran peso nella questione che trattiamo; ed ormai possiamo dire che non esiste più dubbio sulla posizione approssimata del punto di applicazione della spinta orizzontale di un’arcata di ponte nel suo giunto verticale alla chiave”.

formole da noi proposte. Siccome poi il coefficiente di stabilità deve essere assunto fra 1/10 ed 1/16, risulta che l'inconveniente più grave, al quale può condurre l'ipotesi di considerare la spinta orizzontale, siccome applicata nel mezzo del giunto verticale di chiave, è quello di avere nel giunto stesso una stabilità minore della supposta, e definita da una frazione con valore di circa 1/5 ad 1/8. Anche nel caso adunque di una pressione massima all'intradosso o all'estradosso, caso il più sfavorevole e che giammai abbiamo visto verificato nelle arcate di ponti, la citata ipotesi non può compromettere la sicurezza dell'opera, giacché alla chiave in nessun modo potrà aver luogo una pressione maggiore della quinta all'ottava parte di quella che è capace di promuovere i primi sintomi di schiacciamento dei materiali”<sup>37</sup>

Questa argomentazione, basata sull'assenza di “aprimiento” dei giunti riscontrata da Curioni su molte arcate, non giustifica che tale favorevole circostanza sia ricorrente in ogni caso. Persino nel ponte Mosca, e nonostante la cura esecutiva durante la sua costruzione, si manifestò dopo il disarmo “una tendenza ad aprirsi all'estrados presso l'imposta”<sup>38</sup>, come si legge nella *Dissertazione* di Mosca nipote il quale, di certo, non aveva interesse a segnalare questo difetto nell'opera progettata dallo zio.

Lasciano alquanto perplessi anche le considerazioni di Curioni nel caso si debba comunque ammettere che la spinta operi con eccentricità sopra al centro del giunto in chiave, fermo restando il punto di applicazione della risultante alle imposte. Osservando che in tale situazione la spinta ha un braccio più grande e quindi un valore più piccolo di quello che avrebbe se fosse centrata in chiave, Curioni afferma che “quindi sotto questo riguardo trovasi avvantaggiata la stabilità definitiva”<sup>39</sup> Ora, se è vero che la spinta ha valore minore rispetto al caso di eccentricità nulla, le tensioni che essa produce quando opera con eccentricità crescente aumentano in proporzione maggiore di quanto non diminuisca la spinta, quindi la “stabilità definitiva” non risulta affatto avvantaggiata.

Per rendersene conto quantitativamente, sul modello Grasshopper del ponte Mosca abbiamo calcolato la tensione in chiave supponendo la spinta e la risultante alle imposte operanti nei centri dei due giunti (come ipotizzato nel metodo pratico di Curioni) e poi abbiamo determinato, al crescere dell'eccentricità  $e_0$  con passo di 5 cm fino a raggiungere 1/6 dello spessore  $h_0$  della chiave, i corrispondenti valori della spinta  $H$  e della tensione massima  $\sigma_0^e$  all'estradosso. Dai numeri sulla Tabella seguente si evince facilmente che mentre la spinta si riduce con piccole percentuali, la tensione aumenta con percentuali molto più significative: in particolare, per  $e_0 = \frac{1}{6} h_0$ , la spinta si è ridotta solo del 4,45% mentre la tensione massima è aumentata di più del 91%.

$h_0$	$e_0$	$H$	$\sigma_0^e$	Riduzione $H$ %	Aumento $\sigma_0^e$ %
1,5	0	373638	249092		
1,5	0,05	370187	296150	0,92	18,89
1,5	0,1	366798	342346	1,83	37,44
1,5	0,15	363472	387704	2,72	55,65
1,5	0,2	360205	432246	3,59	73,53
1,5	0,25	356996	475996	4,45	91,09

<sup>37</sup> Curioni G., p.281

<sup>38</sup> Mosca C., p.53.

<sup>39</sup> Curioni G., p.282.

Quanto al caso di eccentricità al di sotto del centro della chiave, per il quale la spinta sarebbe più grande di quella per eccentricità nulla, Curioni è sbrigativo affermando che “questo caso sfavorevole, però, come già venne osservato nel numero 2, non si presenta mai nella costruzione delle arcate pei moderni ponti, e non può quindi destare la benché minima apprensione”<sup>40</sup> Al contrario, questo caso sarebbe proprio quello che, secondo il calcolo elastico, tanto nostro quanto di Castigliano si presenta nella modernissima e ribassatissima arcata del ponte Mosca quando si tiene conto della presenza delle malte.

Analoghi appunti critici si potrebbero fare a Curioni laddove egli svolge la “Discussione dell’ipotesi colla quale si ammette che la pressione sui giunti estremi passi pei loro centri di mezzo”. Ed è molto significativo, al riguardo, che lo stesso Curioni dedichi l’ultimo punto dell’esposizione del suo metodo ai “Ripieghi per ottenere che la pressione sui giunti estremi si approssimi ad essere applicata nel mezzo dei giunti medesimi”. Il primo di tali “ripieghi” è proprio quello che venne adottato nel ponte Mosca, al quale forse Curioni si riferisce tacitamente. Come sappiamo, tale escamotage consiste nel porre “dalla parte, verso la quale i giunti tendono chiudersi e sulla quale tende a manifestarsi la massima pressione riferita all’unità di superficie, maggior quantità di malta che non dalla parte opposta” perché in questo modo si crea ad arte “una specie di cuneo che, accrescendo il contatto fra le due parti di volta da esso separate, spinge il punto di applicazione della pressione verso il mezzo (...) Converrà che l’epoca del disarmo non venga di molto protratta dopo la costruzione dell’arcata, affinché le malte abbiano ancora la proprietà di poter far presa; e può tornare utile la pratica di guernire di stoppa verso l’intradosso e verso l’estradosso quei giunti in cui si vuole che la malta non schizzi in troppa abbondanza da eludere lo scopo per cui venne collocata”<sup>41</sup>

Un secondo escamotage “più efficace del ripiego che abbiamo indicato, è quello stato proposto da Dupuit” e riprodotto da Curioni in Fig.2 in base alle seguenti considerazioni: “Per un giunto, il quale, come i giunti estremi, tenda ad aprirsi verso l’estradosso, si tagli il letto inferiore del cuneo che su esso si deve posare in modo che il suo profilo consti di una parte rettilinea *ab* posta dalla parte dell’estradosso e normale all’intradosso, di una parte rettilinea *bc* talmente diretta da risultare ottusissimo l’angolo *abc*, e d’una piccola curva raccordatrice in *b* delle due parti rettilinee. Se il giunto *abcde* non si riempie che di stoppa, al momento del disarmo l’arcata girerà come attorno un perno situato in *b*, e così, se il punto *b* si sarà collocato verso il mezzo del giunto estremo, la pressione su questo giunto si troverà applicata presso il mezzo del giunto medesimo. Il Dupuit poi, nell’intento di ottenere che la detta pressione passi effettivamente per l’indicato punto di mezzo, propone di collocare il punto *b* di 2 o 3

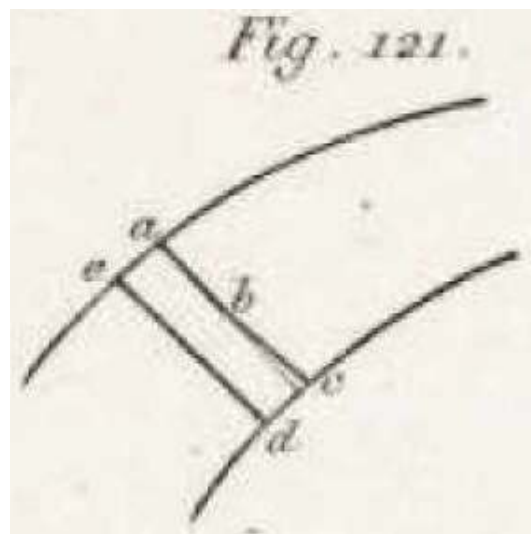


Fig.2. Il “ripiego” di Dupuit, ripreso da Curioni per “centrare” la risultante su un giunto

<sup>40</sup> Curioni G., p. 282

<sup>41</sup> Curioni G., p. 285.

centimetri al di là del centro del giunto verso l'estradosso. Disarmata la volta, si toglierà, per quanto riesce possibile, la stoppa stata posta nel giunto *edcba*, ed in esso si opererà una conveniente stuccatura con buona materia cementizia.”<sup>42</sup>

Infine, una terza soluzione tecnica è suggerita da Curioni per “arcate di grande portata”. In questo caso “si potrebbero anche porre, in corrispondenza di ciascun giunto estremo, due piastre di ghisa, incastrate nella muratura e disposte in modo da comprendere fra loro il detto giunto. Mediante un foglio di piombo interposto a queste piastre e della spessezza di 3 o 4 millimetri, si potrà preservare il metallo contro l'effetto della concentrazione di pressione su una base poco estesa. Anche il fare in modo che le due piastre siano in contatto verso il loro mezzo mediante due superficie cilindriche, incavata l'una e convessa l'altra, può condurre a buonissimi risultati.”<sup>43</sup>

Quest'ultimo “ripiego” è particolarmente interessante, perché consente di rendere determinato il punto di applicazione della risultante alle imposte. Se lo stesso dispositivo venisse posto anche in corrispondenza della chiave, allora anche il punto di applicazione della spinta sarebbe determinato e quindi le ipotesi del metodo pratico di Curioni sarebbero effettivamente soddisfatte. Curioni non arriva a tanto, ma l'idea di applicare delle articolazioni in chiave e all'imposta sarà messa in pratica sullo scorcio del XIX secolo per la costruzione di grandi arcate da ponte.

A conclusione di questa disamina del metodo di Curioni, del quale abbiamo segnalato gli aspetti discutibili in relazione alle ipotesi poste a suo fondamento, dobbiamo riportare il pensiero che lo stesso Curioni, con grande onestà intellettuale, avrebbe espresso di lì a poco dando alle stampe un suo nuovo e notevole studio sulla teoria delle volte nel quale egli abbraccia convintamente e definitivamente la teoria dell'arco elastico. Accennando al suo metodo pratico concepito appena due anni prima, egli stesso riconosce che esso “non segna un vero progresso nella teoria delle vòlte, giacchè, non potendosi giustificare le posizioni state fissate pei punti di applicazione delle pressioni alla chiave e ai giunti estremi, esso non è tale da soddisfare alle severe esigenze della scienza e di quanti vorrebbero vedere tolta ogni indeterminazione ed ogni arbitrarietà nello studio e nella risoluzione dell'arduo problema”<sup>44</sup>

## 5.2. Applicazione al ponte Mosca

Come si diceva all'inizio di questa discussione, il metodo pratico è concepito da Curioni per progettare, in archi simmetrici e simmetricamente caricati, lo spessore del giunto in chiave e di un altro giunto estremo (che coincide con l'imposta per archi con semiampiezza minore di 60°) in modo che, su entrambi, il materiale sia soggetto ad una distribuzione uniforme di tensioni pari alla tensione  $n R$  che esso può sopportare permanentemente senza subire schiacciamenti, ove  $R$  è la tensione che schiaccerebbe il materiale a compressione e  $n$  è il cosiddetto “coefficiente di stabilità” a compressione, usualmente preso uguale a 1/10.

---

<sup>42</sup> Curioni G, p. 285

<sup>43</sup> Curioni G., p. 286

<sup>44</sup> Curioni G., *L'elasticità nella teoria dell'equilibrio e della stabilità delle volte*, “Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino”, ser. II, vol. 28, 1876, pp. 339-360 (letto nell'adunanza del 7 marzo 1875); ser. II, vol. 31, 1877, pp. 118-135 (letto nell'adunanza del 10 giugno 1877); ser. II, vol. 32, 1879, pp.135-184 (letto nell'adunanza del 9 marzo 1879), p.341.

Il metodo richiede di prefissare la curva di intradosso e la curva di carico in base alle altezze effettive trasformate in equivalenti altezze di muratura dell'arcata e di assumere la direzione del giunto estremo, ciò che viene a definire una superficie BIKMN in materiale omogeneo (Fig.3).

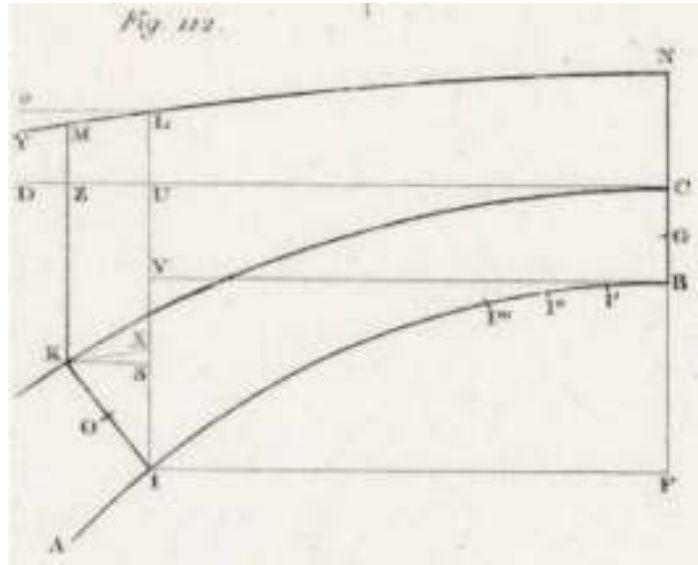


Fig.3. Schema di Curioni per applicare il Metodo pratico

Divisa tale superficie in aree espresse in funzione dei due spessori incogniti del giunto in chiave  $BC = h_0$  e del giunto estremo  $IK = h$ , si tratta allora di mettere in equazione le seguenti due condizioni che traducono le ipotesi del metodo di Curioni:

- 1) il momento dei pesi e della spinta  $H$ , supposta applicata nel centro della chiave, rispetto al centro del giunto estremo deve essere uguale a zero perché è assunta l'ipotesi che la risultante al giunto estremo passi per il suo centro, dove la spinta è assunta eguale alla forza che può stabilmente sopportare il giunto in chiave senza schiacciarsi, ossia  $H = n_0 R_0 h_0$ ;
- 2) la forza normale  $N$  sul giunto estremo  $IK$  dovuta ai pesi e alla spinta in chiave deve essere uguale alla forza che può stabilmente sopportare tale giunto senza schiacciarsi, ossia  $N = n R h$ .

Nel caso di un'arcata nella quale gli spessori dei giunti sono già assegnati, non si tratta più di progettare gli spessori suddetti, ma le ipotesi di Curioni in merito ai punti di applicazione della spinta e della risultante alle imposte possono comunque essere assunte per costruire la corrispondente curva delle pressioni con la quale determinare le tensioni operanti sui giunti.

Applicate al ponte Mosca secondo il modello geometrico elaborato con Grasshopper, tali ipotesi forniscono la curva delle pressioni riportata in Fig.4

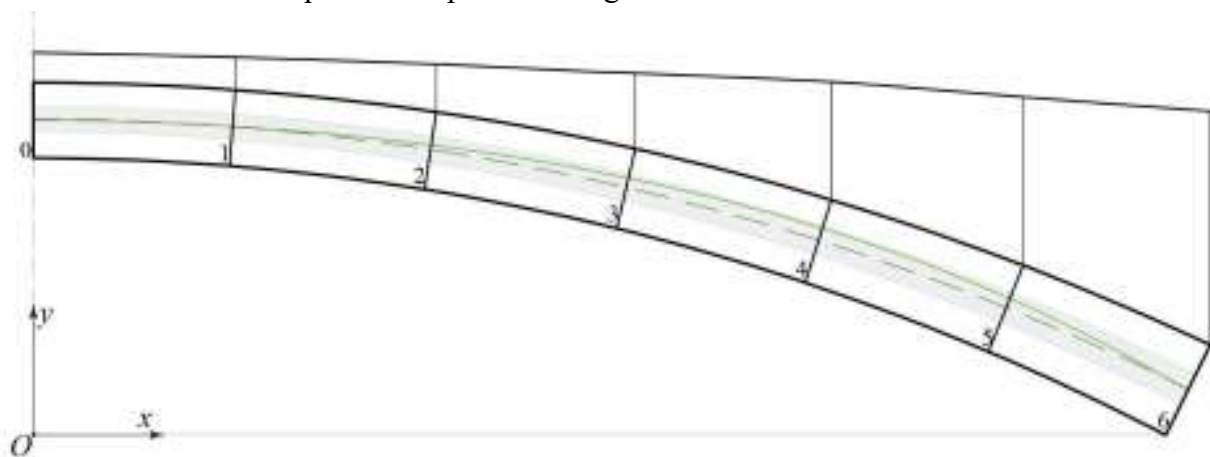


Fig. 4. Curva delle pressioni in base alle ipotesi del metodo di Curioni applicate al ponte Mosca

Con le nostre notazioni introdotte nel Cap.III, il valore della spinta risulta:

$$H = \frac{P_6 b_6}{a_6} = 373636 \text{ kg}$$

In base a questo valore della spinta in chiave, abbiamo determinato i valori riportati nella Tabella seguente

<b>CURIONI (ipotesi del metodo pratico): <math>H=373636</math>; <math>M=0</math></b>						
	$M$	$N$	$e$	$h/6$	$\sigma_i$	$\sigma_e$
Giunto 0	0	373636	0	0,250	249090	249090
Giunto 1	-11360,2	374307	-0,0303	0,252	217991	277779
Giunto 2	-42296,7	376643	-0,1123	0,258	137363	348627
Giunto 3	-80723,9	381753	-0,2115	0,270	51096	420204
Giunto 4	-105549,3	391650	-0,2695	0,287	13636	441770
Giunto 5	-88363,0	408807	-0,2161	0,308	66066	375886
Giunto 6	0	436021	0	0,335	216925	216925

Naturalmente, i numeri riportati in Tabella rappresenterebbero valori effettivi se la curva delle pressioni fosse davvero quella che passa per il centro delle chiave e per il centro delle imposte. Poiché così non è, dato che essa è indeterminata, quei numeri non sono affatto rappresentativi dell'effettiva condizione statica dell'arco.

Tuttavia, essi possono essere utili per svolgere la seguente osservazione sul metodo di Curioni, valida nel caso specifico del ponte Mosca ma estendibile in generale a tutte le arcate nelle quali la curva delle pressioni presenta eccentricità: in tutti i giunti diversi dalla chiave e dalle imposte, ove l'eccentricità è supposta nulla, le tensioni di compressione (in questo caso all'estradosso) sono sempre maggiori di quelle massime ammissibili assunte da Curioni in chiave e alle imposte, per cui il suo metodo fornisce valori di tensioni non ammissibili per tutti i giunti diversi dalla chiave e dalle imposte. Ad esempio, nel giunto 4 nel quale l'eccentricità è massima, la tensione all'estradosso vale  $\sigma_4^e = 441770 \text{ kg/m}^2$ , cioè 1,77 volte quella uniforme in chiave e 2,03 volte quella uniforme alle imposte. Quindi, se con Curioni gli spessori in chiave e alle imposte sono progettati per sopportare il valore ammissibile della tensione di compressione, nei giunti compresi fra essi la tensione supererà necessariamente quel limite ammissibile e quindi il progetto secondo il metodo di Curioni non garantisce la verifica di resistenza.



