Università di Genova | DIMA Dipartimento di Matematica

Corso di laurea magistrale in Matematica

Curriculum in Divulgazione e Didattica della Matematica

La mostra scientifica interattiva *"Infiniti Intrecci"* e le idee di infinito dei visitatori: uno studio esplorativo durante un festival di divulgazione scientifica.

Relatrice

Prof.ssa Elisabetta Robotti

Correlatore

Prof. Giuseppe Rosolini

Candidata

Cecilia Costanzo

A.a 2025/2026

Indice

Introduzione **7**

1 Obiettivi della tesi **15**

1.1 Ipotesi e domande di ricerca 17

1.1.1 Nota metodologica 19

2 Quadri teorici **21**

2.1 Comunicazione della scienza 21

2.1.1 La rilevanza della comunicazione scientifica 22

2.1.2 I modelli di comunicazione della scienza 26

2.1.3 I canali della comunicazione scientifica 30

2.1.4 La mostra come canale di comunicazione scientifica 33

2.1.5 Breve storia dei musei scientifici 45

2.1.6 La matematica in mostra: esperienze di mostre matematiche in Italia 53

2.2 La costruzione del concetto di infinito 57

2.2.1 Immagine concettuale e definizione concettuale 57

2.2.2 Misconcezioni e ostacoli 59

2.2.3 Sulla comprensione del concetto di infinito 60

3 Progettazione della mostra *Infiniti Intrecci* 63

3.1 Contenuti matematici della mostra 64

3.1.1 La geometria proiettiva: il punto che non c'è 65

3.1.2 L'analisi infinitesimale: l'infinitamente piccolo 82

3.1.3 Le cardinalità infinite: l'infinitamente tanto 88

3.2 Prima edizione della mostra 96

3.2.1 Progetto grafico 97

3.2.2 Percorso espositivo 97

3.2.3 Installazioni 99

3.3 Seconda edizione della mostra 117

3.3.1 Progetto grafico 118

3.3.2 Percorso espositivo 119

3.3.3 Installazioni 120

4 Metodologia di ricerca 127

4.1 Costruzione dei questionari 127

4.1.1 Costruzione delle domande relative alle astrazioni del concetto di infinito 129

4.2 Tipi di dati 132

4.3 Strategie di analisi dei dati 132

5 Analisi dei dati e risultati dell'analisi 135

5.1 Le esperienze pregresse dei visitatori con il concetto di infinito . . 135

5.2 Analisi dei dati pre-visita 136
5.3 Analisi dei dati a confronto 144

6 Conclusioni **159**

6.1 Risposta alle domande di ricerca 159
6.1.1 Prospettiva cognitiva 160
6.1.2 Prospettiva affettivo-attitudinale 164
6.2 Limiti della ricerca e sviluppi futuri 167
6.2.1 Limiti della ricerca 167
6.2.2 Sviluppi futuri 170

Appendice A **173**

Bibliografia **180**

Introduzione

La presente tesi nasce dalla collaborazione con Sofia Palazzi, nell'ambito di un progetto di ricerca condiviso. Pertanto, pur configurandosi come due tesi distinte, ciascuna volta ad approfondire specifici aspetti del progetto, gli elaborati condividono alcune sezioni comuni. La natura della collaborazione e la distinzione tra le parti comuni e i contributi individuali verranno illustrate più dettagliatamente nel corso di questa introduzione.

Nel corso del 2025 abbiamo avuto l'opportunità di progettare e realizzare, nell'ambito del "Festival della Scienza" di Genova, la mostra interattiva di matematica *Infiniti Intrecci*, dedicata al tema dell'infinito in matematica. La progettazione della mostra si è ispirata alla tipologia delle mostre interattive, nelle quali i contenuti scientifici vengono proposti attraverso esperienze, installazioni e attività che invitano il visitatore ad agire ed esplorare. L'interazione con le installazioni può rendere la visita un'esperienza di divertimento e intrattenimento, caratterizzata da un forte coinvolgimento del visitatore, ma può anche offrire la possibilità di costruire significati e sviluppare riflessioni a partire dall'esperienza vissuta.

Rimane tuttavia più complesso definire in che senso, all'interno di una mostra interattiva, si possa parlare di apprendimento: quali forme di apprendimento possano verificarsi, attraverso quali processi e mediante quali strumenti e materiali (Merzagora, Rodari, 2007). È proprio da queste considerazioni che ha preso avvio il nostro progetto di ricerca, volto a indagare quali possano essere le potenzialità educative di una mostra interattiva di matematica.

Poiché la mostra oggetto della nostra ricerca si colloca nell'ambito della comunicazione della matematica, è stato quindi necessario interrogarsi innanzitutto su che cosa significhi apprendere in un contesto di questo tipo. A questo proposito, la letteratura sull'educazione matematica informale, ambito di ricerca della

didattica della matematica che studia i processi di apprendimento che avvengono al di fuori dei tradizionali contesti formali di insegnamento come la scuola, introduce il concetto di apprendimento informale. In questo tipo di contesti, l'apprendimento informale può manifestarsi attraverso forme e dimensioni differenti, che comprendono sia la costruzione e la comprensione di concetti matematici, sia aspetti legati agli atteggiamenti, agli interessi, alle emozioni e al rapporto che le persone instaurano con la matematica.

Le caratteristiche proprie dell'esperienza proposta da *Infiniti Intrecci*, basata sull'interazione, sull'esplorazione e sul coinvolgimento del visitatore, sembrano quindi offrire la possibilità di osservare l'apprendimento informale della matematica attraverso prospettive differenti. Da un lato, il particolare contesto in cui avviene l'incontro con la matematica e le modalità attraverso cui essa viene presentata possono influire sul modo in cui il visitatore vive la disciplina, sulle emozioni che prova e sull'atteggiamento che sviluppa nei suoi confronti; dall'altro, l'interazione con le installazioni e l'esplorazione dei contenuti possono offrire occasioni per costruire e approfondire significati matematici legati al concetto di infinito.

A partire da queste considerazioni, per esplorare le potenzialità di apprendimento informale della mostra *Infiniti Intrecci* abbiamo scelto di analizzare l'esperienza attraverso due differenti prospettive. Una prospettiva affettivo-attitudinale, volta a indagare la possibilità che l'esperienza della mostra favorisca atteggiamenti positivi nei confronti della matematica; una prospettiva cognitiva, volta ad approfondire in che modo l'esperienza proposta possa contribuire alla costruzione del concetto matematico di infinito.

La mostra interattiva *Infiniti Intrecci* è un progetto nato da un'idea di Giuseppe Rosolini e sviluppato con le autrici di queste tesi, in collaborazione con il Dipartimento di Matematica dell'Università di Genova, la Chapman University, "Fosforo: la festa della scienza" e l'Unità Comunicazione integrata del Consiglio Nazionale delle Ricerche. La mostra, dedicata al tema degli infiniti in matematica, è stata realizzata in occasione del "Festival della Scienza" di Genova nel 2025 e successivamente riproposta in una seconda edizione durante "Fosforo: la festa della scienza", a Senigallia, nel 2026.

Per indagare se, nel contesto di una mostra interattiva di matematica, sia possibile favorire la costruzione di significati matematici e promuovere atteggiamenti positi-

vi nei confronti della disciplina abbiamo raccolto informazioni durante la seconda edizione della mostra attraverso la somministrazione di questionari, proposti ai partecipanti sia prima sia dopo l'esperienza di visita. I questionari comprendevano domande a risposta chiusa, tra cui scale di tipo Likert, che hanno consentito una valutazione quantitativa, e domande a risposta aperta, che hanno permesso una valutazione di tipo qualitativo. La combinazione delle due tipologie di quesiti ha permesso di raccogliere informazioni diverse sull'esperienza del pubblico.

La ricerca si è sviluppata a partire da due domande di ricerca distinte e complementari, entrambe volte a indagare l'esperienza del pubblico: una relativa alla costruzione di significati matematici legati al concetto di infinito e l'altra relativa alla possibilità di promuovere atteggiamenti positivi nei confronti della matematica. Sebbene entrambe le dimensioni siano state esplorate a partire dalla medesima esperienza, la loro esplorazione ha richiesto prospettive teoriche e metodologiche differenti. Per questo motivo, le due prospettive sono state approfondite nell'ambito di due tesi distinte. Sofia Palazzi si è concentrata sulla possibilità di promuovere atteggiamenti positivi nei confronti della matematica in un contesto di comunicazione della matematica, mentre io mi sono occupata di indagare i possibili processi di costruzione dei significati matematici relativi all'infinito e perché questo avvenga.

Di seguito descriviamo i contenuti della tesi, specificando quali sono i contributi in comune con l'elaborato di Sofia Palazzi.

La tesi è articolata in sei capitoli.

Nel primo capitolo viene presentato il contesto e l'obiettivo della ricerca. A partire dall'esperienza di progettazione e realizzazione della mostra interattiva di matematica *Infiniti Intrecci*, viene introdotto il tema dell'apprendimento informale della matematica e delle potenzialità delle mostre interattive come contesti di apprendimento informale. Dopo aver delineato le caratteristiche dell'esperienza proposta dalla mostra e averne discusso il possibile ruolo come ambiente di apprendimento informale, il capitolo si concentra sulla dimensione cognitiva dell'apprendimento, con particolare riferimento alla costruzione del concetto matematico di infinito. Vengono quindi presentate le ipotesi e le domande di ricerca che guidano il lavoro, volte a indagare quali idee sul concetto di infinito matematico siano maggiormente diffuse tra i visitatori prima della visita e se l'interazione con le installazioni possa

favorire l'emergere di situazioni in cui queste idee vengono messe in discussione. Infine si riflette su come interpretare le risposte dei visitatori e le eventuali differenze emerse tra prima e dopo la visita. Queste variazioni possono offrire spunti per comprendere se l'esperienza abbia suscitato un confronto con le idee iniziali sull'infinito, pur senza consentire di affermare che si sia verificato un apprendimento stabile o una riorganizzazione duratura delle conoscenze.

Il secondo capitolo presenta, in una prima parte comune alle due tesi, il quadro teorico relativo alla comunicazione della scienza. Il capitolo prende avvio dall'analisi delle motivazioni sociali ed educative che spingono istituzioni scientifiche e culturali a integrare attività di comunicazione della scienza nella propria missione. Questo inquadramento permette di comprendere il ruolo che tali attività assumono nel rapporto tra istituzioni scientifiche e cittadini e di collocare la mostra oggetto della nostra ricerca all'interno di questo più ampio contesto (Commissione Europea, 2023, European Commission: Directorate-General for Communication, 2025 e ANVUR – Agenzia Nazionale di Valutazione del sistema Universitario e della Ricerca, 2022).

Viene quindi ripercorsa l'evoluzione dei paradigmi della comunicazione della scienza, mostrando il passaggio da modelli prevalentemente trasmissivi a prospettive fondate sul dialogo, sull'interazione e sul coinvolgimento della cittadinanza (Bucchi, 2008). L'attenzione si sposta successivamente sui diversi canali attraverso cui la scienza viene comunicata al pubblico, con particolare riferimento all'evoluzione dei musei scientifici, dalle antiche collezioni naturalistiche ai moderni *science centres* (Merzagora, Rodari, 2007). In questo contesto viene approfondito il ruolo della mostra come specifico strumento di comunicazione della scienza e vengono ripercorse alcune tappe significative della storia delle esposizioni matematiche in Italia, tra cui *Il Giardino di Archimede* (Ottaviani, Tessieri, 2024), *Matemilano* (Dedò, Di Sieno, 2024) e *Galleria di Matematica "Emanuela Ughi"* (Ughi, 2024), che hanno contribuito alla diffusione di approcci esplorativi e interattivi alla matematica.

La seconda parte di questo capitolo si concentra invece sulla costruzione del concetto matematico di infinito, introducendo alcuni strumenti teorici della didattica della matematica utili a interpretare le idee e i ragionamenti dei visitatori. In particolare, viene presentato il modello di Tall e Vinner (Tall, Vinner, 1981) e, che distingue tra immagine concettuale e definizione concettuale e permette di

approfondire il ruolo delle esperienze e delle rappresentazioni nella costruzione del significato di un concetto matematico. Il quadro teorico viene inoltre utilizzato per riflettere sulle immagini concettuali evocate in contesti differenti e sulle possibili situazioni di conflitto cognitivo che possono emergere quando aspetti diversi, talvolta in contrasto, della stessa immagine concettuale vengono attivati.

Il terzo capitolo, comune alle due tesi, presenta le tre forme di infinito matematico esplorate nella mostra, facendo riferimento alla distinzione proposta nel testo *Three Infinities in Mathematics* di Marco Panza e Daniele Struppa: la geometria proiettiva, l'analisi infinitesimale e le cardinalità infinite. Successivamente, vengono descritte la progettazione e la realizzazione delle due edizioni della mostra, illustrandone il progetto grafico, il percorso espositivo e le installazioni.

Nel quarto capitolo viene presentata la metodologia di ricerca adottata per rispondere alle domande di ricerca. In particolare, viene descritta la costruzione del questionario e vengono presentati i dati raccolti, specificandone la tipologia, le modalità e i tempi di raccolta, il contesto nel quale sono stati acquisiti e le caratteristiche del campione coinvolto. Il capitolo si conclude con la descrizione delle strategie adottate per l'analisi dei dati, in relazione agli obiettivi della ricerca. In particolare, per l'analisi delle domande con scala Likert sono stati utilizzati diagrammi circolari e tabelle di contingenza, che hanno permesso di confrontare le risposte fornite dai partecipanti prima e dopo la visita e di analizzare gli eventuali spostamenti tra le diverse modalità di risposta. Le risposte alla domanda aperta sono state invece analizzate attraverso un processo di categorizzazione, elaborato a partire dalle dimensioni dell'atteggiamento individuate nel quadro teorico.

Nel quinto capitolo, i dati vengono analizzati e discussi alla luce dei quadri teorici presentati nel secondo capitolo, al fine di fornire una risposta alle domande di ricerca.

Il sesto capitolo è dedicato alle conclusioni della ricerca e alla discussione delle principali evidenze emerse dall'analisi dei dati. Il capitolo presenta i risultati relativi alla prospettiva cognitiva, oggetto della presente tesi, e a quella affettivo-attitudinale, oggetto della tesi di Sofia Palazzi. Infine, vengono discussi i limiti della ricerca e le prospettive di ricerca future.

Per quanto riguarda la prospettiva affettivo-attitudinale, i risultati mostrano che le potenzialità più significative della mostra riguardano la visione della matema-

tica e la disposizione emozionale nei suoi confronti. In particolare, l'esperienza sembra aver favorito una maggiore apertura verso una concezione della matematica come disciplina creativa, dinamica e in continua evoluzione, offrendo inoltre la possibilità di sperimentare la matematica in modo positivo sul piano emozionale. Le caratteristiche dell'ambiente espositivo messe in evidenza dai partecipanti, quali il coinvolgimento, la curiosità, la bellezza, la creatività e l'originalità della proposta, suggeriscono che tali potenzialità non siano riconducibili esclusivamente ai contenuti matematici presentati, ma anche alle modalità attraverso cui essi vengono vissuti e comunicati.

La prospettiva cognitiva, analizzata attraverso i concetti di immagine concettuale, misconcezione e conflitto cognitivo, mostra invece come l'esperienza della mostra possa incidere sulle rappresentazioni associate al concetto di infinito. I risultati evidenziano la presenza, prima della visita, di immagini concettuali prevalentemente legate all'infinito potenziale, all'idea di una quantità molto grande e indefinita e, parallelamente, alla possibilità di considerare l'infinito come un oggetto matematico definito e soggetto a proprie regole. Dopo la visita, alcune di queste componenti risultano consolidate, mentre altre sembrano essersi ampliate o modificate, mostrando la possibilità che l'esperienza interattiva introduca rappresentazioni alternative senza necessariamente sostituire quelle già presenti. Particolarmente rilevante è il caso della geometria proiettiva, nel quale i risultati suggeriscono il possibile emergere di un conflitto cognitivo tra la rappresentazione euclidea delle rette parallele, che non si incontrano, e quella introdotta dalla mostra, nella quale esse possono essere considerate incidenti in un punto all'infinito. In modo analogo, il riferimento all'uso dell'infinito in matematica come grandezza definita e soggetta a regole proprie sembra introdurre una componente dell'immagine concettuale maggiormente riconducibile a una concezione attuale dell'infinito. Più che indicare l'acquisizione di tale concezione, questo elemento può essere interpretato come l'introduzione di una nuova possibilità di rappresentare e pensare l'infinito, che si affianca alle concezioni già presenti e può costituire un punto di partenza per una loro successiva rielaborazione.

Nel complesso, il capitolo evidenzia quindi come le due prospettive adottate restituiscano un quadro articolato delle potenzialità di apprendimento informale della mostra *Infiniti Intrecci*. L'esperienza sembra offrire occasioni sia per vivere la matematica in una dimensione affettiva positiva, sia per entrare in contatto con

rappresentazioni e significati matematici differenti da quelli già posseduti. Le conclusioni sottolineano così il possibile valore delle mostre interattive di matematica come contesti di apprendimento informale, nei quali comunicazione, interazione, esplorazione e costruzione di significati possono intrecciarsi.

Terminologie e definizioni: un quadro complesso

Proprio perché la presente ricerca si colloca all'intersezione di diversi ambiti disciplinari e di ricerca, è emersa la necessità di confrontarsi con una pluralità di termini il cui significato non è sempre univoco. Uno stesso termine, infatti, può assumere significati diversi a seconda del contesto disciplinare e teorico in cui viene utilizzato. Per descrivere l'atto di parlare di scienza con un pubblico di esperti e di non esperti vengono utilizzati termini quali "comunicazione" e "divulgazione" a parole quali "popolarizzazione", "volgarizzazione" o "pubblica comprensione della scienza".

Come osservano Massimiliano Bucchi e Brian Trench nell'articolo "A conceptual review in ten keywords" (Bucchi, Trench, 2016), le espressioni di matrice anglosassone hanno conquistato una posizione di rilievo nel dibattito globale, sia attraverso traduzioni letterali sia mantenendo la forma originale. È così che, negli ultimi due decenni, il termine "science communication" (comunicazione della scienza) si è progressivamente consolidato come il termine per identificare e raccogliere questo articolato insieme di teorie e di pratiche.

Tra le diverse possibilità, il termine "popularisation" vanta la tradizione più lunga tra quelle impiegate per descrivere un'ampia gamma di pratiche finalizzate a rendere le informazioni scientifiche accessibili a un pubblico generale e non specialistico, come evidenziato in Bucchi, Trench, 2016. Gli autori sottolineano come i termini corrispettivi presenti in diverse lingue latine, tra cui il francese "vulgarisation", lo spagnolo "divulgación" e l'italiano "divulgazione", affondino anch'essi le proprie radici in una lunga storia e continuino a essere ampiamente utilizzati nel dibattito contemporaneo.

Questa varietà di termini riflette una mancanza di uniformità che non riguarda solo la pratica, ma attraversa anche il mondo della ricerca accademica che si occupa di studiare tali pratiche. Come evidenziato da Gascoigne, Schiele, 2020, la

definizione di questo ambito rimane fluida: la comunicazione della scienza viene di volta in volta intesa come un obiettivo, un processo, un risultato o un esito, configurandosi come un campo che tocca tutte le discipline, giovane e in continua evoluzione, non ancora rigidamente codificato come disciplina autonoma.

Tra i diversi tentativi di definizione, risulta significativo quello contenuto in Bucchi, Trench, 2021. Ripercorrendo l'evoluzione del settore, gli autori giungono a definire la comunicazione della scienza come "la conversazione sociale attorno alla scienza", dove per società si intende l'insieme dei cittadini non esperti e dei cittadini ricercatori. Questa visione innovativa abbatte la distinzione tra comunicazione pubblica e non pubblica, riconoscendo che la conoscenza scientifica circola ormai nella società in modo continuo, informale e anche in modo non strettamente strategico.

In conclusione, prendendo atto di questa pluralità di termini, significati e tradizioni storiche, nel presente lavoro si sceglie di adottare in modo prevalente la dicitura "comunicazione della scienza" accogliendo la definizione proposta in Bucchi, Trench, 2021. Tale decisione risponde alla volontà di impiegare un termine più ampio e comprensivo, capace di abbracciare la totalità delle dimensioni e delle pratiche che animano le relazioni tra il mondo scientifico e la società.

Capitolo 1

Obiettivi della tesi

Nel corso del 2025 abbiamo avuto l'opportunità di progettare e realizzare per il "Festival della Scienza" di Genova la mostra di matematica *Infiniti Intrecci*, dedicata al tema dell'infinito in matematica. La progettazione della mostra si è ispirata alla tipologia delle mostre interattive, che approfondiremo nel quadro teorico relativo alla comunicazione della scienza alla Sezione 2.1. Il contesto del "Festival della Scienza" di Genova è stato per noi particolarmente significativo per conoscere l'approccio interattivo alla museologia poiché abbiamo avuto modo di visitare e osservare le mostre che diversi enti di ricerca hanno presentato nel corso degli anni. Queste esposizioni costituiscono infatti uno dei mezzi attraverso cui enti e istituzioni di ricerca comunicano al pubblico temi, risultati e metodi della scienza. Ne sono un esempio le mostre realizzate dal Consiglio Nazionale delle Ricerche (CNR) (Messina et al., 2024), dall'Istituto Nazionale di Geofisica e Vulcanologia (INGV) (Istituto Nazionale di Geofisica e Vulcanologia, 2026), dall'Istituto Nazionale di Fisica Nucleare (INFN) (Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, 2026) e dall'Istituto Nazionale di Astrofisica (INAF) (Istituto Nazionale di Astrofisica, 2026).

Nelle mostre interattive i contenuti scientifici vengono proposti attraverso esperienze, installazioni e attività che invitano il visitatore ad agire, esplorare e confrontarsi direttamente con ciò che osserva. L'interazione con le installazioni rende la visita un'esperienza di divertimento e intrattenimento, caratterizzata da un forte coinvolgimento del visitatore. Inoltre, mettersi in gioco attraverso le installazioni potenzia anche la possibilità di costruire un pensiero, un significato legato

al concetto scientifico che l'installazione vuole mediare. Più incerto e discusso è definire in che senso in una mostra interattiva si possa imparare: chi impara, che cosa impara e grazie a quali processi mentali e mezzi materiali (Merzagora, Rodari, 2007).

La questione si inserisce nel più ampio quadro dell'educazione matematica informale, un ramo di ricerca in didattica della matematica che considera l'apprendimento della matematica come un processo che non si esaurisce all'interno dell'istituzione scolastica, ma che può svilupparsi in una pluralità di contesti e attraverso esperienze differenti. In questi contesti l'apprendimento viene definito apprendimento informale (Casi et al., 2023).

I contesti di apprendimento informale si distinguono da quelli scolastici per alcune caratteristiche specifiche: la partecipazione è generalmente volontaria, non si viene sottoposti alle tradizionali forme di valutazione e i confini disciplinari risultano più fluidi. La matematica può infatti essere presentata e vissuta attraverso connessioni con l'arte, la storia, l'architettura, la tecnologia e altri ambiti culturali (Casi et al., 2023).

L'apprendimento informale non costituisce semplicemente una versione meno strutturata dell'apprendimento scolastico, ma presenta caratteristiche e finalità proprie. Gli obiettivi che gli individui perseguono e le strategie che utilizzano quando si impegnano nel pensiero e nell'apprendimento informale possono essere differenti da quelli tipici della matematica scolastica. Le attività possono essere orientate, per esempio, all'efficienza, alla risoluzione di un problema concreto o alla socializzazione e, in tali situazioni, adulti e bambini possono utilizzare in modo flessibile strategie e risorse diverse in relazione al contesto e agli obiettivi perseguiti (Pattison et al., 2016). L'apprendimento informale comprende quindi la possibilità di confermare o mutare atteggiamenti e aspettative, di crescere come cittadini, di implementare il proprio saper fare e di costruire nuovi concetti (Merzagora, Rodari, 2007).

All'interno della mostra interattiva di matematica *Infiniti Intrecci* la matematica viene presentata in relazione all'arte, alla storia e alla filosofia, come una disciplina viva e in continuo cambiamento, l'interazione avviene sia con le installazioni che con l'animatore, il concetto matematico presentato è complesso e la sua costruzione è influenzata dall'esperienza pratica. Pertanto si ipotizza che la mostra

Infiniti Intrecci si configuri come un ambiente di apprendimento informale.

Per verificare l'ipotesi formulata e guidare la ricerca, il presente lavoro si propone di rispondere alla seguente domanda:

> *Quali sono le potenzialità dell'apprendimento informale nell'ambito della mostra interattiva di matematica Infiniti Intrecci?*

Per rispondere a questa domanda abbiamo scelto di considerare due prospettive differenti. La scelta è legata alle caratteristiche dell'esperienza proposta dalla mostra, che combina interazione, esplorazione e coinvolgimento personale con la possibilità di entrare in contatto con contenuti e idee matematiche. Da un lato, queste caratteristiche possono incidere sul modo in cui il visitatore vive la matematica, coinvolgendolo sul piano emotivo e influenzando il rapporto che instaura con la disciplina; dall'altro, possono offrire occasioni per costruire e approfondire conoscenze e significati matematici. A partire da queste considerazioni, una prospettiva riguarda la dimensione affettiva e l'atteggiamento nei confronti della matematica e una prospettiva si concentra sulla dimensione cognitiva e sui processi di apprendimento.

Abbiamo analizzato le due diverse prospettive in due tesi distinte. In questa tesi in particolare cercheremo di dare una risposta alla domanda di ricerca dal punto di vista della dimensione cognitiva.

Presentiamo adesso come si intende esplorare la dimensione cognitiva e quali ipotesi e domande ci hanno guidato nell'analisi.

1.1 Ipotesi e domande di ricerca

Nella Sezione 2.2 sono stati delineati alcuni costrutti della didattica della matematica relativi alla costruzione dei concetti matematici, con particolare riferimento al concetto di infinito. Trattandosi di un oggetto che non prescinde dall'esperienza diretta dell'essere umano, esso mette alla prova le intuizioni del soggetto che apprende. La letteratura evidenzia quindi come la costruzione di tale concetto sia segnata da ostacoli epistemologici e misconcezioni (Brousseau, 1998, Arrigo, D'Amore, 1999).

Mentre gli ostacoli epistemologici rappresentano passaggi concettuali storicamente ed epistemologicamente necessari per l'evoluzione del sapere, caratterizzati da un'elevata resistenza al cambiamento che richiede interventi didattici strutturati e prolungati, l'indagine qui presentata si propone di rilevare le misconcezioni. Esse, infatti, nascono dal soggetto stesso e si configurano come concezioni errate o limitate sviluppate a partire da interpretazioni personali o da analogie fuorvianti con la vita quotidiana. Si ritiene pertanto che un'esperienza breve e informale come la visita a una mostra sia idonea a far emergere le misconcezioni del pubblico, piuttosto che a misurare il superamento o la presenza di ostacoli epistemologici.

Di fronte all'infinito, i soggetti tendono spontaneamente ad applicare modelli intuitivi derivanti dal contesto finito, strutturando specifiche *immagini concettuali* (Tall, Vinner, 1981). Ad esempio, nell'ambito dell'infinito cardinale, tali immagini concettuali si traducono frequentemente in misconcezioni: la confusione tra la dimensione potenziale e attuale del concetto, i fenomeni di appiattimento della cardinalità o la dipendenza dalla dimensione geometrica del supporto che ci fa credere, ad esempio, che un segmento lungo contenga più punti di un segmento corto (Arrigo, D'Amore, 1999).

La quasi totalità degli studi presenti in letteratura si focalizza tuttavia sull'analisi della presenza di ostacoli e misconcezioni all'interno del contesto scolastico. Il presente lavoro analizza invece una mostra scientifica interattiva, che si configura come un ambiente di apprendimento informale, caratterizzato da una fruizione volontaria e priva di valutazione e il cui obiettivo esplicito non è l'apprendimento. Inoltre, come evidenziato nell'analisi dei contenuti matematici presente nella Sezione 3.1, un'attività di divulgazione efficace deve saper coniugare il rigore matematico con elementi quali il gioco, l'interdisciplinarità, il coinvolgimento e l'aggancio a questioni profonde dell'esistenza umana (Dedò, Di Sieno, 2024, Sáenz de Cabezón, 2023) rendendo l'argomento dell'infinito coinvolgente e interessante. Osserviamo che le rilevazioni internazionali, come i dati OCSE del 2016 (Echazarra et al., 2016), evidenziano come la prassi scolastica fatichi spesso a integrarle.

Da queste premesse nasce l'interesse di indagare i processi di costruzione del concetto di infinito e l'eventuale emergere di misconcezioni nel momento in cui la sua esplorazione viene calata nell'ambiente informale, interattivo e coinvolgente della mostra.

Si ipotizza pertanto che i visitatori della mostra, posti di fronte ad attività ed installazioni dedicati al concetto di infinito, evochino in prima istanza *immagini concettuali* caratterizzate da intuizioni legate all'infinito potenziale o plasmate sulle proprietà "al finito".

Inoltre, si ipotizza che l'interazione con le installazioni della mostra sia in grado di evocare simultaneamente aspetti in contrasto dell'*immagine concettuale* del visitatore, generando *conflitto cognitivo* e stimolando una messa in discussione delle proprie idee pregresse.

Per verificare le ipotesi formulate e guidare la raccolta e l'analisi dei dati empirici durante la mostra, il presente lavoro si propone di rispondere alle seguenti domande di ricerca:

- *Quali* immagini concettuali *e quali misconcezioni riguardanti le astrazioni del concetto di infinito matematico sono maggiormente diffuse tra il pubblico prima della visita?*
- *Un contesto informale ed interattivo come quello della mostra è in grado di far emergere situazioni di* conflitto cognitivo *nei visitatori? Quanto invece le convinzioni dei visitatori rimangono radicate?*

1.1.1 Nota metodologica

Come illustrato nel Capitolo 4, per rispondere a tali domande è stato somministrato ai visitatori un questionario prima e dopo la visita alla mostra, volto a misurare l'evoluzione delle posizioni dei visitatori rispetto a una serie di affermazioni.

È opportuno precisare che le eventuali variazioni riscontrate nelle risposte dei visitatori non devono essere considerate come ristrutturazioni cognitive stabili o apprendimenti definitivi. L'esperienza all'interno di una mostra scientifica si svolge in un arco temporale circoscritto. Sarebbe ingenuo ipotizzare che un'interazione di breve durata possa permettere il superamento ostacoli epistemologici complessi o misconcezioni maturate in anni di formazione o vissuto quotidiano. La nostra ipotesi è che le variazioni rilevate dal questionario testimoniano un cambiamento temporaneo nell'immagine concettuale evocata (Tall, Vinner, 1981) e indicano

l'innesco di uno stato di conflitto cognitivo che potrebbe predisporre il visitatore a una riconsiderazione del significato di infinito matematico.

Capitolo 2

Quadri teorici

2.1 Comunicazione della scienza

In questa sezione viene presentato il quadro teorico relativo alla comunicazione della scienza, con particolare attenzione alle mostre interattive di matematica. Tale quadro costituisce la base teorica necessaria per analizzare e comprendere le scelte progettuali alla base della mostra *Infiniti Intrecci*, oggetto della presente tesi.

Si parte dall'analisi delle motivazioni sociali ed educative che spingono le istituzioni scientifiche e culturali a integrare le attività di comunicazione della scienza all'interno della propria missione. Successivamente viene ripercorsa l'evoluzione dei principali paradigmi della comunicazione della scienza, evidenziando il passaggio da modelli prevalentemente trasmissivi, incentrati sul trasferimento unidirezionale delle conoscenze dagli esperti al pubblico, a prospettive fondate sul dialogo, sull'interazione e sul coinvolgimento della cittadinanza (Bucchi, 2008). Questo primo inquadramento permette di comprendere il ruolo che le attività di comunicazione assumono nel rapporto tra istituzioni scientifiche e cittadini e di collocare la mostra oggetto della ricerca all'interno di un più ampio contesto sociale e culturale.

La comunicazione della scienza può avvalersi di una pluralità di canali, che vengono brevemente presentati per fornire una visione d'insieme e, successivamente, focalizzare l'attenzione sulle mostre scientifiche e sulle caratteristiche che contrad-

distinguono questo specifico canale comunicativo (Bencivelli et al., 2013).

Al fine di inquadrare le mostre scientifiche anche da una prospettiva storica, ne viene ripercorsa l'evoluzione, dalle prime esposizioni fino alla nascita e allo sviluppo dei moderni musei della scienza. In questo percorso emerge un ulteriore elemento centrale per la presente tesi: l'interattività. In particolare, viene approfondito il ruolo dell'*Exploratorium* di San Francisco, considerato un riferimento fondamentale per lo sviluppo dei moderni *science centres*, e della filosofia *hands-on*, *minds-on*, *hearts-on*, che pone al centro dell'esperienza museale la manipolazione, l'esplorazione, il coinvolgimento cognitivo ed emotivo del visitatore (Merzagora, Rodari, 2007).

Infine, poiché l'attenzione della presente ricerca è rivolta in particolare alle mostre di matematica, vengono presentati alcuni esempi significativi sviluppatisi in Italia, che hanno contribuito alla diffusione di un approccio museale interattivo alla matematica. In particolare, vengono presi in esame il Giardino di Archimede, Matemilano e la Galleria di Matematica di Emanuela Ughi (Ottaviani, Tessieri, 2024, Dedò, Di Sieno, 2024, Ughi, 2024).

2.1.1 La rilevanza della comunicazione scientifica

Nella Costituzione della Repubblica Italiana, l'articolo 9, comma 1, stabilisce che "La Repubblica promuove lo sviluppo della cultura e la ricerca scientifica e tecnica" e l'articolo 33, comma 1, afferma che "L'arte e la scienza sono libere e libero ne è l'insegnamento". Tali articoli evidenziano il ruolo che la conoscenza scientifica riveste nello sviluppo della società. Nelle democrazie liberali contemporanee, la comunicazione della scienza assume quindi una rilevanza sempre maggiore. Infatti, in una società in cui lo sviluppo scientifico e tecnologico pervadono molti ambiti della vita quotidiana, le decisioni politiche, economiche e sociali dipendono sempre più da conoscenze di natura tecnica. In questo contesto, l'accesso a un'informazione scientifica diventa un prerequisito per l'esercizio della cittadinanza: un cittadino informato possiede gli strumenti per comprendere il dibattito pubblico e partecipare in modo consapevole ai processi decisionali. Chi al contrario non conosce la scienza e la tecnologia rischia di essere escluso (Benvenuti, Natalini, 2017).

Tale dinamica si configura come una responsabilità a doppio senso. Se da un lato il cittadino ha il dovere di informarsi per scegliere in maniera consapevole, dall'altro i comunicatori hanno il compito di fornire un'informazione rigorosa, scientifica e accessibile. Una comunicazione approssimativa rischia infatti di alimentare la confusione, ostacolando una comprensione equilibrata dei benefici e dei rischi legati allo sviluppo scientifico e tecnologico (Greco, 2008).

Inoltre, in un'epoca dominata dai social media e dalla rapida diffusione delle informazioni, una corretta comunicazione scientifica può rappresentare un importante antidoto alle fake news.

Il caso della matematica

L'importanza della comunicazione della matematica si inserisce nel quadro delle considerazioni precedentemente esposte, ma assume caratteristiche specifiche legate alla natura stessa della disciplina.

In primo luogo, la matematica è il linguaggio di tutte le scienze, quindi molti aspetti della nostra vita, tecnologie ma anche processi pratici di tutti i giorni come la gestione delle code o la logistica, sono modellati e scritti attraverso di essa. Facciamo degli esempi: comprendere la matematica ci serve quando leggiamo le previsioni del meteo per capire cosa significano le percentuali e per sapere se ci servirà l'ombrello oppure no, quando valutiamo la convenienza di un abbonamento o anche quando discutiamo delle conseguenze del cambiamento climatico. A questo proposito, comprendere la matematica ci aiuta a evitare generalizzazioni errate: ad esempio, se a Genova in una giornata di luglio il termometro segna 15°C, un'analisi superficiale potrebbe far pensare che il riscaldamento globale sia un'invenzione. La matematica, però, ci insegna a non confondere un singolo punto isolato con il trend generale, spiegandoci che il clima non si basa sulla singola giornata, ma sulla media statistica di dati raccolti in trent'anni. Per fare un altro esempio proviamo a prevedere l'andamento di un'epidemia. Se una persona contagiata ne infetta in media altre due, potremmo pensare che il virus si diffonda lentamente. La matematica ci mostra invece una realtà ben diversa, svelando che la crescita è esponenziale. Capire i modelli matematici che descrivono questi andamenti ci permette di attivare misure preventive. Quindi per capire il mondo in cui viviamo serve una competenza matematica che permetta di utilizzare

i modelli matematici di pensiero e di presentazione (formule, modelli, costrutti, grafici, diagrammi) (Consiglio dell'Unione Europea, 2018).

In secondo luogo, la matematica contribuisce a sviluppare capacità di ragionamento che permettono di costruire argomentazioni coerenti, valutare criticamente quelle altrui e partecipare in modo consapevole al dialogo e al confronto (OECD, 2023).

Perciò, la matematica permette di formare cittadini migliori, capaci di comprendere il mondo in cui vivono e di esercitare un pensiero critico.

Tuttavia, i comunicatori della matematica devono affrontare difficoltà legate alla resistenza che spesso si sviluppa nei confronti della disciplina. Questa resistenza nasce da diversi fattori. Vi sono le difficoltà intrinseche della matematica, legate al suo carattere astratto, al linguaggio specifico e alla sua struttura gerarchica, in cui la comprensione di alcuni concetti presuppone spesso la conoscenza di altri. Inoltre, tra le persone sono diffusi pregiudizi che le inducono a ritenere che la matematica sia una materia riservata a pochi. Di conseguenza, è diventata opinione comune che sia accettabile non comprendere la matematica, addirittura neppure provare a farlo (Benvenuti, Natalini, 2017).

Le normative

La comunicazione scientifica è oggi riconosciuta come una delle responsabilità professionali del ricercatore. La necessità di comunicare la scienza ai non esperti è espressa in modo chiaro dalla Carta europea dei ricercatori del 2023 (Commissione Europea, 2023). Alla sezione "Impegno verso l'opinione pubblica" si legge:
"I ricercatori dovrebbero assicurare che le loro attività di ricerca siano rese note alla società in senso lato, in modo tale che possano essere comprese dai non specialisti, migliorando in questo modo la comprensione delle questioni scientifiche da parte dei cittadini. Il coinvolgimento diretto della società civile e dei cittadini consentirà ai ricercatori di comprendere meglio l'interesse del pubblico nei confronti delle priorità della ricerca e le sue preoccupazioni in merito, nonché di sfruttare il potenziale delle opportunità di co-progettazione e co-creazione con la società, ove pertinente."

La Carta sottolinea quindi come informare i cittadini sia parte integrante del ruo-

lo del ricercatore. L'obiettivo della comunicazione non è soltanto aumentare la comprensione delle questioni scientifiche, ma anche costruire un dialogo tra scienza e società. In questa prospettiva, il ricercatore non è chiamato semplicemente a trasmettere conoscenze in modo unidirezionale. Deve anche ascoltare il pubblico per comprenderne i dubbi, ascoltarne le domande e cercare di comprendere quali temi sono percepiti come più rilevanti. La comunicazione scientifica diventa così uno scambio reciproco, nel quale cittadini e ricercatori possono collaborare e contribuire insieme allo sviluppo della ricerca.

Il richiamo europeo alla responsabilità sociale dei ricercatori si riflette direttamente nel contesto italiano, dove l'ANVUR (Agenzia Nazionale di Valutazione del Sistema Universitario e della Ricerca) monitora e valorizza queste attività all'interno della cosiddetta Terza Missione.

Divenuta pienamente operativa a partire dal 2012, l'Agenzia ha ridefinito i criteri di valutazione degli atenei italiani inserendo, in linea con le direttive europee, la dimensione della Terza Missione. Questa si configura come un insieme di attività volte a creare le condizioni affinché il sapere prodotto all'interno delle istituzioni di ricerca possa investire il contesto sociale, economico e culturale del territorio di riferimento (ANVUR – Agenzia Nazionale di Valutazione del sistema Universitario e della Ricerca, 2022).

Nel corso del tempo, le modalità per valorizzare tali conoscenze si sono consolidate e l'ANVUR ha identificato nel *Public Engagement* lo strumento per attuare questo trasferimento culturale. Tale ambito si articola in diverse azioni chiave: organizzazione di attività culturali, comunicazione scientifica tradizionale e multimediale, iniziative di coinvolgimento dei cittadini (*citizen science*), interazione con il mondo della scuola.

I dati dell'Eurobarometro forniscono un'interessante analisi della considerazione dei cittadini per l'impegno della comunità scientifica nei processi di comunicazione. L'Eurobarometro fornisce periodicamente una serie di indagini, promosse dalla Commissione Europea per rilevare gli orientamenti dei cittadini su temi attuali rilevanti. In particolare, prenderemo in esame lo *Special Eurobarometer 557, European citizens' knowledge and attitudes towards science and technology* del 2024 (European Commission: Directorate-General for Communication, 2025). Il rapporto offre un quadro utile per comprendere il contesto in cui oggi si inserisce

la comunicazione scientifica.

Quando si analizzano gli ostacoli che allontanano le persone dalla scienza e dalla tecnologia, il fattore principale risulta essere la mancanza di tempo, indicata dal 40% degli intervistati. Subito dopo troviamo la mancanza di interesse (37%) e la percezione di non avere abbastanza conoscenze di base per comprendere la materia (36%). Un ruolo non trascurabile è giocato anche dalla mancanza di offerta e informazione: un quarto della popolazione lamenta infatti una scarsa informazione sugli eventi disponibili, mentre il 18% sottolinea come sul proprio territorio l'offerta di attività scientifiche sia carente o di bassa qualità.
Nonostante queste barriere, la propensione ad avvicinarsi alla scienza si esprime soprattutto attraverso canali personali e domestici: il 43% è propenso a guardare documentari o a leggere libri, riviste e podcast scientifici. Molto forte è anche la dimensione relazionale, con il 39% degli intervistati incline a discutere di scienza e tecnologia in famiglia o con gli amici, mentre il 28% predilige la visita a musei scientifici. Decisamente più bassa, invece, è la partecipazione pubblica: solo il 16% si spenderebbe in petizioni o manifestazioni su temi caldi (come nucleare, clima e biotecnologie) e appena il 15% parteciperebbe di persona a dibattiti o incontri pubblici.
Infine, da un'analisi del rapporto tra i soggetti che producono la scienza e la società emerge che quasi la metà dei cittadini (il 48%, diviso tra un 21% fortemente contrario e un 27% tendenzialmente contrario) ritiene che gli scienziati non dedichino abbastanza tempo a incontrare la popolazione per spiegare il proprio lavoro. A fronte di una fetta di popolazione neutrale (22%), solo il 27% degli intervistati si ritiene soddisfatto dell'impegno dedicato dai ricercatori nel dialogo diretto con i cittadini.
Da questa analisi emerge un messaggio chiaro: i ricercatori sono chiamati a comunicare di più con la società. Noi aggiungiamo che non basta aumentare la quantità della comunicazione, è fondamentale che sia anche una comunicazione di qualità.

2.1.2 I modelli di comunicazione della scienza

La comunicazione della scienza ha attraversato nel corso del tempo un'evoluzione: il rapporto tra la comunità scientifica e i cittadini è stato interpretato attraverso modelli differenti, ciascuno dei quali riflette una diversa concezione del ruolo del

pubblico, della natura della conoscenza scientifica e delle finalità della comunicazione. Dalla visione unidirezionale del *Deficit Model*, centrata sulla trasmissione delle conoscenze dagli esperti ai non esperti, si è progressivamente passati a modelli che valorizzano prima il dialogo e poi la partecipazione e il coinvolgimento dei cittadini nei processi decisionali. Nei paragrafi seguenti vengono presentati i tre modelli che hanno caratterizzato questa evoluzione: il *Deficit Model*, il *Dialogue Model* e il *Participation Model*. Si delinea quindi un panorama complesso in cui i diversi approcci non si escludono a vicenda, ma si integrano a seconda del contesto e degli obiettivi comunicativi.

Il *Deficit Model*

Fino agli anni Novanta del Novecento, il modello di comunicazione della scienza più diffuso era il *Deficit Model*. Questo modello si basava sull'idea che il pubblico possedesse un livello insufficiente di conoscenze scientifiche e che la principale causa della diffidenza o dell'opposizione nei confronti della scienza fosse proprio questa mancanza di informazioni. Di conseguenza, il compito degli scienziati e dei divulgatori consisteva nel trasmettere il sapere ai cittadini attraverso una comunicazione unidirezionale, nella convinzione che una maggiore informazione avrebbe portato automaticamente a una maggiore fiducia nella scienza.

Da questi presupposti nacque il *Public Understanding of Science* (PUS), un progetto sviluppatosi già a partire dagli anni del secondo dopoguerra ma che ebbe come nascita ufficiale il 1985 con il cosiddetto Rapporto Bodmer pubblicato dalla Royal Society di Londra. In questo rapporto venne evidenziata la sfiducia dei cittadini britannici nella scienza e ci si pose l'obiettivo di rimediare attraverso progetti di comunicazione. Il modello di queste iniziative era quello del deficit quindi l'obiettivo principale dei divulgatori era quello di tradurre: semplificare in termini più semplici il complicato linguaggio delle scienze (Bencivelli et al., 2013). L'attenzione per il PUS è testimoniata anche dalla fondazione della rivista accademica "Public Understanding of Science" nel 1992.

Il sociologo Massimiliano Bucchi descrive queste operazioni di diffusione (Bucchi, 2008):

1. i media sono un canale di comunicazione che però spesso altera il messaggio a

causa dell'impreparazione dei soggetti che vi lavorano o a causa del prevalere di logiche commerciali;

2. il pubblico è concepito come un soggetto passivo, sostanzialmente ignorante e ostile nei confronti della scienza;

3. la comunicazione è concepita come un processo di trasferimento di conoscenza da un soggetto (o gruppo di soggetti) a un altro;

4. la conoscenza è concepita come un qualcosa di trasferibile da un contesto a un altro senza subire significative modifiche; in questa prospettiva, un'idea o un risultato scientifico possono essere semplicemente trasportati dalla comunità scientifica al grande pubblico.

Il *Dialogue Model*

In un documento del 2000 la Camera dei Lord britannica ha riconosciuto i limiti del *Deficit Model*, indicando come in molti casi abbia addirittura inasprito l'avversione per la scienza. A seguito di questi avvenimenti si abbandonò progressivamente il *Deficit Model* per andare verso l'utilizzo di nuovo modello: il *Dialogue Model*.

Questo modello punta a una comunicazione bidirezionale in cui partecipano sia scienziati che cittadini, mettendo a confronto le proprie competenze ed esperienze.

Tuttavia, la svolta verso il dialogo era già stata anticipata negli anni Novanta da vari enti di ricerca. La spinta decisiva era arrivata dalle reazioni sociali e dai dibattiti pubblici legati ai progressi biologici e biotecnologici, un settore in costante evoluzione fin dalla creazione del primo OGM nel 1973 (Trench, 2008).

Inoltre, ci si rende conto che la scienza non può essere slegata dal contesto in cui viene comunicata: diversi studi hanno dimostrato che la capacità di utilizzare conoscenze scientifiche dipende dal contesto, ad esempio, chi vive in una condizione di rischio ambientale è in genere più propenso a recepire informazioni, anche tecniche, sulla qualità dell'aria e dell'acqua.

I destinatari della comunicazione, poi, non sono visti come contenitori vuoti da riempire ma come soggetti dialoganti con cui riflettere. È quindi è importante attuare strategie differenziate per raggiungere vari tipi di pubblico.

In questo scenario emerge una forte attenzione per la diversità culturale e la competenza dei non esperti. Se fino a quel momento il sapere del pubblico era visto come una versione scorretta, semplificata e intrinsecamente inferiore della scienza, da adesso in poi viene riconosciuto come una forma di conoscenza qualitativamente diversa da quella accademica, con la quale interagire con la massima propensione all'ascolto.

Uno degli esiti del *Dialogue Model* è stata la creazione nel 1989 di un network internazionale, chiamato *Public Communication of Science and Technology* (PCST). Esso ha come principi fondanti la coproduzione del sapere scientifico e la declinazione sociale della scienza.

Il *Participation Model*

Il *Participation Model* o *Public Engagement with Science and Technology* (PEST), infine, ingloba l'approccio precedente declinandolo in chiave politica. L'obiettivo diventa quello di incentivare la partecipazione democratica, ad esempio attraverso la creazione di comitati popolari o gare di idee finalizzate a suggerire interventi. In questo modello si cerca di andare oltre la separazione tra scienziati e non esperti, più esplicita nel caso del *Deficit Model* e più nascosta ma sempre presente con il *Dialogue Model*. In questo modello infatti le conoscenze del pubblico non si limitano solamente ad arricchire quelle degli specialisti ma sono fondamentali per guidare le scelte che dettano la produzione del sapere stesso. Quest'ultima avviene quindi in luoghi fisici condivisi (Bucchi, 2008).
Questo modello mira alla creazione di una cittadinanza scientifica come prerequisito indispensabile per una democrazia capace di affrontare le sfide del nostro secolo (Bencivelli et al., 2013).

Sia in Bucchi, 2008 che in Trench, 2008 si osserva che diversi fattori possono influenzare la scelta di utilizzare un modello piuttosto che un altro e che non ha senso rinnegare i modelli precedenti. Questo accade perché la comunicazione della scienza non può prescindere dal contesto in cui viene attuata e dalla rilevanza che un certo argomento scientifico ha per la società. Ad esempio, nella sensibilizzazione verso una determinata tematica nuova per il pubblico, può essere utile, almeno inizialmente, utilizzare un modello di tipo deficit per poi spostarsi verso un modello diverso. Per questo Bucchi sostiene che *"questi modelli dovrebbero*

essere concepiti come tipi ideali, più che come categorie mutualmente esclusive, e la maggioranza delle situazioni comunicative concrete dovrebbero essere descritte da una combinazione dei tre modelli." Propone quindi la Tabella 2.1, riportata di seguito, che delinea tre modelli principali di interazione tra esperti e pubblico.

Tabella 2.1: Modelli di comunicazione della scienza (Fonte: Bucchi, 2008)

Modello di comunicazione	**Enfasi**	**Versioni dominanti nella comunicazione della scienza**	**Obiettivi**	**Contesti ideologici**
Trasferimento Divulgazione Unidirezionale, limitato nel tempo	Contenuto	DEFICIT	Trasferire conoscenza	Scientismo Tecnocrazia Retorica della Knowledge Economy
Consultazione Negoziazione Bidirezionale, iterativa	Contesto	DIALOGO	Discutere le implicazioni della ricerca	Responsabilità sociale Cultura
Co-produzione della conoscenza Multi-direzionale, open-ended	Contenuto e Contesto	PARTECIPA-ZIONE	Stabilire gli obiettivi, definire l'agenda di ricerca	Civic Science Democrazia

2.1.3 I canali della comunicazione scientifica

La comunicazione scientifica è un grande mosaico: non esiste un unico modo di raccontare la scienza, ma molteplici canali, ciascuno adatto a pubblici e obiettivi diversi. Proviamo quindi a elencarne alcuni, riportando anche esempi che abbiamo incontrato nella nostra, seppur breve, esperienza.

C'è chi ama approfondire attraverso la pagina scritta. In questo caso troviamo i libri di comunicazione e saggistica scientifica, come *Gödel, Escher, Bach* di Douglas Hofstadter, *Sette brevi lezioni di fisica* di Carlo Rovelli, *Il matematico curioso* di Giovanni Filocamo, *Breve storia di quasi tutto* di Bill Bryson o *Quanto è reale la matematica?* di Eugenia Cheng. A questi si affiancano giornali e riviste specializzate, come *Focus* e *Le Scienze*, che permettono di seguire con continuità le novità e i temi più importanti della ricerca scientifica.

La comunicazione scientifica non passa soltanto attraverso la parola scritta, ma può utilizzare anche immagini e narrazioni. Pensiamo, per esempio, ai fumetti e alle graphic novel: canali particolarmente efficaci per avvicinare i più giovani alla scienza e per spiegare concetti complessi in modo coinvolgente. Un esempio è il progetto *Comics&Science* del Consiglio Nazionale delle Ricerche (CNR), che utilizza il fumetto per raccontare la scienza.

Anche altri media tradizionali continuano ad avere un ruolo fondamentale nella costruzione dell'immaginario e della cultura scientifica. Ad esempio, la televisione contribuisce a diffondere conoscenze e a raccontare la scienza attraverso documentari e programmi di approfondimento. In Italia, un esempio particolarmente significativo è rappresentato dai programmi di Piero e Alberto Angela. Anche i film e le serie televisive possono contribuire alla comunicazione scientifica e alla costruzione dell'immaginario scientifico, attraverso biografie e racconti ispirati a personaggi e vicende reali. Ne sono un esempio film come *Il diritto di contare, The Imitation Game, Oppenheimer* e serie televisive come *Margherita delle stelle, Numb3rs* e *The Big Bang Theory*.

Negli ultimi anni, programmi radio e podcast hanno conosciuto una crescente diffusione. Sono diventati strumenti particolarmente apprezzati perché permettono di ascoltare contenuti scientifici durante gli spostamenti o il tempo libero. Tra gli esempi possiamo citare *Radio3 Scienza*, *Scientificast, Ci vuole una scienza* de il Post, *Matematica al plurale. Oltre il pregiudizio: voci dalla didattica* della Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica.

Per chi preferisce imparare attraverso l'esperienza diretta, la scienza entra nei musei. Sono numerose le realtà presenti in Italia, come il *Museo delle Scienze (MUSE)* di Trento e la *Città della Scienza* a Napoli. Anche le mostre rappresentano un importante canale di comunicazione: attraverso installazioni, oggetti, immagini, modelli ed esperienze interattive, permettono al visitatore di entrare in contatto diretto con i contenuti scientifici. Tra gli esempi possiamo ricordare *Agorà, Semplice e complesso* e *Antropocene. La Terra a ferro e fuoco*, realizzate dal CNR.

La comunicazione scientifica esce inoltre dagli spazi tradizionali per diffondersi sul territorio attraverso festival ed eventi. In Italia e in Europa sono numerose le iniziative che trasformano la scienza in un'esperienza collettiva, come il "Festival

della Scienza" di Genova (in Figura 2.1), "BergamoScienza" di Bergamo e provincia, "Fosforo: la festa della scienza" di Senigallia e la "European Reserchers' Night". Questi eventi riuniscono ricercatori, studenti, cittadini e appassionati, creando occasioni di incontro e dialogo tra la comunità scientifica e la società.



Figura 2.1: Manifesto della prima edizione del "Festival della Scienza" di Genova (2003). Autore: "Festival della Scienza". Fonte: Wikimedia Commons, licenza CC BY 3.0.

Anche le istituzioni scientifiche svolgono un ruolo importante nella comunicazione della scienza. Attraverso i propri siti web, gli uffici stampa e le pubblicazioni, comunicano le attività svolte e rendono conto dei risultati della ricerca alla società. Un esempio è la rivista *Asimmetrie* dell'INFN, che racconta la ricerca nel campo della fisica delle particelle.

Oggi, tuttavia, una parte sempre più consistente della comunicazione scientifica avviene online. Siti web come *MaddMaths!*, social network e piattaforme video hanno dato spazio a una nuova generazione di divulgatori e divulgatrici. Attraverso contenuti brevi e immediati, come quelli pubblicati su Instagram e TikTok, oppure video più lunghi e approfonditi su YouTube, la scienza può raggiungere un pubblico molto ampio. Tra gli esempi possiamo ricordare *Geopop*, Dario Bressanini, Ruggero Rollini, BarbascuraX, Chimicazza, Adrian Fartade, Beatrice Mautino, Virginia Benzi e Luca Perri. Un elemento caratteristico di questi nuovi canali è la possibilità di instaurare un dialogo diretto con il pubblico, attraverso commenti, domande e discussioni live.

Quando la comunicazione abbandona i libri e gli schermi per salire su un palco, la scienza diventa un evento dal vivo, basato sul ritmo e sull'emozione. Nei public speaking e nei talk dal vivo, il divulgatore parla direttamente al pubblico: si va

dalle conferenze in stile TEDx, come *A cosa serve la matematica?* di Eduardo Saenz de Cabézon, a format come *Pint of Science*, in cui ricercatori ed esperti raccontano il proprio lavoro in contesti informali e conviviali. Nei science show, invece, la scienza si accompagna a esperimenti spettacolari e dimostrazioni dal vivo: reazioni chimiche, fenomeni fisici e attività con l'azoto liquido possono generare l'effetto sorpresa come negli spettacoli di Gabriele Pastori. Infine, negli spettacoli teatrali, monologhi, comicità, musica e recitazione permettono di raccontare la scienza, come avviene in iniziative quali *FameLab* e il *Saturday Night Science*, presentato dal Dipartimento di matematica di Genova durante il "Festival della Scienza" di Genova. Vi sono inoltre alcuni festival il cui programma ruota attorno a eventi dal vivo della tipologia appena descritta come *L'Isola di Einstein* e "Fosforo: la festa della scienza."

Infine, la scienza si impara spesso nel modo più efficace quando ci si mette in gioco. Laboratori, progetti per le scuole e attività di didattica informale possono stimolare la curiosità e favorire un apprendimento basato sull'esperienza. Anche giochi e videogiochi possono diventare strumenti di comunicazione e riflessione: dai giochi da tavolo a tema scientifico ai *PlayDecide*, che invitano a riflettere sul rapporto tra scienza e società, fino ai videogiochi basati sulla simulazione di fenomeni e processi scientifici come *Kerbal Space Program* e *Foldit*.