## 6. La cosiddetta “regola di Méry” (1840)

### 6.1. Sfogliando il *Mémoire di Méry*

Fra i vari metodi utilizzati per rendere “forzatamente” determinato il tracciamento della curva delle pressioni in archi simmetrici per forma e carico, ha avuto particolare fortuna storica quello facente impropriamente capo al nome di Édouard-Henry-François Méry<sup>45</sup>, tanto da essere ancor oggi riportato in testi e manuali riguardanti la verifica di volte in muratura.

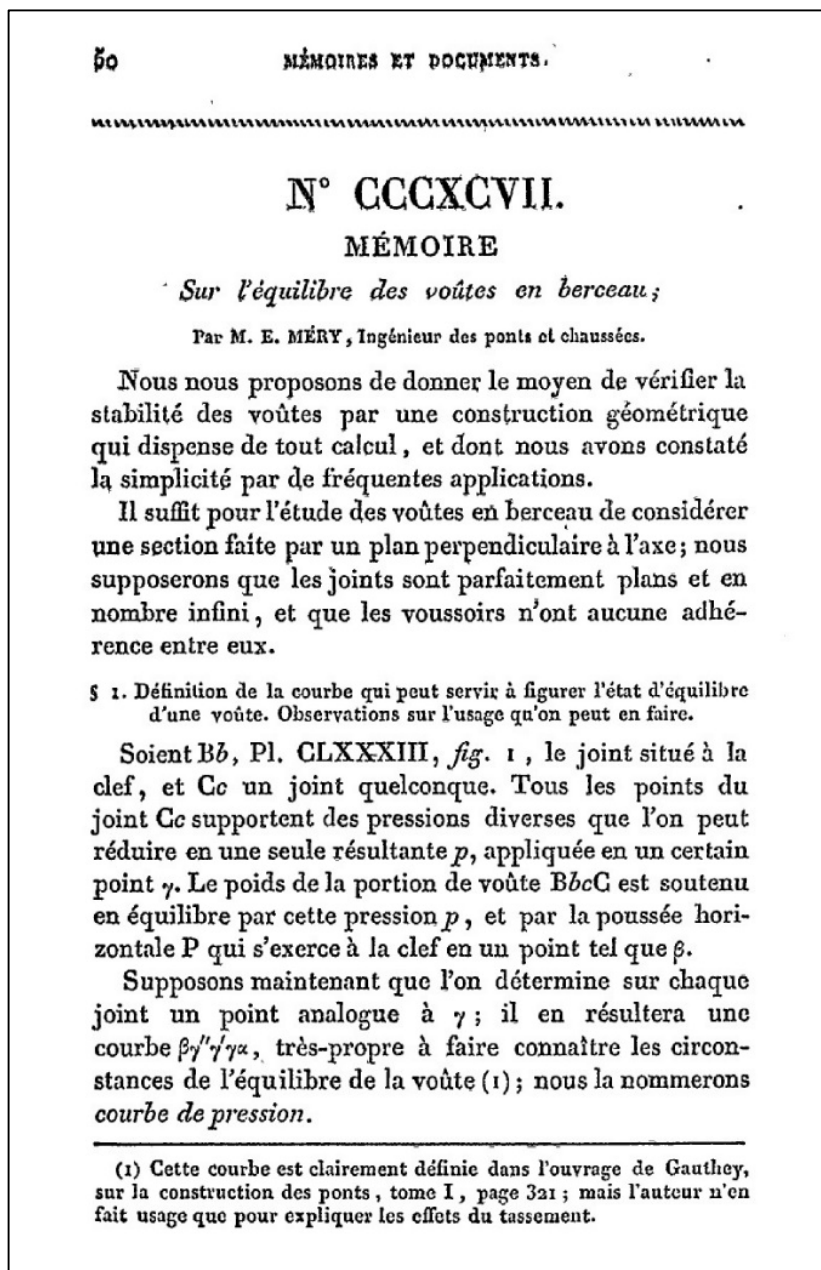


Fig. 1. Pagina iniziale del *Mémoire di Méry*

Probabilmente, una delle ragioni di tale fortuna è connessa all'uso metodico dello strumento grafico della curva delle pressioni, molto più duttile ed espressivo rispetto ai calcoli analitici tradotti in tabelle numeriche che si trovano in studi con finalità analoghe a quello di Méry. Un'altra ragione, meno comprensibile alla luce delle osservazioni fatte in precedenza in merito all'uso di ipotesi

<sup>45</sup> Méry E., *Sur l'équilibre des voûtes en berceau*, “Annales des Ponts et Chaussées”, vol. 19, 1840, pp. 50-70.

arbitrarie per tracciare univocamente la curva delle pressioni, è correlata appunto alla cosiddetta “regola di Méry”.

Nel paragrafo 3 del *Mémoire Méry* si sofferma su ciò che egli chiama l'*équilibre mathématique*, ossia la condizione per la quale una volta, di forma simmetrica e supposta in materiale con infinita resistenza a compressione, possiede lo *spessore minimo* per contenere un'unica curva delle pressioni all'interno delle linee di intradosso e di estradosso.

Ovviamente, tale curva delle pressioni, proprio perché unica per l'equilibrio, risulterebbe passante per gli spigoli di almeno cinque giunti, alternativamente all'intradosso e all'estradosso, in modo da corrispondere ad una situazione di collasso per formazione di meccanismo rotazionale. È in questa parte che il ricorso alla curva delle pressioni si rivela efficace, in particolare per reinterpretare le esperienze di Boistard sul collasso di modelli di archi in piccola scala o per discutere i risultati ottenuti analiticamente da Audoy sulla ricerca dello spessore minimo di varie tipologie di volte soggette a diverse condizioni di carico.

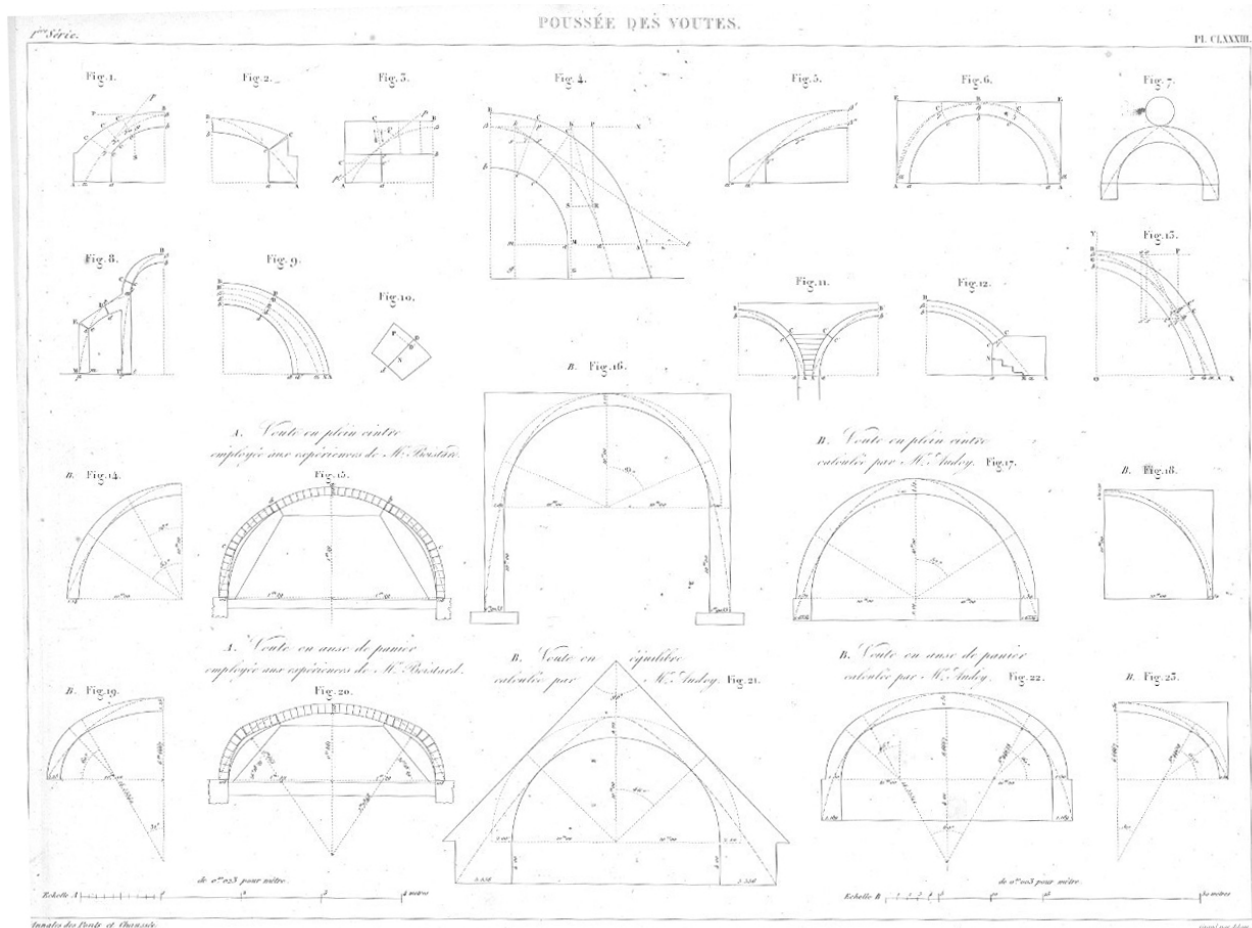


Fig.2. Planche tratta dal Mémoire di Méry con disegni della curva delle pressioni in archi in “equilibrio matematico”

Volendo poi mettere in conto che, nella realtà, i materiali non hanno resistenza infinita, nel successivo paragrafo 4 Méry osserva che, “dans la pratique”, la curva delle pressioni “ne peut donc jamais atteindre l’extrémité des voussoirs (...) Par conséquent elle sera renfermée dans des limites

plus resserrées”<sup>46</sup>. Questi limiti più ristretti sono individuati da Méry in base al ragionamento seguente: “Nous prendrons donc sur chaque joint tel que  $Dd$  des longueurs égales  $DD$ ,  $dd$  calculés de manière que chacune des surfaces  $DD$ ,  $dd$  soit capable de supporter sans écrasement les deux tiers de la pression à laquelle le joint est exposé; et nous tracerons ainsi deux courbes  $BDA$  et  $bda$  destinées à marquer les limites que la courbe des pressions ne peut dépasser.”<sup>47</sup>

In sostanza, per una volta di geometria e carico assegnati, Méry immagina di tracciare al suo interno due curve aventi su ogni giunto le distanze  $DD$  dall’estradosso e  $dd$  dall’intradosso scelte in base al suddetto criterio. Nella letteratura successiva, quelle due curve  $BDA$  e  $bda$  hanno assunto il significato delle curve che definiscono il terzo medio, per quanto il criterio di Méry non implichi necessariamente questa scelta, come si riconosce anche dalla posizione che esse assumono nel disegno su cui l’autore svolge il suo ragionamento.

Adeguandoci a quanto la storia ci ha consegnato, la regola per tracciare la curva delle pressioni in arcate con forte ribassamento prevede che essa passi per l’estremo superiore del terzo medio in chiave e per l’estremo inferiore del terzo medio all’imposta.

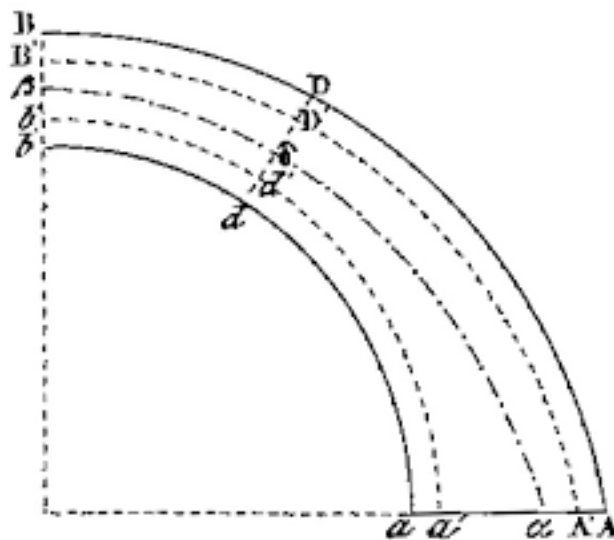


Fig.3. Disegno di Méry per esporre il suo criterio per tener conto della resistenza finita dei materiali

## 6.2. Applicazione al Ponte Mosca

Applicata al ponte Mosca secondo il modello geometrico elaborato con Grasshopper, l’andamento della curva delle pressioni sarebbe quello riportato in Fig.4.

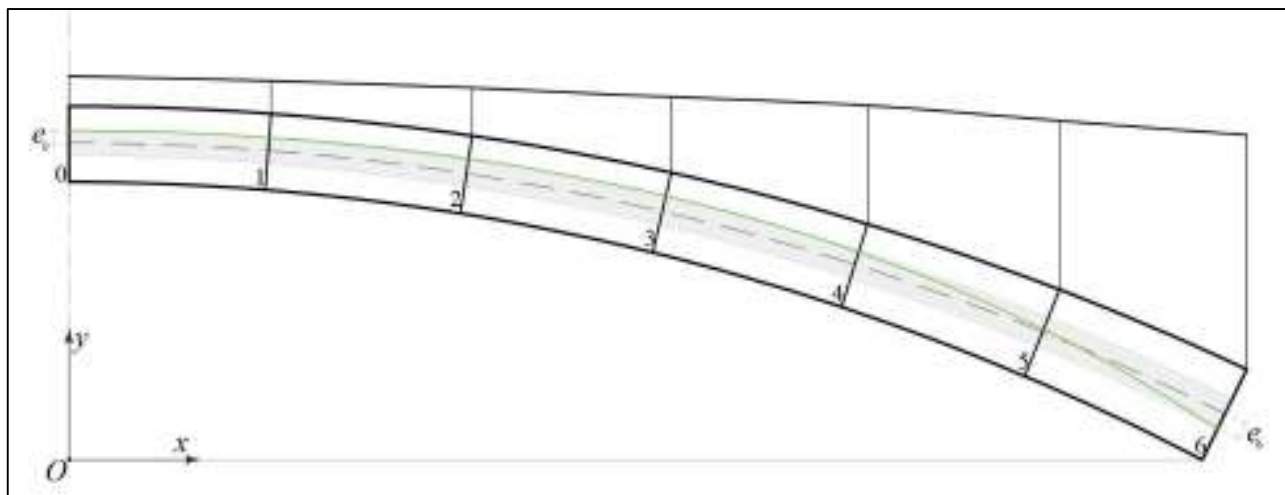


Fig. 4. Curva delle pressioni secondo la cosiddetta “regola di Méry”

<sup>46</sup> Méry, p. 64

<sup>47</sup> Méry, p. 65

Le ipotesi della regola suddetta portano a determinare i seguenti valori dei bracci della spinta e del peso della semiarcata rispetto all'estremo inferiore del terzo medio all'impasta:

$$a_6^{Méry} = a_6 + \frac{1}{6}h_0 + \frac{1}{6}h_6 \cos \varphi_6 = 5,913\text{m}$$

$$b_6^{Méry} = b_6 - \frac{1}{6}h_6 \sin \varphi_6 = 8,636\text{m}$$

Di conseguenza, il valore della spinta in chiave risulta

$$H = \frac{P_6 b_6^{Méry}}{a_6^{Méry}} = 333139\text{kg}$$

In base a questo valore della spinta in chiave, abbiamo determinato i valori riportati nella Tabella seguente.

<b>MÉRY</b>						
	<b>M</b>	<b>N</b>	<b>e</b>	<b>h/6</b>	<b>σ<sub>i</sub></b>	<b>σ<sub>e</sub></b>
Giunto 0	-83284	333138	-0,25	0,25	0	444185
Giunto 1	-88507	333928	-0,265	0,252	-11760	454049
Giunto 2	-101069	336618	-0,300	0,258	-35236	469583
Giunto 3	-108990	342317	-0,318	0,27	-37871	460484
Giunto 4	-91357	353033	-0,258	0,287	19967	390536
Giunto 5	-20008	371234	-0,053	0,308	165589	235744
Giunto 6	133903	399713	0,335	0,335	397724	0

Come per le precedenti analisi di Mosca e Curioni, l'attendibilità di tali numeri è resa discutibile dalla scelta a priori sui punti di passaggio della curva delle pressioni, nel senso che i valori trovati non possono essere considerati quelli che si realizzano effettivamente.

Si riconosce, inoltre, che in base alla geometria del ponte Mosca la curva delle pressioni secondo la cosiddetta regola di Méry fuoriesce dal terzo medio verso l'estradosso dal giunto 1 al giunto 3, per cui su questi tre giunti le tensioni all'intradosso sarebbero di trazione (indicate col segno meno) e quindi l'arco dovrebbe aprirsi all'intradosso in corrispondenza dei tre giunti suddetti.

## 7. La soluzione unica: l'arco a tre cerniere

### 7.1. Riflessioni critiche sulla ricerca della “vera” curva delle pressioni


Tutte le analisi svolte finora sul ponte Mosca offrono il fianco a considerazioni critiche di varia natura che ne inficiano l'attendibilità dei risultati.

Le trattazioni di Mosca, Curioni e Méry, come tutte quelle basate sull'assunzione di ipotesi a priori sulla posizione dei punti di applicazione della spinta in chiave e della risultante alle imposte, sono discutibili perché rimuovono arbitrariamente l'indeterminazione statica dell'equilibrio dell'arco e quindi non possono descrivere le condizioni effettive.

D'altronde, anche la trattazione di Castigliano, pur nella correttezza dell'impostazione teorica che caratterizza tutti i metodi generali per la soluzione dei sistemi iperstatici, risulta egualmente discutibile nei risultati quando applicata al materiale “muratura”. Come si è visto nel Cap.III, le indagini che abbiamo svolto considerando diversi valori del rapporto fra i moduli elastici di pietra e malta oppure tenendo conto di cedimenti vincolari alle imposte, hanno mostrato quanto la soluzione elastica sia sensibile a tali parametri. Poiché non è facile determinare con certezza il rapporto fra i moduli elastici o controllare l'entità dei cedimenti, non si può essere sicuri che il calcolo elastico fornisca la “vera” curva delle pressioni e quindi l'effettivo stato di sollecitazione interna della struttura voltata.