2.1.4 La mostra come canale di comunicazione scientifica

Per comprendere il ruolo della mostra scientifica nel più ampio contesto della comunicazione della scienza, è innanzitutto necessario definirne le principali caratteristiche in quanto canale comunicativo. La mostra, infatti, non trasmette i contenuti scientifici attraverso un unico linguaggio, ma attraverso la combinazione di differenti strumenti e modalità di interazione con il pubblico. Installazioni, animazione scientifica, testi, immagini, video, dispositivi multimediali e logiche allestitive concorrono alla costruzione dell'esperienza espositiva che ha l'obiettivo di comunicare temi scientifici a un pubblico non necessariamente specializzato con la possibilità di mettere in collegamento il mondo della ricerca con i cittadini.

L'analisi sviluppata in questa sezione parte da alcuni casi di mostre scientifiche realizzate o promosse da enti di ricerca, tra cui il Consiglio Nazionale delle Ricerche (CNR) (Messina et al., 2024), l'Istituto Nazionale di Geofisica e Vulcanologia

(INGV) (Istituto Nazionale di Geofisica e Vulcanologia, 2026), l'Istituto Nazionale di Fisica Nucleare (INFN)(Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, 2026) e l'Istituto Nazionale di Astrofisica (INAF)(Istituto Nazionale di Astrofisica, 2026). Particolare rilevanza assume, in questo contesto, il "Festival della Scienza" di Genova, nel quale molti di questi soggetti hanno presentato le proprie mostre e con il quale le autrici hanno maturato una particolare esperienza.

Le caratteristiche della mostra scientifica discusse nei paragrafi successivi non devono pertanto essere intese come una definizione teorica o come una classificazione esaustiva dell'intero fenomeno. Esse costituiscono piuttosto il risultato di un'analisi condotta a partire da casi concreti e dall'esperienza diretta delle autrici. I casi esaminati rappresentano quindi il punto di partenza per individuare alcuni elementi ricorrenti e per definire le caratteristiche della mostra scientifica come canale di comunicazione della scienza.

Comunicazione scientifica nel canale

La mostra scientifica può perseguire l'obiettivo di comunicare la scienza attraverso diversi mezzi, quelli individuati sono i seguenti:

- installazioni;
- animazione scientifica;
- testi;
- immagini, video e animazioni;
- logiche allestitive.

Installazioni

Come vedremo nella Sezione 2.1.5, con la nascita dei moderni *science centre*, strutture museali dedicate alla comunicazione della scienza che privilegiano l'esperienza, l'esplorazione e il coinvolgimento del visitatore, si sviluppa una concezione dell'esposizione scientifica profondamente diversa da quella tradizionale. Un riferimento fondamentale in questo processo è rappresentato dall'*Exploratorium* di

San Francisco, fondato nel 1969 dal fisico e divulgatore Frank Oppenheimer. L'istituzione nasce con l'obiettivo di avvicinare il pubblico alla scienza attraverso l'osservazione e la sperimentazione diretta dei fenomeni, ponendo il visitatore al centro dell'esperienza espositiva.

Alla base della filosofia di Oppenheimer vi è infatti l'idea che gli allestimenti non debbano limitarsi a illustrare o spiegare un fenomeno scientifico, ma debbano stimolare la costruzione di significati attraverso l'interazione diretta con il visitatore. La diffusione di questo approccio ha portato a interrogarsi su quali caratteristiche debba possedere un'installazione interattiva affinché possa risultare efficace dal punto di vista comunicativo ed educativo.

Riportiamo in merito le riflessioni dello psicologo e neuroscienziato Richard Gregory, che diresse l'Exploratory di Bristol e collaborò con Oppenheimer, riguardanti le caratteristiche che dovrebbe soddisfare un buon exhibit.

Gregory propone sette principi per la progettazione di un elemento espositivo per un moderno *science centre*. Li riportiamo come descritti in Merzagora, Rodari, 2007.

1. essere hands-on, devono cioè obbligare il visitatore a "metterci le mani sopra". L'idea deriva, nel mondo anglosassone, dalla pedagogia di Dewey (si capisce se si fa), a cui si è integrata la visione di Gregory, secondo cui il fondamento della conoscenza è l'esperienza percettiva. Inoltre è dimostrato in diversi studi sui visitatori che installazioni di questo tipo hanno una maggiore capacità di attrazione.

2. devono creare un'atmosfera di buon umore, di consapevolezza, di sfida intellettuale. Non devono cioè essere né troppo difficili, perché potrebbero causare frustrazione, né troppo semplici, perché non interessanti, e quando possibile devono essere divertenti;

3. devono produrre sorpresa, perché è dalla sorpresa che nascono le domande, e dalle domande la motivazione a ulteriori esplorazioni, per poter passare dall'hands-on al minds-on, cioè dalla pura gestualità all'investimento cognitivo;

4. devono rendere visibile l'invisibile o il nascosto, in modo da dare tangibilità anche a concetti astratti e fornire una rappresentazione, forse analogica e/o fenomenologica, di teorie anche fortemente matematiche;

5. devono essere tali per cui non sia necessario capirli completamente, devono quindi poter essere "agiti" a vari livelli, in modo da rappresentare una sfida intellettuale sia per i più piccoli o i più inesperti, sia per i più esperti;

6. ove possibile gli exhibit devono rendere evidenti i legami tra scienza e tecnologia: nelle opere di Gregory, gli exhibit devono avvicinarci anche agli aspetti tecnologici della vita quotidiana;

7. devono catturare l'immaginazione del visitatore, perché è l'emozione il più forte motore del conoscere e il miglior successo di una mostra hands-on è che il visitatore porti via con sé il desiderio di imparare di più.

Di recente diffusione, in linea con il *Participation Model*, vediamo quelli che vengono chiamati "*discussion exhibit*". Questi sono strutturati in maniera da consentire al visitatore di lasciare opinioni e domande riguardo i temi della mostra che rimangono visibili ai visitatori successivi permettendo di costruire una bidirezionalità della comunicazione: il museo parla al visitatore, il visitatore parla al museo e attraverso il museo si mette in conversazione con gli altri visitatori. Questo tipo di dispositivi vanno da lavagne su cui i visitatori possono attaccare un post-it con il loro commenti, a complesse installazioni multimediali che trasformano i commenti dei visitatori in frasi luminose che attraversano il museo, o ancora sistemi multimediali che filmano il visitatore mentre lascia i suoi commenti e permette agli altri visitatori di ascoltarlo e guardarlo, come nel caso dell'@-Bristol Science Centre di Bristol, Gran Bretagna. Sul piano della comunicazione, hanno una serie di vantaggi significativi: spingono il visitatore a interrogarsi sui propri giudizi e sui propri sentimenti, generano un senso di partecipazione, danno la sensazione di essere ascoltati (Merzagora, Rodari, 2007).

Animazione scientifica

È molto probabile che, all'interno delle mostre scientifiche, i visitatori incontrino una categoria di lavoratori dei musei scientifici: gli animatori. Il loro ruolo è estremamente vario infatti comprende attività che spaziano dal controllo dei biglietti

e dalla gestione degli spazi fino alla realizzazione di esperimenti e dimostrazioni e all'interazione diretta con il pubblico, con l'obiettivo di supportare i visitatori nel processo di costruzione della conoscenza.

Il compito dell'animatore non consiste principalmente nel trasmettere o spiegare un concetto in modo diretto. Piuttosto, l'animatore ha il compito di stimolare la curiosità e incoraggiare il visitatore a sviluppare autonomamente le proprie conoscenze. Attraverso domande, spunti di riflessione e attività pratiche, egli guida il pubblico senza imporre una spiegazione preconfezionata, lasciando spazio all'esplorazione e alla costruzione personale del sapere.

Nonostante l'importanza di questa figura sia ampiamente riconosciuta nella pratica dei musei scientifici, la letteratura dedicata alla definizione del ruolo e delle competenze dell'animatore scientifico rimane relativamente scarsa. Un tentativo di delinearne le caratteristiche è stato proposto da Robert Ghattas in Alfonsi et al., 2011, dove viene presentato un "decalogo imperfetto dell'animatore perfetto", volto a sintetizzare i principali comportamenti e le competenze che dovrebbero caratterizzare questa figura professionale.

Decalogo imperfetto dell'animatore perfetto (di Robert Ghattas)

1. *Persone*: l'animatore ama stare a contatto con le persone e sa creare un legame di fiducia. Sa leggere lo sguardo altrui e fissare il limite tra scanzonato e impertinente, buffo e ridicolo, ammiccante e stucchevole.

2. *Oggetti*: l'animatore anima prima di tutto la realtà, poi il pubblico. È il burattinaio che fa muovere sulla scena gli oggetti e li fa parlare. Sa sceglierli, far emergere le loro caratteristiche e utilizzarli per rispondere alle domande.

3. *Tempo e ritmo*: come una pièce di teatro, anche l'animazione richiede tempo e ritmo appropriati. Un animatore sa accelerare per creare tensione, rallentare per far riflettere, sbrigarsi perché inizia a piovere, temporeggiare perché la sala successiva è ancora occupata.

4. *Spazio*: l'animatore sa gestire gli spazi del suo corpo, degli oggetti e del pubblico, per governare l'attenzione e dirigerla dove serve.

5. *Linguaggio*: l'animatore sceglie le parole anche in base alle emozioni che suscitano: un termine tecnico, uno inventato o uno ironico?

6. *Emozioni*: per molti, la scienza è agli antipodi delle emozioni. Il lavoro dell'animatore è anche quello di ricucire questo strappo fittizio, facendo interagire le emozioni degli scienziati, le proprie e quelle del pubblico.

7. *Condivisione*: l'animatore deve condividere i propri saperi, piuttosto che imporli nella testa del pubblico. Perciò mette a disposizione quel che sa e insieme sfrutta saperi ed esperienze che il pubblico inevitabilmente porta con sé.

8. *Fantasia*: spesso le cose vanno storte. Ma l'animatore sa utilizzare a suo favore quello che accade. Con la fantasia e l'esperienza, tutto si può trasformare in spunto: un bambino indisciplinato, un black-out, un ramo raccolto per terra.

9. *Humour*: l'animatore sa che per molti la scienza è incompatibile con una risata. Lo humour può essere una chiave per creare un legame e uno sguardo nuovo sulla scienza. L'animatore ama ridere e ama strappare un sorriso al pubblico.

10. *Conoscenza*: l'animatore legge, frequenta mostre, ascolta e vagabonda per le pagine sterminate del web. Perché, per raccontare uno, è importante conoscere dieci.

Testi

Per analizzare il ruolo dei testi all'interno di una mostra faremo riferimento al lavoro di Daniel Jacobi (Jacobi, 2016), che afferma:

"I testi esposti, poiché si basano sul nostro strumento di comunicazione e scambio più efficiente — la nostra lingua —, costituiscono da sempre il primo ausilio all'interpretazione. Si può persino affermare che il testo esposto sia la migliore e più sicura interfaccia tra il progetto di un curatore e il desiderio di cultura di un visitatore." (Traduzione delle autrici).

Secondo Jacobi, i testi utilizzati nelle esposizioni possono essere suddivisi in tre categorie. La prima è costituita dagli endotesti, ovvero i testi integrati nella narrazione espositiva; la seconda dagli esotesti, testi associati alla mostra ma non

presenti fisicamente nello spazio espositivo (ad esempio guide e volantini). A queste si aggiunge, con lo sviluppo delle tecnologie digitali, una terza categoria: i testi elettronici, che possono assumere la forma di endotesti, quando ad esempio sono visualizzati su schermi presenti nella mostra, oppure di esotesti, come nel caso dei siti web. Ai fini di questa analisi ci concentreremo sugli endotesti, che Jacobi distingue in tre tipologie principali: pannelli, didascalie e segnaletica. In particolare, approfondiremo le prime due categorie, in quanto riguardanti la trasmissione e l'interpretazione dei contenuti scientifici.

Jacobi definisce gli endotesti come l'insieme dei testi esposti all'interno di musei, monumenti, centri di interpretazione e mostre, elaborati dai professionisti coinvolti nella progettazione dell'esposizione. Gli endotesti possono svolgere tre funzioni principali: comunicare, etichettare e segnalare. Queste funzioni vengono svolte rispettivamente dai pannelli, dalle didascalie e dalla segnaletica.

I pannelli sono testi, eventualmente accompagnati da elementi visivi, collocati su un supporto e destinati a comunicare contenuti ai visitatori. Possono fornire chiavi di interpretazione, introdurre e contestualizzare un tema, offrire riferimenti cronologici e integrare le informazioni presentate attraverso gli altri elementi della mostra. La loro collocazione lungo il percorso espositivo consente inoltre di approfondire o ampliare i contenuti incontrati dal visitatore.

Jacobi introduce inoltre il concetto di pannello "scriptovisivo" per indicare quei pannelli che combinano testo ed elementi visivi. La disposizione organizzata di segni linguistici ed elementi grafici all'interno di un layout definito permette al pannello di costituire un'unità espositiva autonoma. Questa caratteristica rende possibile anche la realizzazione di mostre leggere e itineranti composte prevalentemente, o interamente, da una sequenza di pannelli.

Le didascalie sono testi di dimensioni ridotte collocati in prossimità dell'oggetto a cui si riferiscono. La loro funzione principale è, secondo Jacobi, quella di identificare e di attirare l'attenzione sull'oggetto esposto. All'interno delle didascalie, Jacobi distingue tre tipologie principali. Le didascalie autonome sono costituite da parole o numeri e si limitano a identificare l'oggetto, riportando ad esempio il nome e il numero di inventario. Le didascalie predicative consistono di brevi informazioni descrittive ed esplicative. Infine, le didascalie collettive vengono utilizzate per identificare gruppi di piccoli oggetti esposti insieme, come nel

caso di una vetrina, associando a ciascun elemento un numero che ne consenta l'individuazione.

Jacobi propone infine uno schema di sintesi che riassume le diverse tipologie di testo con la loro funzione, l'obiettivo comunicativo e una lunghezza indicativa espressa in numero di caratteri. Lo schema viene riportato di seguito in Tabella 2.2.

Tipo	**Funzione**	**Obiettivi comunicativi**	**N. di battute**
Pannello	Comunicare	*Introdurre, commentare, spiegare, far apprendere*	500 a 1200
Didascalia autonoma	Etichettare	*Nominare, designare*	meno di 200
Didascalia predicativa	Etichettare, comunicare	*Nominare, designare, descrivere, commentare, spiegare...*	da 200 a 500
Segnaletica	Segnalare	*Orientare, indicare il percorso da seguire, prevedere*	

Tabella 2.2: Tipologie testuali e caratteristiche comunicative

Il percorso di scrittura dei testi, secondo Jacobi, si articola tradizionalmente in quattro fasi: pianificazione, stesura, revisione ed editing. Negli allestimenti più innovativi, a queste si affiancano spesso una o più fasi di sperimentazione a supporto dell'intero processo di progettazione.

Tutto ha inizio con la pianificazione. Si definisce una linea editoriale che sarà la guida di tutto il progetto: definisce il pubblico di riferimento, stabilisce la gerarchia testuale e determina i livelli di approfondimento necessari. Sebbene vi sia una molteplicità di sottocategorie testuali, mantenere coerente la gerarchia con cui vengono presentate le informazioni è fondamentale: la struttura pensata in fase di redazione verrà infatti percepita dal visitatore, guidando la sua fruizione e facilitando l'assimilazione dei contenuti.

Seguendo la pianificazione si passa alla stesura dei testi, cioè la scrittura vera e propria. È importante ricordare che i testi brevi e laconici risultano spesso più difficili da comprendere perché troppo allusivi. Oltre alla lunghezza, un autore esperto saprà modulare con cura il genere di discorso e il tono. Dagli studi sulla tipologia testuale emerge che le forme di scrittura riconducibili al contesto museale rientrano in poche categorie ben distinte, narrativa, descrittiva, esplicativa, argomentativa, ingiuntiva o mista, ed è sempre preferibile mantenere la stessa tipologia di discorso per la medesima categoria di testi.

Una volta completata la prima stesura, si entra nella fase di revisione. È il momento dedicato alla correzione delle bozze, alla verifica di ortografia e punteggiatura, all'eliminazione delle ridondanze e all'affinamento di stile e tono. Questo lavoro di limatura risulta molto più efficace se affidato a una persona diversa dall'autore.

Infine subentra l'editing, fase in cui si definisce e si applica lo stile visivo garantendo la leggibilità del testo nello spazio espositivo. A questa sequenza seguono aspetti tecnici cruciali come la scelta dei supporti, delle dimensioni e della collocazione delle grafiche sulle pareti. Si tratta di passaggi che richiedono un monitoraggio e una verifica da parte del curatore o del responsabile dei testi per garantire che il racconto espositivo prenda vita come pianificato.

Negli ultimi anni, l'analisi dei testi espositivi e delle modalità con cui i visitatori ne fruiscono è stata oggetto di diverse ricerche. Tuttavia, molte indagini valutative hanno affrontato il ruolo della testualità in modo goffo: tentando di verificare se le persone leggano i pannelli e le didascalie come farebbero con un libro, tali studi, secondo Jacobi, hanno finito per trascurare la funzione visiva dei testi e le loro specifiche condizioni di fruizione nello spazio museale. È sufficiente riformulare la domanda tradizionale, passando da "Ha letto i testi della mostra?" a "Durante il suo percorso, ha gettato di tanto in tanto uno sguardo ai testi esposti?", per veder schizzare la percentuale di risposte positive dal 10-20% a oltre il 90%. Come sottolinea Jacobi, la lettura è infatti un'attività cognitiva automatizzata: per un visitatore alfabetizzato è praticamente impossibile non leggere una riga scritta posta lungo la sua linea dello sguardo, anche senza rendersene conto.

Inoltre, rifacendosi ai lavori pionieristici di Paulette McManus, docente di comunicazione a University College London, occorre ricordare che la fruizione dei testi in mostra è un'attività spesso condivisa: all'interno di un gruppo, accade frequen-

temente che un visitatore osservi l'opera mentre un altro legge ad alta voce o consulta la didascalia.

Infine, l'esperienza di visita si è estesa ben oltre il perimetro della sala espositiva: i testi pre-visita e post-visita, veicolati soprattutto attraverso i siti web di musei e mostre, sono diventati uno strumento ampiamente diffuso. L'impiego dei media digitali e degli schermi, che consentono la lettura di testi e la visualizzazione di immagini, è ormai una consuetudine a tal punto consolidata che i visitatori si stupiscono della loro assenza durante l'inaugurazione di una mostra o l'apertura di un nuovo museo. In questo scenario, la leggibilità e l'ergonomia delle pagine a schermo assumono una rilevanza centrale. Sebbene l'attenzione su questi temi sia iniziata già alla fine degli anni Ottanta e la leggibilità del testo stampato non costituisca più un oggetto di ricerca prioritario, la progettazione del testo a schermo richiede un rinnovato interesse. Secondo Jacobi è indispensabile che la grafica delle interfacce digitali venga affidata a professionisti.

Immagini, video e animazioni

Nell'ambito delle mostre scientifiche, le immagini costituiscono uno dei principali strumenti attraverso cui i contenuti scientifici vengono mediati. In questo contesto, il loro ruolo non può essere ricondotto a una funzione esclusivamente decorativa o illustrativa: l'immagine può infatti contribuire a rendere accessibili concetti complessi e aiutare a costruire conoscenza scientifica indipendentemente dalla comprensione di testi scritti. Più in generale, le immagini svolgono un ruolo fondamentale all'interno dei processi comunicativi e scientifici poiché permettono di rendere visibile ciò che altrimenti risulterebbe invisibile, portando a una scala sensoriale e temporale fruibile dall'essere umano fenomeni che sfuggono alla percezione diretta.

In questa prospettiva, le riflessioni di Bucchi, Saracino, 2016 risultano interessanti. Gli autori evidenziano come gli studi sulla *science literacy*, tradizionalmente orientati alla valutazione delle conoscenze scientifiche attraverso domande di carattere testuale e nozionistico, abbiano dedicato un'attenzione limitata alla dimensione visiva della cultura scientifica. Eppure, la scienza si è affidata costantemente alla rappresentazione visiva per rendere osservabili fenomeni altrimenti difficilmente accessibili: dalle illustrazioni anatomiche e botaniche alle prime osservazioni

microscopiche, dalle fotografie astronomiche alle ricostruzioni 3D.

A partire da questa considerazione, Bucchi, Saracino, 2016 introducono il concetto di *visual science literacy*, riferito alla capacità di riconoscere immagini associate alla scienza. Attraverso un'indagine empirica condotta sul pubblico italiano, gli autori mostrano l'elevata permanenza delle immagini nella mente delle persone e nella cultura di massa: il pubblico generale mostra una familiarità e una capacità di riconoscimento superiori di fronte a immagini della scienza (come la struttura a doppia elica del DNA, la Terra vista dalla Luna o i volti di scienziati celebri) rispetto alle risposte a quesiti scientifici di natura puramente testuale.

Se l'immagine fissa rende visibile l'invisibile, l'animazione fa fare un salto di qualità creando una "immagine-come-processo", adatta a rappresentare il tempo e il movimento. A partire dagli anni '10 del Novecento, l'animazione cinematografica si è legata alla storia dei media della scienza. Negli studi più recenti è stato proposto il termine ombrello *useful animation* ("animazione utile") per descrivere un campo di ricerca più ampio che non si concentrasse esclusivamente su cinema e documentari. Tale prospettiva riconosce la pervasività dell'animazione nel panorama mediatico contemporaneo, comprendendo quindi anche installazioni museali, videogiochi, interfacce grafiche utente, visualizzazione dati, realtà virtuale e ambienti di modellazione scientifica (Bellano, 2025).

Tuttavia, occorre considerare alcune criticità: riconoscere o familiarizzare con un'immagine scientifica non significa necessariamente comprenderne appieno il contenuto scientifico o la teoria sottostante. Riconoscere la doppia elica del DNA, ad esempio, non implica possedere una conoscenza approfondita della struttura e delle funzioni della molecola. La *visual science literacy* va quindi considerata non come un equivalente della conoscenza scientifica, ma come una componente specifica della cultura scientifica. Proprio per questo, nell'ambito delle mostre, l'immagine può essere utilizzata come un elemento capace di attirare l'attenzione, attivare conoscenze pregresse e favorire l'ingresso del visitatore in un percorso di approfondimento (Bucchi, Saracino, 2016). Inoltre, le immagini e le animazioni sono sempre il frutto della mediazione, dell'interpretazione e delle scelte stilistiche o didattiche di qualcuno (nonché di specifiche convenzioni rappresentative), esse non devono essere scambiate per un accesso trasparente e neutro alla realtà, ma vanno usate, contestualizzate e spiegate sapientemente. Un elemento di particolare attenzione riguarda il rischio della "falsa neutralità": le animazioni moderne

(specie quelle fotorealistiche o 3D) rischiano infatti di essere scambiate dal pubblico per "fotografie" e indiscutibili della realtà, facendo dimenticare che dietro ogni rappresentazione c'è una scelta estetica, una semplificazione o un'inferenza di dati (Bellano, 2025).

Logiche allestitive

Gli oggetti, di qualsiasi tipo e natura, presenti nei musei e nelle mostre, vengono distribuiti nello spazio secondo logiche allestitive, che costituiscono una parte della narrazione che si vuole compiere.

Ne elenchiamo quattro, particolarmente rappresentative nel mondo dei musei e delle mostre scientifiche tratte da Bencivelli et al., 2013.

Logica rappresentativa: gli oggetti sono raggruppati in uno spazio che vuole rappresentare, raffigurare, riprodurre, un altro spazio. Ad esempio nel caso del diorama, in cui gli animali tassidermizzati che appartengono a uno stesso habitat vengono inseriti in una scenografia che lo rappresenta. Nei musei contemporanei la logica rappresentativa si fa immersiva, dove per immersivi si intendono quegli allestimenti che, sfruttando le tecnologie moderne, vogliono far vivere al visitatore anche le emozioni e le sensazioni legate a un certo luogo. Un esempio di questo tipo di logica allestitiva è la mostra Dinosauri - Terra dei giganti di Naturaliter (Naturaliter S.r.l., 2026).

Logica classificatoria: è la disposizione tipica dei musei naturalistici settecenteschi, che ritroviamo ancora oggi in tantissimi allestimenti. L'ordine classificatorio del mondo naturale viene ricalcato nell'ordinamento spaziale degli oggetti che, un esemplare per specie, concorrono a formare un museo che è come una grande tavola di un libro illustrato. È l'unico esempio di totale sovrapposizione tra organizzazione scientifica del sapere e organizzazione spaziale del museo. Questo tipo di logica è tra le più antiche e rende il museo o la mostra una grande enciclopedia ma non un posto dove si può fare esperienza del processo di scoperta scientifica.

Logica storica: questa logica può essere portatrice, nei musei della scienza e della tecnica, di una visione fortemente ideologica, cioè volta a mettere in luce le meraviglie del progresso che ci ha condotto da un prima più arretrato a un oggi più avanzato, e le capacità scientifiche, tecniche e industriali di una nazione. Ad

esempio nel Museo Nazionale della Scienza e della Tecnologia "Leonardo da Vinci" di Milano si susseguono processioni di oggetti, di aerei, di ruote di macchine, di biciclette, dai primi apparecchi agli esemplari ancora in sperimentazione. Il rischio di questa tipologia di allestimento, data la velocità di cambiamento delle tecnologie, è che i musei siano sempre in ritardo.

Logica dialogica: nei *science centres* contemporanei agli oggetti sono subentrati i fenomeni e le idee, e il centro dell'attenzione dell'allestitore si è spostato dall'interpretazione di oggetti preesistenti alla costruzione di nuovi oggetti e di spazi perché il visitatore possa sperimentare direttamente i fenomeni o entrare in contatto con le idee. L'esempio più storicamente rilevante è quello dell'Exploratorium di San Francisco. Un esempio di mostra che segue la logica dialogica è quello di Agorà - Scienza e matematica dal Mediterraneo antico del CNR (Consiglio Nazionale delle Ricerche, 2026).

2.1.5 Breve storia dei musei scientifici

L'obiettivo di questa sezione è quello di ricostruire l'evoluzione storica dei musei scientifici e della loro funzione culturale e sociale. A partire dalle prime collezioni naturalistiche del Rinascimento, passando per le Wunderkammer, i musei settecenteschi e ottocenteschi, fino ai *science centres* contemporanei, il percorso evidenzia come le istituzioni museali si siano progressivamente trasformate da luoghi destinati principalmente alla conservazione e alla ricerca in spazi sempre più orientati alla divulgazione, all'educazione e al coinvolgimento del pubblico. Attraverso l'esame dei casi più significativi, questa analisi guiderà il lettore nella comprensione dei passaggi chiave che hanno segnato la storia della museologia scientifica. Le informazioni presentate in seguito sono tratte da Merzagora, Rodari, 2007.

Dalle origini al Settecento

La formazione dei primi musei scientifici è legata alla nascita delle scienze naturali come disciplina indipendente rispetto alla medicina. Nel Medioevo, l'interesse per lo studio delle piante era legato principalmente a scopi terapeutici. All'interno dei monasteri, i monaci si dedicavano alla cura dei cosiddetti "orti dei semplici", antichi orti medievali nei quali venivano coltivate piante medicinali. Più in gene-

rale, l'interesse per il mondo vegetale e animale era strettamente legato ai bisogni dell'uomo e ai benefici che egli ne poteva trarre.

A partire dalla metà del Cinquecento, vennero istituiti i primi orti botanici universitari e degli studiosi, nella maggior parte dei casi medici e farmacisti, crearono le prime collezioni naturalistiche, considerabili ad oggi i primi esempi di musei scientifici. Un esempio illustre di queste collezioni è quello di Ulisse Aldrovandi. Medico di formazione, ottenne nel 1561 presso l'Università di Bologna la prima cattedra di Philosophia naturalis de fossilibus, plantis et animalibus. Non si trattava di un insegnamento di botanica medica ma di una vera e propria cattedra di scienze naturali. La sua collezione, spesso definita un "teatro della natura", comprendeva innumerevoli reperti naturali, tra cui animali, piante e minerali, nonché moltissimi acquerelli raffiguranti il mondo naturale. La collezione di Ulisse Aldrovandi era un luogo di ricerca e formazione per gli studiosi che, pur non essendo aperto al pubblico come intendiamo noi oggi, era visitata anche da non esperti. In particolare, figure di alto rango sociale che la visitano per interesse culturale o per diletto.

Un altro passo importante nella storia della museologia è rappresentato dalle Wunderkammer: camere delle meraviglie pensate per creare stupore, che conobbero il loro massimo sviluppo nel Seicento, seguendo l'estetica barocca. All'interno di queste esposizioni era presente la più disparata collezione di oggetti: tavoli da gioco, profumi, erbari, zanne di cinghiale, uova di struzzo, mascelle di serpente, pelli di orso, medaglie antiche, opere d'arte, animali impagliati e tanto altro ancora. Tali camere delle meraviglie furono molto criticate nel Settecento per essere della caotiche accozzaglie di oggetti, tuttavia è importante contestualizzare il momento storico in cui nacquero. Le Wunderkammer erano concepite come microcosmi all'interno dei quali il collezionista poteva cercare di cogliere i legami tra i vari elementi e le leggi che regolavano il mondo.

Nel Seicento nacquero le prime accademie scientifiche, istituzioni indipendenti dalle università in cui gli studiosi potevano svolgere le loro attività non più come singoli individui ma come parte di una organizzazione con un interesse comune per la scienza. Le accademie spesso ricevevano finanziamenti dai principi e dai sovrani e permettevano agli scienziati di collaborare tra loro utilizzando laboratori e strumenti all'avanguardia. Fu in queste accademie che confluirono molte delle collezioni naturalistiche sorte nei secoli precedenti. Ad esempio, la collezione

privata degli inglesi Tradescant divenne l'Ashmolean Museum, un "museo" nel senso più ampio del termine, infatti comprendeva: il museo, la scuola di scienze naturali e il laboratorio di chimica. Analoga è la storia dell'Istituto delle Scienze di Bologna. Voluto dal generale Luigi Ferdinando Marsili, conteneva nei suoi due piani officine, laboratori, gallerie e una biblioteca e accolse quello che era rimasto della collezione di Ulisse Aldrovandi.

Nel Settecento le Wunderkammer lasciarono il posto ad una nuova tipologia di musei. In seguito al lavoro di classificazione del mondo naturale ad opera del botanico svedese Carl Linnaeus nacque un nuovo ordine di musei in cui gli oggetti erano esposti seguendo la classificazione tassonomica. La filosofia di questi nuovi musei era opposta a quella delle camere delle meraviglie: al posto dell'oggetto raro doveva esserci l'esemplare caratteristico. Questi musei erano concepiti come luoghi di studio e di ricerca, nei quali le collezioni costituivano uno strumento fondamentale per gli studiosi delle scienze naturali.

L'Ottocento

Nell'Ottocento si assistette alla progressiva specializzazione dei diversi campi della scienza. Questo processo si rifletté nella nascita di musei sempre più diversificati: le collezioni del passato vennero divise per far confluire gli oggetti in musei dedicati a specifici ambiti disciplinari. Contemporaneamente si assistette a un cambio di paradigma nella ricerca scientifica: si passò dalla descrizione e classificazione della natura alla sua interpretazione in termini di meccanismi sottostanti. Questo processo ebbe un impatto sulle scelte espositive dei musei. Ad esempio, in seguito alla pubblicazione delle teorie evoluzionistiche di Charles Darwin, nel campo dei musei di scienze naturali si abbandonò progressivamente il criterio espositivo della classificazione tassonomica per lasciare il posto ad una narrazione che mostrasse i meccanismi evolutivi per selezione naturale. Questo cambio di prospettiva portò i musei a diventare sempre meno centrali per i ricercatori e sempre più rivolti ad un pubblico di non esperti, con un dichiarato intento comunicativo ed educativo.

Un ulteriore elemento da considerare in questo racconto è la nascita degli Stati nazionali. Nell'Ottocento divenne centrale la ricerca scientifica al fine di contribuire allo sviluppo economico e al progresso scientifico e tecnologico delle nazioni. In questo contesto i musei assunsero un duplice ruolo: quello di vetrina per il

progresso e allo stesso tempo quello di favorire la formazione delle persone nelle professioni tecniche e scientifiche. All'origine di molti musei della scienza e della tecnica ci furono le esposizioni universali, fiere commerciali e mostre scientifico-culturali tenute nelle più grandi città del mondo, dove veniva messo in mostra il progresso delle nazioni.

Per comprendere al meglio i processi fin qui descritti è utile ripercorrere la storia di due musei: il Muséum d'Histoire Naturelle e il Science Museum.

Il Muséum d'Histoire Naturelle a Parigi è un esempio particolarmente rilevante perché racchiude tutte le fasi di evoluzione dei musei di scienze naturali. Nacque nel 1635 come Jardin Royal des plantes médicinales e si dotò in seguito di una Cabinet d'Histoire Naturelle dove vennero raccolti esemplari di piante e animali provenienti dalle grandi esplorazioni dell'epoca. Nel Settecento, lo scopo delle collezioni era quello di contribuire allo studio della natura e alla crescita delle conoscenze scientifiche. Per gran parte dell'Ottocento le collezioni del museo restarono organizzate secondo i bisogni degli studiosi. Tuttavia, due furono i motivi di cambiamento: da una parte la crescita del ceto medio e dall'altro il diffondersi delle teorie evoluzionistiche di Darwin. Dal primo nacque la necessità di una cultura scientifica diffusa, considerata un elemento strategico per lo sviluppo della nazione, e dal secondo cambiò la filosofia con cui vennero organizzate le esposizioni. Con l'apertura del museo a un pubblico di non esperti, non aveva più senso limitarsi a esporre gli esemplari secondo un ordine tassonomico. Le esposizioni iniziarono invece a raccontare i processi evolutivi che avevano dato origine alla diversità del mondo naturale. Seguendo questi principi, nel 1898 la galleria di paleontologia venne riorganizzata seguendo una narrativa evoluzionistica. In questo contesto iniziò l'era dei diorami, ricostruzioni di ambienti naturali che mettevano in scena le relazioni tra gli esseri viventi.

Il secondo museo di cui ripercorriamo la storia è il Science Museum di Londra. Nel 1851 nella capitale britannica si tenne la Great exhibition of works of Industry of all Nations, la prima esposizione universale. Tale esposizione fece prendere coscienza del fatto che la rivoluzione industriale non era più solamente limitata alla Gran Bretagna e che le altre potenze nascenti potevano competere nel campo delle innovazioni scientifiche e tecnologiche. I resti dell'esposizione furono destinati ai Brompton Boilers, degli edifici aperti al pubblico, che diventarono simbolo della potenza della nuova classe sociale in ascesa degli industriali. Suc-

cessivamente la Commissione reale sull'educazione scientifica denunciò un sistema scolastico non adeguato a formare studenti nell'ambito della tecnica e delle scienze. In questo contesto, nel 1876, venne organizzata la Special Loan Collection of Scientific Apparatus, una grande esposizione temporanea di strumenti scientifici con lo scopo di favorire il rinnovamento dell'insegnamento delle discipline scientifiche. Nel corso degli anni le collezioni industriali e quelle scientifiche confluirono nel complesso museale di South Kensington. Da questa progressiva integrazione nacque, nel 1909, il Science Museum con una missione dichiaratamente educativa e divulgativa.

Il Novecento

Nel 1937, a Parigi, viene ospitata l'esposizione universale Arts et techniques dans la vie moderne. L'incarico di seguire gli aspetti tecnico scientifici dell'esposizione viene affidato a Jean Perrin che, nel 1926, era stato insignito del premio nobel per la fisica per la prova dell'esistenza degli atomi. Approfitta dell'incarico per raggiungere tre obiettivi diversi: la fondazione di un istituto di ricerca indipendente dalle università, l'appoggio al fronte popolare di Léon Blum e la costruzione di un museo delle scienze di nuova concezione. Questi tre obiettivi saranno strettamente legati fra di loro e il loro conseguimento ruoterà attorno alla costruzione del Palais de la Découverte. Per quanto riguarda il terzo obiettivo, la vera sfida per un museo delle scienze degli anni trenta è la capacità di spiegare le idee piuttosto che gli oggetti della scienza. La fisica e la biologia stanno affrontando temi come la meccanica quantistica o le basi di microbiologia: questi concetti sono difficilmente traducibili con oggetti capaci di parlare al pubblico ma le idee che stanno alla base di queste discipline hanno molto da raccontare. Questo bisogno viene esplicitato da Paul Valéry che era a capo della commissione di sintesi e di cooperazione intellettuale: "[...] ci troveremo subito davanti all'obbligo di immaginare innanzitutto i dispositivi visibili che meglio potranno suggerire dei lavori essenzialmente invisibili." Jean Perrin, nella costruzione del museo, fa sue queste parole e le incrocia con il primo obiettivo di cui si è fatto portavoce: la professionalizzazione della ricerca e l'affrancamento del ricercatore dalle strutture gerarchiche dell'università. Fonda pertanto il Centro Nazionale per la Ricerca Scientifica (CNRS). Siamo però in un'epoca in cui una scelta politica non può trascurare l'opinione dei cittadini, soprattutto se francesi, è quindi necessario promuovere l'importanza della ricerca

scientifica. In effetti, la terza arteria che permetterà al Palais di prendere vita è l'ascesa al potere del fronte popolare. Condividendo con la sinistra la visione di uno scienziato attivo nella costruzione di una cultura scientifica di massa, Perrin strumentalizza politicamente questa ascesa al potere per promuovere e concretizzare il proprio progetto. Questi fattori comportano nelle scelte espositive in primo luogo l'introduzione di esperienze spettacolo e in secondo luogo la presenza all'interno del palazzo dei ricercatori. Il palazzo è inoltre il primo a munirsi di médiateurs che hanno il compito di mediare le conoscenze tra i ricercatori e il pubblico.

L'esperienza dei grandi musei europei, come il Science Museum di Londra, fu di ispirazione per l'Italia. Nel 1953 venne inaugurato a Milano il Museo Nazionale della Scienza e della Tecnologia Leonardo Da Vinci, sotto la guida di Guido Uccelli di Nemi. Uomo intellettuale e politico di grande spessore, aspirava a far nascere un museo che potesse raccontare al pubblico le grandi innovazioni dell'industria e della tecnologia dell'epoca. La nascita di questo museo è strettamente legata alla figura di Leonardo Da Vinci. Nel 1939 si era tenuta una mostra sui suoi codici e in tale occasione erano stati realizzati dei modellini delle sue macchine che entrarono a far parte della collezione permanente. Il museo venne inaugurato nel Convento degli Olivetani proprio con una mostra su Leonardo. Nel museo erano molto importanti sia la dimensione storica che quella didattica, infatti nel 1955 nacque un centro di fisica sperimentale, che tenne laboratori e corsi di aggiornamento.

Dall'Exploratorium in avanti

Un punto di svolta nella storia dei musei scientifici avvenne negli anni Sessanta del Novecento grazie a Frank Oppenheimer. Insieme al fratello Robert, lavorarono al progetto Manhattan per la costruzione della bomba atomica, di cui Robert era il direttore. Nel 1949 la Commissione per le attività antiamericane lo escluse dall'insegnamento universitario a causa delle sue simpatie comuniste. In seguito a questo avvenimento, Frank dedicò tutte le sue energie al lavoro manuale e alla didattica: comprò, insieme alla moglie Jackie, un terreno a Pagosa Spring, in Colorado, dove iniziò ad allevare bestiame e ad insegnare scienze nella scuola locale. Progressivamente venne reintegrato nel mondo accademico ed ebbe modo di viaggiare in Europa visitando anche i grandi musei come il Palais de la Découverte. Nel 1969, memore di tutte le esperienze passate, fondò l'Exploratorium nel San Francisco

Palace of Fine Arts. Il progetto si inseriva in un piano più ampio del governo nel voler riconquistare la fiducia dei cittadini nei confronti della scienza, andata perduta dopo la Seconda guerra mondiale. L'ispirazione per la creazione dell'Exploratorium furono gli exhibit interattivi nei musei della scienza e della tecnica, gli allestimenti delle esposizioni universali e le dimostrazioni scientifiche sempre più diffuse nelle scuole e nelle università. I motivi del successo dell'Exploratorium furono molteplici. Tra questi l'attenzione per la progettazione degli exhibit, concepiti per suscitare l'interesse di un pubblico eterogeneo e per permettere una interazione immediata. Uno dei temi principali all'apertura dell'Exploratorium era quello della percezione: Oppenheimer riteneva che alla base della scoperta e interpretazione del mondo ci fosse la percezione, motivo per cui molti dei primi exhibit erano dedicati ai fenomeni percettivi. Altrettanto fondamentale era il dialogo tra scienza e arte, così come il valore attribuito all'invenzione e al gioco. L'Exploratorium divenne il modello di riferimento per i *science centres* che, negli anni successivi, si diffusero rapidamente, affermandosi come un nuovo modello di museo scientifico.

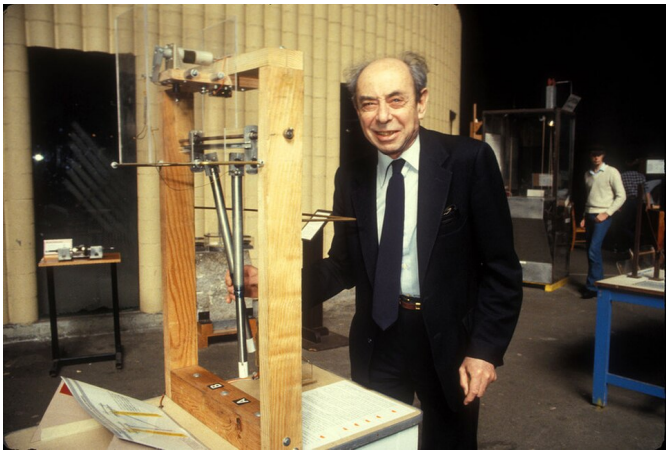

Figura 2.2: Frank Oppenheimer, direttore dell'Exploratorium, accanto all'exhibit dei pendoli accoppiati, circa 1980. Autore: Los Alamos National Laboratory. Fonte: Wikimedia Commons, pubblico dominio.

Il panorama dei musei della scienza dopo l'Exploratorium si divide in due grandi categorie. Da un lato i musei tradizionali o di prima generazione che sono caratterizzati da una missione di conservazione e dall'esposizione di collezioni storiche o naturalistiche non manipolabili. Dall'altro abbiamo i *science centres* di seconda generazione, in cui l'elemento fondamentale è l'interazione dei visitatori

con gli exhibit. Questa suddivisione serve solamente a capire le tendenze in atto nell'evoluzione dei musei scientifici ma in realtà esistono molte vie di mezzo e, soprattutto in tempi recenti, esistono tentativi di combinare le due anime o addirittura superarle per approdare a quelli che vengono definiti musei di terza generazione.

Il sociologo Luigi Amodio individua tre innovazioni messe in atto nei *science centres* rispetto ai musei di prima generazione. La prima innovazione risiede nei contenuti: i *science centres* dichiarano di costituirsi come luoghi di incontro tra scienziati, società e luoghi dove la scienza viene prodotta. La seconda innovazione riguarda le modalità di comunicazione, che sono interattive: al pubblico si chiede esplicitamente di mettere le mani sugli oggetti esposti, promuovendo la libertà di mettersi in gioco nell'apprendimento. In effetti, il ruolo di chi detiene le conoscenze è quello di un facilitatore più che quello di un insegnante. La terza innovazione riguarda gli intenti: mentre i musei di prima generazione hanno un obiettivo prettamente culturale, i *science centres* si collocano in mezzo tra educazione, formazione e intrattenimento.

I musei di seconda generazione, tuttavia, non sono esenti da critiche. Innanzitutto, le strutture necessarie alla produzione e al funzionamento degli exhibit comportano costi molto elevati; poi si contesta che l'interattività celi, in realtà, un approccio fortemente trasmissivo dall'esperto al pubblico. Inoltre, vi è il rischio che venga veicolata un'immagine della scienza distorta e decontestualizzata. Infine, alcuni studiosi sostengono che i *science centres* abbiano finito per riprodurre la logica della collezione tradizionale, nonostante una delle loro caratteristiche distintive sia proprio l'assenza di collezioni permanenti.

Due esempi di musei di terza generazione sono La Cité des Sciences et de l'Industrie di Parigi e la Città della scienza di Napoli. Come il loro nome potrà evocare incarnano la visione comune di essere delle città più che dei veri e propri musei. In particolare La Cité des Sciences et de industrie fu fondata del 1986 ed è probabilmente il progetto europeo di più ampio respiro caratterizzato dalla diversificazione della sua proposta. All'interno della Cité vi si possono trovare, oltre ad aree espositive permanenti, mostre temporanee, caffetterie, bookshop, un cinema, un simulatore, una città dei bambini, un centro congressi, una mediateca a indirizzo scientifico e tecnologico, una biblioteca di storia della scienza, uno spazio dedicato alla formazione permanente in informatica, un'area dedica-

ta all'attualità scientifica, un centro di orientamento professionale, un centro di informazione sui problemi sanitari, opere d'arte, un programma di conferenze e workshop e numerosi dipartimenti di ricerca pedagogica.

Un altro progetto recente è il CosmoCaixa di Barcellona. Secondo Wagensberg, il suo direttore, i dispositivi museografici dovrebbero stimolare un'emozione il più possibile vicina a quella dello scienziato nei momenti del suo lavoro di interrogazione. Questo può essere fatto attraverso tre livelli di interattività:

- **manuale o hands on**: il primo tipo di emozione scientifica è suscitata dall'esperimento, il visitatore usa le mani per provocare la natura ed è parte stessa dell'esperimento;
- **mentale o minds on**: uscire dal museo con più domande di quante se ne avessero all'ingresso è una buona misura del valore di un'esposizione;
- **emotiva o hearts on**: l'oggetto o l'evento possono dare suggerimenti di natura estetica, storica o legata alla vita dello spettatore. Quindi l'uso dell'arte per comunicare la scienza diventa legittimo.

2.1.6 La matematica in mostra: esperienze di mostre matematiche in Italia

In Italia, a partire dalla fine degli anni Ottanta, alcuni pionieri della comunicazione scientifica iniziarono a sviluppare esperienze ispirate al modello dell'Exploratorium, con l'obiettivo di avvicinare il pubblico alla matematica attraverso modalità coinvolgenti e interattive. Queste iniziative si concretizzarono nella realizzazione di mostre di matematica, concepite come spazi nei quali il visitatore potesse sperimentare i concetti matematici.

Tra le prime e più significative esperienze italiane si colloca "Il Giardino di Archimede" che nel corso degli anni ha acquisito grande notorietà, ottenendo numerosi riconoscimenti e trasformandosi successivamente in un'esposizione permanente (Ottaviani, Tessieri, 2024). Accanto a questa esperienza, si svilupparono altre importanti iniziative, tra cui "Matemilano" (Dedò, Di Sieno, 2024) e "La Galleria di Matematica Emanuela Ughi" (Ughi, 2024).

Questa sezione prende in esame queste esperienze, evidenziandone le caratteristiche principali e il contributo alla diffusione di un approccio museale alla matematica basato sull'esplorazione, sull'interazione e sulla partecipazione del visitatore.

Il Giardino di Archimede

Il Giardino di Archimede rappresenta il primo museo in Italia interamente dedicato alla matematica e alle sue applicazioni. Il progetto nasce nel 1992 dalla collaborazione tra Franco Conti, docente presso la Scuola Normale di Pisa, noto per la sua abilità nel realizzare in modo artigianale manufatti e meccanismi complessi, ed Enrico Giusti, illustre analista e storico della matematica. Il progetto prende avvio con la mostra "Oltre il compasso: la geometria delle curve", inaugurata a Pisa nel 1992 e presentata in altre 35 sedi in Italia e all'estero, culmina il suo successo rimanendo per un anno al Palais de la Découverte di Parigi nel 2000, anno internazionale della matematica. Questo successo ha portato alla nascita della sede fisica del museo a Firenze, attiva dal 2004 al 2019. Successivamente, il Giardino di Archimede ha aperto la sede di Priverno nel 2023, intitolata ad Enrico Giusti. In Toscana il Giardino di Archimede è iscritto alla Rete Toscana dei Musei Scientifici ed è in cerca di una nuova sede. Uno degli obiettivi degli ideatori era quello di trasmettere al pubblico un'idea della matematica diversa dalla scienza arida della quale ci si vanta di non capire niente. Secondo Giusti il percorso espositivo si dovrebbe sviluppare attorno a tre pilastri fondamentali per favorire la captatio benevolentiae del visitatore:

1. la vita di tutti i giorni: l'uso di oggetti quotidiani e familiari per mostrare come la matematica sia presente intorno a noi;
2. il gioco: inteso non come passatempo fine a se stesso, ma come strumento di apprendimento che stimola la voglia di scoprire e aiuta a superare possibili blocchi legati a insuccessi scolastici;
3. la storia: inserire i problemi matematici nel proprio contesto storico culturale per rendere più chiara l'origine e la motivazione.

Nella mostra "Oltre il compasso: la geometria delle curve", il visitatore potrà muoversi su tre itinerari. In primo luogo un cammino conoscitivo, lungo il quale

si trovano descritte le idee principali della geometria delle curve in una scala di complessità crescente. Sovrapposto a questo, il percorso storico mette in luce l'evoluzione del concetto di curva e gli affinamenti successivi dei metodi matematici relativi. Infine, un terzo itinerario mostra l'uso delle curve e delle loro proprietà in vari momenti della scienza e della tecnica (Università degli Studi di Firenze, 2026).

Il Giardino di Archimede propose diverse altre mostre di matematica. Tra queste ricordiamo "Pitagora e il suo teorema" e "Un ponte sul Mediterraneo". La mostra "Pitagora e il suo teorema", rivolta principalmente agli studenti della scuola secondaria di primo grado, affronta il celebre teorema attraverso un approccio storico e interattivo. L'esperienza combina il racconto della scuola pitagorica con dimostrazioni basate su puzzle geometrici, mostrando inoltre come il teorema possa essere generalizzato a figure diverse dai quadrati. La mostra "Un ponte sul Mediterraneo", dedicata alla figura di Leonardo Pisano, detto Fibonacci, approfondisce la diffusione delle cifre indo-arabe in Europa attraverso il Liber Abaci del 1202. La mostra, essenzialmente documentaria, evidenzia il ruolo degli scambi commerciali e culturali tra il mondo occidentale e quello arabo nella diffusione delle nuove conoscenze matematiche.

Matemilano

L'esperienza della mostra *matemilano*, allestita presso il Museo Nazionale della Scienza e della Tecnologia "Leonardo da Vinci" nel settembre 2003, rappresenta uno dei casi di studio più importanti nel panorama italiano della divulgazione della matematica a livello museale. Il progetto nasce dalla volontà delle sue ideatrici, Maria Dedò e Simonetta Di Sieno, di superare un primo esperimento di mostra sulla simmetria, allestita all'interno del dipartimento di matematica dell'università di Milano, spinte dal desiderio di intercettare un pubblico più ampio ed eterogeneo.

Le autrici della mostra avevano imparato dalla loro esperienza precedente che una buona ancora per il pubblico è rappresentata da argomenti profondi, cioè affrontati a tutti i livelli, interdisciplinari e belli.

L'idea fondante della mostra poggiava dunque sul principio di ancorare le idee matematiche a spunti che seguissero i tre principi precedenti. Ogni sezione pren-

deva infatti le mosse dall'identità culturale della città per argomentare teoremi e concetti complessi: l'evoluzione della mappa di Milano veniva utilizzata per introdurre il problema isoperimetrico, la celebre figura degli anelli borromei serviva da spunto per esplorare la teoria dei nodi e l'inganno prospettico del coro fittizio del Bramante nella chiesa di Santa Maria presso San Satiro forniva il pretesto per analizzare le leggi della prospettiva. A questo impianto narrativo si affianca un dialogo con i linguaggi artistici, grazie all'integrazione di sculture di artisti contemporanei, tra cui Giò Pomodoro, che offrivano una visualizzazione estetica delle strutture geometriche trattate.

L'efficacia di questo format ne ha decretato un successo tale da renderlo un modello di riferimento nell'ambito delle mostre di matematica in Italia, portandone la riproposizione e l'adattamento in altre realtà del Paese.

La Galleria di Matematica Emanuela Ughi

La "Galleria di Matematica Emanuela Ughi" costituisce un'ulteriore esperienza di divulgazione e didattica laboratoriale della matematica in Italia. La prima uscita ufficiale della collezione è stata la partecipazione, nel 2008, nella Rocca Paolina a Perugia, alla mostra "Storicamente". L'iniziativa trae origine dall'attività trentennale della docente Emanuela Ughi, docente di geometria, che, a partire dai primi anni Duemila, ha intrapreso la progettazione e costruzione artigianale di modelli geometrici e strumenti didattici, ispirata dalle esperienze di Franco Conti e mossa dalla volontà di aiutare gli studenti che non riuscivano a "vedere" e manipolare gli oggetti tridimensionali nella loro mente.

L'approccio della Galleria si fonda su un'esplorazione manipolativa dei concetti matematici col fine di stimolare l'intuizione e la comprensione. Gli exhibit sono realizzati con materiali vari: legno, cartoncini, plexiglas, polistirolo, fino al lavoro all'uncinetto per modelli di geometria iperbolica o alla stampa 3D. Questi spaziano dalle curve e superfici geometriche al prospettografo, dalle pavimentazioni ai modelli topologici e probabilistici. Un ruolo fondamentale nello sviluppo della collezione è stato svolto dagli studenti universitari dei corsi di Didattica della Matematica, i quali sono stati direttamente coinvolti nella progettazione e realizzazione pratica dei modelli, affrontando il problema di far combaciare i vincoli della realtà con il rigore delle leggi matematiche.

Finalmente, nel 2014, la Galleria ha trovato una collocazione permanente presso il Polo Museale Universitario di Casalina.

2.2 La costruzione del concetto di infinito

Questa tesi esplora le idee di infinito del pubblico della mostra interattiva *Infiniti Intrecci*. A tal fine, l'indagine adotta costrutti della didattica della matematica calandoli nell'ambito della divulgazione. Infatti, sebbene la mostra non fosse rivolta soltanto a un pubblico di studenti, la didattica della matematica offre un quadro teorico storicamente più consolidato e sviluppato per questo tipo di analisi.

Di seguito vengono descritti gli strumenti d'indagine utili per analizzare i processi di costruzione, interpretazione e manipolazione del concetto matematico di infinito.

2.2.1 Immagine concettuale e definizione concettuale

Nella comunità scientifica la matematica viene sistematizzata attraverso definizioni e teoremi, per questo si potrebbe ipotizzare che, per l'apprendimento, sia sufficiente esplicitare allo studente la definizione formale. La ricerca in didattica della matematica ha ampiamente smentito questa ipotesi. A tal proposito, Tall e Vinner (Tall, Vinner, 1981) hanno proposto un modello volto a comprendere in che modo avviene l'apprendimento di concetti matematici. Tale modello distingue tra il concetto matematico formale e i processi cognitivi necessari per costruirlo.

In effetti, molti concetti vengono utilizzati dagli individui ben prima di possederne una definizione formale, basandosi sull'esperienza e utilizzandoli in contesti specifici. Successivamente il significato di questi concetti può essere rifinito. Ad esempio, durante l'utilizzo e l'apprendimento di un concetto, lo studente potrebbe assegnargli un nome o un simbolo che ne facilita la manipolazione mentale oppure potrebbe immaginarne una rappresentazione grafica oppure costruire una tabella che ne descriva le proprietà. Per descrivere l'insieme di idee e immagini che uno studente può costruire intorno a un concetto, Tall e Vinner introducono la nozione di *immagine concettuale*. Più precisamente, essa rappresenta la struttura

cognitiva globale associata a un dato concetto: include le rappresentazioni visive, icone e simboli, diagrammi e schemi, le proprietà e i processi ad esso associati. L'*immagine concettuale* si costruisce nel corso degli anni, è frutto delle esperienze pregresse e si modifica continuamente quando l'individuo incontra nuovi stimoli (Tall, Vinner, 1981).

Le *immagini concettuali* possono essere motivo di errore per gli studenti. Un esempio che viene presentato dai due autori è quello della sottrazione: nelle prime fasi di apprendimento, quando si utilizzano i numeri naturali, lo studente può sviluppare un'immagine concettuale secondo cui fare una sottrazione produrrà sempre un numero più piccolo di quello di partenza. Questa regola, valida nei numeri naturali, diventa un elemento che potrebbe causare alcuni problemi con l'introduzione dei numeri negativi.

Tall e Vinner sostengono inoltre che le parti che costituiscono un'*immagine concettuale* non vengano richiamate sempre nella loro totalità, pertanto, definiscono *immagine concettuale evocata* la specifica porzione dell'*immagine concettuale* che viene attivata in un determinato istante o contesto. Questo spiega perché uno stesso studente possa fornire risposte diverse in momenti diversi: vengono evocate parti differenti (e talvolta in conflitto) della medesima *immagine concettuale*. Solo quando gli aspetti conflittuali vengono evocati simultaneamente si genera nello studente un senso di confusione, definito *conflitto cognitivo*.

Parallelamente, la *definizione concettuale* è la forma verbale o simbolica utilizzata per specificare il concetto. Gli autori in Tall, Vinner, 1981 distinguono tra:

- *Definizione concettuale formale:* la definizione rigorosa accettata dalla comunità matematica.
- *Definizione concettuale personale:* la ricostruzione personale che lo studente fa della definizione, ovvero le parole che utilizza per spiegare la propria immagine concettuale.

I due costrutti di *immagine concettuale* e *definizione concettuale* possono viaggiare su binari paralleli. Vi sono casi in cui l'*immagine concettuale* è in parte disgiunta dalla definizione concettuale, portando l'allievo a recitare a memoria una definizione formale senza saperla applicare o riconoscere nella risoluzione di problemi.