Su questo punto, valga in modo definitivo il giudizio maturo che, a più di quarant'anni dallo



  
George Fillmore Swain  
San Francisco 1857-Boston 1931

studio di Castigliano, doveva esprimere l'ingegnere americano George Fillmore Swain, un elasticista di formazione capace però di riflettere criticamente sul significato di applicare i metodi dell'elasticità allo *stone arch*.

Riferendosi al contesto statunitense, ma con inevitabile estensione a quello europeo, Swain rimarca che “the elastic theory seems to be firmly intrenched in American engineering literature. Perhaps some who use it do not realize its defects and assumptions, and like it because it is complex and mathematical. It seems to be a curious characteristic of the human mind that it so often prefers complexity to simplicity, and mistakes obscurity for profundity [...] The writer believes in elastic methods, if they are necessary; not if they are unnecessary and if a simpler method is just as good”<sup>48</sup>.

Questa secca presa di posizione contro ogni applicazione acritica dei metodi dell'elasticità è accompagnata da un decalogo facente il punto di quanto quei metodi richiedono e di quanto si verifica nella realtà. “The elastic theory” si legge all'articolo 22, is often termed “exact”. The assumptions made in it are the following:

---

<sup>48</sup> Swain G. F., *Structural engineering*. Vol. III, *Stresses, graphical statics and masonry*, McGraw-Hill Book Company, New York 1927, p. 424.

1. That the ends are rigid and do not rotate (this is untrue).
2. That the span does not change at all (this is untrue).
3. That the material is homogeneous (this is untrue).
4. That the modulus of elasticity is constant, not changing with the pressure (this is untrue, though perhaps close).
5. That the terms with  $r$  in the denominator may be neglected (this may be far from true).
6. That the integrals may be replaced by summations (this is approximate).
7. That the formulae for flexure are exact (this is untrue).
8. The stresses due shrinkage are neglected.
9. That the section is a rectangle (this is untrue; see Art. 18).
10. That the loads may be determined accurately (this is untrue; both the loads and their distribution on the arch are quite uncertain).

Di fronte a questo imbarazzante decalogo di smentite, l'unica via d'uscita per determinare univocamente la curva delle pressioni, e quindi per quantificare in modo attendibile lo stato di sollecitazione interna di un'arcata, consiste nell'imporre forzatamente il suo passaggio attraverso tre punti prestabiliti, ossia nel rendere isostatico un sistema che per sua natura è iperstatico. Proprio in questa logica, sulla fine del XIX secolo vennero proposte e realizzate grandi arcate in muratura dotate di articolazioni in chiave e alle imposte, quindi schematizzabili secondo il modello *isostatico* dell'arco a tre cerniere.

Come abbiamo visto esponendo il metodo di Curioni, l'idea di "centrare" forzatamente la curva delle pressioni tramite specifici espedienti tecnologici era già stata suggerita da Dupuit, e sostenuta dallo stesso Curioni, con lo scopo di rendere soddisfatte certe ipotesi assunte a priori sulla posizione della curva delle pressioni alle imposte. I due citati autori, tuttavia, non avevano in mente di portare alle estreme conseguenze il ricorso a questi escamotage, collocando anche in chiave un'ulteriore "ripiego" per obbligare la spinta ad operare al centro del giunto.

Questo elementare accorgimento, in effetti, fu proposto per la prima volta nel 1878 da Brosselin per il progetto del ponte di Tolbiac a Parigi, prevedendo di collocare in chiave e ai giunti di rottura due assise di conci in pietra da taglio molto resistente in modo da poter ridurre lo spessore della sezione alla sola parte centrale dei giunti. La proposta di Brosselin non ebbe però applicazione e i primi ponti basati sullo schema a tre cerniere vennero costruiti in Germania a partire dagli anni ottanta ad opera di Köpcke<sup>49</sup>, che realizzò l'articolazione attraverso il taglio concavo e convesso dei due conci in corrispondenza dei giunti critici, e soprattutto di Karl Leibbrand e Max Leibbrand: il primo<sup>50</sup> eseguì dal 1885 vari ponti articolati introducendo fogli di piombo in corrispondenza dei terzi medi delle sezioni in chiave e alle imposte; il secondo<sup>51</sup> adottò vere e proprie cerniere metalliche in ghisa nei ponti di Inzigkofen (1895) e di Neckarhausen (1899-1900).

<sup>49</sup> Köpcke C., *Über die Verwendung von drei Gelenken in Steingewölben*, Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover, 1888, pp. 374-380.

<sup>50</sup> Leibbrand K., *Steinbrücken mit gelenkartigen Einlagen*, "Zeitschrift für Bauwesen", Bd. 38, 1888, coll. 235-260.

<sup>51</sup> Leibbrand M., *Donaubrücke bei Inzigkofen in Hohenzollern*, "Zeitschrift für Bauwesen", Bd. 46, 1896, coll. 272-292; *Die Neckarbrücke bei Neckarhausen (Hohenzollern)*, "Zeitschrift für Bauwesen", Bd. 53, 1903, coll. 455-476.



Lo schema articolato a tre cerniere, che dopo le prime applicazioni tedesche trovò impiego in altri paesi europei ed anche negli Stati Uniti, fu razionalmente adottato in caso di prevedibili cedimenti del terreno e con il proposito di annullare il dannoso effetto delle variazioni termiche e delle deformazioni delle centine durante la costruzione. Non mancarono inoltre soluzioni che, pur usufruendo dei vantaggi delle articolazioni prima e dopo il disarmo dell'arcata, non rinunciarono alla rigidità e al monolitismo della costruzione finita attraverso il bloccaggio delle stesse, come nel caso del ponte ferroviario di Morbegno sulla linea Colico-Sondrio, costruito fra il 1902 e il 1903.

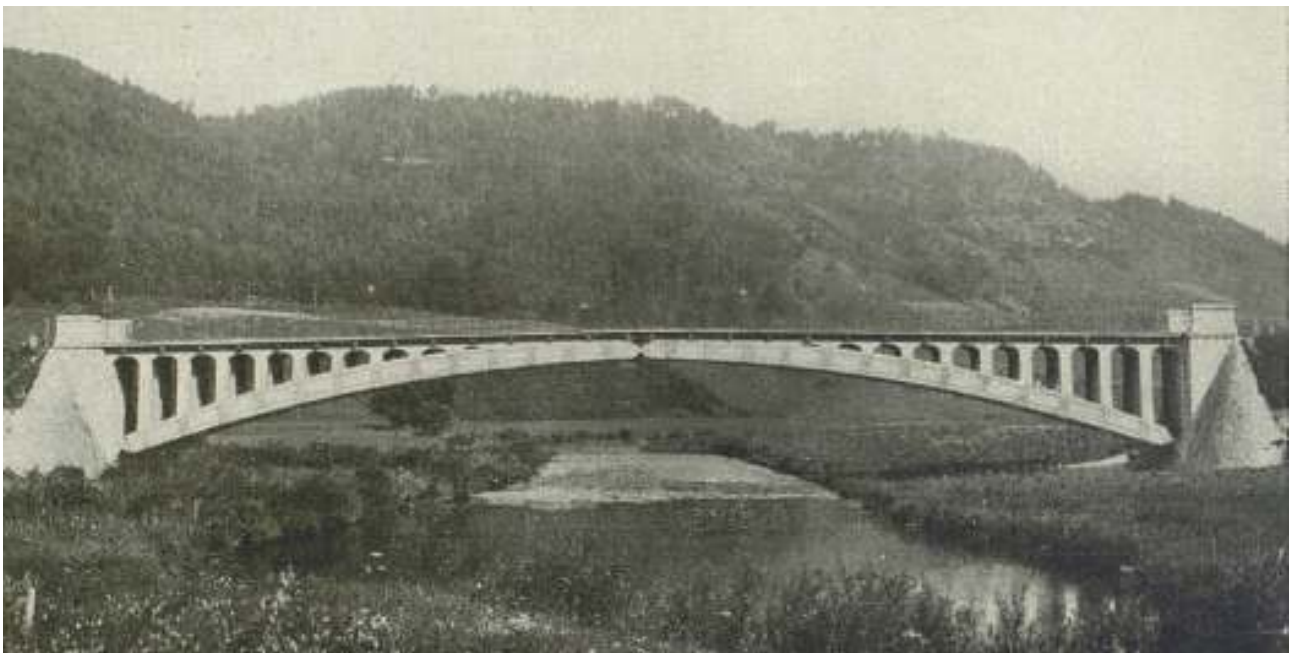
La scelta a favore dell'articolazione delle volte in muratura venne caldeggiata anche dal celebre costruttore di ponti francese Paul Séjourné, autore della monumentale opera *Grandes voûtes* (1913-1916) il cui tomo IV è interamente dedicato alle *Voûtes articulées*.

Con il suo solito stile icastico, così si esprimeva Séjourné in merito al ricorso a questa soluzione strutturale: “Dans les voûtes articulées, on est sûr des efforts: on y peut faire plus et mieux travailler les matériaux. Plus souples, elles se prêtent, sans fissures, à des mouvements qui troublent les autres. Il convient vraiment d'articuler les voûtes dont les appuis peuvent reculer, s'enforcer inégalement. Il faut donc étudier les voûtes articulées: elles le méritent”<sup>52</sup>

Qui di seguito riportiamo fotografie e disegni tratti dal citato volume IV sulle *Grandes voûtes*.



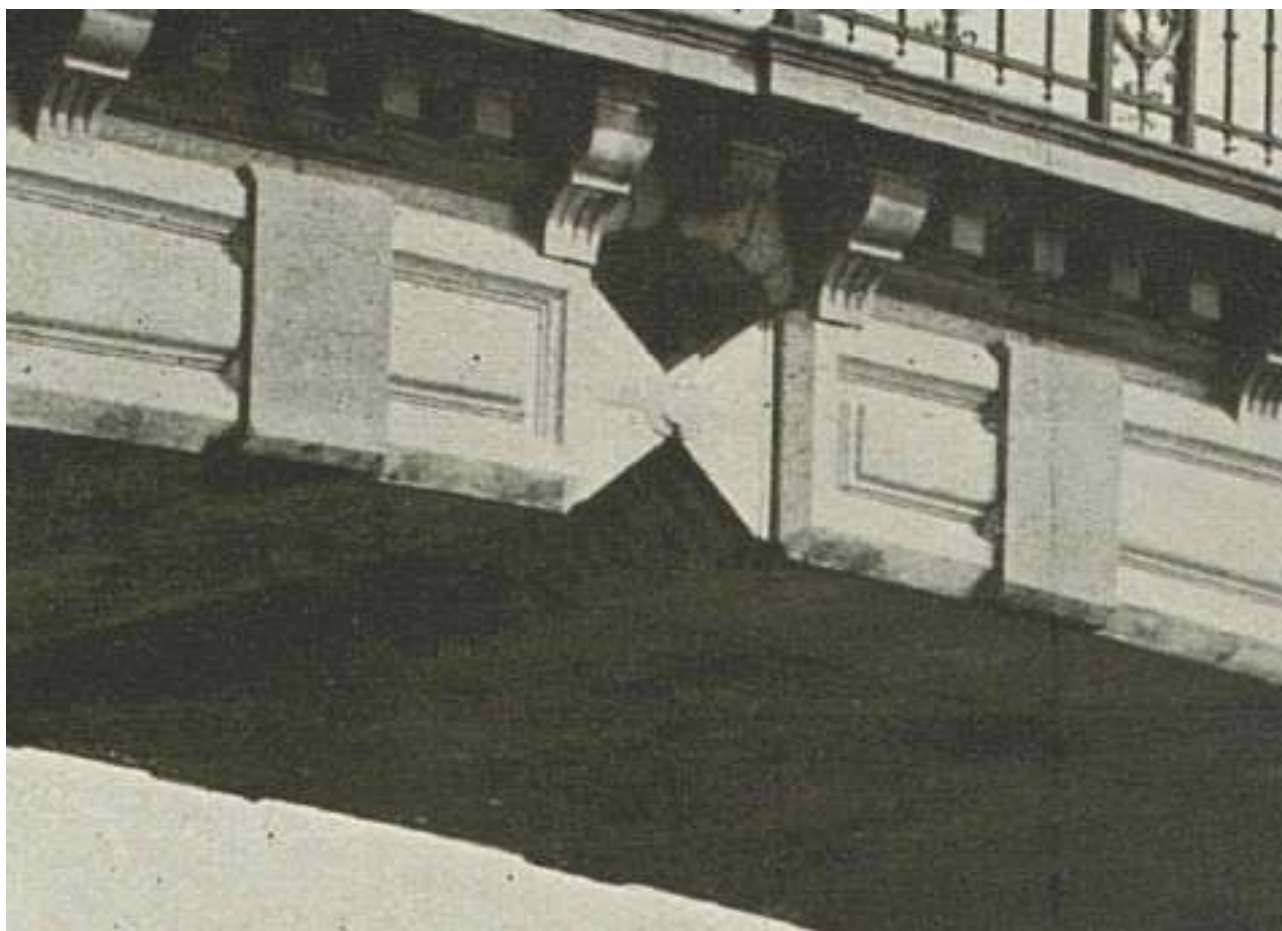
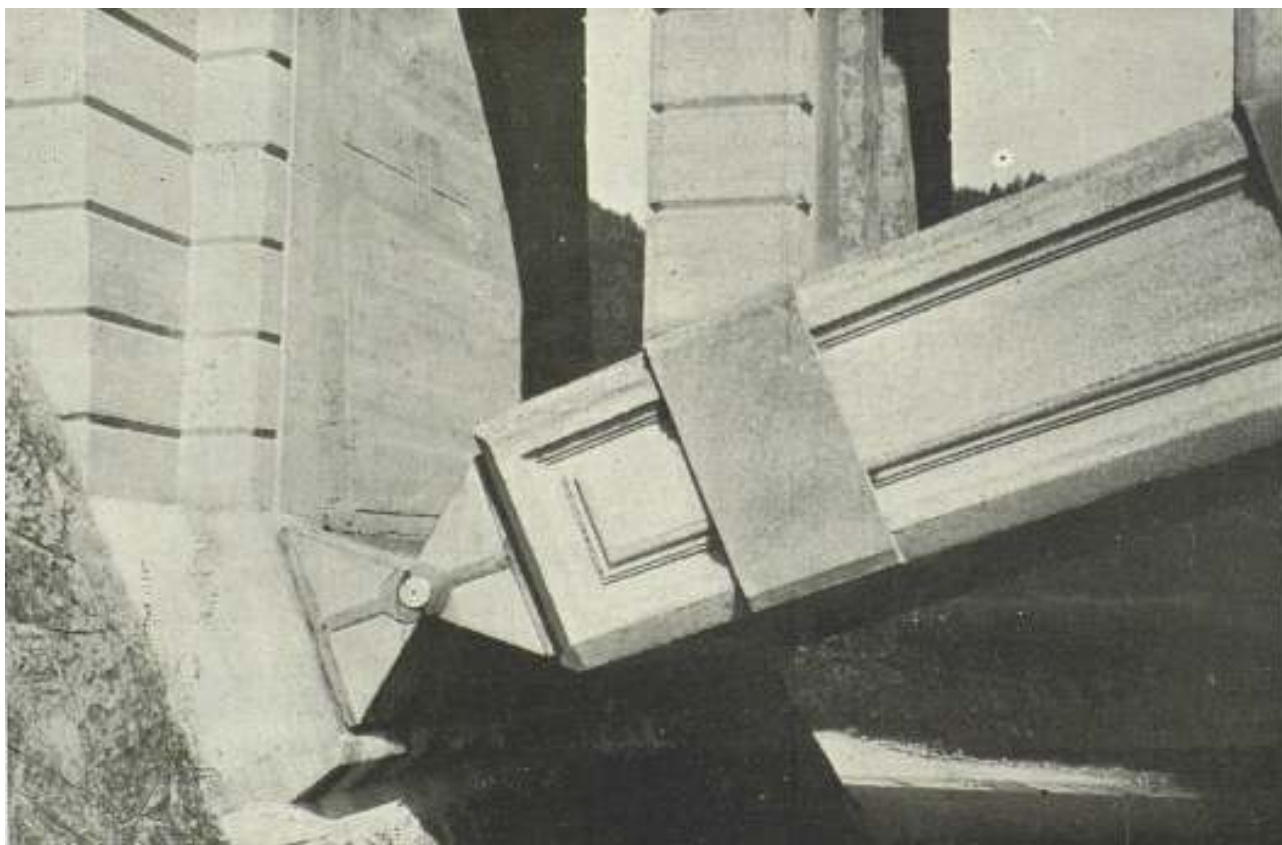
Paul Séjourné (Orléans 1851-Paris 1939)



Ponte sulla Neckar, presso la stazione di Neckarhausen (1899-1900), in cemento con articolazioni in ghisa, in Séjourné P., *Grandes Voûtes*, tome IV, 1913, p. 231.

<sup>52</sup> Séjourné P., *Grandes voûtes*, Tome IV, Tardy Pigelet, Bourges 1913.





Ponte sulla Neckar, presso la stazione di Neckarhausen, in Séjourné P., *Grandes Voûtes*, tome IV, 1913, p. 233. Particolare delle articolazioni in ghisa all'imposta e in chiave.