Allo stesso tempo una definizione concettuale genera la sua stessa immagine concettuale che diventa dunque parte dell'immagine globale. In alcuni individui la *definizione concettuale formale* è vuota o non esistente, in altri potrebbe non essere coerente con tutte le altre parti dell'*immagine concettuale*. Pertanto, la definizione concettuale e l'*immagine concettuale* si influenzano vicendevolmente e contribuiscono insieme alla costruzione di significati, come illustrato nella Figura 2.3.

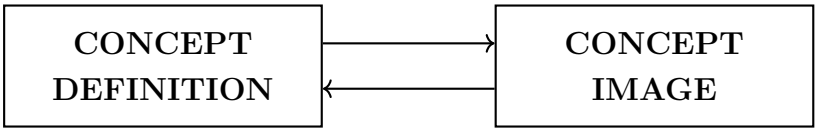

Figura 2.3: Come si relazione definizione concettuale e immagine concettuale secondo Tall e Vinner (Nurwahyu, Tinungki, 2020)

2.2.2 Misconcezioni e ostacoli

Come abbiamo visto nella sezione precedente, la costruzione di un concetto in matematica attraversa diverse fasi in cui l'*immagine concettuale* viene progressivamente raffinata. In alcune fasi del loro apprendimento però gli studenti potrebbero utilizzare un'*immagine concettuale* non adeguata che può portare disagio nello studente.

Quando si parla di errori nella letteratura in didattica della matematica, si parla spesso di misconcezioni. Il termine "misconcezione" deriva dall'inglese *misconception*, vocabolo che per la presenza del prefisso "mis-" porta con sé una connotazione negativa, traducibile con giudizio erroneo, concezione fallace, idea sbagliata, equivoco o malinteso. Dunque, una misconcezione viene generalmente intesa come una concezione o un'interpretazione che risulta inadeguata rispetto al sapere matematico di riferimento D'Amore, Sbaragli, 2005.

Piuttosto che interpretare gli errori degli studenti semplicemente come misconcezioni (concezione inadeguata rispetto al sapere matematico di riferimento), Brousseau propone una prospettiva diversa. Invita a indagare le concezioni sottostanti che possono essersi sviluppate all'interno di particolari domini di esperienza e che possono successivamente funzionare come ostacoli alla costruzione di nuovi significati matematici. Per Brousseau, dunque, un ostacolo non coincide semplicemente

con un errore o con l'assenza di conoscenza, ma può essere una conoscenza che è stata efficace in determinate situazioni e che, quindi, ha acquisito una certa stabilità. Questa conoscenza viene successivamente utilizzata anche in un dominio che non è più di validità e, per questo, diventa resistente alla costruzione di una nuova conoscenza.

Brousseau (Brousseau, 1998) fornisce una caratterizzazione degli ostacoli:

1. L'allievo usa questa conoscenza per dare risposte adatte in un contesto noto, già incontrato;
2. Se l'allievo tenta di usare questa conoscenza al di fuori del contesto noto, fallisce, generando risposte scorrette;
3. L'ostacolo produce contraddizioni ma lo studente resiste a tali contraddizioni; sembra allora necessitare di una conoscenza più generale, maggiore, più approfondita che generalizzi la situazione nota e risolta, e che comprenda la nuova nella quale si è fallito; bisogna che a questo punto l'ostacolo venga reso esplicito e che lo studente ne acquisisca consapevolezza;
4. anche una volta superato, in modo sporadico, l'ostacolo può riapparire.

In questa prospettiva l'errore non è frutto di ignoranza ma potrebbe essere invece il risultato di una conoscenza precedente, una conoscenza che ha avuto successo, ma che non resiste alla prova di fatti più generali.

2.2.3 Sulla comprensione del concetto di infinito

Dal momento che il contenuto matematico di interesse della tesi sono alcune astrazioni del concetto di infinito, nei seguenti paragrafi ci concentriamo sugli ostacoli e le immagini concettuali riguardanti questo concetto.

Gli studi in didattica della matematica che hanno analizzato la problematica dell'apprendimento e insegnamento dell'infinito matematico sono numerosi e esaminano quali siano i motivi che fanno dell'infinito un concetto difficile da essere costruito correttamente. Questi studi mostrano come, sia dal punto di vista storico che per quanto riguarda l'apprendimento del concetto di infinito matematico,

la sua evoluzione sia molto lenta e avvenga spesso in modo contraddittorio e solo grazie a un processo di sistemazione e maturazione cognitiva.

In questo paragrafo vengono riportate alcune delle ricerche che sono state fatte in ambito della didattica della matematica del concetto di infinito. Questo ci consentirà di capire come gli studenti costruiscono e manipolano le astrazioni dell concetto di infinito.

Infinito potenziale e attuale

In Fischbein, 2001 viene mostrato che molte delle difficoltà degli studenti nel trattare con le astrazioni del concetto di infinito sono da ricercare nel fatto che esso gode di una duplice natura classificata per la prima volta da Aristotele nella Fisica:

- l'infinito in potenza: si considera una situazione che nell'istante in cui se ne parla è finita ma con la sicurezza che si può sempre andare al di là del limite posto. Questa è una visione dell'infinito come processo che può sempre andare avanti senza fermarsi mai. Ad esempio l'atto di contare è un infinito di tipo potenziale. Si potrebbe continuare ad aggiungere un'unità trovando sempre un nuovo numero;
- l'infinito in atto: Significa che l'infinito si presenta in un atto unico, tutto in una volta, come un dato di fatto. Lo possiamo quasi pensare come una quantità ben definita che ha una sua propria natura e sue proprie regole. Ad esempio qualora considerassimo l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ nella sua interezza staremmo parlando di infinito attuale.

Per via del fatto che l'essere umano è capace di compiere e esperire solo cose finite, le idee, i modelli e le immagini concettuali che utilizza fanno riferimento al finito. Questo porta lo studente a vivere contraddizioni e fare interpretazioni erronee (Fischbein, 2001).

La classificazione degli ostacoli

In Arrigo, D'Amore, 1999 vengono classificati i diversi ostacoli noti riguardanti le astrazioni del concetto di infinito. La prima immagine concettuale che costituisce un ostacolo è quella che viene denominata come *appiattimento*. Infatti, molti studenti faticano ad accettare le diverse cardinalità transfinite: per molti è ovvio che le cardinalità di $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ sono uguali, dato che sono entrambi insiemi infiniti, ma è altrettanto ovvio che $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$ debbano avere la stessa cardinalità.

La seconda è quella che viene denominata come *dipendenza* per cui la grandezza dell'infinito (il numero di elementi o di punti) dipende dalla dimensione spaziale che lo contiene. Ad esempio gli studenti ritengono che in un segmento lungo vi siano più punti che in un segmento corto. Questa convinzione nasce dalla costruzione di un'immagine concettuale basata sull'esperienza. Lo studente abituato a rappresentare un punto come un segno sul foglio sarà portato a pensare che un punto abbia una dimensione.

Queste due immagini sono in contraddizione tra loro dal momento che se si pensa che tutti gli infiniti siano uguali non è possibile che un segmento contenga più punti di un altro.

Un terzo ostacolo è rappresentato dalla *violazione del principio aristotelico* secondo il quale la parte è più piccola del tutto. Questo ostacolo è stato definito analizzando la difficoltà che hanno gli studenti ad accettare la corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{N}$ e alcuni dei suoi sottoinsiemi propri.

Tutte queste rappresentano delle immagini mentali non adeguate che diventano ostacoli quando si cerca di parlare di infinito.

Capitolo 3

Progettazione della mostra *Infiniti Intrecci*

In questo capitolo presenteremo la mostra di matematica *Infiniti Intrecci*, alla cui progettazione e realizzazione hanno partecipato le autrici. La mostra è stata realizzata dall'Università degli Studi di Genova in occasione del "Festival della Scienza" di Genova 2025. Successivamente, il progetto è stato riproposto in una seconda edizione nell'ambito di "Fosforo: la festa della scienza", a Senigallia, nel 2026.

La mostra *Infiniti Intrecci* prende spunto dal testo di approfondimento matematico Three Infinities in Mathematics, di Marco Panza e Daniele Struppa. A partire da questo testo, il professor Giuseppe Rosolini sviluppa l'idea di dedicare una mostra interattiva al tema degli infiniti in matematica, dando così avvio al progetto *Infiniti Intrecci*.

Hanno inoltre contribuito alla realizzazione del progetto: *Chiara Velari*, studentessa del corso di laurea magistrale in Matematica presso l'Università degli Studi di Genova, Mattia Crivellini, direttore di "Fosforo: la festa della scienza" di Senigallia e Luca Balletti, dell'Unità Comunicazione integrata del CNR. Il progetto è stato inoltre sviluppato grazie alla collaborazione e al supporto di importanti partner scientifici e istituzionali, tra cui Chapman University, "Fosforo: la festa della scienza" e l'Unità Comunicazione Integrata del CNR.

3.1 Contenuti matematici della mostra

Il tema centrale della mostra sono alcune astrazioni di infinito in matematica. In particolare la mostra presenta tre punti di vista alquanto diversi che sviluppano intuizioni di matematici nel corso dei secoli. Questi tre punti di vista sono diventati noti con i nomi di geometria proiettiva, calcolo infinitesimale e cardinalità infinita. Nella mostra le intuizioni delle tre materie si sovrappongono con l'arte e la filosofia.

Per valutare se un determinato argomento sia adatto a un'attività di comunicazione abbiamo utilizzato alcuni importanti spunti provenienti dal lavoro di Maria Dedò ed Enrico Giusti (Dedò, Di Sieno, 2024, Ottaviani, Tessieri, 2024), pionieri di un particolare modo di concepire la comunicazione e i musei scientifici in Italia. Secondo la loro prospettiva, un buon tema per un'attività di divulgazione dovrebbe possedere alcune caratteristiche: il gioco, la storia, il legame con la vita quotidiana, l'interdisciplinarità, la profondità e la bellezza.

Secondo noi, il tema dell'infinito risponde a questi requisiti. Innanzitutto, è un tema interdisciplinare: le astrazioni dell'infinito attraversano la matematica, ma trova importanti connessioni anche con l'arte, la filosofia e la letteratura.

Inoltre, l'infinito è strettamente legato alla storia dell'uomo e della sua conoscenza. Dalle riflessioni filosofiche dell'antichità fino agli sviluppi della matematica moderna, il modo di concepire l'infinito è cambiato profondamente. Raccontarne l'evoluzione significa quindi non solo raccontare la storia di alcune idee matematiche, ma anche mostrare come l'uomo abbia costruito, modificato e ampliato nel tempo i propri strumenti per interpretare la realtà.

Infine, l'infinito è un tema affascinante, infatti l'essere umano è immerso in una realtà finita: gli oggetti che osserva, le esperienze che vive e le grandezze con cui si confronta quotidianamente sono tutte caratterizzate da un limite. L'infinito rappresenta qualcosa che va oltre i confini dell'esperienza, un concetto che non possiamo osservare direttamente nella sua totalità e che, proprio per questo, mette alla prova la nostra intuizione. Come dice Sáenz de Cabezón perché un pubblico si interessi alla materia che stiamo divulgando bisogna trovare dei modi per avvicinare il tema che stiamo trattando alla sensibilità delle persone e alle cose che stanno a cuore all'essere umano (l'amore, la morte, la vita eterna, ...) e

l'infinito si presta a questo in maniera particolare (Sáenz de Cabezón, 2023).

Analizzeremo ora questi tre punti di vista sull'infinito da una prospettiva sia storica sia matematica. Se non specificato altrimenti, i riferimenti sono tratti da Panza, Struppa, 2026.

3.1.1 La geometria proiettiva: il punto che non c'è

Un primo modo di avvicinarsi alle astrazioni del concetto di infinito è offerto dalla geometria proiettiva, che trova le sue radici negli studi sulla prospettiva sviluppati dagli artisti del Rinascimento italiano. La rappresentazione di una scena tridimensionale su una superficie bidimensionale introduce infatti un problema: le linee che nella realtà sono parallele, come gli spigoli delle piastrelle di un pavimento, nella rappresentazione prospettica sembrano avvicinarsi progressivamente fino a incontrarsi in un punto.

Un ruolo fondamentale in questo processo è attribuito all'architetto fiorentino Filippo Brunelleschi, considerato il primo a sperimentare una rappresentazione prospettica basata sulla visione da un punto di osservazione fisso. Le informazioni che abbiamo sui suoi primi esperimenti sono, tuttavia, piuttosto limitate. Non sappiamo con certezza come Brunelleschi sia arrivato a questa idea, né conosciamo nel dettaglio le tecniche che utilizzò, ma questa intuizione deve ancora essere trasformata in una teoria. Ed è proprio qui che entra in gioco Leon Battista Alberti. Nel 1435 Alberti scrive il De pictura, un'opera che si apre con una dedica a Brunelleschi. L'obiettivo del De pictura è particolarmente importante per il nostro discorso: mettere in relazione l'arte della pittura con i principi matematici e geometrici. Alberti parte infatti dai principi dell'ottica e costruisce un modello matematico della visione. Il primo elemento del modello è l'occhio, che viene idealizzato come un punto. Da questo punto partono i cosiddetti raggi visivi, cioè rette che collegano l'occhio ai punti dell'oggetto osservato. Possiamo allora immaginare di osservare un poligono nello spazio. Tutti i raggi visivi che collegano i suoi punti all'occhio formano una struttura geometrica che Alberti chiama piramide visiva: il poligono costituisce la base della piramide, mentre l'occhio dell'osservatore ne costituisce il vertice. A questo punto Alberti immagina di inserire tra l'occhio e l'oggetto una superficie piana, cioè la tela del pittore. I raggi visivi attraversano questa superficie e determinano su di essa una nuova figura. Per Alberti, questa

è l'immagine prospettica dell'oggetto: l'intersezione della piramide visiva con il piano della tela. Dopo Brunelleschi e Alberti, il passaggio successivo è rappresentato da Piero della Francesca, che porta questo processo di matematizzazione ancora più avanti. Di Piero della Francesca conosciamo relativamente poco. È conosciuto soprattutto come pittore, ma fu anche autore di importanti opere matematiche. Tra queste troviamo il De prospectiva pingendi, il Trattato d'abaco e il Libellus de quinque corporibus regularibus. Nel De prospectiva pingendi Piero della Francesca non si limita a descrivere come realizzare una buona rappresentazione prospettica: costruisce e dimostra matematicamente i procedimenti che utilizza. All'inizio dell'opera introduce infatti una serie di risultati che verranno utilizzati nelle costruzioni successive. Questi risultati derivano principalmente da due ambiti: la teoria ottica di Euclide e la teoria matematica delle proporzioni (Andersen, 2010).

La storia della prospettiva mostra quindi come un problema nato nel campo dell'arte abbia progressivamente condotto alla costruzione di nuovi strumenti matematici per descrivere lo spazio. Proprio osservando cosa accade alle rette parallele quando vengono proiettate su un piano, ci avviciniamo al concetto che sarà centrale per la mostra: il punto all'infinito.

Un esempio significativo dell'applicazione di questi principi è rappresentato dalla Flagellazione di Cristo, realizzata da Piero della Francesca intorno al 1450. Nel dipinto, numerose linee che nella realtà sarebbero parallele vengono rappresentate come convergenti verso un unico punto. Questo punto è chiamato punto di fuga e rappresenta il punto verso cui sembrano dirigersi le rette parallele che si allontanano dall'osservatore. Questo punto non esiste nella realtà e nel dipinto le linee architettoniche della scena convergono verso un punto situato sulla parete scura alle spalle di Cristo, nascondendolo.

Dal punto di vista della geometria euclidea, tuttavia, questo punto non dovrebbe esistere: due rette parallele, per definizione, non si incontrano. Eppure, nella rappresentazione prospettica, esse sembrano farlo. È proprio questa apparente contraddizione a suggerire una nuova possibilità: introdurre un punto che rappresenti la direzione comune a tutte le rette parallele.

Questa intuizione viene formalizzata nel 1639 da Girard Desargues che distribuisce il suo manoscritto Brouillon project d'une atteinte aux événements des rencontres

du cône avec un plan (Bozza di progetto su ciò che si ottiene sezionando un cono con un piano), una nuova proposta per lo studio delle coniche. Il testo offre una visione della geometria rivoluzionaria per il tempo, arrivando a proporre un sistema geometrico più generale di quello euclideo, che si sarebbe rivelato di importanza fondamentale per gli sviluppi successivi con le geometrie non-euclidee: nasce la geometria proiettiva (Rosolini, 2025).

In questa nuova geometria, a ogni direzione viene associato un punto detto punto all'infinito. Tutte le rette aventi quella stessa direzione passano per il medesimo punto all'infinito. In questo senso, due rette parallele, che nella geometria euclidea non hanno punti in comune, nella geometria proiettiva si incontrano nel loro punto all'infinito.

Questa intuizione, apparentemente controintuitiva, si accorda con l'esperienza degli artisti rinascimentali. Il punto di fuga utilizzato nella prospettiva può infatti essere interpretato, dal punto di vista della geometria proiettiva, proprio come il punto all'infinito associato alla direzione delle rette che vi convergono.

È interessante, inoltre, osservare come diversi artisti abbiano utilizzato e interpretato il punto di fuga in modi differenti. Un esempio significativo è il Cenacolo di Leonardo da Vinci, nel quale la costruzione prospettica guida lo sguardo dell'osservatore verso un preciso punto della scena: il volto di Cristo.

La prospettiva rinascimentale attraverso la geometria analitica

Ora cercheremo di descrivere la prospettiva rinascimentale utilizzando uno strumento più moderno: la geometria analitica. Attraverso questa costruzione emerge la necessità di aggiungere il punto che non c'è: il punto di fuga.

Come ogni modello matematico di un processo reale, è necessario fare delle semplificazioni: sostituiamo l'occhio con un punto, assumiamo che lo spazio sia completamente trasparente e che la luce viaggi lungo linee rette dagli oggetti che vogliamo rappresentare al nostro occhio.
In questo modello semplificato, posizioniamo l'occhio all'origine O di un sistema di coordinate cartesiane (x, y, z).

Inoltre, ipotizziamo che sia la tela che il soffitto da rappresentare siano superfici piatte a una certa distanza fissa dall'occhio, rispettivamente nella direzione degli assi y e z. Assumiamo anche che queste distanze siano uguali e abbiano valore 1.

Questo è illustrato nel diagramma seguente:

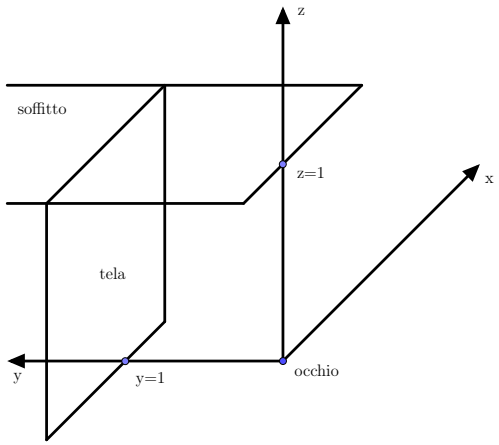

Figura 3.1: Modello semplificato del processo pittorico

Per capire la scelta di questo modello, facciamo appello al lavoro di Albrecht Dürer, un famoso incisore tedesco che si recò in Italia per conoscere la pittura in prospettiva e che rappresentò queste idee in modo molto pratico nella sua incisione tratta dal suo manuale del 1525 (3.2). Notiamo che nella figura la tela è sostituita da una griglia verticale. Similmente possiamo imitare il pittore rappresentato da Dürer ponendoci di fronte a una finestra, guardando tutto ciò che si trova all'esterno e identificando i punti della finestra che corrispondono agli oggetti al di fuori della finestra stessa.

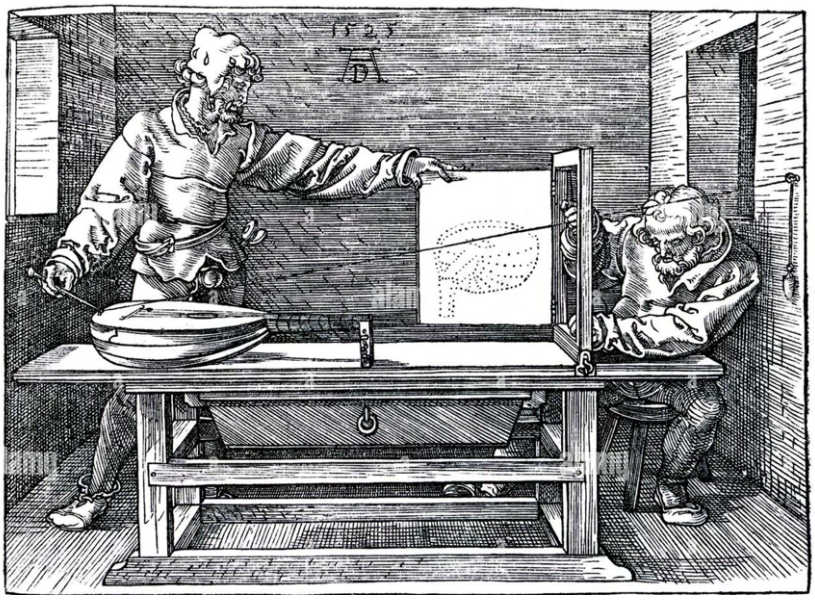

Figura 3.2: *Il disegnatore del Liuto*, Albrecht Dürer

Questo è il processo che ora vogliamo modellare matematicamente, con l'uso della geometria analitica.
Sia P un punto generico di coordinate (a, b, c) nello spazio e l_p la retta passante per i punti P e O, l'occhio dell'osservatore. La retta l_p ha coordinate:

$$\begin{cases} x = at \\ y = bt \\ z = ct \end{cases} \quad \text{con } t \in \mathbb{R}$$

dove le coordinate (x, y, z) rappresentano un punto generico della retta.

Per costruzione, l'equazione del piano π che rappresenta la tela è $y = 1$. Intersechiamo π e l_p da cui otteniamo $bt = 1$ e quindi il punto d'intersezione ha coordinate $(\frac{a}{b}, 1, \frac{c}{b})$.

Osservazione 3.1. *Più in generale, questo mostra che un punto nello spazio di coordinate (x, y, z) è rappresentato sulla tela dal punto di coordinate $(\frac{x}{y}, 1, \frac{z}{y})$. Il calcolo è illustrato nel seguente diagramma (3.3). In generale questo non è sempre vero ma ci permette di rappresentare quasi tutti i punti dello spazio sulla tela.*

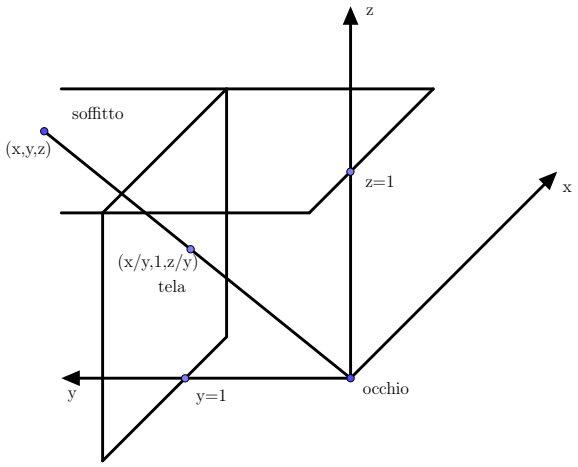

Figura 3.3: Rappresentazione di un punto nello spazio sulla tela

Immaginiamo ora di voler rappresentare una retta $s \subset \mathbb{R}^3$ sulla tela. Seguendo il procedimento delineato in precedenza ci basterà considerare tutte le rette passanti per i punti di s e per O. Queste rette formeranno un piano ρ.
L'intersezione di ρ con π è una retta sulla tela poiché nasce dall'intersezione di due piani.

Osservazione 3.2. *Come succede per i punti, in generale, quasi ogni retta nello spazio è rappresentata da una retta sulla tela.*

Osservazione 3.3. *Parliamo ora delle eccezioni che si vengono a formare. Sono due:*

1. *Dal momento che abbiamo mostrato che un punto $P = (x, y, z)$ si rappresenta sulla tela con la terna $(\frac{x}{y}, 1, \frac{z}{y})$ è facile vedere che per $y = 0$ la terna perde di significato. I punti con coordinata $y = 0$ sono i punti che appartengono al piano che passa per l'origine e parallelo alla tela. Se consideriamo un punto sul piano $y = 0$ e tracciamo una retta che lo collega all'origine, la retta così ottenuta non intersecherà mai la tela e quindi il punto non sarà mai rappresentato su di essa. Questo è illustrato in figura (vedi figura 3.4).*

   Quindi, se la retta s si trova sul piano $y = 0$, non ci sarà modo di usare il processo precedente per rappresentare s sulla tela, poiché in questo caso il piano su cui giace s non è altro che il piano $y = 0$, che non interseca la tela.

2. *L'asse y, che è una retta, non viene rappresentato sulla tela da una retta ma dal punto* $(0, 1, 0)$.

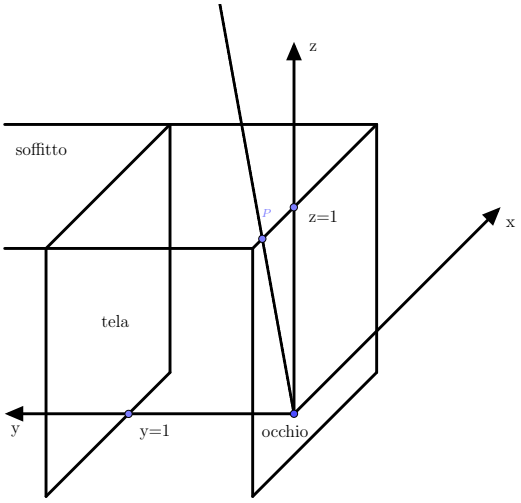

Figura 3.4: Un punto sul piano $y = 0$ non è rappresentato sulla tela

Abbiamo quindi mostrato che esistono dei punti nello spazio che non hanno immagine sulla tela. Presto vedremo che esistono punti sulla tela che non rappresentano alcun punto dello spazio tridimensionale. Uno dei risultati della geometria proiettiva che stiamo cercando di introdurre e descrivere è quello di eliminare queste eccezioni e di stabilire una corrispondenza completa tra lo spazio e la tela.

Per avere un modello ancora più completo cerchiamo di rappresentare il soffitto della nostra stanza, rappresentato dal piano z=1, sulla tela. In particolare immaginiamo di avere delle travi parallele fra di loro descritte dalle seguenti equazioni:

$$b_1 : \begin{cases} x = -1 \\ z = 1 \end{cases} \quad b_2 : \begin{cases} x = 0 \\ z = 1 \end{cases} \quad b_3 : \begin{cases} x = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

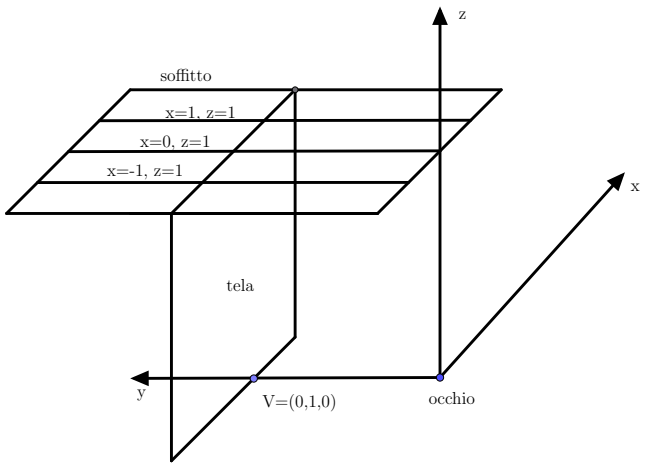

Figura 3.5: Rappresentazione delle travi sul soffitto che sono perpendicolari alla tela

Sia P un punto.

- Se $P \in b_1$ allora $P = (-1, y, 1)$ e sulla tela viene rappresentato con $(\frac{-1}{y}, 1, \frac{1}{y})$
- Se $P \in b_2$ allora $P = (0, y, 1)$ e sulla tela sarà $(0, 1, \frac{1}{y})$
- Se $P \in b_3$ allora $P = (1, y, 1)$ e sulla tela avremo $(\frac{1}{y}, 1, \frac{1}{y})$

Osservazione 3.4. *Poniamo $u = \frac{1}{y}$ e otteniamo che i punti sulle travi vengono proiettati in:*

$$(-u, 1, u) \qquad (0, 1, u) \qquad (u, 1, u)$$

Siccome la tela è rappresentata dal piano $y = 1$ possiamo esprimere le coordinate dei punti sulle travi in funzione di due sole coordinate x e z. Otteniamo che le travi sulla tela sono rappresentate dalle rette di equazioni:

$$z = -x \qquad x = 0 \qquad z = x.$$

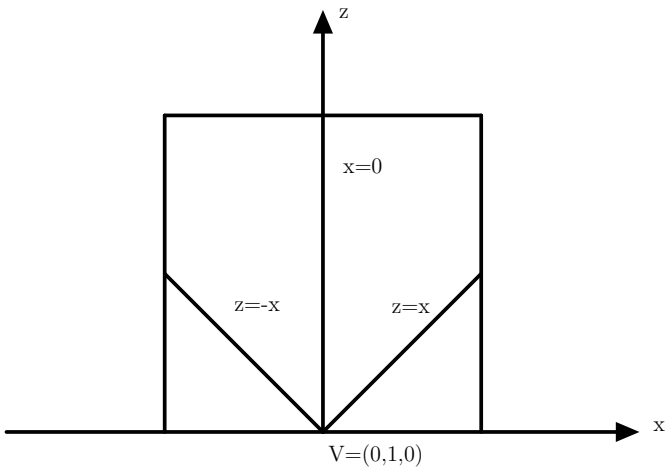

Figura 3.6: Il piano della tela con la rappresentazione delle travi del soffitto

Facciamo alcune considerazioni importanti:

1. Le equazioni di queste tre rette sulla tela si incontrano nel punto V=(0,1,0) che nel sistema di coordinate del piano della tela è il punto $(0, 0)$ che è posto *di fronte* all'occhio dell'osservatore;

2. Se ripetiamo il procedimento con altre linee sempre parallele alle travi possiamo osservare che tutte convergono a V.

Da queste due considerazioni deduciamo tre fatti:

1. Le rette parallele del fascio perpendicolare alla tela convergono nello stesso punto;

2. L'intersezione delle rette che rappresentano le travi sulla tela ci fornisce l'altezza dell'occhio dell'osservatore (0 nel nostro esempio);

3. Il punto V *non* può essere un punto del soffitto poiché nello spazio tridimensionale le travi non si incontrano.

Da un punto di vista analitico quest'ultima considerazione si spiega nel seguente modo: i calcoli che abbiamo svolto ci permettono di definire la mappa

$$T : \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) : x, z \in \mathbb{R}\} \longrightarrow \{(a, 1, c) : a, c \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \longmapsto (\frac{x}{y}, 1, \frac{z}{y}).$$

Questa è una corrispondenza molti a uno. In effetti tutti i punti sulla stessa retta che passa per l'origine hanno la stessa immagine.
Dunque $T^{-1}(x, 1, z) = \{(xt, t, zt) : t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ con $x, z \in \mathbb{R}$.

Esempio 3.5. *Il punto* $(2, 1, 3)$ *sulla tela è immagine dei punti di* $\mathbb{R}^3$ $(2y, y, 3y)$ *tramite* T.

Da queste osservazioni segue che il punto $V = (0, 1, 0)$ è l'immagine dei punti che hanno coordinate $(0, y, 0)$ cioè l'asse y.

Osservazione 3.6. *Osserviamo che i punti della tela* $y = 1$ *con* z *negativa sono immagini di punti appartenenti al pavimento o al paesaggio. La rappresentazione del pavimento quindi può essere fatta proprio come abbiamo fatto per il soffitto assumendo che il pavimento sia il piano di equazione* $z = -1$. *Infatti, se il pavimento dovesse essere coperto da piastrelle quadrate, le linee parallele individuate dalle piastrelle e perpendicolari all'osservatore, convergerebbero a* V.

Siamo quasi arrivati al nostro obiettivo: definire una corrispondenza uno a uno tra i punti della tela con $z > 0$ e il soffitto.

Osservazione 3.7. *Osserviamo che la suddivisione della tela tra soffitto, pavimento e paesaggio dipende dall'altezza dell'occhio dell'osservatore.*

A priori di questa scelta, il punto V, che nella terminologia pittorica è chiamato "punto di fuga" o "punto focale", è l'immagine del punto sul soffitto che apparterrebbe a ciascuna delle travi se potessero continuare all'infinito. Allo stesso modo, il punto V è l'immagine del punto sul pavimento che apparterrebbe a ciascuna delle linee parallele tra loro e perpendicolari al piano della tela, se potessero continuare all'infinito.

Ma ovviamente le tre travi e le linee del pavimento sono parallele, e non hanno alcun punto in comune. Cosa sta succedendo?
La risposta è che per creare una vera corrispondenza uno a uno bisogna aggiungere un punto che non appartiene né al soffitto né al pavimento. In realtà vedremo più avanti che non basta un punto solo ma avremo bisogno di una retta.

Questo fatto si vede considerando altre tre travi parallele fra loro ma non parallele all'asse y. Per esempio, consideriamo le rette di equazioni:

$$\begin{cases} y = x \\ z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = x + 1 \\ z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = x + 2 \\ z = 1 \end{cases} .$$

Le rette sono mostrate nella figura seguente:

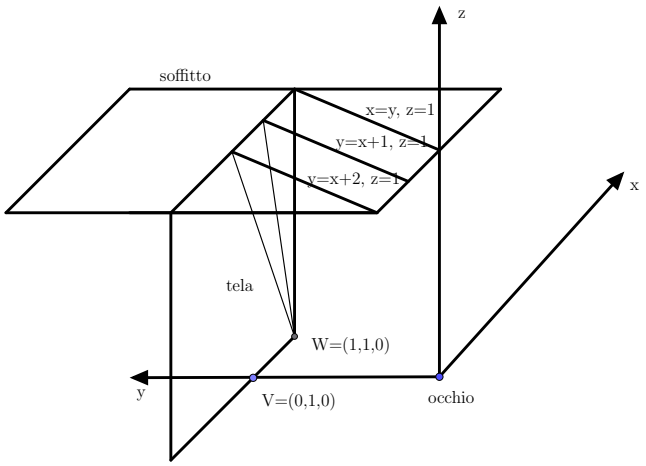

Figura 3.7: Altre travi

I punti su queste tre rette hanno coordinate date da:

$$(y, y, 1),\ (y-1, y, 1),\ (y-2, y, 1) \text{ per ogni } y \in \mathbb{R}.$$

Intersecando i piani contenenti sia l'origine che queste rette con la tela otteniamo le rette di equazioni:

$$x = 1 \qquad x = 1 - z \qquad x = 1 - 2z.$$

Allora il loro punto di fuga sarà $W = (1, 1, 0)$.

Osservazione 3.8. *Dato che le rette che abbiamo considerato sono la bisettrice del I/III quadrante sul piano del soffitto e rette parallele ad essa allora, formano con gli assi x e y, dei triangoli rettangoli necessariamente isosceli e dunque la distanza tra V e W è pari alla distanza tra O e V.*

Fino a questo momento, abbiamo scoperto che:

- V ci dice l'altezza dell'occhio dell'osservatore;
- W ci dice la distanza dell'occhio dell'osservatore dal piano della tela π, difatti dai rinascimentali, il punto W viene chiamato "punto di distanza".

Il fenomeno che abbiamo descritto attraverso i nostri esempi non si limita a una particolare famiglia di linee parallele. Più in generale, dimostreremo in seguito che ogni famiglia di linee parallele sul soffitto è rappresentata, sulla tela, da una famiglia di linee che convergono in un punto che non proviene né da un punto del soffitto, né da un punto del pavimento, e che deve essere aggiunto per completare la corrispondenza tra tela e lo spazio tridimensionale. Tutti questi nuovi punti che aggiungeremo, che chiameremo "punti impropri" o "punti all'infinito", alla fine saranno in una retta che chiameremo "retta impropria" o "retta all'infinito".

Cominciamo considerando tre rette parallele nel piano $z = 1$, per esempio:

$$\begin{cases} y = mx \\ z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = mx + 1 \\ z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = mx + 2 \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{con } m \neq 0, m \in \mathbb{R}.$$

I punti su questi travi avranno rispettivamente coordinate:

$$(\tfrac{y}{m}, y, 1),\ (\tfrac{y-1}{m}, y, 1),\ (\tfrac{y-2}{m}, y, 1).$$

Dividendo per y, troviamo che questi tre fasci sono rappresentati sulla tela dalle rette di equazioni:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{m} \\ y = 1 \\ z = \frac{1}{y} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{y-1}{my} = \frac{1}{m} - \frac{1}{my} \\ y = 1 \\ z = \frac{1}{y} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{y-2}{my} = \frac{1}{m} - \frac{2}{my} \\ y = 1 \\ z = \frac{1}{y} \end{cases}$$

Quando $y \neq 0$ poniamo $u = \frac{1}{y}$, ottenendo:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{m} \\ y = 1 \\ z = u \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{m} - \frac{u}{m} \\ y = 1 \\ z = u \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{m} - \frac{2u}{m} \\ y = 1 \\ z = u \end{cases}$$

Scrivendo queste rette come rette del piano π, cioè il piano (x, z), abbiamo allora le equazioni:

$$x = \frac{1}{m} \qquad x = \frac{1}{m} - \frac{z}{m} \qquad x = \frac{1}{m} - \frac{2z}{m}$$

che si incontrano nel punto $U = (\frac{1}{m}, 1, 0)$.

C'è una conclusione molto importante da trarre qui: dato un valore arbitrario diverso da zero di m, i punti di intersezione di famiglie di linee parallele del soffitto o del pavimento sono tutti della forma $(u, 1, 0)$ dove $u = \frac{1}{m}$. Questi punti sono quindi tutti sulla retta di equazione $z = 0$ sul piano π, che è chiamata "orizzonte", ed è illustrata nella figura seguente:

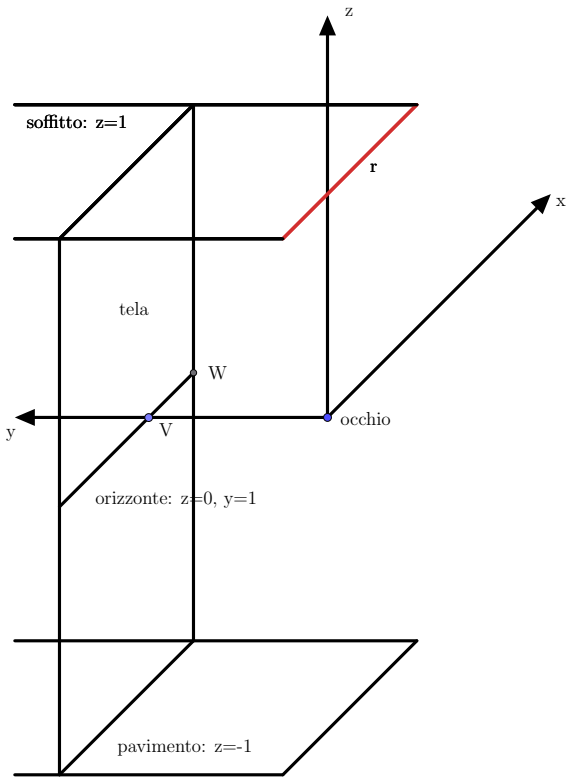

Figura 3.8: Rappresentazione dell'orizzionte con il soffitto e il pavimento

Quindi una completa corrispondenza tra i punti del soffitto/pavimento e quelli sulla tela richiede l'aggiunta di molti elementi nel nostro spazio. Infatti, affinché la corrispondenza che abbiamo descritto sia valida per ogni punto, dobbiamo aggiungere un punto improprio per ogni direzione possibile. Ora abbiamo un'intera retta di punti impropri sul piano del soffitto del sistema, che si chiamerà retta impropria. L'immagine della retta impropria sotto la corrispondenza che abbiamo appena descritto gioca il ruolo, nella pittura, dell'orizzonte nella scena reale.

Osservazione 3.9. *Possiamo osservare che come due rette parallele fra loro si incontrano in un punto, così due piani paralleli si incontrano in una retta sul piano della tela, l'orizzonte, cioè l'immagine della retta impropria che il soffitto e il pavimento condividono.*

Se provassimo a rappresentare sulla tela la retta r, in Figura 3.8, otterremmo che

non è possibile in quanto il pittore non può rappresentare sulla tela gli oggetti che si trovano verticalmente sopra il suo occhio poiché l'intersezione tra il piano π e il piano $y = 0$ è vuota. Se consideriamo le coordinate di un punto del soffitto $(x, y, 1)$ e facciamo tendere y a 0 otteniamo il punto $(x, 0, 1)$ che non appartiene al dipinto. Per ottenere una corrispondenza biunivoca, dobbiamo aggiungere tutti questi punti alla tela. Per farlo dobbiamo completare il piano della tela con una retta impropria.

Per fare ciò e per esprimere in modo rigoroso le idee che abbiamo descritto finora utilizzeremo le coordinate omogenee. Ciò ci permetterà di descrivere con più chiarezza una corrispondenza in cui avviene quanto segue:

- Ogni punto sul soffitto e sul pavimento, ad eccezione di quelli con $y = 0$, è rappresentato da un punto sulla tela.
- Ogni punto sulla tela, tranne quelli sull'orizzonte, rappresenta un punto sul soffitto o sul pavimento.
- I punti dell'orizzonte sono immagini della retta impropria che abbiamo aggiunto al soffitto e al pavimento.
- I punti sul soffitto con y = 0 sono rappresentati sulla retta impropria aggiunta alla tela stessa.

Il modello che svilupperemo offre una descrizione completa e fedele di ciò che gli occhi vedono.

Coordinate omogenee

Consideriamo l'insieme delle rette passanti per l'origine in $\mathbb{R}^2$ e denotiamolo $Gr(1, 2)$. Il motivo per cui viene utilizzata la notazione Gr è perché questo insieme viene chiamato "Grasmaniana", dal matematico tedesco Hermann Grassmann (1809-1877) che fu uno dei primi fondatori della teoria degli spazi lineari e dello studio della geometria in dimensione arbitraria.

Osservazione 3.10. *Esiste una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{R}$ e $Gr(1, 2)$ a cui abbiamo tolto l'asse y, data da $m \mapsto mx$. Per realizzare una corrispondenza uno a uno senza escludere l'asse y dovremmo aggiungere a $\mathbb{R}$ il "coefficiente angolare"*

dell'asse y, cioè ∞. Dunque, esiste una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ e $Gr(1,2)$.

Esiste un altro modo per definire $Gr(1,2)$ che non porta ad eccezioni. Ogni retta di $Gr(1,2)$ può essere espressa come:

$$ax + by = 0 \text{ con } (a,b) \neq (0,0).$$

In questo modo l'asse x è rappresentato, ad esempio, dalla coppia $(0,1)$ e l'asse y dalla coppia $(1,0)$ e non ci sono eccezioni.

Tuttavia perdiamo la corrispondenza biunivoca. Infatti, se consideriamo la retta $y = 3x$ possiamo associarle un unico m $(m = 3)$ ma questa retta è rappresentata da numerose coppie: $(3,-1)$, $(6,-2)$, ecc ecc.

Per ovviare a ciò consideriamo $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Sia $\sim$ la relazione di equivalenza definita da:

$$(a,b) \sim (c,d) \text{ se e solo se esiste } t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ tale che } c = ta \text{ e } d = tb.$$

Questo significa che, ogni qualvolta (a,b) e (c,d) identificano la stessa retta passante per l'origine, sono equivalenti.

Definizione 3.11. *La Grassmanniana $Gr(1,2)$ di tutte le rette passanti per l'origine del piano è definita dall'insieme:*

$$Gr(1,2) := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}/\sim .$$

Notazione Da ora in avanti denoteremo la classe di equivalenza di (a,b) con la notazione $(a:b)$.

Queste nuove coordinate che abbiamo definito sono chiamate *coordinate omogenee*. Ci permettono di ridefinire la bigezione tra $Gr(1,2)$ e la retta reale con un punto all'infinito, chiamata retta proiettiva reale e denotata anche con $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$. La bigezione è la seguente:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} &\longrightarrow Gr(1,2) \\ x &\longmapsto \begin{cases} (x:1) & \text{se } x \in \mathbb{R}, \\ (1:0) & \text{se } \ x = \infty. \end{cases} \end{aligned}$$

Cerchiamo di capire se questo procedimento si può applicare a tutte le rette dello spazio. Le rette passanti per l'origine in $\mathbb{R}^3$ sono date dalle equazioni:

$$\begin{cases} x = ta \\ y = tb \\ z = tc \end{cases} \quad \text{con } (a,b,c) \neq (0,0,0) \text{ un punto sulla retta.}$$

Un generico punto sulla retta è rappresentato da $(d,e,f) = (ta, tb, tc)$. Similmente a prima diamo la seguente definizione:

Definizione 3.12. *La Grassmanniana dell'insieme delle rette in* $\mathbb{R}^3$ *passanti per l'origine è definita da:*

$$Gr(1,3) := \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}/\sim$$

dove $\sim$ *è la relazione di equivalenza tale che* $(a,b,c) \sim (d,e,f)$ *se e solo se esiste* $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *tale che* $(d,e,f) = (ta, tb, tc)$.

Notiamo che vi è una mappa iniettiva

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow Gr(1,3) \\ (x,y) &\longmapsto (x:y:1). \end{aligned}$$

Osservazione 3.13. *Dato* $(a:b:c) \in Gr(1,3)$ *vi sono due possibilità:*

- *se* $c \neq 0$ *allora* $(a:b:c)$ *è equivalente a* $(\frac{a}{c} : \frac{b}{c} : 1)$;
- *se* $c = 0$ *allora* $(a:b:c) = (a:b:0) = (ta:tb:0)$ *con* $t \neq 0$. *Notiamo che un punto del tipo* $(a:b:0)$ *non può mai essere rappresentato da un punto del tipo* $(x:y:1)$.

La situazione è analoga al caso di $Gr(1,2)$: bisogna aggiungere dei punti a $\mathbb{R}^2$ per far sì che la mappa definita sopra sia una bigezione. Con la differenza che nel caso di $Gr(1,2)$ c'è un solo punto con coordinata finale 0 cioè $(1:0)$ mentre nel caso tridimensionale abbiamo i punti del tipo $(a:b:0)$.

Dal momento che abbiamo detto che $\mathbb{R}^2$ può essere identificato con

$$\{(x:y:1) \in Gr(1,3) \text{ tale che } x,y \in \mathbb{R}\},$$

allora possiamo considerare $Gr(1,3)$ come un'estensione di $\mathbb{R}^2$ che chiamiamo piano proiettivo reale e denotiamo con $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$.

La mappa che lega il piano proiettivo con il piano reale è la seguente:

$$(x : y : u) \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \text{ con } u \neq 0 \longleftrightarrow (\frac{x}{u}, \frac{y}{u}) \in \mathbb{R}^2.$$

Adesso interpretiamo geometricamente i punti del tipo $(x : y : 0)$.

Consideriamo i punti del tipo $(x : y : u)$ con $u \neq 0$ e mettiamoci nel piano reale $(X, Y) = (\frac{x}{u}, \frac{y}{u})$. Consideriamo la retta $l : aX + bY + c = 0$ in tale piano. Sostituendo (X, Y) con le coordinate omogenee $(x : y : u)$ otteniamo

$$l : a\frac{x}{u} + b\frac{y}{u} + c = 0$$

e moltiplicando per u, poiché $u \neq 0$, otteniamo

$$l : ax + by + cu = 0.$$

Osservazione 3.14. *I punti che soddisfano l'equazione l sono i punti $(x : y : u)$ con $u \neq 0$ ma anche il punto $(b : -a : 0)$ che, quando $b \neq 0$, può essere scritto come $(1 : m : 0)$ con $m = \frac{-a}{b}$, cioè m è la pendenza di l. Notiamo che il punto $(1 : m : 0)$ sta in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ ma non nel piano (X, Y) precedentemente considerato. Il punto $(1 : m : 0)$ è chiamato punto all'infinito della retta l.*

Tutte le rette hanno un punto all'infinito che è determinato dalla loro pendenza. L'asse Y ha come punto all'infinito il punto $(0 : 1 : 0)$.

Osservazione 3.15. *Nella geometria appena descritta tutte le rette parallele fra loro si incontrano in $(1 : m : 0)$ dove m rappresenta la loro pendenza. I punti $(x : y : 0)$ sono chiamati punti all'infinito. La retta di equazione $u = 0$ (cioè quella con $(a, b, c) = (0, 0, 1)$) è la retta alla quale appartengono tutti punti all'infinito. Essa è dunque chiamata retta all'infinito.*

3.1.2 L'analisi infinitesimale: l'infinitamente piccolo

I paradossi di Zenone

L'idea dell'infinitamente piccolo affonda le sue radici in problemi molto antichi della filosofia greca. Tra i primi filosofi ad affrontare tali questioni vi fu Zenone di

Elea, filosofo della scuola eleatica e discepolo di Parmenide, vissuto nel V secolo a.C. I suoi argomenti, giunti fino a noi principalmente attraverso le testimonianze di autori successivi, sono oggi noti come i "paradossi di Zenone".

Uno dei più noti è il paradosso della freccia. Supponiamo che un arciere scagli una freccia con l'arco in direzione di un bersaglio. Secondo l'argomentazione di Zenone la freccia non riuscirà a raggiungere il bersaglio. Infatti, prima di raggiungerlo, essa deve arrivare al punto medio tra l'arciere e il bersaglio. Prima di arrivare al punto medio, dovrà raggiungere il punto medio tra l'arciere e il punto medio precedente e così via. Inoltre, Zenone afferma che la freccia non può muoversi perché in ogni istante la freccia è ferma. Se il tempo è concepito come una successione di singoli istanti, in ognuno dei quali la freccia è ferma, allora la successione di tali stati non può generare il movimento che dunque, sarebbe solo un'illusione.

Consideriamo adesso un altro paradosso noto con il nome di "Achille e la tartaruga". Supponiamo che una tartaruga sfidi Achille, il più veloce degli eroi greci, in una corsa di mille metri. La tartaruga, essendo più lenta, chiede un vantaggio di qualche metro. Zenone sostiene che questa sfida verrebbe vinta dalla tartaruga. Infatti, prima di raggiungere la tartaruga, Achille deve arrivare al punto da cui essa è partita, ma quando Achille arriva lì, la tartaruga si è già spostata un po'. Quindi Achille deve raggiungere quel secondo punto, ma ancora una volta la tartaruga si sarà spostata un po' più avanti e così via.

Questi argomenti sono definiti "paradossi" perché sebbene conducano a conclusioni false (la freccia raggiunge il bersaglio, il movimento è possibile e Achille raggiunge la tartaruga), i ragionamenti di Zenone sembrano logicamente corretti.

Per capire meglio cosa accade consideriamo il paradosso di Achille e la tartaruga. Supponiamo che la gara sia su un percorso di 1000 metri, che Achille corra a una velocità di 5 m/s, la tartaruga a una velocità di 0,5 m/s e che la tartaruga parta con un vantaggio di 500 metri. Seguendo il ragionamento del paradosso, Achille raggiunge i 500 metri dopo 100 secondi. In questo tempo, la tartaruga è avanzata di 50 metri. Achille deve quindi coprire quei 50 metri. Per farlo ci impiega 10 secondi durante i quali la tartaruga avanza di altri 5 metri. Achille percorre questi 5 metri in un secondo, ma nel frattempo la tartaruga si è spostata di mezzo metro. Quando Achille percorre quel mezzo metro, la tartaruga ha percorso altri

5 centimetri e così via.

Adesso proviamo a cambiare prospettiva e chiediamoci se esiste un tempo finito in cui Achille raggiunge la tartaruga. Lo spazio percorso da Achille è dato dalla sua velocità moltiplicata per il tempo trascorso, secondo l'equazione:

$$s_A = v_A t$$

dove s_A è la distanza percorsa da Achille al tempo t e $v_A = 5\text{m/s}$ è la sua velocità. Lo stesso vale per la tartaruga, ma nel suo caso dobbiamo aggiungere il vantaggio iniziale di 500 metri:

$$s_T = 500 + v_T t.$$

Per determinare il momento in cui Achille raggiunge la tartaruga è sufficiente porre

$$s_A = s_T$$

cioè

$$5t = 500 + 0{,}5t.$$

Risolvendo questa equazione si ottiene:

$$t = \frac{500}{4.5} = 111.11\ldots$$

Quindi esiste un tempo finito e minore di 112 secondi in cui Achille raggiunge la tartaruga.

Questi calcoli non dipendono dalle ipotesi iniziali che abbiamo posto: se cambiamo velocità o vantaggio iniziale, purché Achille sia più veloce e la corsa sia abbastanza lunga, egli riesce sempre a raggiungere la tartaruga.

Purtroppo Zenone non avrebbe accettato il nostro ragionamento. Infatti noi abbiamo supposto di poter ottenere la velocità come rapporto tra lo spazio e il tempo. Ma questa ipotesi non sarebbe mai stata accettata da un filosofo o matematico greco, per i quali grandezze di tipo diverso non potevano essere moltiplicate o divise tra loro. Qualche decennio dopo Zenone, i matematici trovarono un modo rigoroso per condurre argomentazioni analoghe alle nostre senza fare ricorso a tale ipotesi. Questo approccio è chiamato teoria delle proporzioni ed è stato introdotto da Eudosso, allievo di Platone. Tuttavia, rimarrebbe ancora aperto il problema della possibilità del movimento.

Aristotele, per spiegare i paradossi, osserva che le argomentazioni di Zenone si basavano su due assunzioni implicite.

La prima assunzione è che il tempo sia un insieme di istanti. Con questa assunzione è possibile affermare che siccome in un singolo istante non c'è movimento allora non ci può essere movimento anche in un insieme di istanti e quindi nel tempo. Aristotele, invece, afferma che gli istanti non esistono come entità reali ovvero non sono parti del tempo. Quindi anche se ammettiamo che in un istante non vi sia movimento questo non implica che il movimento non sia possibile. Per Aristotele un istante è un "confine" tra parti di tempo.

Nel XIV secolo, Oresme e i Mertoniani sostennero che, come gli istanti emergono dal processo di suddivisione del tempo, applicando lo stesso processo di suddivisione al movimento emerge la velocità istantanea. Secondo questa idea, anche se in un istante non vi è movimento, esiste comunque una velocità istantanea. Più di tre secoli dopo, Newton fece un ulteriore passo avanti assumendo che, quando il movimento viene "tagliato" in un istante, esso conserva anche la direzione: ciò aprì la strada alla moderna concezione di velocità come vettore e al calcolo infinitesimale.

Secondo Aristotele la seconda assunzione di Zenone è che prima di raggiungere la tartaruga, Achille debba passare per infinite posizioni da cui la tartaruga è già passata. Da ciò si conclude che Achille non riesce a raggiungere la tartaruga in un tempo finito. Analogo ragionamento si può fare con la freccia e il bersaglio: la freccia non può raggiungere il bersaglio perché prima deve passare per infinite posizioni in un tempo finito. Per affrontare la questione, Aristotele introduce una distinzione tra due diversi modi di concepire l'infinito: l'infinito rispetto all'estensione e l'infinito rispetto alla divisibilità. Il primo viene definito infinito "attuale" e il secondo infinito "potenziale". Secondo Aristotele, una grandezza può essere finita nella sua estensione e, al tempo stesso, essere divisibile indefinitamente. Ad esempio, un segmento di lunghezza finita può essere suddiviso in due parti, poi ciascuna di queste in altre due parti e così via. Secondo Aristotele, è proprio questo il tipo di infinito coinvolto nei paradossi di Zenone. Nel caso di Achille e della tartaruga, infatti, la distanza che separa i due corridori è finita, sebbene possa essere suddivisa indefinitamente in una successione di intervalli sempre più piccoli. Lo stesso vale per il tempo impiegato da Achille per percorrere tale distanza: anche il tempo è finito, ma può essere suddiviso indefinitamente in intervalli sem-

pre più piccoli. Esiste dunque una corrispondenza tra la divisibilità dello spazio e quella del tempo: a ogni suddivisione della distanza corrisponde una suddivisione del tempo necessario a percorrerla. La conclusione di Zenone, secondo cui Achille non potrebbe mai raggiungere la tartaruga perché dovrebbe attraversare un numero infinito di intervalli dipende, secondo Aristotele, da un presupposto errato: dal fatto che l'esistenza di infinite suddivisioni implichi necessariamente un percorso o un tempo infiniti. Ma una grandezza finita può contenere un numero indefinitamente grande di suddivisioni senza per questo diventare infinita nella sua estensione. Achille può quindi attraversare una successione infinita di intervalli all'interno di una distanza e di un tempo finiti.

Proviamo a tradurre e continuare l'argomentazione di Aristotele utilizzando strumenti moderni. Come abbiamo visto precedentemente, Achille raggiunge il punto di partenza della tartaruga (500 metri) dopo 100 secondi; il secondo passo (50 metri) richiede altri 10 secondi, il terzo passo (5 metri) 1 secondo e così via. Abbiamo quindi due successioni infinite parallele. Le distanze in metri che Achille deve percorrere sono:

$$500, \qquad 50, \qquad 5, \qquad 0.5, \qquad 0.05, \qquad \ldots$$

I tempi impiegati in secondi sono:

$$100, \qquad 10, \qquad 1, \qquad 0.1, \qquad 0.01, \qquad \ldots$$

Adesso dobbiamo sommare tutti i termini di queste successioni ottenendo:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{500}{10^i} = 500 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{10^i} = 500 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 500 \cdot \frac{10}{9} = 555 + \frac{5}{9},$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{100}{10^i} = 100 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{10^i} = 100 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 100 \cdot \frac{10}{9} = 111 + \frac{1}{9}.$$

Quindi possiamo concludere che Achille per raggiungere la tartaruga dovrà percorrere $555, \bar{5} = 555 + 5/9$ metri e che lo farà in $111, \bar{1} = 111 + 1/9$ secondi.