# PONT CORNÉLIUS, SUR L'ISAR, A MUNICH (BAVIÈRE)

entre la Corneliusstrasse et la Schreiegerstrasse

1902-1903

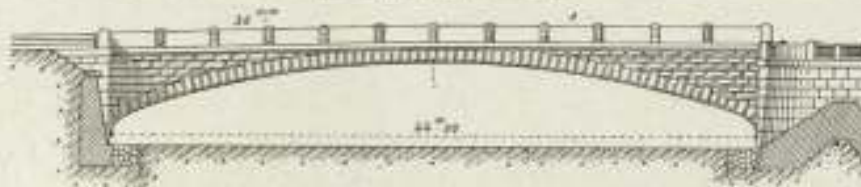
$\bar{A}^{\text{m}} r^{10} \geq 40 \text{ m}^3$

$f_1$  — Ensemble amont — 0<sup>m</sup>75

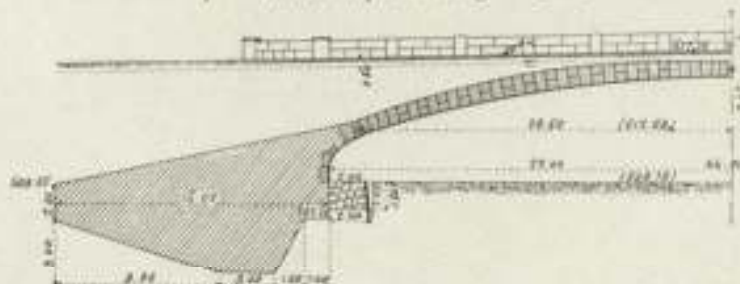


Voûte 1

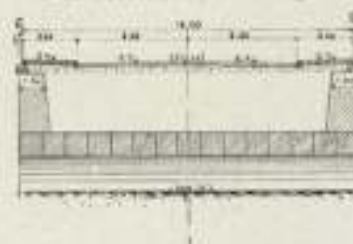
$f_2$  — Elevation — 2<sup>m</sup>00



$f_3$  — Demi-coupe en long — 2<sup>m</sup>005

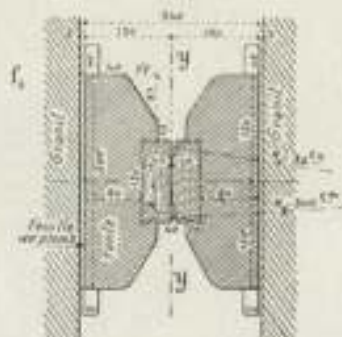


$f_4$  — Coupe en travers aux retombées — 2<sup>m</sup>005

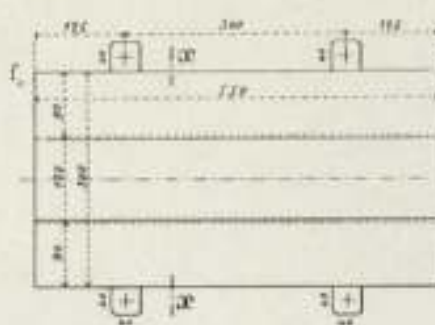


Retenues — 10<sup>m</sup>

Coupe sur xx de  $f_4$



Vue sur yy de  $f_4$



Ponte Cornélius a Monaco di Baviera, in cemento con articolazioni in ghisa e acciaio (1902-1903), vista frontale, sezione di mezza arcata, sezione trasversale, particolare del giunto in ghisa e acciaio, in Séjourné P., *Grandes Voûtes*, 1913, p.180.

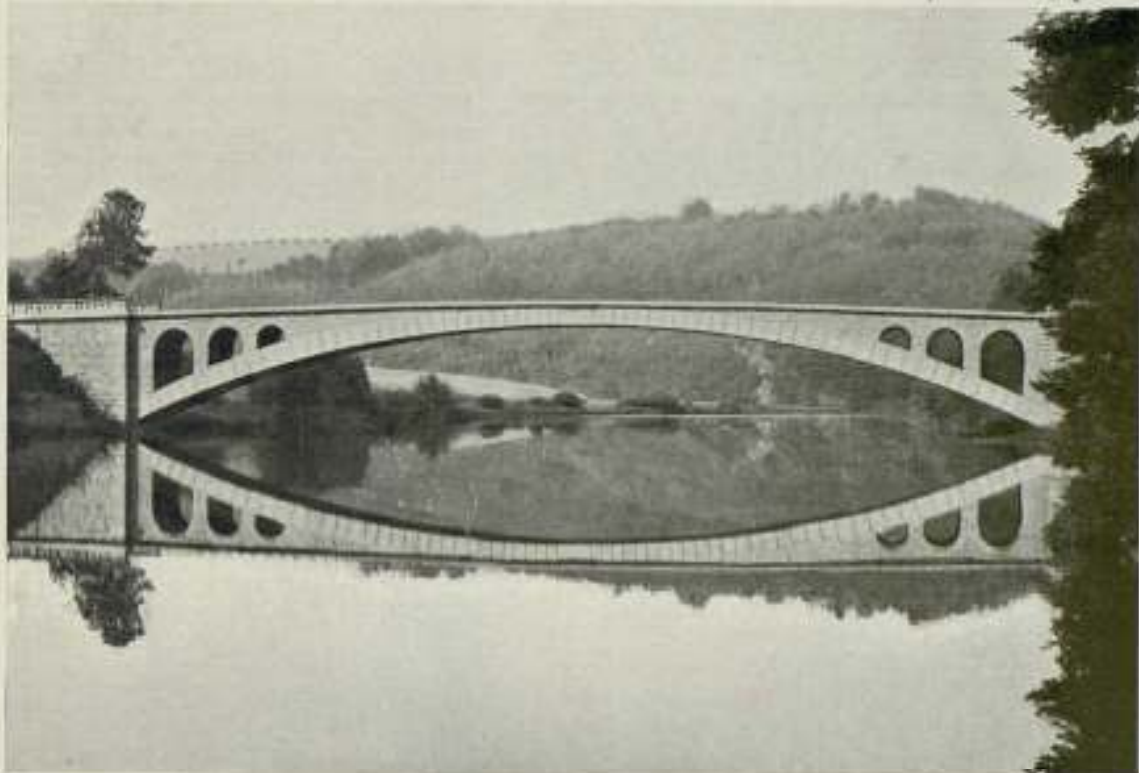
# PONT SUR LA ZWICKAUER MULDE, PRÈS DE GÖHREN (SAXE)

*Route de Göhren à Cossen*

1903-1904

$\bar{A}^2 r^{12} \geq 40^m)^2$

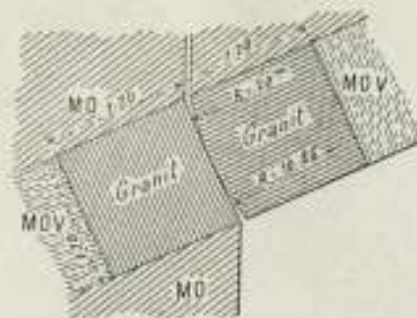
$\Phi_1 - \text{aval} - (S_1)$



## 1. Articulations ( $f_1$ , $f_2$ ).

15<sup>mm</sup>

$f_2$  — Retombées



Ponte sulla Zwickauer Mulde, presso Göhren, in pietra con cerniere in granito con contatto basculante (1903-1904), in Séjourné P., *Grandes Voûtes*, 1913, p. 139.





Cerniera in lamiera di piombo collocata in corrispondenza del terzo medio nel ponte Schmiech a Ehingen, 1895, da Holzer and Veihelmann, 2015, p. 60



Articolazione in chiave del ponte del Principe Reggente a Berlino, 1907, da Holzer and Veihelmann, 2015, p. 63.

## 7.2. Applicazione al Ponte Mosca

Nel caso del ponte Mosca, pensato articolato in chiave e alle imposte, la curva delle pressioni è quella già tracciata in base alle ipotesi di Curioni, con la differenza che mentre in Curioni quella curva era arbitraria, ora diventa effettiva.

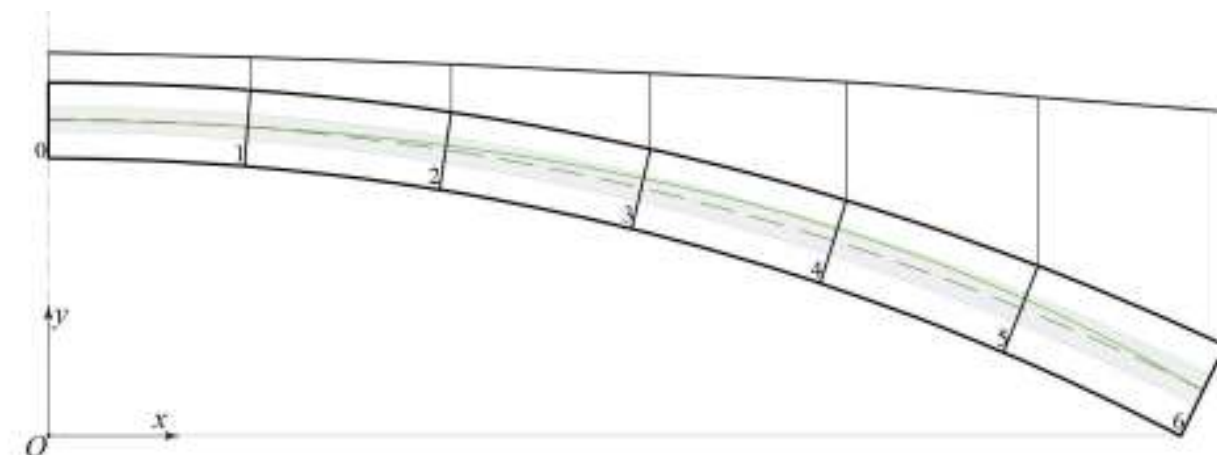


Fig. Curva delle pressioni che si realizzerebbe nel ponte Mosca in presenza di articolazioni in chiave e alle imposte

Arco a tre cerniere: $H=373636$ ; $M=0$						
	$M$	$N$	$e$	$h/6$	$\sigma_i$	$\sigma_e$
Giunto 0	0	373636	0	0,250	249090	249090
Giunto 1	-11360,2	374307	-0,0303	0,252	217991	277779
Giunto 2	-42296,7	376643	-0,1123	0,258	137363	348627
Giunto 3	-80723,9	381753	-0,2115	0,270	51096	420204
Giunto 4	-105549,3	391650	-0,2695	0,287	13636	441770
Giunto 5	-88363,0	408807	-0,2161	0,308	66066	375886
Giunto 6	0	436021	0	0,335	216925	216925

Nel caso ora in esame, i numeri riportati in Tabella possono essere considerati effettivi perché tale è la curva delle pressioni in presenza di articolazioni in chiave e alle imposte.

Si osservi inoltre che, essendo l'arco a tre cerniere uno schema isostatico, il valore della spinta è dedotto nell'ambito della meccanica dei sistemi rigidi, quindi non dipende dalla deformabilità dell'arcata o dalla presenza o meno di malta nei giunti, come invece accade nell'analisi elastica di Castigliano.

Non solo. L'eventuale presenza di cedimenti vincolari, che influenza inevitabilmente e sensibilmente la soluzione elastica per l'arco iperstatico quand'anche tali cedimenti fossero sufficientemente piccoli da ritenere valida l'ipotesi dei piccoli spostamenti, non influenza invece la soluzione di corpo rigido perché per piccoli spostamenti è lecito confondere la configurazione iniziale con quella finale dovuta ai cedimenti stessi. In ogni caso, anche se i cedimenti fossero di entità tale da non poter confondere la configurazione finale con quella iniziale, sarebbe comunque possibile calcolare le reazioni vincolari (e quindi lo stato di sollecitazione della volta articolata) nell'ambito della meccanica dei sistemi rigidi perché lo schema è sempre isostatico.

## 8. Il metodo delle aree di stabilità di Alfred Durand-Claye (1867)

### 8.1. Ragioni a favore

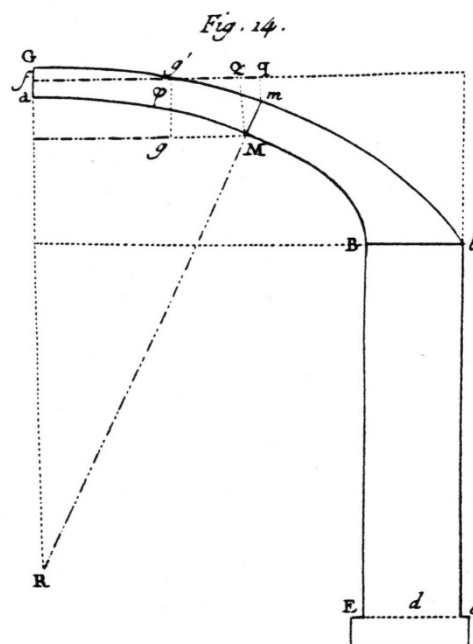
Nel concepire l'impianto espositivo di questa tesi siamo partiti, in modo apparentemente paradossale, dalla fine della vicenda che coinvolse, per almeno due secoli, ingegneri, architetti e matematici sul tema della teoria delle volte in muratura. Nella scaletta della storia, in effetti, la trattazione di Castigliano basata sui metodi dell'elasticità costituisce un capolinea che, oltretutto, non ammette possibilità di ritorno. Detto in termini più espliciti, se la soluzione elastica consente finalmente di rimuovere l'indeterminazione connessa all'equilibrio dell'arco come sistema iperstatico, per quale motivo ricorrere ad ipotesi arbitrarie sui punti di passaggio della curva delle pressioni quando esiste un metodo razionale che consente di determinare, fra le infinite curve equilibrate, l'unica congruente e quindi "vera"?

Proprio qui sta il punto, però. Come abbiamo già osservato nel Capitolo precedente dedicato all'escamotage dell'arco a tre cerniere, la pretesa di individuare la soluzione "unica" attraverso l'applicazione dei metodi elastici per i sistemi iperstatici rischia di essere illusoria, come ben doveva riconoscere Swain stilando il suo significativo decalogo.

D'altra parte, poiché la soluzione isostatica dell'arco a tre cerniere è percorribile solo per il progetto di nuove arcate, ci si potrebbe chiedere se, di fronte alla verifica di una volta già costruita, esistono metodi scientificamente fondati che possano costituire un'alternativa razionale a quelli basati sull'elasticità.

Ecco, crediamo che la risposta a questa domanda sia affermativa e vada ricercata nell'approccio metodologico adottato in quei metodi, che potremmo dire "pre-elastici", concepiti per determinare *tutte le soluzioni di equilibrio* senza pretendere di individuare quella che si realizza effettivamente.

Il primo studio di rilievo in questa logica operativa risale a Coulomb<sup>53</sup>, che nel 1777 formulò il cosiddetto *metodo dei massimi e dei minimi* con lo scopo di determinare, per un arco simmetrico e simmetricamente caricato, tutte le spinte in chiave compatibili con l'equilibrio di ogni sua porzione rispetto al ribaltamento intorno agli spigoli dei giunti e allo scorrimento lungo i loro piani. Ovviamente, questo approccio si basa, per usare un linguaggio moderno, sul modello meccanico dell'arco come sistema di conci rigidi ed infinitamente resistenti posti a contatto monolaterale scabro, l'unico modello disponibile all'epoca se si tiene conto che le acquisizioni teoriche sulla deformabilità dei solidi e sulla risoluzione di sistemi iperstatici erano ancora lontane a venire.



Disegno tratto dall'*Essai* di Coulomb per la ricerca delle spinte ammissibili per l'equilibrio

<sup>53</sup> Coulomb C.A, *Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture*, "Mémoires de mathématique & de physique, présentés à l'Académie Royale des Sciences par divers savans", vol. 7, année 1773, Paris 1776, pp. 343-382.

Nella linea indicata da Coulomb si collocano numerosi contributi di autori<sup>54</sup> della prima metà dell'Ottocento i quali applicarono il suo metodo a varie tipologie di archi e di carico, anche con lo scopo di ricercare lo spessore minimo per il quale l'equilibrio ammette un'unica soluzione, quella corrispondente all'attivazione del collasso per formazione di meccanismo di corpo rigido.

L'ultimo e più importante esponente da inserire in questa linea metodologia è Alfred Durand-Claye<sup>55</sup>, che nel 1867 sistematizzò in modo definitivo e rigoroso le idee di Coulomb nel cosiddetto *metodo delle aree di stabilità* sul quale vogliamo ora soffermarci.

Osserviamo anzitutto che Durand-Claye elabora il suo metodo novant'anni dopo l'*Essai* di Coulomb e appena dieci anni prima dell'analisi elastica di Castigliano che abbiamo assunto come ideale capolinea storico nello sviluppo della teoria delle volte.

Diplomatosi all'École Polytechnique nel 1863 e uscito dall'École des Ponts et Chaussées come primo del suo corso nel 1866, egli è quindi perfettamente al corrente degli avanzamenti teorici della meccanica applicata alle costruzioni e ben conosce lo stato dell'arte nel quale versa la teoria delle volte, impacciata fra il riferimento alla vecchia tradizione facente capo al modello coulombiano e l'accoglienza dei nuovi temi riguardanti la deformabilità e la resistenza dei materiali impiegati nelle strutture.

Come abbiamo detto, questa imbarazzante impasse, che è la responsabile degli infruttuosi tentativi di Méry, Curioni, Mosca e numerosi altri autori per rimuovere l'indeterminazione statica dell'arco sulla base di ipotesi arbitrarie, doveva risolversi con la definitiva adesione alla logica elasticista secondo la quale l'arco diventa una trave iperstatica ad asse curvilineo per la quale i metodi elastici forniscono l'esatta e unica soluzione.

Tuttavia, rispetto a questa scelta di campo, il metodo di Durand-Claye offre un'alternativa ragionevole che merita di essere considerata. Il proposito alla base di questo metodo è ben espresso da Durand-Claye nelle pagine introduttive del suo studio, laddove egli critica le ipotesi di tentativo sino ad allora introdotte per il tracciamento della curva delle pressioni: “Ce sont ces tâtonnements et ces hypothèses arbitraires que nous cherchons à supprimer. Nous ne déterminerons plus, un peu au hasard, une solution quelconque d'équilibre: connaissant les profils, les charges, la résistance effective ou réduite imposés aux matériaux, nous déterminerons par des constructions géométriques *toutes les solutions d'équilibre* que peut comporter la voûte”<sup>56</sup>



Alfred Durand-Claye (Paris 1841-Paris 1888)

<sup>54</sup> Su questi contributi si veda Foce F., *Sulla teoria dell'arco murario: una rilettura storico-critica*, in Becchi A., Foce F., *Degli archi e delle volte. Arte del costruire tra meccanica e stereotomia*, Marsilio, Venezia 2002

<sup>55</sup> Durand-Claye A., *Note sur la vérification de la stabilité des voûtes en maçonnerie et sur l'emploi des courbes de pression*, “Annales des Ponts et Chaussées”, vol. 13, 1867, I sem., pp. 63-93

<sup>56</sup> Durand-Claye A., p.66



Questa scelta metodologica potrebbe sembrare debole e rinunciataria in confronto alle esigenze di una teoria che voglia determinare la vera soluzione fra tutte quelle possibili ma che non si verificano, quale è la teoria elastica per la risoluzione dei sistemi iperstatici. Invece, proprio in questa sospensione di giudizio sta la portata vincente del metodo di Durand-Claye: se infatti le pretese “deterministiche” del calcolo elastico rischiano di risultare illusorie per le troppe incertezze gravanti sulle ipotesi per la sua applicabilità, allora tanto vale rinunciare da subito a quelle pretese e “accontentarsi” di ricercare tutte le soluzioni di equilibrio, fra le quali vi sarà necessariamente anche quella vera.

Insomma, per dirla con le parole di Durand-Claye, “de la possibilté de l'équilibre, nous concluons à la stabilité.”<sup>57</sup>

N° 142

NOTE

Sur la vérification de la stabilité des voûtes en maçonnerie et sur l'emploi des courbes de pression.

Par M. ARTHUR DURAND-CLAYE, élève ingénieur des ponts et chaussées.

INTRODUCTION.

Principe de l'emploi des courbes de pression. — But de cette note.

La note que nous présentons a pour objet de préciser et d'étendre le rôle que peuvent jouer les courbes de pression dans l'étude de la stabilité des voûtes en maçonnerie; nous chercherons à éviter les tâtonnements ou les hypothèses que comporte habituellement l'emploi de ces courbes; nous indiquerons une marche certaine, et toujours la même, qui pourra s'appliquer à toute voûte existante ou à toute voûte projetée.

Principe de l'emploi des courbes de pression; valeur de la méthode. — Rappelons en quelques mots la valeur théorique qui peut être attribuée aux courbes de pression de M. Méry: nous mettrons ainsi en évidence les principes sur lesquels s'appuient nos remarques.

Le tracé des courbes de pression est généralement employé aujourd'hui pour l'étude des voûtes maçonnées; l'usage des formules et du calcul est réservé pour les arcs métalliques. La valeur des résultats auxquels on arrive dans

Prima pagina della *Note* di Durand-Claye

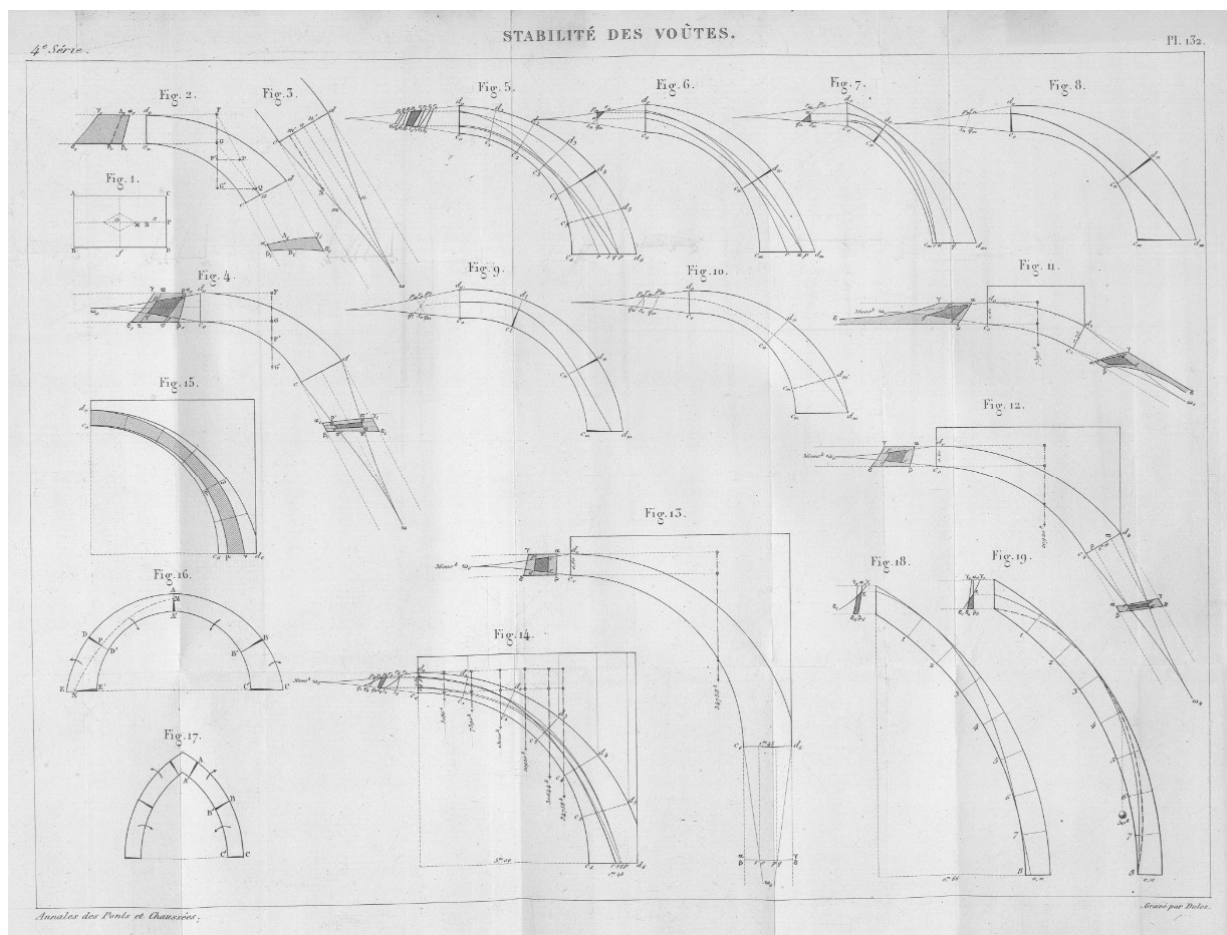


Planche tratta dalla *Note* di Durand-Claye, con la costruzione delle aree di stabilità per varie tipologie di volte

<sup>57</sup> Durand-Claye A., p. 65.

## 8.2. Costruzione delle aree di stabilità per infinita resistenza a compressione

Seguendo l'esposizione di Durand-Claye, assumiamo inizialmente l'ipotesi che il materiale abbia resistenza infinita a compressione.

Ragionando, al solito, su una metà arcata, consideriamo una sua porzione compresa fra il giunto in chiave  $c_0d_0$  e un generico giunto  $cd$  e soggetta alla spinta incognita  $H$ , applicata in punto qualunque  $p_0$  della chiave, e al peso noto  $P_\varphi$  della porzione considerata, applicato nel baricentro  $G$  della porzione ed espresso in funzione dell'angolo  $\varphi$  fra la retta del giunto  $cd$  e la verticale<sup>58</sup>.

Indicata con  $y$  la distanza del punto  $p_0$  dall'origine di un prefissato sistema cartesiano di riferimento, si tratta di calcolare la spinta  $H$  in funzione di  $y$  per l'equilibrio della porzione di volta rispetto ai quattro seguenti movimenti:

- rotazione intorno allo spigolo di intradosso  $c$ ;
- rotazione intorno allo spigolo di estradosso  $d$ ;
- scorrimento verso il basso lungo il giunto  $cd$ ;
- scorrimento verso l'alto lungo il giunto  $cd$ ;

Come è facile capire, poiché il braccio della spinta  $H$  rispetto al punto  $c$  sull'intradosso è il più grande che essa ha rispetto a qualunque altro punto del giunto  $cd$ , dall'equilibrio ai momenti intorno a  $c$  si trova (tralasciando di indicare la dipendenza da  $\varphi$  per il peso e le distanza dei punti  $c$ ,  $d$  e  $G$ ) la spinta minima alla rotazione

$$H_{\min}^r = \frac{P x_c - x_G}{y - y_c} \quad (1)$$

Con ragionamento analogo, poiché il braccio della spinta  $H$  rispetto al punto  $d$  sull'estradosso è il più piccolo che essa ha rispetto a qualunque altro punto del giunto  $cd$ , dall'equilibrio ai momenti intorno a  $d$  si trova la spinta massima alla rotazione

$$H_{\max}^r = \frac{P x_d - x_G}{y - y_d} \quad (2)$$

Dall'equilibrio allo scorrimento verso il basso si ha, tenendo conto che in tale situazione la risultante al giunto  $cd$  opera sulla falda interna del cono di attrito di semiampiezza  $\alpha_s$  e che con  $\theta$  si è indicato l'angolo complementare a  $\varphi$

$$H_{\min}^s = P \tan \theta - \alpha_s \quad (3)$$

Dall'equilibrio allo scorrimento verso l'alto si ha, tenendo conto che in tale situazione la risultante al giunto  $cd$  opera sulla falda esterna del cono di attrito

$$H_{\max}^s = P \tan \theta + \alpha_s \quad (4)$$

---

<sup>58</sup> La trattazione e i risultati seguenti sono ripresi dalla tesi di laurea seguente: Tanturli S., "Una fortezza causata da due debolezze": l'arco in muratura tra forma, carico, verifica, progetto, Tesi di Laurea Magistrale in Architettura, (Relatore: F.Foce), Genova 2014.

89

Le formule (3) e (4), non dipendendo dalla distanza  $y$ , rappresentano equazioni di rette verticali. Pertanto, tutte le spinte applicate in chiave per l'equilibrio allo scorrimento della porzione di volta considerata sono quelle aventi estremo contenuto dentro la superficie  $aa'bb'$  delimitata dall'altezza del giunto in chiave e dalle suddette rette. Tale superficie definisce quindi l'*area di stabilità allo scorrimento per un giunto qualunque  $cd$*  (Fig.2).

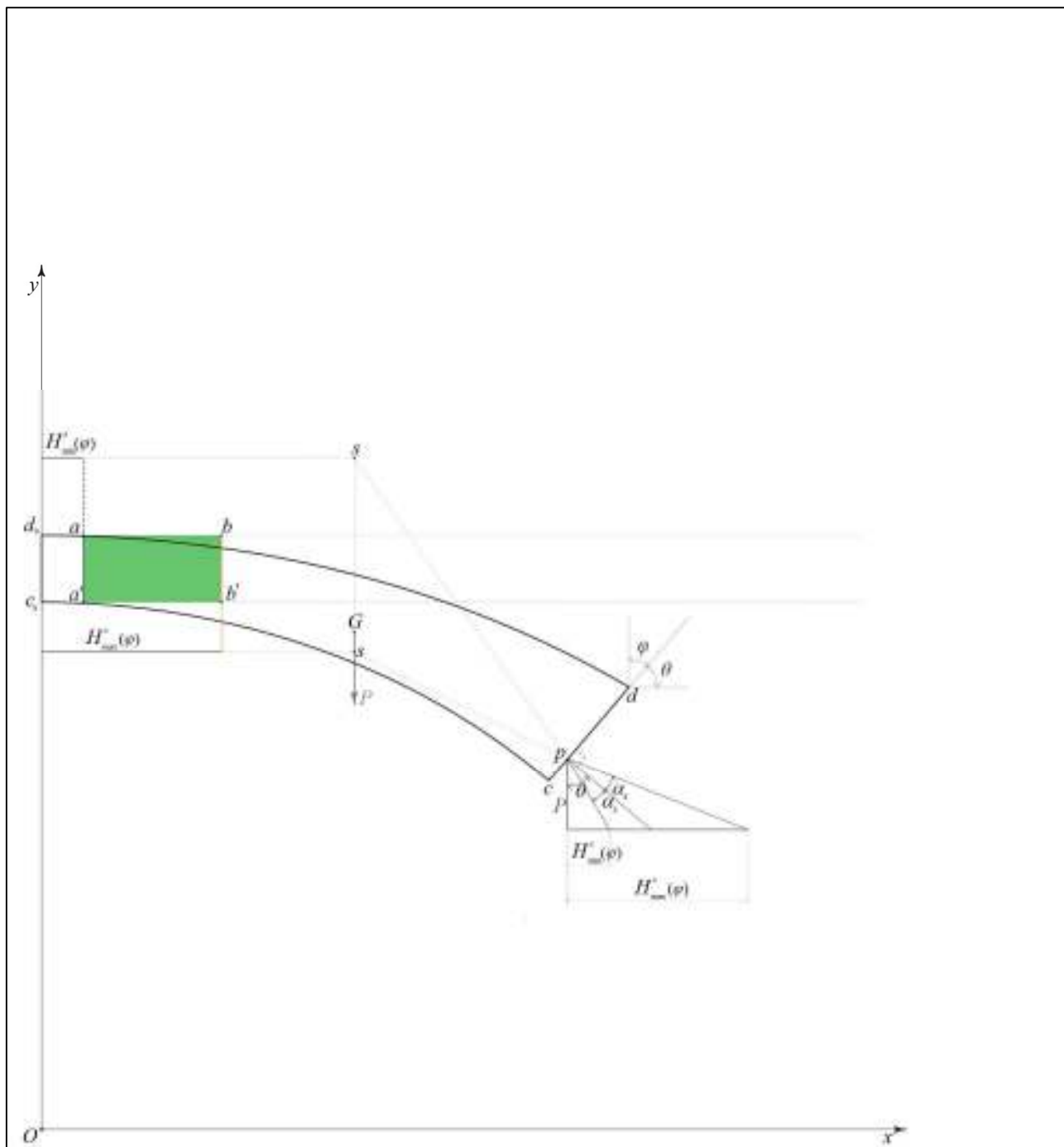
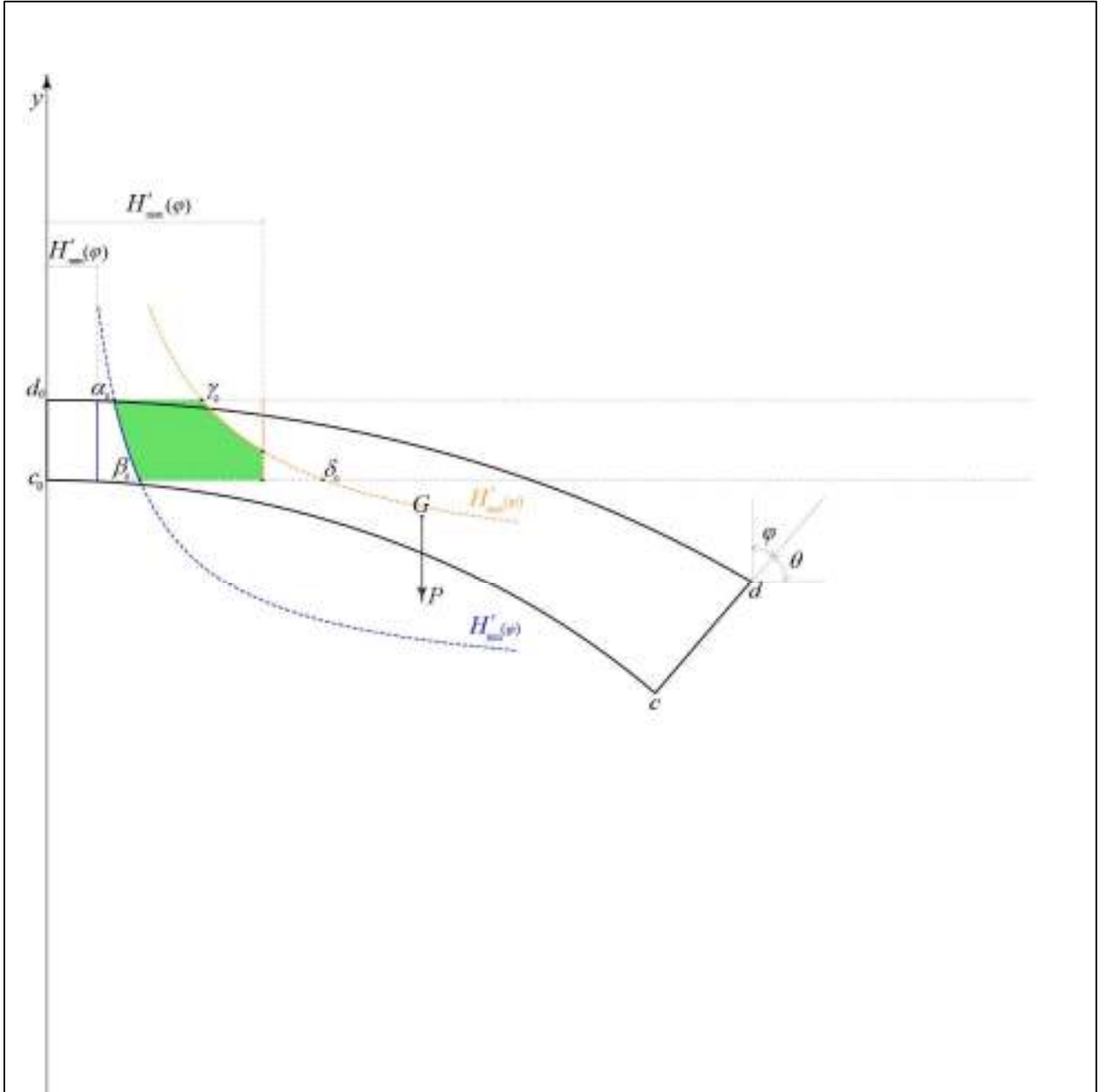


Fig.2 Area di stabilità allo scorrimento per un giunto qualunque  $cd$

Come si vede, la retta verticale delle spinte  $H_{\max}^s$  interseca l'iperbole delle spinte  $H_{\max}^r$  e quindi riduce parzialmente l'area di stabilità alla rotazione; invece, la retta verticale delle spinte  $H_{\min}^s$  resta tutta a sinistra dell'area di stabilità alla rotazione e quindi non ha influenza sulla definizione dell'area di stabilità complessiva.



91

Ora, immaginiamo di ripetere la costruzione dell'area di stabilità alla rotazione per un certo numero di giunti, in modo da arrivare fino all'ipotesa. Evidentemente, l'area comune a tutte queste aree definisce l'area di stabilità alla rotazione per l'intera volta (Fig.4).