Un'argomentazione analoga può essere applicata anche al paradosso della freccia. Sia D la distanza tra l'arciere e il bersaglio. Prima di raggiungere il bersaglio, la freccia deve percorrere le seguenti distanze:

$$\frac{D}{2}, \qquad \frac{D}{4}, \qquad \frac{D}{8}, \qquad \ldots$$

Possiamo interpretare i termini di questa successione come le distanze percorse successivamente dalla freccia nel suo tragitto verso il bersaglio. Se li interpretiamo in questo modo ha senso sommare questi termini:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{D}{2^i} = D \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = D \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} - 1 \right) = D \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 \right) = D.$$

Questo conferma che la distanza tra l'arciere e il bersaglio può essere divisa indefinitamente a metà e rimane finita. Lo stesso vale per il tempo che la freccia impiega per raggiungere il bersaglio.

Il metodo di esaustione di Archimede

Il problema posto dai paradossi di Zenone apre una questione che sarà rilevante per la matematica successiva: come trattare matematicamente quantità che possono essere divise indefinitamente e che diventano sempre più piccole? Una prima risposta viene data secoli dopo da Archimede (287-212 a.C.), attraverso quello che sarà chiamato "metodo di esaustione". Archimede utilizza questo metodo per ottenere l'approssimazione di "pi greco" che usiamo ancora oggi: $\pi \approx 3,14$. Nel libro XII degli Elementi, Euclide aveva mostrato che il rapporto tra la circonferenza e il diametro è costante. Questa costante è quella che nel 1706 William Jones chiamerà π. Archimede, a partire da un poligono circoscritto a una circonferenza, determina il lato del poligono regolare circoscritto con un numero doppio di lati. Partendo da un esagono regolare circoscritto alla circonferenza e raddoppiando cinque volte il numero dei lati, Archimede arriva a un poligono di 96 lati. Il perimetro di questo poligono fornisce un'approssimazione superiore della circonferenza. Il rapporto tra il perimetro di questo poligono e il diametro della circonferenza è inferiore a $\frac{22}{7} = 3 + \frac{1}{7}$. Archimede ripete poi un procedimento analogo con poligoni regolari inscritti nella circonferenza. Il loro perimetro fornisce invece un'approssimazione inferiore. Arrivando ancora una volta a un poligono di 96 lati, dimostra che il rapporto fra il perimetro del poligono inscritto e il diametro della circonferenza è superiore a $\frac{223}{71} = 3 + \frac{10}{71}$. Le scritture decimali delle due frazioni sono

$$\frac{10}{71} = 0,\overline{1408450704225352112676056338028169} \qquad \frac{1}{7} = 0,\overline{142857}$$

In questo modo Archimede riesce a racchiudere il valore di π in un intervallo di ampiezza inferiore a 0,00203 (Rosolini, 2025).

Il calcolo di Leibniz e Newton

Nei secoli successivi, le intuizioni precedenti vennero sviluppate fino alla nascita del calcolo infinitesimale, soprattutto attraverso il lavoro di Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).

La scoperta del calcolo infinitesimale moderno diede origine a un acceso e prolungato dibattito sulla paternità tra Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz, alimentando un forte clima di rivalità tra i due studiosi e all'interno della comunità matematica. Newton elaborò il calcolo infinitesimale tra il 1665 e il 1666 ma la prima pubblicazione in cui apparve è nel 1687 nei "Philosophiae naturalis principia mathematica". Leibniz, invece, iniziò a sviluppare la propria versione del calcolo infinitesimale intorno al 1673 e pubblicò i suoi risultati nel 1684 negli "Acta Eruditorum". Ad oggi, prevale l'idea che Newton e Leibniz abbiano sviluppato le proprie teorie in modo sostanzialmente indipendente, giungendo autonomamente alla formulazione del calcolo infinitesimale (Boyer, 1990).

Uno dei problemi della nuova teoria era nell'uso di numeri che, a seconda della necessità, erano in una parte di una dimostrazione diversi da 0, ma in un'altra parte della stessa identificati a 0. Uno dei primi testi a chiarire tali difficoltà fu "Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana" di Maria Gaetana Agnesi (1718-1799), che introduce al calcolo infinitesimale. Il testo venne tradotto e pubblicato in tutta Europa (Rosolini, 2025).

3.1.3 Le cardinalità infinite: l'infinitamente tanto

Un altro caso di sviluppo inatteso nella matematica e della concezione di infinità è stato l'introduzione da parte di Georg Cantor del concetto di "conteggio", o meglio di cardinalità. L'introduzione di una definizione matematica per contare al di là dei numeri naturali, e più in là ancora, avviene in un articolo del 1874, Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen (Su una proprietà della collezione di tutti i numeri algebrici reali), dove Cantor risolve un problema in un modo che i contemporanei trovano sconcertante.

Ricordiamo che:

Definizione 3.16. *Un numero reale è algebrico se è soluzione di un'equazione polinomiale non nulla a coefficienti interi.*

Esempio 3.17. *I numeri razionali sono algebrici: ad esempio,* $\frac{3}{5}$ *è soluzione dell'equazione* $5x - 3 = 0$*. I numeri radicali sono algebrici: ad esempio,* $\sqrt{2}$ *è soluzione dell'equazione* $x^2 - 2 = 0$*.*

Definizione 3.18. *Un numero reale che non è algebrico si dice trascendente.*

Joseph Liouville (1809-1882) aveva dimostrato nel 1844 l'esistenza di infiniti numeri reali trascendenti. Nel 1873, Charles Hermite (1822-1901) dimostra che il numero di Eulero e è trascendente. Nel 1882 Ferdinand von Lindemann (1852-1939) dimostra che π è trascendente. Ma la proprietà che Cantor dimostra nell'articolo del 1874 è che la numerosità dei numeri trascendenti è superiore di quella dei numeri algebrici.

Ottiene la dimostrazione in un modo assolutamente rivoluzionario: contando quanti sono i numeri algebrici e quanti sono i numeri trascendenti.

Per contare, nel modo in cui siamo abituati, quantità infinite, sarebbe richiesta un'infinità temporale. Per effettuare il conteggio la soluzione non risiede nel definire nuovi numeri; Cantor introduce invece una definizione per confrontare la numerosità di due collezioni infinite.

Il confronto fra due numerosità si fa utilizzando il concetto di corrispondenza biunivoca tra i componenti delle due collezioni cioè una corrispondenza tra i componenti che è univoca in entrambe le direzioni.

Esempio 3.19. *Alcuni esempi di corrispondenze biunivoche:*

- *Le nostre mani sono l'esempio più naturale di corrispondenza biunivoca, le dita sono infatti accoppiabili una ad una. Ciascuna mano rappresenta lo stesso numero: "cinque".*
- *L'associazione di un nome a ciascun numero è una corrispondenza biunivoca che impariamo in tenera età: ad ogni numero corrisponde un nome e viceversa.*

In Rosolini, 2025 vengono proposte le intuizioni di Cantor (e il suo fondamentale Teorema) in una versione che trae spunto da una proposta di David Hilbert (1862-1943). Riproponiamo anche noi questa versione.

La storia comincia con il Grand Hotel Hilbert che ha tante stanze quanti i numeri interi positivi; sono numerate usandoli tutti: la camera 1, la camera 2, la camera 3, la camera 4, ... Arriva un turista e chiede una camera. L'albergatore risponde che purtroppo l'albergo è al completo ma che può provare a liberare una stanza; così apre il citofono verso tutte le stanze e chiede a tutti i clienti di spostarsi nella camera successiva rispetto a quella in cui si trovano. Il cliente della camera 1 passa nella camera 2, il cliente della camera 2 passa nella camera 3, il cliente della camera 3 passa nella camera 4 e così via. Tutti i clienti sono alloggiati dalla camera 2 in poi e la camera 1 è libera.

Quello che matematicamente stiamo facendo è introdurre un nuovo segno $\aleph_0$ che rappresenta il "numero" che conta tutti i numeri interi positivi. Con questa notazione, i clienti che sono sistemati nel Grand Hotel Hilbert sono $\aleph_0$, e il turista che arriva è un'unità che viene aggiunta, cioè i clienti e il turista in totale sono $\aleph_0 + 1$. Dato che, alla fine, i clienti e il turista sono tutti sistemati nelle camere, abbiamo calcolato che $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$.

Osservazione 3.20. *Un matematico definirebbe questa azione tramite appunto una corrispondenza biunivoca:*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N}^* \cup \{*\} & \to & \mathbb{N}^* \\ * & \mapsto & 1 \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}$$

Ora, davanti al Grand Hotel Hilbert è parcheggiato un pullman con a bordo tanti passeggeri quanti i numeri interi positivi. L'autista chiede all'albergatore di sistemare tutti i passeggeri nel Grand Hotel. L'albergatore non ha problemi: apre il citofono verso tutte le stanze e chiede ad ogni cliente di lasciare la stanza dove si trova e di spostarsi nella camera che ha il numero doppio di quella che lascia. Tutte le camere con i numeri dispari sono libere e i passeggeri dell'autobus e l'autista vengono sistemati in quelle. Questa volta a $\aleph_0$ (i clienti dell'albergo) è stato aggiunto un altro $\aleph_0$ (gli occupanti del pullman); il numero che risulta dalla somma è ancora $\aleph_0$ (le stanze dell'albergo): in simboli, $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.

Osservazione 3.21. *Per provare matematicamente questo fatto dobbiamo costruire una bigezione tra $\mathbb{N}^*$ e i pari e tra $\mathbb{N}^*$ e i dispari per dimostrare che tutti gli ospiti dell'hotel possono occupare le stanze contrassegnate da un numero pari e che tutti i passeggeri del pullman possono occupare le stanze contrassegnate da un numero dispari.*

La storia racconta già la prima bigezione: $n \mapsto 2n$.

Analogamente, per i passeggeri del pullman definiamo la bigezione $n \mapsto 2n-1$.

Dunque la nostra bigezione ha come dominio un insieme che è "numeroso" quanto due $\aleph_0$ sia esso $\mathbb{N}^* \times \{0,1\}$. L'insieme di arrivo è costituito dalle camere dell'hotel ed è dunque $\mathbb{N}^*$.

La bigezione sarà definita da

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N}^* \times \{0,1\} & \to & \mathbb{N}^* \\ (n,0) & \mapsto & 2n \\ (n,1) & \mapsto & 2n-1 \end{array}$$

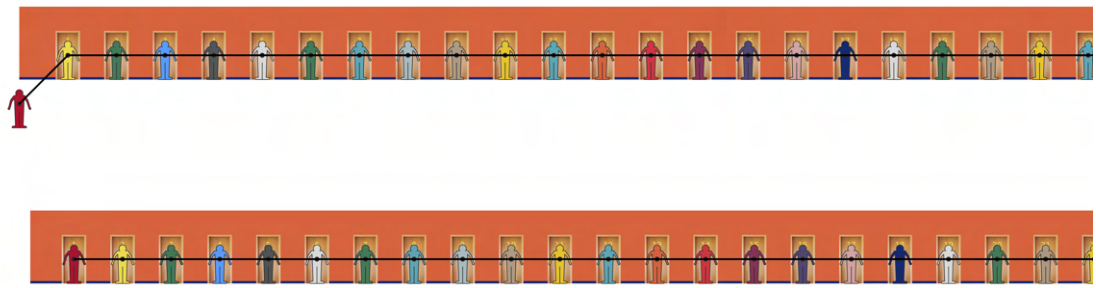

Figura 3.9: Arriva un ospite al Grand Hotel Hilbert

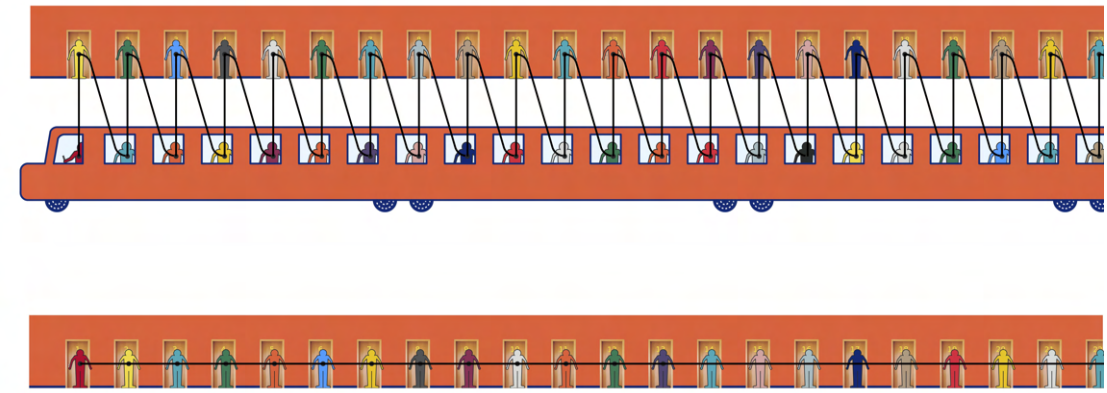

Figura 3.10: Arriva un pullman di ospiti al Grand Hotel Hilbert

In 3.9 e 3.10 Rosolini, 2025 suggerisce un modo grafico per visualizzare come vengono risistemati i clienti nelle stanze, immaginando di tracciare una singola linea che tocchi tutti i clienti. Nel primo caso la linea parte dal turista appena arrivato per passare poi a tutti i clienti nel Grand Hotel. Nel secondo caso la linea a zig-zag tocca alternativamente un cliente e un passeggero.

Avviene poi che dopo il primo pullman arrivino al Grand Hotel tanti pullman quanti i numeri interi positivi: il pullman 1, il pullman 2, il pullman 3, e così via; tutti con a bordo tanti passeggeri quanti i numeri interi positivi. L'albergatore riesce a sistemare anche tutti questi, ma stavolta tralasciamo i dettagli della comunicazione al citofono, e forniamo soltanto una descrizione grafica della distribuzione nelle stanze in Figura 3.11.

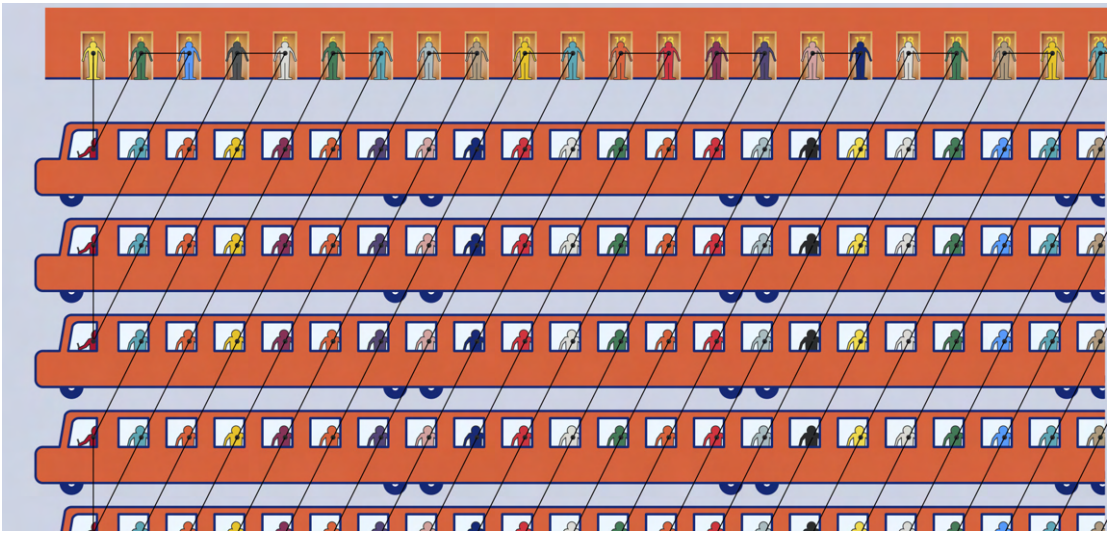

Figura 3.11: La corrispondenza biunivoca con infiniti pullman

Osserviamo che in Figura 3.9 si vede che $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$, in Figura 3.10 si vede come $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$. In Figura 3.11 si vede che $\aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$.

Osservazione 3.22. *Matematicamente questo è possibile grazie a una bigezione descritta da Cantor nota come funzione di accoppiamento. Riflettiamo sul dominio di questa funzione. Come detto in precedenza dobbiamo avere una griglia che ha come lato la numerosità di* $\aleph_0$*. Dunque il nostro dominio sarà di numerosità* $\aleph_0 \times \aleph_0$*.* $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ *sembra un buon candidato. L'insieme di arrivo è costituito dalle stanze dell'albergo, dunque* $\mathbb{N}^*$*. La nostra funzione è definita da:*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* & \to & \mathbb{N}^* \\ (m,n) & \mapsto & \frac{(m+n-2)(m+n-1)}{2} + n \end{array}$$

Per capire perché questa formula genera una bigezione, ci viene in aiuto la Figura 3.11.

I puntini sono disposti su una griglia bidimensionale infinita e ad ognuno di essi possiamo associare delle coordinate (m, n)*. Non possiamo inoltre elencare queste coppie riga per riga perché la prima riga è già infinita e non arriveremmo mai alla seconda.*

Cantor risolse il problema ordinando le coppie per diagonali crescenti:

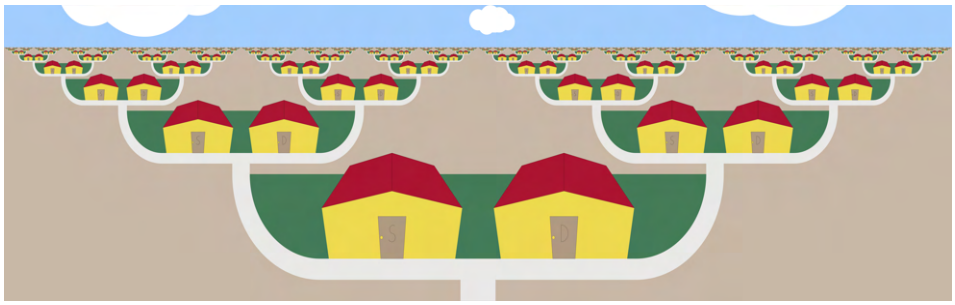

Figura 3.12: Il Motel Cantor

1. *Se* $m+n=2$ *stiamo considerando la coppia* $(1,1)$ *che andrà nella stanza 1;*
2. *Se* $m+n=3$ *stiamo considerando le coppie* $(2,1),(1,2)$ *a cui verranno assegnate le stanze 2 e 3;*
3. *Se* $m+n=4$ *stiamo considerando le coppie* $(3,1),(2,2),(1,3)$ *che occuperanno le stanze 4, 5 e 6.*
4. ...

In questo modo, muovendosi a zig-zag lungo le diagonali, si riusciranno a disporre in fila tutte le coppie possibili, senza dimenticarne nessuna e senza ripetizioni.

Così, dopo il successo del Grand Hotel Hilbert, i proprietari decidono di costruire il Motel Cantor. In un'enorme spianata davanti all'oceano sistemano bungalow che, come si vede dalla piantina in Figura 3.12, possono essere facilmente raggiunti dal cliente con la propria automobile: basta che gli sia dato l'elenco delle svolte da fare a ciascun bivio.

Ad esempio, al cliente che è stato sistemato nel quarto bungalow da sinistra della terza fila è stato consegnato il percorso SDD; al cliente sistemato nel bungalow più a destra della quarta fila è stato consegnato il percorso DDDD. Ci sono bungalow anche in fondo a ciascun percorso in riva all'oceano. Il cliente nel bungalow più a sinistra deve fare il percorso SSSS... che possiamo abbreviare con $\bar{\mathrm{S}}$. Ce ne sono chiaramente tanti altri, molti dei quali non si possono abbreviare, come ad esempio il percorso SDSDDSDDDSDDDDSDDDDDS..., che è "senza periodo".

Un giorno, mentre il Motel Cantor è al completo, arriva un avviso di tsunami. L'albergatore procede a dare l'avviso che tutti i bungalow in riva all'oceano devono

essere liberati. I clienti di quei bungalow devono rifugiarsi nel Grand Hotel Hilbert che, in questo momento, ha tutte le camere libere. La gestione dei due alberghi ha predisposto un piano di riposizionamento che è riassunto nella Tabella 3.1.

Nella camera	**sistemare il cliente del bungalow**											
1	**S**	D	S	D	S	D	S	D	S	D	S	...
2	D	**D**	S	D	D	S	D	D	S	D	D	...
3	D	D	**S**	D	S	D	D	S	D	S	D	...
4	D	D	D	**D**	D	S	D	D	D	D	D	...
5	S	D	D	D	**S**	D	D	D	S	D	D	...
6	D	D	D	D	D	**D**	D	D	D	D	D	...
7	S	S	S	S	S	S	**S**	S	S	S	S	...
8	D	D	D	D	D	S	D	**D**	D	D	D	...
9	D	D	D	D	D	D	D	S	**S**	D	D	...
10	D	D	D	D	D	D	S	D	D	**D**	D	...
11	D	D	D	D	D	D	D	D	D	S	**S**	...
⋮	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	

Tabella 3.1: Riposizionamento nell'Hotel dei clienti del Motel

Naturalmente, dato che ogni percorso consiste di $\aleph_0$ svolte e le camere del Grand Hotel Hilbert sono pure $\aleph_0$, non è possibile visualizzare nella figura tutta la tabella. C'è però un cliente che reclama segnalando un problema all'albergatore: non c'è una camera prevista per lui nel Grand Hotel. Il cliente era sistemato nel bungalow individuato dal percorso DSDSDSDSDSDSDSD... Ma questo percorso è proprio quello che fa le svolte contrarie rispetto a quelle che si leggono sulla diagonale della tabella, pertanto non c'è una camera per lui. L'albergatore è sorpreso poiché l'albergo ha infinite camere. Il cliente insiste che $\aleph_0$ è soltanto il più piccolo infinito. E qui stiamo proprio dimostrando che l'infinito dei bungalow in riva all'oceano è un infinito superiore a $\aleph_0$.

Cerchiamo di spiegare meglio il ragionamento del cliente.

Chi va nella camera 1 era in un bungalow che si raggiunge svoltando a sinistra al primo bivio ma il cliente va a destra al primo bivio perciò non sarà l'ospite della camera 1.

Chi va nella camera 2 era in un bungalow che si raggiunge svoltando a destra al secondo bivio ma il cliente rimasto fuori va a sinistra al secondo bivio perciò non può occupare la camera 2.

Se analizziamo la terza svolta che compare nella riga della camera 3 possiamo notare che chi va nella camera 3 era in un bungalow che si raggiunge svoltando a sinistra al terzo bivio; ma il nostro cliente va a destra. E tutto continua in questo modo.

La tabella non può sistemare tutti i clienti nei bungalow in riva all'oceano! Questo lo aveva dimostrato Cantor nel 1891. In effetti, nell'articolo Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre, Cantor dimostra che, fissata una numerosità infinità, ce n'è sempre un'altra più grande. L'articolo contiene il primo esempio di un metodo dimostrativo divenuto famoso tra i matematici come "Metodo diagonale di Cantor" che è il metodo suggerito nel racconto dal cliente senza riposizionamento.

3.2 Prima edizione della mostra

Il "Festival della Scienza" si svolge a Genova dal 2003, ogni anno a fine ottobre ed è riconosciuta, a livello internazionale, come una delle più importanti manifestazioni di comunicazione della scienza. Il programma comprende incontri, laboratori, spettacoli e conferenze con l'obiettivo di avvicinare il pubblico alla scienza in modo innovativo e coinvolgente. Per ogni edizione viene proposta una "parola chiave", che per la 23^a edizione era "Intrecci", che serve da filo conduttore per le attività del festival. Il pubblico del festival è molto vario. In particolare, le attività laboratoriali e interattive registrano una forte partecipazione da parte da studenti accompagnati dai professori. Gli spettacoli e le conferenze, invece, vedono una significativa partecipazione anche di adulti e famiglie. Una delle caratteristiche distintive del Festival è la presenza di numerosi animatori, impegnati nella conduzione dei laboratori e nell'accompagnamento dei visitatori nelle mostre. Anche nel nostro caso, due animatori hanno guidato i gruppi durante il percorso esposi-

tivo, svolgendo un'importante funzione di mediazione tra il pubblico e i contenuti scientifici, favorendone la comprensione e la fruizione.

3.2.1 Progetto grafico

Il progetto grafico della mostra si è basato su una palette di due colori: il blu e l'arancione. Il blu richiamava l'identità visiva dell'edizione di quell'anno del festival; l'arancione, invece, è stato utilizzato in quanto colore rappresentativo della sezione di divulgazione del Dipartimento di Matematica dell'Università di Genova. Il logo consiste del simbolo dell'infinito che si sviluppa in un frattale. Sullo sfondo, inoltre, è presente un manoscritto dell'infinito di Leopardi: una scelta grafica che evoca l'idea di iterazione infinita ma anche l'arte, a testimonianza della volontà dei progettisti di mostrare come la matematica non sia pura astrazione ma indaghi quelle domande di senso che fanno parte della natura umana.



Figura 3.13: Identità visiva della mostra

3.2.2 Percorso espositivo

Poiché l'assegnazione della sede delle attività del festival è appannaggio dell'organizzazione, la selezione definitiva degli exhibit è rimasta in sospeso fino alla conferma dello spazio espositivo. Nell'estate del 2025, con l'assegnazione della

Loggia degli Abati all'interno del Palazzo Ducale, è iniziata la fase definitiva di progettazione e produzione degli exhibit. L'architettura della location, visibile in figura 3.14, ha consentito di delineare un percorso espositivo articolato su quattro sale principali, precedute da un'area di ingresso. Ciascuna sala è dedicata a una specifica area tematica della mostra:

- **Ingresso - Introduzione**: spazio pensato per introdurre la mostra e per coinvolgere il pubblico attraverso le installazioni di maggiore impatto visivo.
- **Prima sala – Il punto che non c'è**: dedicata alla prospettiva rinascimentale e alla geometria proiettiva.
- **Corridoio**: spazio di transizione tra le sezioni del percorso espositivo dedicato a *L'infinito* di Leopardi.
- **Seconda sala – L'infinitamente piccolo**: dedicata all'introduzione del concetto di infinitesimo.
- **Terza sala – Alcune applicazioni degli infinitesimi**: dedicata alla presentazione di alcune applicazioni del concetto di infinitesimo.
- **Quarta sala – L'infinitamente tanto**: dedicata alla teoria delle cardinalità infinite e alle tassellazioni.

Gli argomenti presentati nella mostra seguivano un ordine cronologico, rispecchiando la suddivisione delle tre visioni di infinito. La scelta di narrare questi concetti ripercorrendo la storia dell'umanità e della matematica risponde ai principi menzionati in precedenza. In questo modo si è inteso evidenziare l'interdisciplinarità della materia, mettendola in costante dialogo con la storia, la letteratura e la filosofia, ovvero con l'evoluzione stessa del pensiero umano.



Figura 3.14: Pianta Loggia degli Abati

3.2.3 Installazioni

Si presentano di seguito le installazioni seguendo il percorso espositivo della mostra.

Ingresso - Introduzione

Scacchiera infinita. Questo exhibit permette di introdurre i visitatori ai tre infiniti che incontreranno nel percorso della mostra. Quadrati di due colori formano una scacchiera che con l'ausilio di un sistema di specchi genera l'illusione di un piano infinito. I quadrati diventano sempre più piccoli, anzi diventano di dimensioni così piccole da sparire, cioè infinitesime. Inoltre, osservando attentamente ogni quadrato su una singola fila, notiamo che è il nostro cervello che ci spiega che sono quadrati perché analizziamo i quadrati al centro della scatola di

specchi; di conseguenza, pensiamo che ogni immagine riflessa sia un quadrato, ma in realtà sono dei trapezi. In particolare, i bordi opposti di una fila dovrebbero essere paralleli, ma in realtà convergono verso un punto di incontro che non c'è: il punto all'infinito delle due rette parallele.