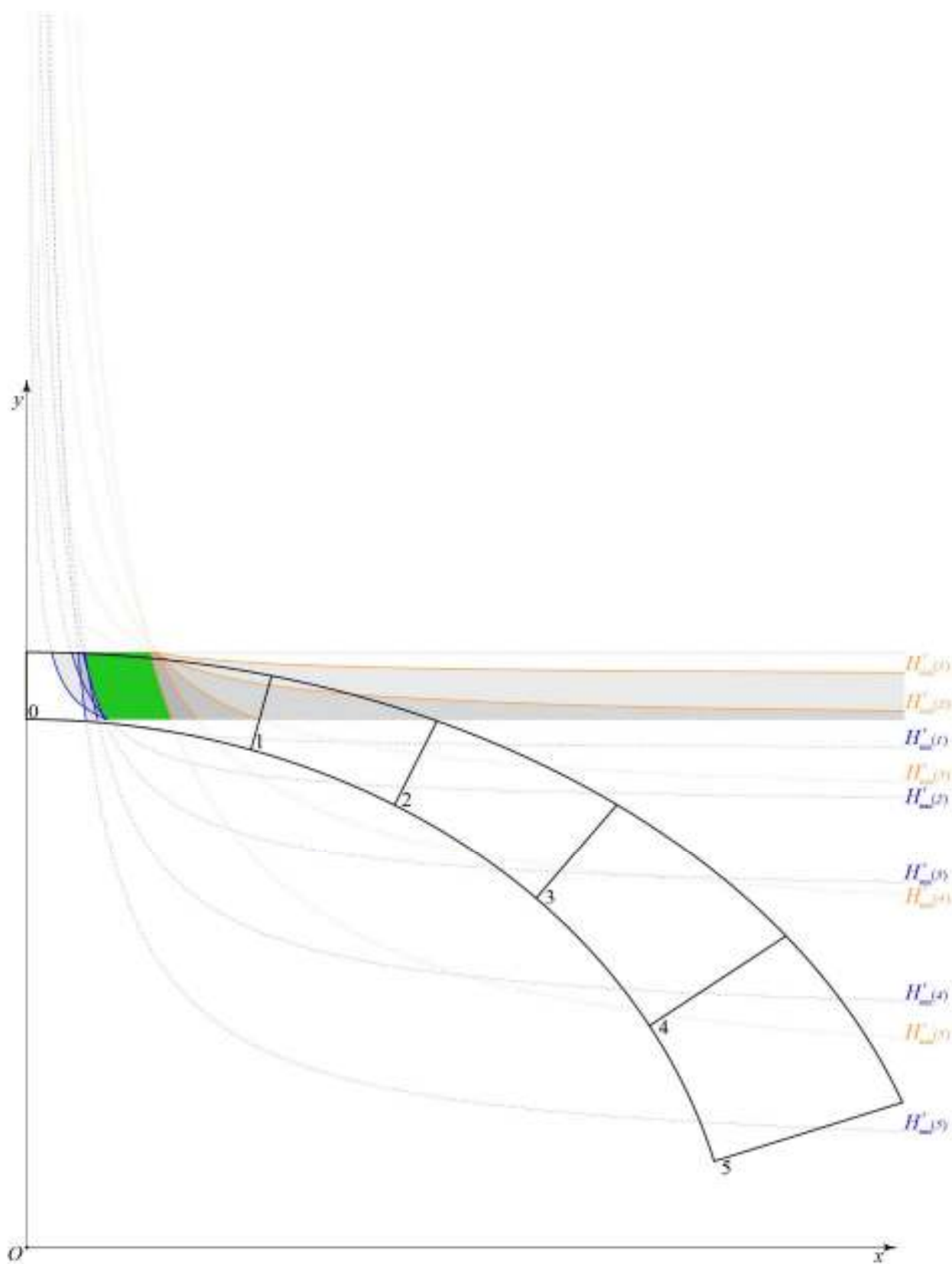


Fig. 4. Area di stabilità alla rotazione per l'intera volta

Analogamente, immaginiamo di ripetere la costruzione dell'area di stabilità allo scorrimento per un certo numero di giunti, in modo da arrivare fino all'imposta. Evidentemente, l'area comune a tutte queste aree definisce l'area di stabilità allo scorrimento per l'intera volta (Fig.5).

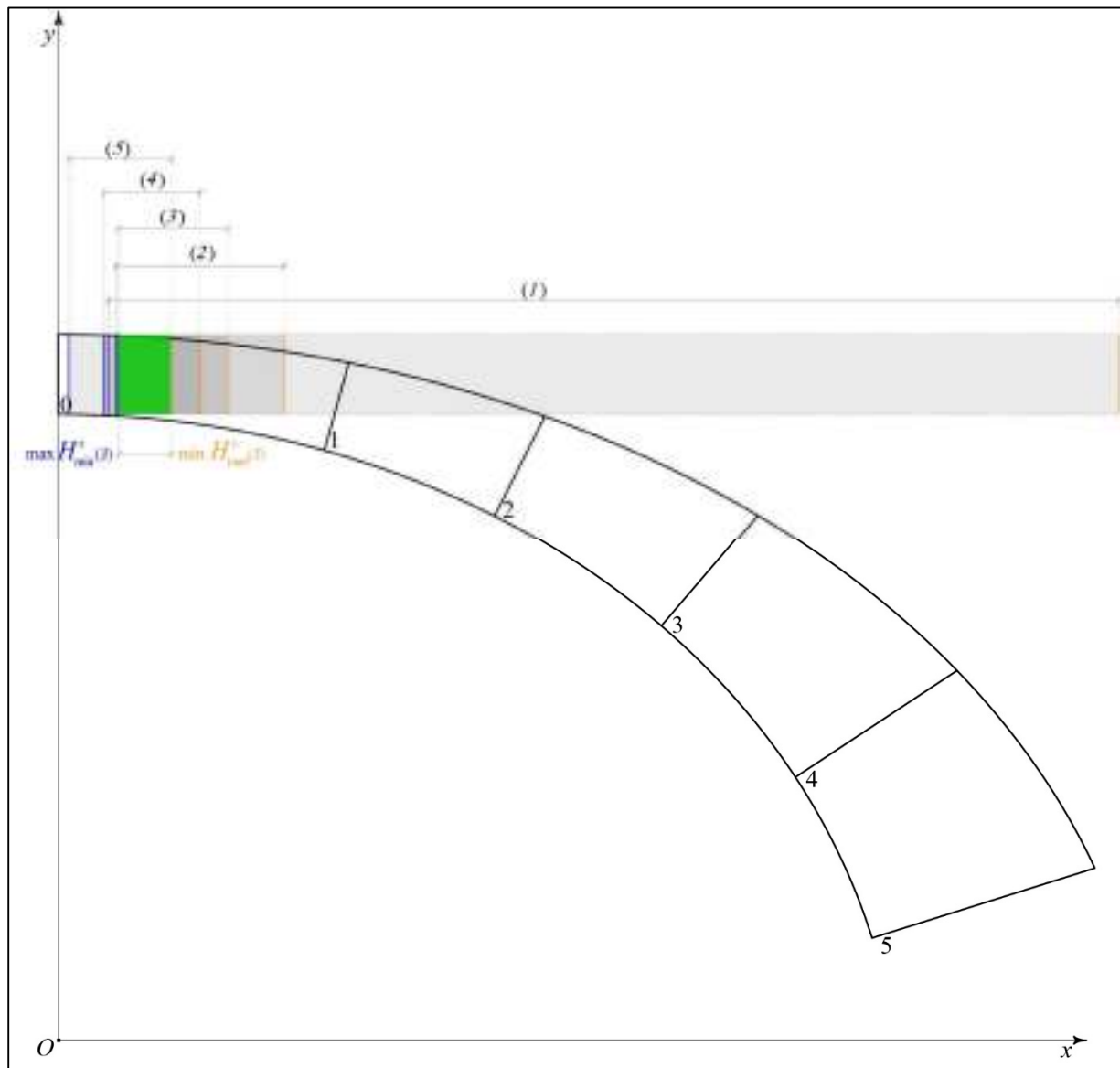


Fig.5. Area di stabilità allo scorrimento per l'intera volta



Infine, sovrapponendo tutte le aree di stabilità alla rotazione e allo scorrimento, l'*area residua* comune a tutte definisce la cosiddetta area di stabilità per l'intero arco (Fig.6).

Se tale area residua esiste ed è estesa, ciò significa che vi sono infiniti valori della coppia  $(H, y)$  e quindi l'arco è in equilibrio stabile.

Se invece tale area residua si riduce ad un punto, ciò significa che esiste un solo valore della coppia  $(H, y)$  e quindi la volta è in equilibrio instabile e può collassare per meccanismo di corpo rigido; infine, se tale area residua non esiste, l'equilibrio della volta è impossibile.

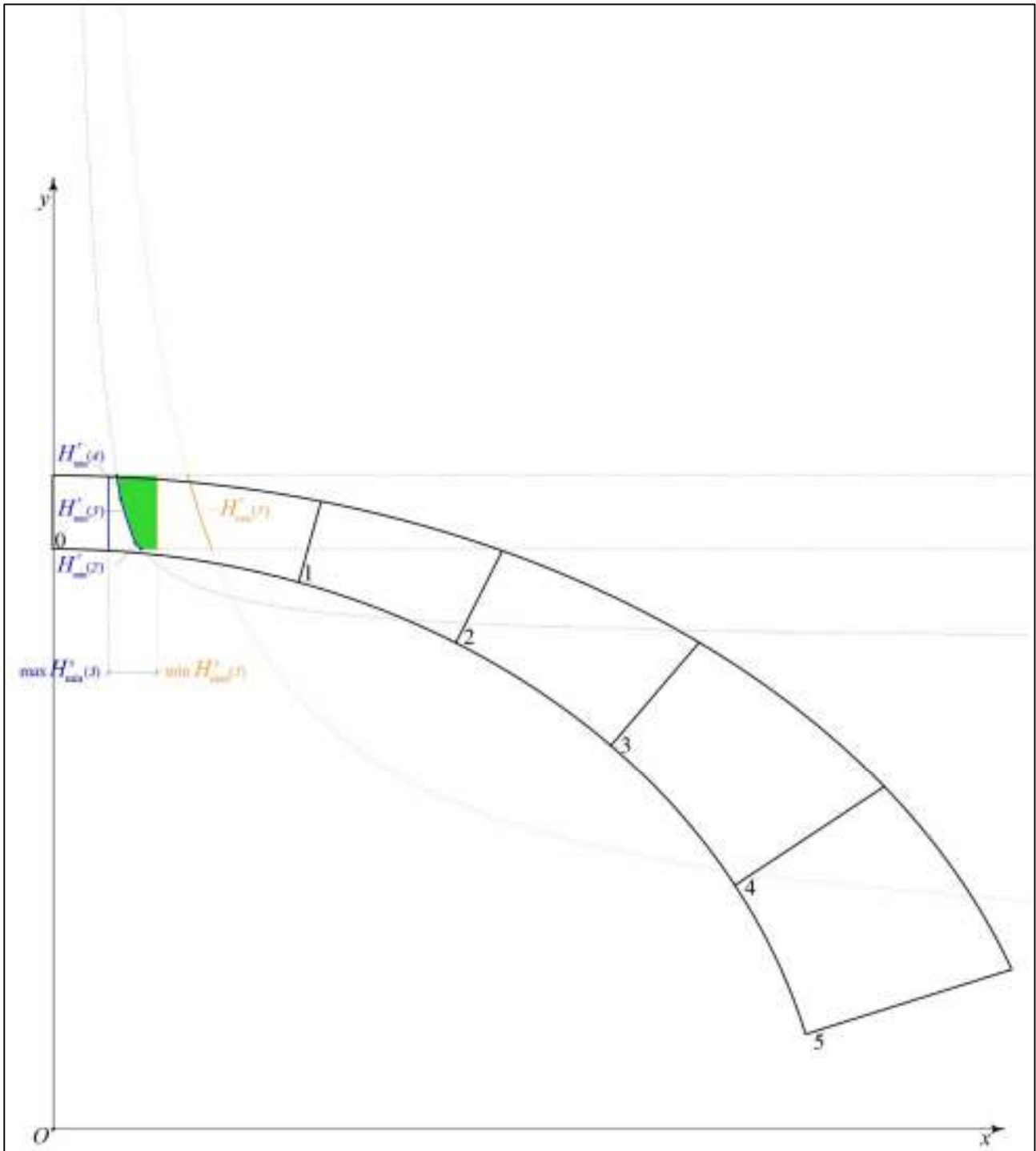


Fig.6. Area di stabilità alla rotazione e allo scorrimento per l'intera volta

### 8.3. Costruzione delle aree di stabilità per resistenza finita a compressione

Consapevole che l'aspetto della resistenza del materiale non può essere trascurato, Durand-Claye studia come cambiano le aree di stabilità considerando un valore finito  $\bar{\sigma}$  per la resistenza ammissibile a compressione del materiale della volta.

Consideriamo la sezione rettangolare di un giunto generico  $cd$  avente base  $b$  e altezza  $h$ , con area  $A = bh$  e momento di inerzia  $J_x = \frac{1}{12}bh^3$  e sia  $y_c$  l'eccentricità del punto di applicazione della forza normale  $N$  sul giunto considerato. Dall'usuale ipotesi che le tensioni normali  $\sigma$  siano ripartite con legge lineare, l'espressione della forza normale risulta

$$N = \frac{\sigma A}{1 + \frac{yy_c A}{J_x}} = \frac{\sigma A}{1 + \frac{yy_c}{\rho_x^2}} \quad (5)$$

Supponiamo di voler determinare con la (5), al variare dell'eccentricità  $y_c$ , i valori della forza normale  $N$  che nel punto  $c$  d'intradosso, cioè per  $y = \frac{1}{2}h$ , producono la tensione  $\sigma = \bar{\sigma}$ . L'equazione (5) rappresenta allora un'iperbole equilatera  $\eta\omega$  avente per asintoti la retta del giunto  $cd$  e la retta perpendicolare allo stesso giunto tracciata alla distanza  $y = -\frac{1}{6}h$  dal suo baricentro  $o$ . Pertanto, tale iperbole delimita i valori della forza normale ammissibile sul giunto  $cd$  affinché nel punto  $c$  venga raggiunta la tensione  $\sigma = \bar{\sigma}$  (Fig.7).

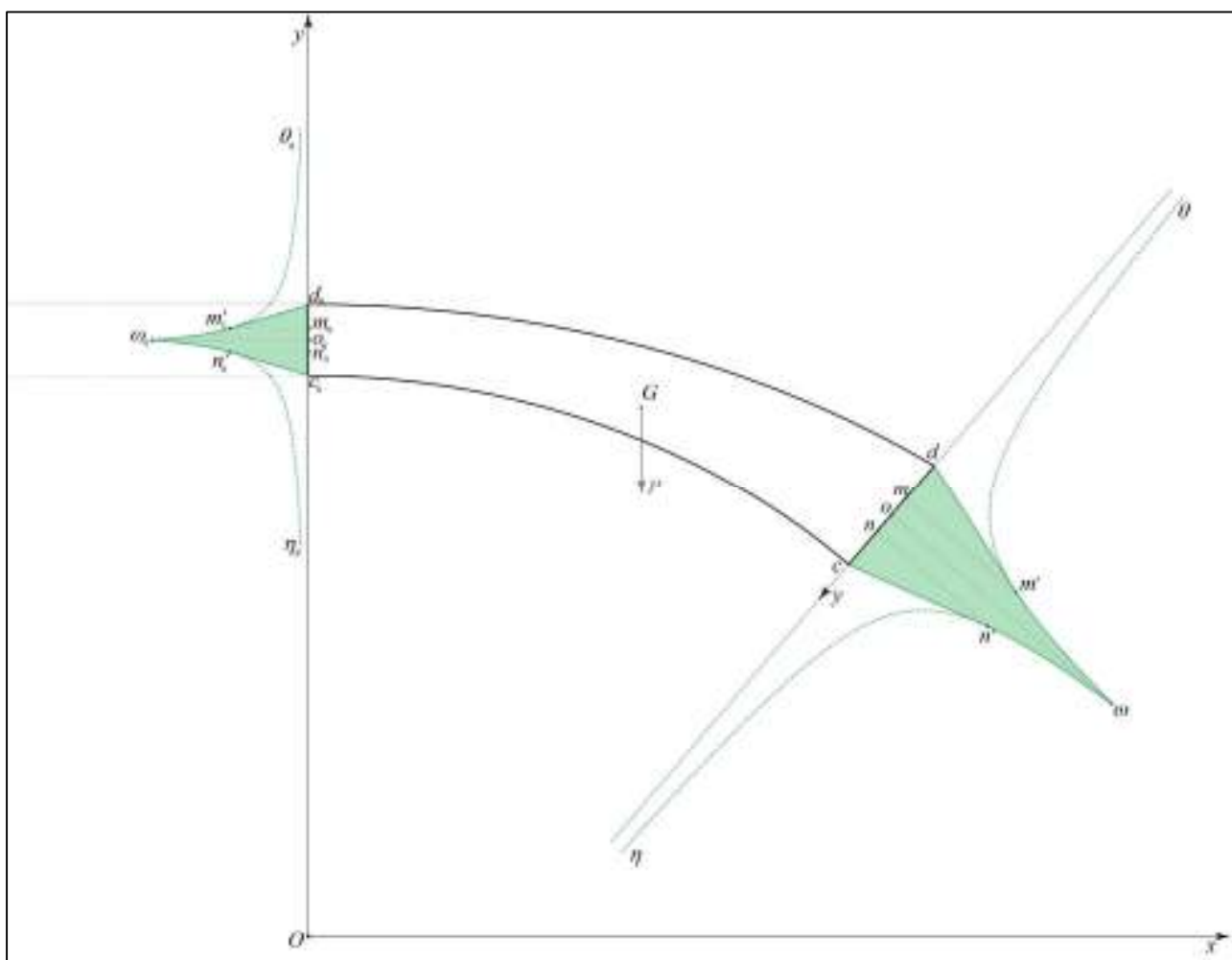


Fig.7. Aree di stabilità in chiave e su un giunto qualunque  $cd$  per resistenza finita

Il punto  $\omega$ , posto sulla perpendicolare al giunto tracciata per il suo baricentro  $o$ , si trova ponendo  $y = 0$  nella (5), da cui  $o\omega = \bar{\sigma}A$ ; invece, il punto  $n$ , posto sulla perpendicolare al giunto tracciata dall'estremo inferiore  $n$  del terzo medio, si trova ponendo  $y = \frac{1}{6}h$  nella (5), per cui  $nm = \frac{1}{2}\bar{\sigma}A$ .

Poiché fuori dal terzo medio la (5) cessa di valere in quanto si suppone nulla la resistenza a trazione, il tratto di iperbole  $n\eta$  deve essere sostituito dalla linea  $nc$  che si raccorda all'iperbole in  $n$ , termina in  $c$  sul giunto ed è una retta se la sezione del giunto è rettangolare. Tale linea retta  $nc$  limita i valori della forza normale ammissibile quando essa opera nella parte  $nc$  del giunto  $cd$ .

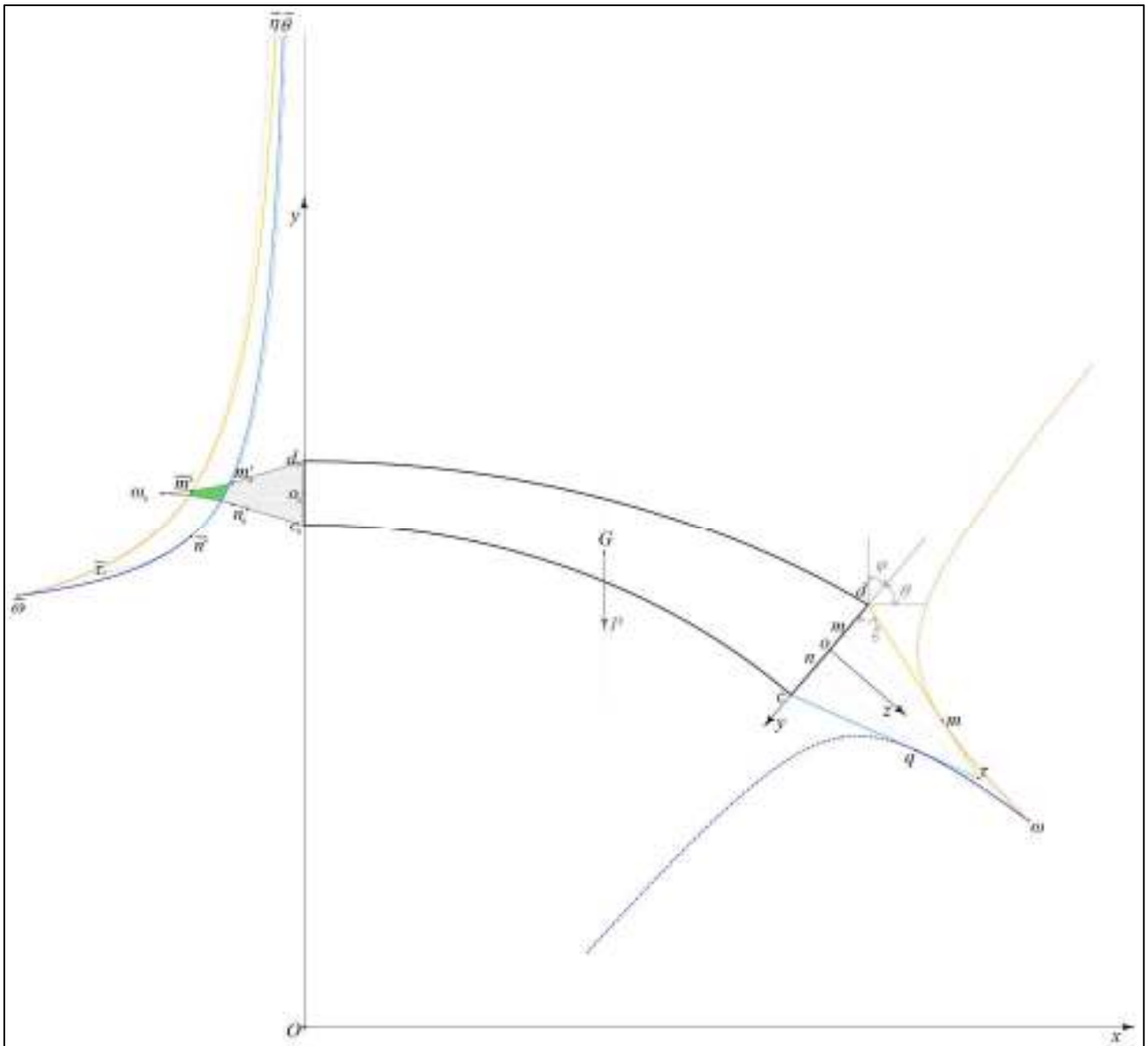
Con ragionamento analogo applicato al punto  $d$ , si costruisce l'iperbole  $\omega\theta$ , il cui tratto  $m\theta$  deve essere sostituito dalla linea retta  $md$  in quanto si suppone nulla la resistenza a trazione.

In sostanza, una forza normale il cui estremo sia contenuto all'interno dell'area mistilinea  $cn\omega md$  è compatibile con la tensione ammissibile  $\bar{\sigma}$ ; in particolare, i punti sul tratto  $cn\omega$  definiscono i valori della forza normale che producono in  $c$  il valore  $\sigma = \bar{\sigma}$  e i punti sul tratto  $\omega md$  definiscono i valori della forza normale che producono in  $d$  il valore  $\sigma = \bar{\sigma}$ .

Applicando la stessa procedura sul giunto in chiave  $c_0d_0$ , si costruisce l'area mistilinea  $c_0n_0\omega_0m_0d_0$ . Tale area contiene gli estremi delle spinte ammissibili  $H$  compatibili con la resistenza  $\bar{\sigma}$  sul giunto in chiave.

Ora, per determinare le spinte  $H$  compatibili con la resistenza sia sul giunto in chiave  $c_0d_0$  sia sul giunto qualunque  $cd$ , occorre escludere fra le spinte associate all'area  $c_0n_0\omega_0m_0d_0$  quelle che, composte col peso  $P$  della parte di volta considerata, non sono compatibili con la resistenza sul giunto  $cd$ . Ciò porta a decurtare l'area  $c_0n_0\omega_0m_0d_0$  in chiave attraverso altre iperboli, denominate da Durand-Claye *deformate* in chiave, fino ad ottenere l'area di stabilità individuata in verde in fig, la quale contiene gli estremi delle spinte compatibili la resistenza sia in chiave sia al giunto  $cd$  (Fig.8)

Ripetendo queste costruzioni per una serie di giunti fino all'imposta, si può quindi costruire in corrispondenza della chiave l'area di stabilità compatibile con la resistenza sull'intera volta.



#### 8.4. Applicazione al Ponte Mosca

Per mostrare le potenzialità del metodo di Durand-Claye, abbiamo costruito le aree di stabilità per il Ponte Mosca secondo il nostro modello geometrico.

Nel caso di resistenza infinita a compressione, l'area di stabilità alla rotazione<sup>59</sup> per il complesso volta-carico è rappresentata in Fig.9. Come si vede, l'area di stabilità è molto ampia perché la spinta potrebbe essere applicata dall'intradosso e all'estradosso del giunto in chiave, segno di grande stabilità rispetto al rischio di formazione di meccanismo.

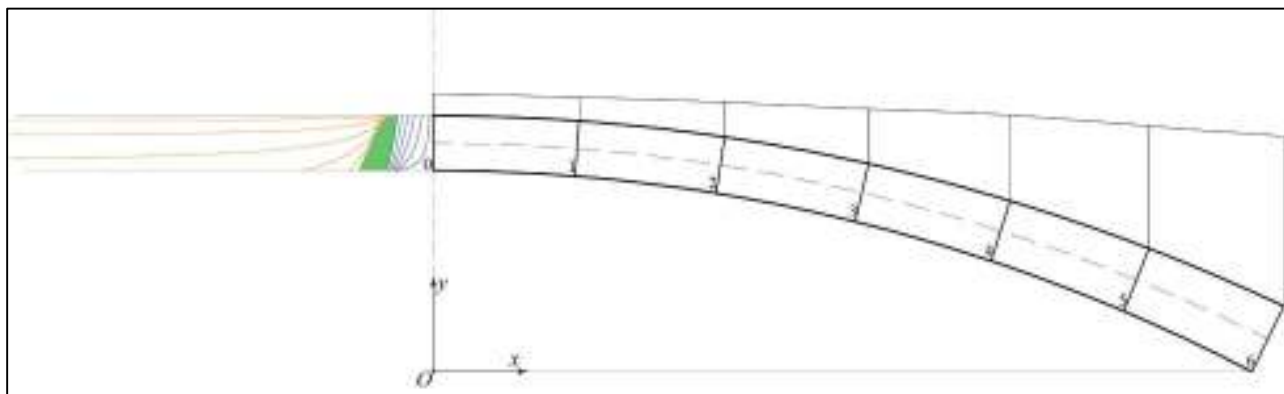


Fig.9. Area di stabilità alla rotazione per il complesso volta-carico del Ponte Mosca, nel caso di resistenza infinita

Sempre per resistenza infinita, ma considerando solo la volta, l'area di stabilità alla rotazione è rappresentata in Fig.10. Anche in questo caso, l'area di stabilità è molto ampia, per quanto meno di quella in presenza del carico portato. Ovviamente, essa presenta valori minori della spinta rispetto caso precedente proprio per l'assenza del carico.

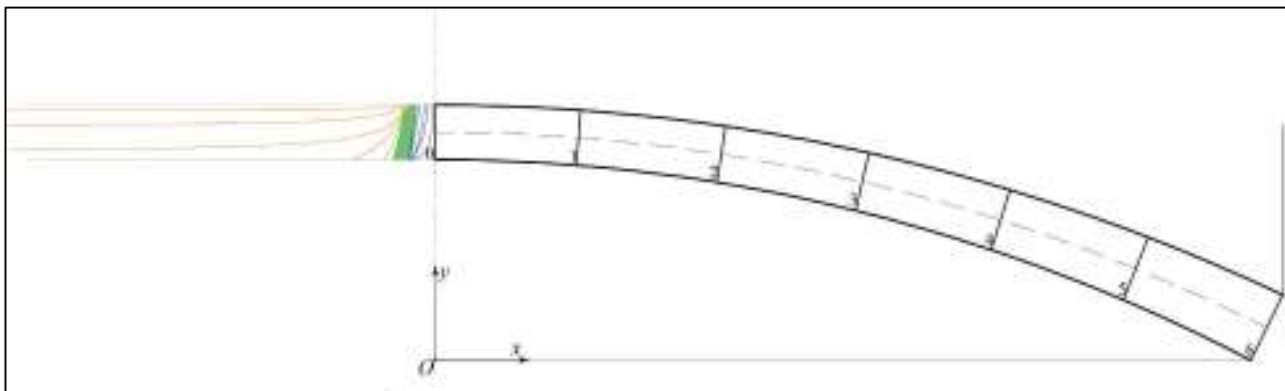


Fig.10. Area di stabilità alla rotazione per la sola volta del Ponte Mosca, nel caso di resistenza infinita

Oltre alle precedenti aree di stabilità per resistenza infinita, riportiamo per il complesso volta-carico anche due casi nei quali per il granito di Malanaggio si è assunta una resistenza finita pari a  $600000 \text{ kg/m}^2$  (Fig.11a, b), come indicato da Carlo Bernardo Mosca, e a  $400000 \text{ kg/m}^2$  (Fig.12a,b) come indicato dal nipote Carlo Mosca.

<sup>59</sup> Non abbiamo costruito le aree di stabilità allo scorrimento perché per gli usuali valori del coefficiente di attrito fra superfici in granito esse contengono abbondantemente quella alla rotazione e quindi non influiscono sul grado di stabilità

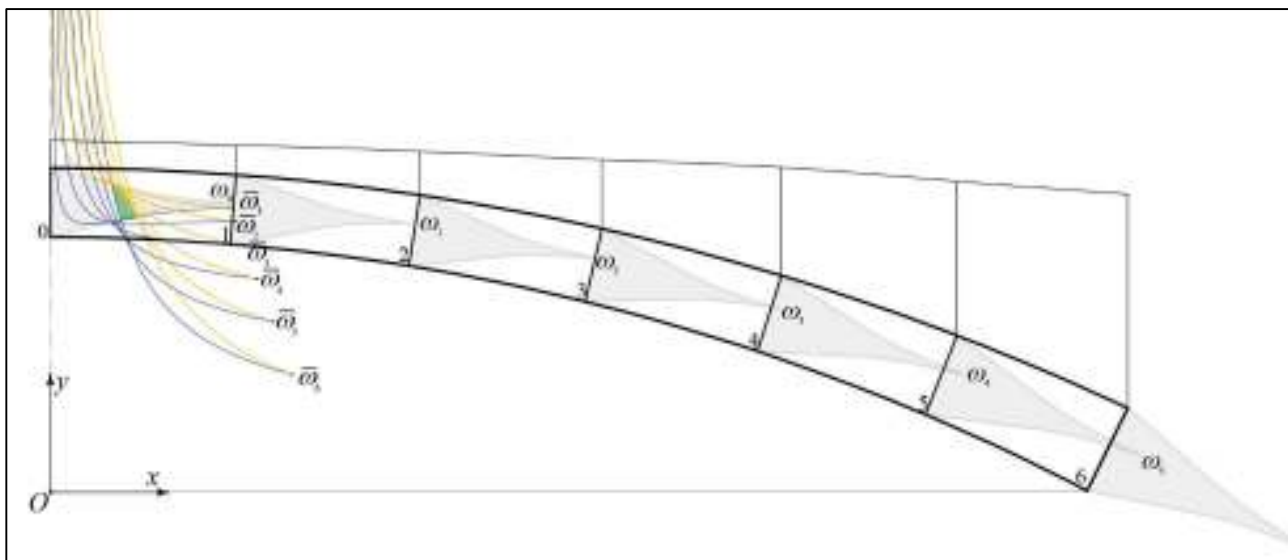


Fig. 11a. Area di stabilità per resistenza finita pari a 600000 kg/m<sup>2</sup>

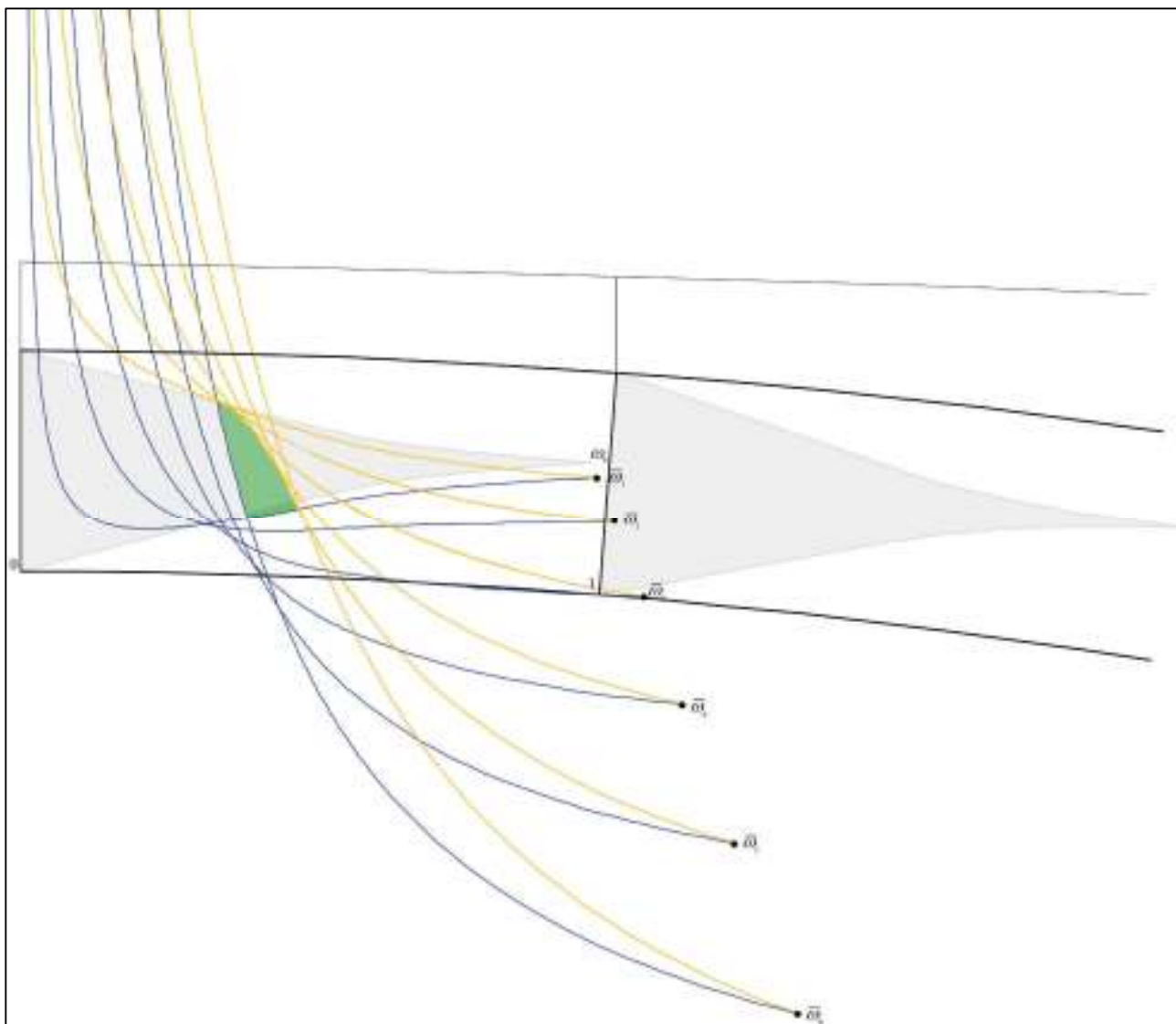


Fig. 11b. Ingrandimento dell'area di stabilità per resistenza finita pari a 600000Kg/m<sup>2</sup>

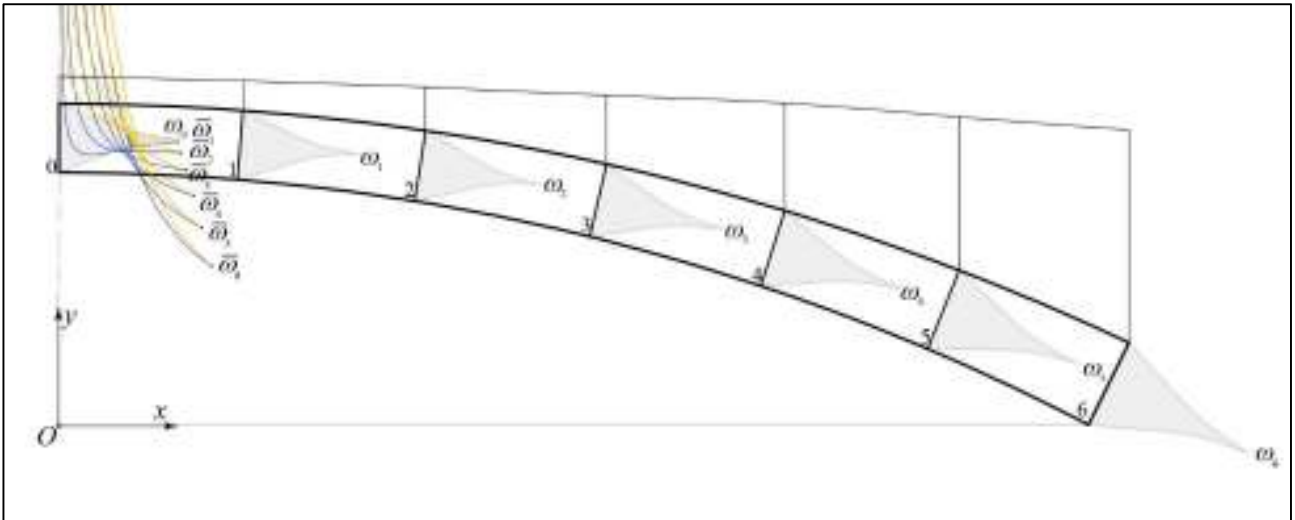


Fig.12a. Area di stabilità per resistenza finita pari a 400000 kg/m<sup>2</sup>

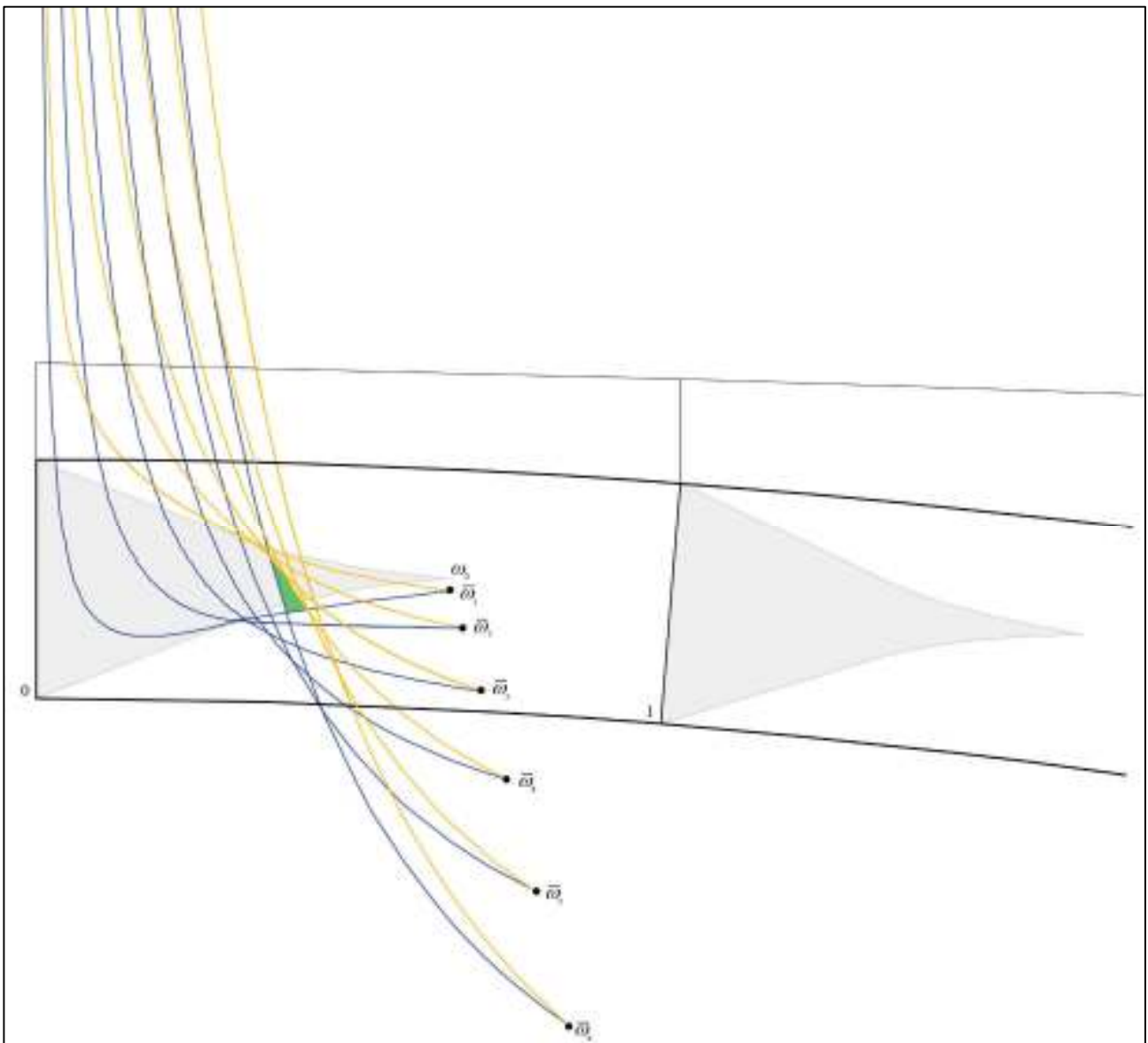


Fig.12b. Ingrandimento dell'area di stabilità per resistenza finita pari a 400000Kg/m<sup>2</sup>



In Fig.13 è riportata l'area di stabilità per resistenza di  $600000 \text{ kg/m}^2$  già mostrata in Fig.11b e, in aggiunta, è rappresentata graficamente la spinta  $H$  ottenuta con la soluzione elastica (17) in presenza di giunti di malta; come si vede, l'estremo della spinta, applicata con l'eccentricità calcolata, cade dentro l'area di stabilità, ciò che conferma il risultato dell'analisi elastica con ha fornito per la tensione massima all'estradosso dell'imposta il valore  $\sigma_6^e = 397923 \text{ kg/m}^2$ , minore di  $600000 \text{ kg/m}^2$

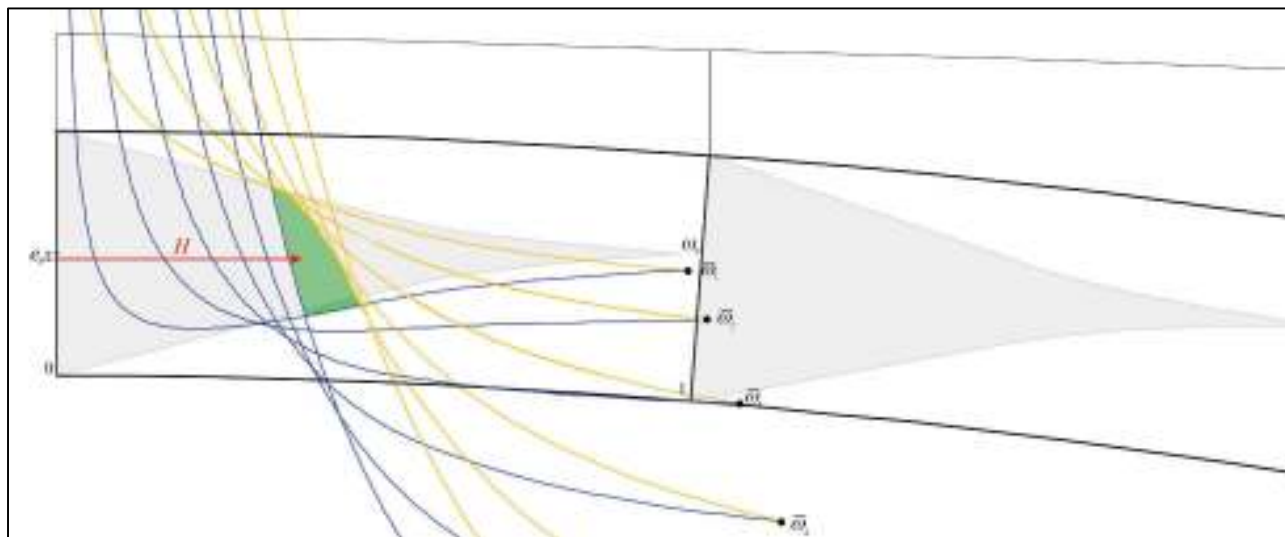


Fig.13. Spinta  $H$  ottenuta con nostra soluzione elastica con giunti di malta e area di stabilità per resistenza  $600000 \text{ kg/m}^2$

In Fig.14 è riportata ancora l'area di stabilità per resistenza di  $600000 \text{ kg/m}^2$  già mostrata in Fig.11b e, in aggiunta, è rappresentata la spinta  $H$  ottenuta con la soluzione elastica (24) in assenza dei giunti di malta: ovviamente, l'area di stabilità non cambia, ma ora l'estremo del vettore spinta cade leggermente fuori dall'area: in effetti, si è visto (con Castigliano) che all'estradosso dell'imposta la massima compressione supera il valore  $600000 \text{ kg/m}^2$

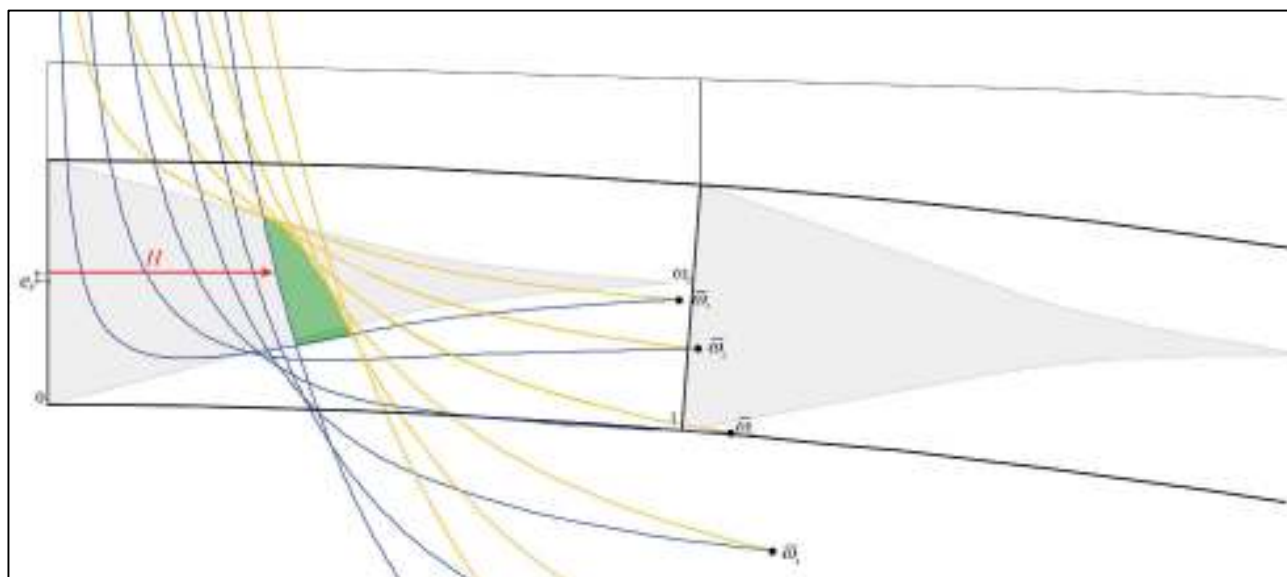


Fig.14. Spinta  $H$  ottenuta con nostra soluzione elastica senza giunti di malta e area di stabilità per resistenza  $600000 \text{ kg/m}^2$

## Conclusioni

Il ponte Mosca è certamente un *unicum* nel panorama dei ponti in pietra del primo Ottocento europeo, sia per le sue ardite dimensioni mai tentate prima della sua costruzione, sia per la cura esecutiva e gli accorgimenti tecnici adottati per garantire al meglio la sua stabilità.

La meccanica applicata all'architettura, invece, nonostante i suoi fondamenti nelle scienze razionali, non ha carattere di univocità nel dare risposta al “come” una struttura trova il suo stato di equilibrio e realizza il bilancio fra le azioni esterne e quelle interne per conservarsi stabile nel tempo. Da questo punto di vista, la cosiddetta *teoria delle volte*, al singolare, è emblematica perché nel corso del suo sviluppo storico a partire dalla fine del XVII secolo è possibile annoverare innumerevoli metodi e soluzioni per venire a capo di quel “come” grazie al quale una volta si sostiene.

Come noto, la difficoltà di dare una risposta univoca al problema dell'equilibrio di un arco risiede nel fatto che esso è un *sistema staticamente indeterminato* e quindi il suo “stare in piedi” può avvenire in infiniti modi, ovvero, detto in linguaggio più appropriato, ammette infinite soluzioni soddisfacenti le leggi dell'equilibrio. Quale sia la “vera” soluzione fra le infinite possibili è questione che ha ricevuto risposta solo nella seconda metà dell'Ottocento, quando cioè vennero finalmente compresi e messi a punto i metodi generali per risolvere i sistemi iperstatici nell'ambito della teoria dell'elasticità: detto in *due* parole, la “vera” soluzione è quella che è insieme *equilibrata e congruente*, ossia quella per la quale la struttura, sotto l'azione dei carichi, si deforma leggermente trovando l'equilibrio nel rispetto delle condizioni imposte dai vincoli ai quali è soggetta.

Da questo punto di vista metodologico, la soluzione “elastica” di Castigliano esposta nel Cap.3 è esemplare, mentre risultano criticabili i metodi di Carlo Mosca, di Curioni e di Méry proprio perché “forzano” l'individuazione della “vera” soluzione sulla base di ipotesi arbitrarie.

Resta fuori da queste ragioni di critica il metodo di Durand-Claye che, a ben vedere, rappresenta l'altro approccio metodologico, alternativo a quello basato sui metodi elastici, con il quale ha senso analizzare la stabilità di una struttura voltata in muratura. Tale approccio è appunto quello che si accontenta di determinare tutte le soluzioni di equilibrio, senza pretendere di determinare quella che *effettivamente* si realizza.

Fra le due opzioni, quella alla Castigliano e quella alla Durand-Claye, ci sembra più ragionevole la seconda quando l'oggetto di verifica è un arco in muratura, e per una ragione elementare: il metodo di Castigliano, come tutti i metodi elastici, per essere attendibile richiede il soddisfacimento di ipotesi delle quali non si può essere certi, come ben scriveva Swain nel suo decalogo di appunti critici; viceversa, il metodo di Durand-Claye, limitandosi a garantire il requisito minimo, si accerta solamente che esistano soluzioni equilibrate, fra le quali esisterà anche quella che l'arco, da sé, sarà in grado di trovare.

## Bibliografia alfabetica

Albano B., *Details of the construction of a stone bridge erected over the Dora Riparia, near Turin, by chevalier Mosca, engineer and architect to the King of Sardinia*, "Transactions of the Institution of civil engineers", vol.1, 1836, pp. 183-194

Albenga G., *Carlo Bernardo Mosca e il suo ponte*, "Atti del Sindacato Fascista degli Ingegneri di Torino e del Sindacato Regionale Fascista degli Architetti del Piemonte", 6 (3), 1932, pp. 27-36

Benvenuto E., Nascé V. (a cura di), *Alberto Castigliano. Selecta 1984*, Editrice Levrotto Bella, Torino 1984

Boistard L. C., *Recueil d'expériences et d'observation faites sur différents travaux, exécutés pour la construction du pont de Nemours, pour celle de l'arsenal et du port militaire d'Anvers, et pour la reconstruction du port de Flessingue, dans lequel on a traité la théorie et l'équilibre des voûtes*, Merlin, Paris 1822.

Buzani Raimondo, *Lettera al Direttore dell'Antologia sul ponte in pietra di un sol arco gettato sulla Dora Riparia presso Torino: opera del cav. Carlo Mosca ispettore nel corpo reale del genio civile*, "Antologia", vol.43, 1831, pp.64-71

Castigliano A., *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications*, A.F.Negro, Turin 1879, pp.458-478, in francese; *Strade ferrate dell'Alta Italia, Applicazioni pratiche della teoria sui sistemi elastici*, Studi dell'Ufficio d'Arte, Milano 1878, pp.125-140, in italiano

Comoli V., Guardamagna L., Viglino M. (a cura di), *Carlo Bernardo Mosca, un ingegnere architetto tra Illuminismo e Restaurazione*, Guerini Associati, Milano 1997

Coulomb C.A., *Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture*, "Mémoires de mathématique & de physique, présentés à l'Académie Royale des Sciences par divers savans", vol. 7, année 1773, Paris 1776, pp. 343-382.

Curioni G., *L'arte di fabbricare, Resistenza dei materiali*, A.F. Negro Editore, Torino 1867

Curioni G., *Metodo pratico per determinare le principali dimensioni delle arcate dei ponti in muratura*, in *Appendice all'Arte di fabbricare*, A.F. Negro, Torino 1873, vol. 1, pp. 248-286.

Curioni G., *L'elasticità nella teoria dell'equilibrio e della stabilità delle vòlte*, "Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino", ser. II, vol. 28, 1876, pp. 339-360; ser. II, vol. 31, 1877, pp. 118-135; ser. II, vol. 32, 1879, pp.135-184

Dupuit J., *Traité de l'équilibre des voûtes et de la construction des ponts en maçonnerie*, Dunod, Paris 1870.

Durand-Claye A., *Note sur la vérification de la stabilité des voûtes en maçonnerie et sur l'emploi des courbes de pression*, "Annales des Ponts et Chaussées", vol. 13, 1867, I sem., pp. 63-93.

Foce F., *Sulla teoria dell'arco murario: una rilettura storico-critica*, in Becchi A., Foce F., *Degli archi e delle volte. Arte del costruire tra meccanica e stereotomia*, Marsilio, Venezia 2002

Gauthey É.-M., *Traité de la construction des ponts*, F. Didot, vol. 1-2, Paris 1809-1813; vol. 3, Paris 1816.

Holzer S.M., Veihelmann K., *Hinges in historic concrete and masonry arches*, "Proceedings of the Institution of civil engineers", vol.168, 2015, pp.55-64.

Köpcke C., *Über die Verwendung von drei Gelenken in Steingewölben*, Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur- Vereins zu Hannover, 1888, Bd. 34, pp. 374-380.

Leibbrand K., *Steinbrücken mit gelenkartigen Einlagen*, “Zeitschrift für Bauwesen”, Bd. 38, 1888, coll. 235-260

Leibbrand K., *Gewölbte Brücken*, Fortschritte der Ingenieurwissenschaften, W. Engelmann, Leipzig 1897.

Leibbrand M., *Donaubrücke bei Inzighofen in Hohenzollern*, “Zeitschrift für Bauwesen”, Bd. 46, 1896, coll. 272-292

Leibbrand M., *Die Neckarbrücke bei Neckarhausen (Hohenzollern)*, “Zeitschrift für Bauwesen”, Bd. 53, 1903, coll. 455-476.

Méry E., *Sur l'équilibre des voûtes en berceau*, “Annales des Ponts et Chaussées”, vol. 19, 1840, I sem., pp. 50-70.

Mosca C.B., *Capitoli d'appalto per la costruzione d'un ponte ad un sol arco sulla Dora Riparia presso Torino, col ristretto generale della spesa*, Stamperia Reale, Torino 1823

Mosca C., *Il ponte Mosca sulla Dora Riparia presso Torino*, Dissertazione presentata alla Commissione esaminatrice per ottenere il diploma di Ingegnere civile, Stamperia dell'Unione Tipografico-Editrice, Torino 1873

Perronet J.-R., *Description des projets et de la construction des ponts de Neuilli, de Mantes, d'Orléans, de Louis XVI, etc.; du projet du canal de Bourgogne [...] et celui de la conduite des eaux de l'Yvette et de Bièvre à Paris*, imprimerie Royale, Paris 1782-83.

Reycend G.A., *Il ponte Mosca sulla Dora Riparia presso Torino ed il Murazzo del nuovo corso Napoli*, Tip. e Lit. Camilla e Bertolero, Torino 1880

Richelmy P., *Notizie biografiche intorno al commend. Carlo Bernardo Mosca*, “Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino”, vol. III 1867-1868, pp. 390-412

Séjourné P., *Grandes voûtes*, Tardy-Pigelet, Bourges 1913-1916

Swain G. F., *Structural engineering*. Vol. III, *Stresses, graphical statics and masonry*, McGraw-Hill Book Company, New York 1927.

Tanturli S., *“Una fortezza causata da due debolezze”: l'arco in muratura tra forma, carico, verifica, progetto*, Tesi di Laurea Magistrale in Architettura, (Relatore: F.Foce), Genova 2014