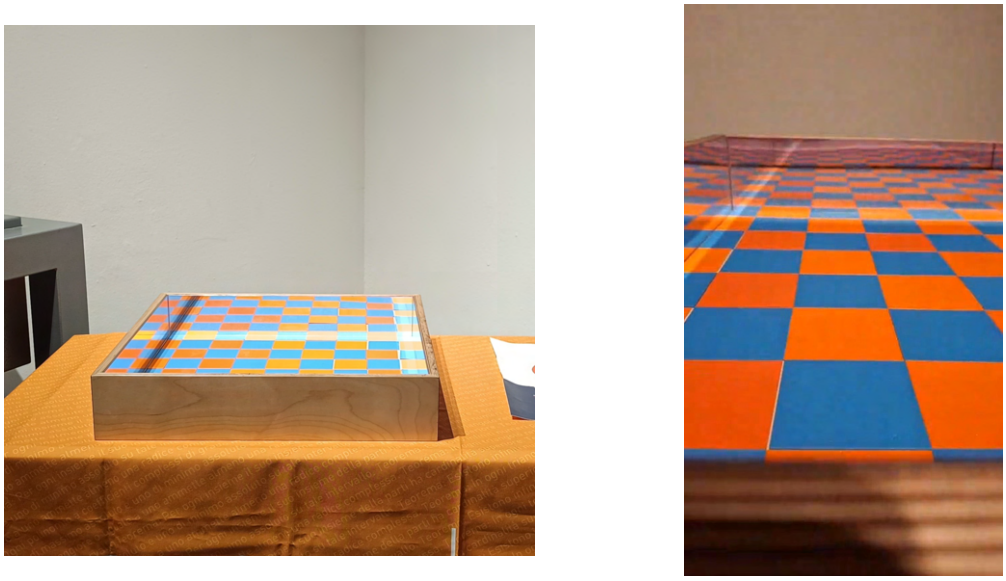

Figura 3.15: Scacchiera infinita e dettaglio

Draghetto. Questa installazione è stata pensata come intrattenimento per il pubblico in attesa dell'inizio della visita. Non importa dove ti sposti, lui continuerà a fissarti. Il drago di Gardner sfrutta l'illusione del volto concavo: il nostro cervello è così abituato a vedere volti convessi che "corregge" la realtà, facendoci credere che la testa del drago si muova per seguirci. Il Drago di Gardner nasce dall'ingegno di Jerry Andrus, straordinario mago e inventore americano che si dedicò allo studio delle illusioni ottiche. Le sue creazioni si basavano sulla capacità del cervello umano di interpretare e talvolta fraintendere lo spazio tridimensionale. Il modello divenne famoso grazie a Martin Gardner, celebre divulgatore della matematica, che lo presentò sulle pagine di Scientific American.



Figura 3.16: Draghetto

Scritta anamorfica "Infiniti Intrecci ". Anche questa installazione è stata pensata come intrattenimento per il pubblico nell'attesa di iniziare la visita. L'installazione è un esempio di anamorfosi tridimensionale: lo spettatore può cercare il punto di vista ottimale da cui osservare la scritta per non vederla distorta. Inoltre, anticipa uno dei temi che verranno presentati successivamente nelle mostra ovvero quello dell'anamorfosi.



Figura 3.17: Anamorfosi di *Infiniti Intrecci*

Bottiglia di Klein. In una bottiglia comune la superficie separa nettamente il

contenuto dall'ambiente esterno. Nella Bottiglia di Klein, invece, il "collo" ruota su se stesso e si ricongiunge alla base attraversando la superficie stessa. Questo crea un oggetto dove l'interno diventa l'esterno senza distinzione. È stata descritta per la prima volta dal matematico tedesco Felix Klein nel 1882. La Bottiglia di Klein è una superficie chiusa non orientabile: una figura geometrica che non possiede un "dentro" e un "fuori". Il modello esposto in mostra è una rappresentazione tridimensionale di un oggetto che in realtà esiste nello spazio a quattro dimensioni. Appoggiando un dito sulla superficie e seguendola, è possibile immaginare un percorso continuo in cui si passa dall'interno all'esterno e nuovamente dall'esterno all'interno, senza mai incontrare un confine che separi i due.



Figura 3.18: Bottiglia di Klein

Prima sala – Il punto che non c'è

Le nozze di Cana. I tentativi di rappresentare la realtà inducono i pittori del 1400 in Italia ad analizzare gli schemi astratti della visione umana: i risultati iniziali sono ottenuti da Leon Battista Alberti (Genova, 1404–1472) e da Piero della Francesca (Borgo Sansepolcro, 1412–1492). A questi seguono, il De Divina Proportione di Luca Pacioli (Borgo Sansepolcro 1445–1517), pubblicato nel 1509, e il Libro della Pittura, basato su annotazioni di Leonardo (Vinci, 1452–1519), preparato probabilmente intorno al 1540. Un primo esempio di ciò è rappresentato dal quadro di Duccio di Buoninsegna in oggetto. Buoninsegna mostra un'intui-

zione della prospettiva, non completamente realizzata. Guardando il dipinto, la sensazione è che la tavola sia inclinata, che il soffitto sia troppo stretto, forse anche che tutta l'immagine sia "schiacciata". Questo accade perché se proviamo a prolungare alcune coppie di linee parallele ci accorgiamo che esse non convergono in un punto solo ma su punti diversi appartenenti tutti alla stessa linea verticale, come rappresentato in figura.



Figura 3.19: Prime prove di prospettiva

La flagellazione di Cristo. Una sensazione completamente diversa si ha quando si guarda il dipinto Flagellazione di Cristo di Piero della Francesca. Si trova nel Palazzo Ducale di Urbino; la firma dell'autore, in latino, è annotata sul gradino sotto alla figura seduta "OPVS PETRI DE BVRGO S[AN]CTI SEPVLCRI" ovvero "Opera di Pietro da Borgo San Sepolcro". Si nota subito che le linee parallele, che vanno da sinistra a destra rispetto all'osservatore, sono disegnate parallele in entrambi i quadri. La differenza radicale è nelle linee che si allontanano dall'osservatore: sono in prospettiva. Osservando il pavimento e provando a descriverlo, si noterà che le mattonelle, che nella realtà sarebbero quadrate, sono rappresentate attraverso dei trapezi e convergono in un unico punto. Punto al quale convergono anche tutte le altre rette parallele a quelle del pavimento, come rappresentato in figura. Si può osservare che questo punto si trova in una parte

scura del dipinto, forse per nasconderlo, in quanto un punto che nella realtà non c'è. Sono state adibiti anche dei forex (3.21) che permettevano ai visitatori di mettersi alla prova e capire quale fosse la sequenza corretta di mattonelle.



Figura 3.20: Flagellazione di Cristo

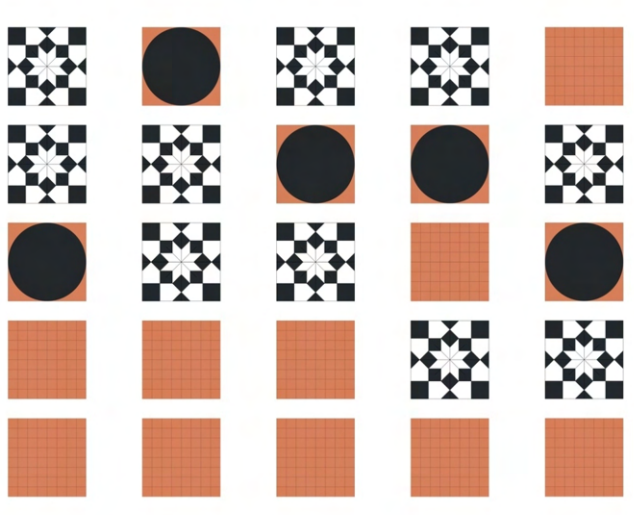

Figura 3.21: Piastrelle Flagellazione di Cristo

L'ultima cena. Una volta approntati gli schemi tecnici della tecnica prospettiva, gli artisti hanno iniziato a usare il punto "che non c'è" per introdurre più significati in un dipinto. Ad esempio, nel Cenacolo di Leonardo (1495 circa), affresco realizzato con pittura murale a tempera e olio su intonaco su commissione di Ludovico il Moro nel refettorio del convento adiacente al santuario di Santa Maria delle Grazie a Milano, le linee parallele che si allontanano dall'osservatore convergono verso il loro punto all'infinito che è sovrapposto al volto di Cristo.

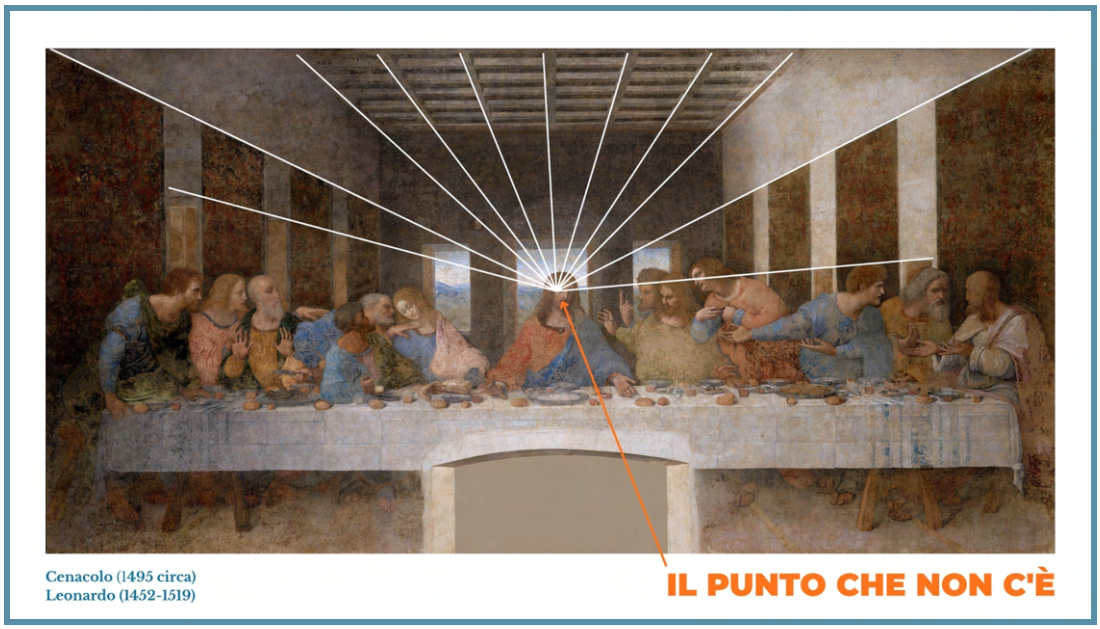

Figura 3.22: Ultima cena

Dürer e la prospettiva. Dürer era un artista tedesco che ha studiato a lungo il lavoro degli artisti rinascimentali costruendo degli oggetti specifici per realizzare disegni in prospettiva. Quello raffigurato in figura è un prospettografo. Da qui ben comprendiamo l'importanza del punto vista: possiamo notare Dürer stesso guardare da uno spioncino.

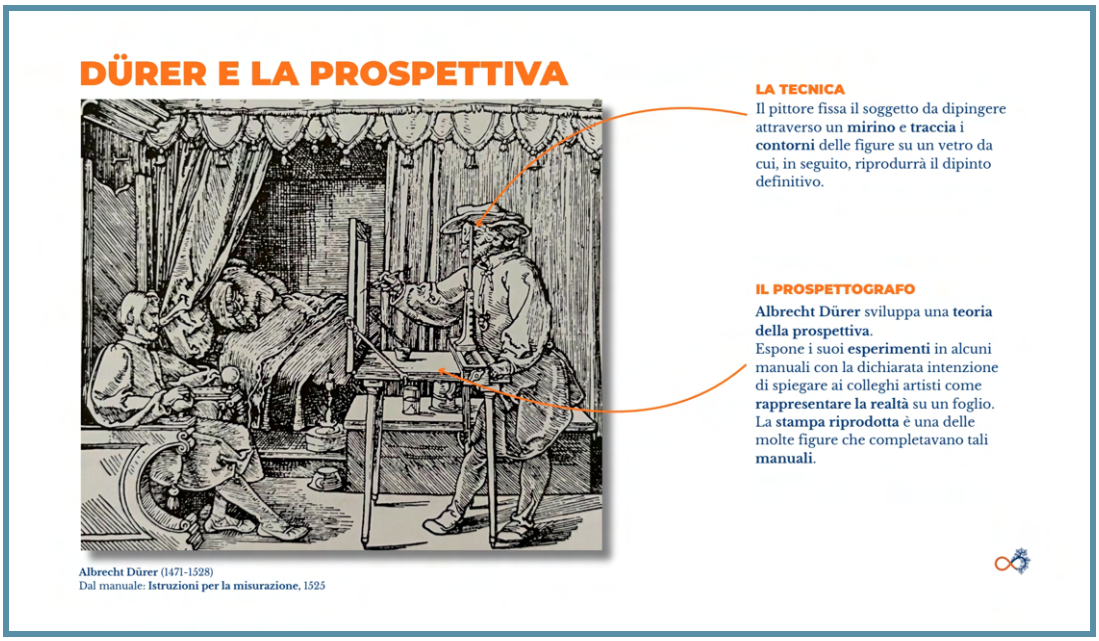

Figura 3.23: Dürer e la prospettiva

Gli ambasciatori. Gli Ambasciatori (1533), dipinto a olio su tavola di Hans Holbein il Giovane, è conservato alla National Gallery di Londra. Ritrae Jean de Dinteville, ambasciatore francese alla corte di Enrico VIII di Inghilterra, e Georges de Selve, vescovo di Lavaur. Anche qui l'effetto prospettico non convince, ma in modo nettamente diverso dal precedente. È un esempio di anamorfosi, come il titolo della mostra all'ingresso. Guardando il quadro da destra vicino alla parete, si vede molto più chiaramente il teschio rappresentato in modo distorto davanti ai due ambasciatori.

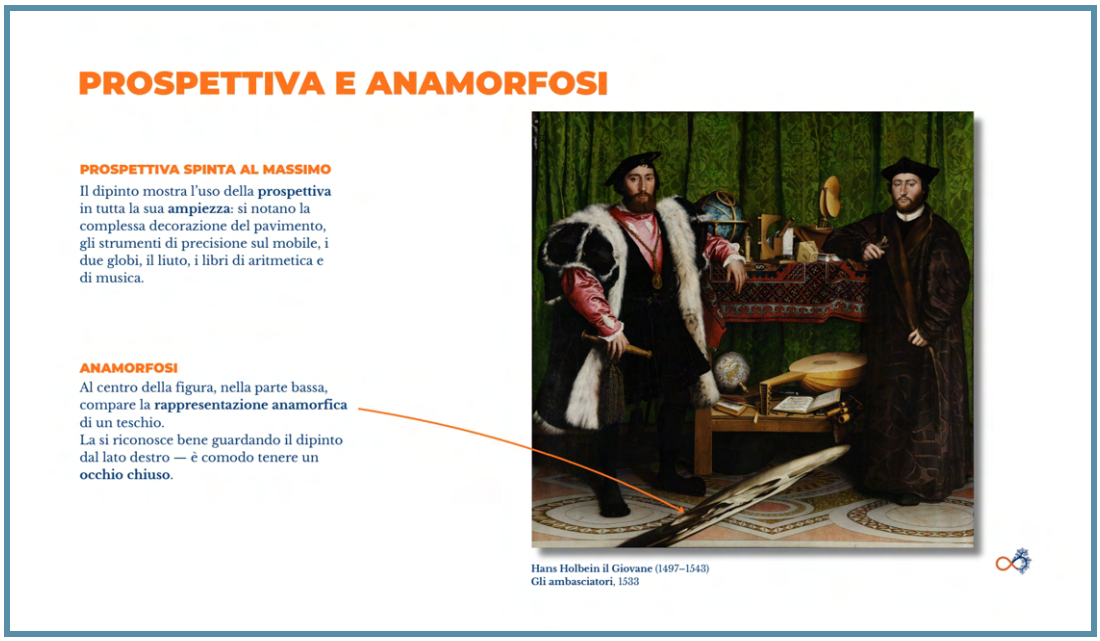

Figura 3.24: Prospettiva e anamorfosi

Linee parallele. Sono state installate a terra due strisce parallele che permettevano al pubblico di sperimentare in prima persona la convergenza delle linee parallele che si allontanano dall'osservatore.



Figura 3.25: Linee parallele

Corridoio

L'infinito di Leopardi. Questo è il secondo manoscritto autografo de L'infinito di Giacomo Leopardi, presentato nella mostra per creare un collegamento tra la matematica e la letteratura e per avvicinare al tema dell'infinito anche le persone meno amanti della matematica. È interessante osservare la correzione presente nel penultimo rigo del manoscritto: la versione definitiva a stampa usa "immensità" al posto di "infinità". È molto probabile che la correzione sia stata apportata dall'autore stesso, anche considerando che la poesia fu data alle stampe in più occasioni. È ragionevole pensare che, per Leopardi, il termine "immensità" abbia un connotato spazio-temporale, rispetto a quello lineare, iterato di "infinità". Inoltre, il corridoio è stato tappezzato di fogli che riportano la poesia.

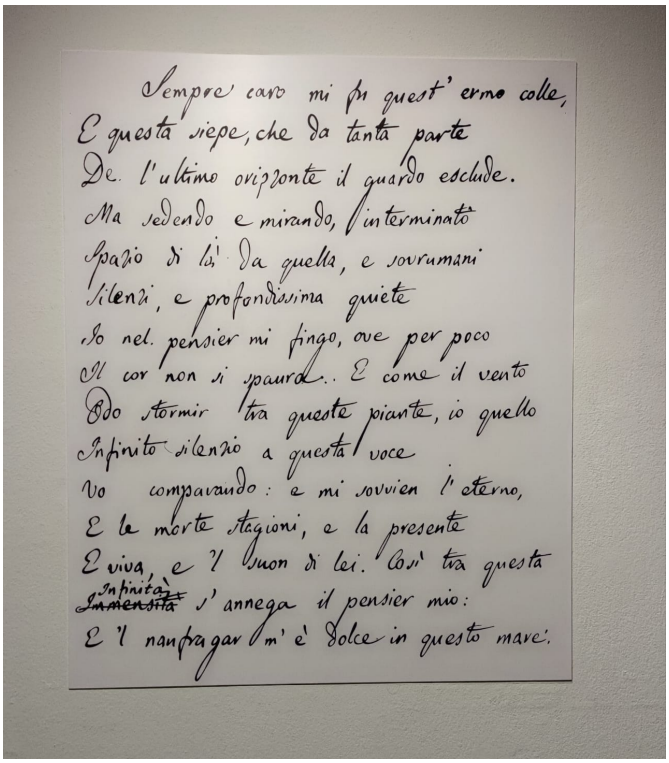

Figura 3.26: L'infinito di Leopardi

Seconda sala – L'infinitamente piccolo

Tre paradossi di Zenone. Per introdurre il tema dell'infinitamente piccolo, si parte dai paradossi di Zenone presentati nelle sezioni precedenti, in particolare dal paradosso di Achille e la tartaruga e dal paradosso della freccia. A questi si aggiunge un altro paradosso, non presentato in precedenza: il paradosso del granello di miglio. Il paradosso afferma: "Un granello di miglio non fa alcun suono quando cade a terra, ma svuotando a terra un sacco pieno di granelli di miglio si sente un rumore". I paradossi sono stati presentati attraverso un grande pannello, sul quale erano riportati sia i testi sia le relative rappresentazioni grafiche, come mostrato in Figura 3.27. Per rendere il paradosso del granello di miglio più concreto e coinvolgere il visitatore, sono stati inoltre utilizzati due barattoli contenenti dei granelli (3.28). Il paradosso fa intuire che sommando infiniti infinitesimi si può ottenere come risultato una quantità finita.



Figura 3.27: I paradossi di Zenone



Figura 3.28: Paradosso del granello di miglio

Brachistocrona. Si pone la nascita del calcolo delle variazioni con "il proble-

ma della brachistocrona", primo banco di prova per il calcolo infinitesimale. Il problema viene posto alla comunità matematica da Johann Bernoulli sulla rivista Acta Eruditorum nel giugno 1696. Questo il testo del problema: "Dati due punti A e B in un piano verticale, qual è la curva tracciata da un oggetto sottoposto unicamente alla gravità, che parte da A e raggiunge B nel minor tempo possibile?". Il problema della brachistocrona era stato affrontato da Galilei anni prima che Bernoulli lo proponesse, ma la soluzione che aveva proposto era parziale: Galilei dimostrava soltanto che il tempo per un oggetto che si muoveva su un arco di circonferenza era inferiore a quello lungo il percorso lineare da A a B. Diversi matematici si cimentarono nell'opera. Ad esempio, Jakob Bernoulli (fratello di Johann), Gottfried Leibniz, Guillaime de l'Hopital e Isaac Newton. Tutti giunsero alla conclusione che la risposta dovesse essere una particolare curva che era conosciuta con il nome di cicloide. Per via di questo risultato la curva assunse anche un altro nome: Brachistocrona (dal greco antico brachistos = il più breve, chronos = tempo). L'exhibit dedicato alla brachistocrona, mostrato in Figura 3.29, è parte dell'allestimento della mostra ed è stato messo a disposizione dal Consiglio Nazionale delle Ricerche.



Figura 3.29: Brachistocrona

Terza sala – Alcune applicazioni degli infinitesimi

In questa stanza sono presentati alcuni exhibit che ci aiutano a costruire un'idea degli infinitesimi.

Zootropio 3D. Pensiamo a un film al cinema. Le immagini che vediamo scorrere fluide sullo schermo sono in realtà la successione di molte immagini poco diverse tra loro e proiettate a una certa frequenza. Questo exhibit ripropone un'idea simile. Grazie all'utilizzo di una luce stroboscopica che illumina una piattaforma che ruota si riesce a distinguere una animazione.



Figura 3.30: Zootropio 3D

Approssimazione di π. Con questo exhibit si mostra come sia possibile stimare il valore di π grazie agli infinitesimi. Sul tavolo vi è un quarto di cerchio di raggio un metro così che la sua area sia $\frac{\pi r^2}{4}$. Per stimare il valore di π si può riempire il quarto di cerchio con dei quadrati sempre più piccoli di cui sappiamo calcolare l'area. Ci stanno un quadrato di 70 cm di lato, due di 24 cm, due di 18 cm, due di 12 cm, e due di 6 cm. L'area coperta dai nove quadrati è 0.706 metri quadrati. Il valore approssimato a quattro cifre di $\pi/4$ è 0.7854.



Figura 3.31: Approssimazione di π

Curva di Peano. Gestire coerentemente l'infinitamente piccolo non è facile. Giuseppe Peano (Spinetta di Cuneo, 1858–1932), che ha prodotto anche elementi tecnici fondamentali per la determinazione delle proprietà dei numeri naturali, descrive una curva, che va ora sotto il suo nome, che "copre" il quadrato. Questo mostra che l'idea intuitiva di dimensione spaziale va precisata (i segmenti e i perimetri hanno una dimensione; le figure piane, quali triangoli, quadrilateri, poligoni, cerchi, hanno due dimensioni; i solidi, come i cubi, i prismi, le sfere, hanno tre dimensioni). La curva si ottiene a partire da approssimazioni come mostrato in Figura 3.32.

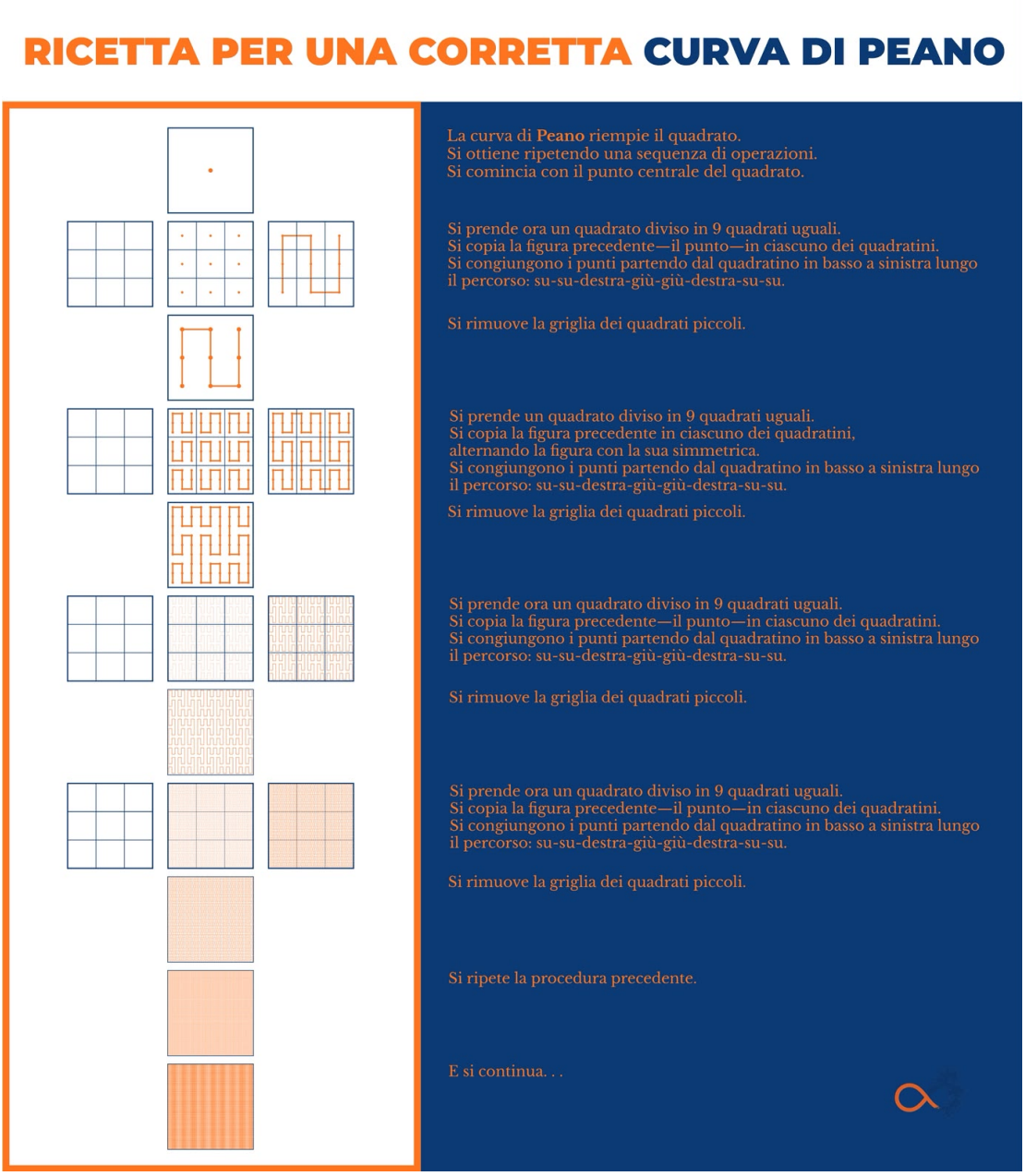

Figura 3.32: Curva di Peano

Quarta sala – L'infinitamente tanto

I successivi due exhibit erano rappresentati su un monitor.

Hotel Hilbert. L'Hotel Hilbert ha le stanze numerate dai numeri interi positivi:

c'è la stanza 1, la stanza 2, la stanza 3, ecc. I proprietari pensavano di non avere problemi di "tutto esaurito", ma un giorno si ritrovano proprio in questa condizione. Arriva un turista e vuole una stanza. Si spostano tutti i clienti di una stanza avanti e la stanza 1 è libera. Gli animatori proseguono guidando il pubblico per tentare di comprendere come un pullman infinito e infiniti pullman infiniti possano entrare nell'hotel, come descritto nella sezione precedente.

Motel Cantor. Dopo il successo dell'Hotel Hilbert, i proprietari hanno deciso di predisporre un motel di poche pretese. Ogni bungalow viene raggiunto con la propria auto e, per semplificare le spiegazioni di come muoversi nel motel, ogni bungalow viene indicato con la sequenza di svolte necessarie per raggiungerlo. Ad esempio, SDSS indica il bungalow che si raggiunge andando a sinistra al primo bivio, a destra al secondo bivio, a sinistra al terzo, e fermandosi al bungalow a sinistra. Anche questo motel realizza un "tutto esaurito". Ma arriva un'allerta tsunami: è necessario evacuare tutti i clienti dal Motel. Per fortuna, l'Hotel Hilbert è vuoto. Si decide di spostare tutti i clienti là. Ma Giorgio fa notare che non ci staranno tutti.



Figura 3.33: Hotel Hilbert e Motel Cantor

Tassellazioni. In geometria piana si dicono tassellazioni o pavimentazioni i modi di ricoprire il piano con una o più figure geometriche ripetute all'infinito senza

sovrapposizioni. Una tassellazione si dice periodica se alcuni dei suoi tasselli formano una figura che si ripete all'infinito seguendo uno schema preciso: la figura può essere traslata ma non ruotata o ribaltata. Possiamo ritrovare alcune tassellazioni anche in natura: possiamo pensare all'alveare delle api o a un pavimento con piastrelle che si ripetono sempre uguali. Di solito le figure che vengono usate per realizzare le tassellazioni sono poligoni, tuttavia l'artista olandese M.C. Escher fece propria la tecnica della tassellazione realizzando opere contenenti figure animalesche come pesci, lucertole, uccelli... Una tassellazione che non è periodica si dice aperiodica. I matematici si posero la seguente domanda: "Qual è il numero minimo di forme necessarie per piastrellare il piano in modo aperiodico?". Nel 1974 Roger Penrose dimostrò che bastano due piastrelle per ottenere una tassellazione aperiodica. La sfida di trovarne una sola, un "Ein Stein" (dal tedesco "una pietra"), è rimasta aperta fino al 2023. La soluzione è arrivata con una piastrella poligonale a 13 lati, soprannominata "Cappello" o "Maglietta". Questa forma permette di tassellare il piano in modo aperiodico, utilizzando sia la figura originale sia la sua immagine riflessa. Modificando i lati del Cappello i matematici hanno ottenuto una piastrella che non si può incastrare con la propria immagine riflessa. Il risultato è lo "Spettro" che pavimenta il piano soltanto in modo aperiodico senza utilizzare anche la riflessione della piastrella.

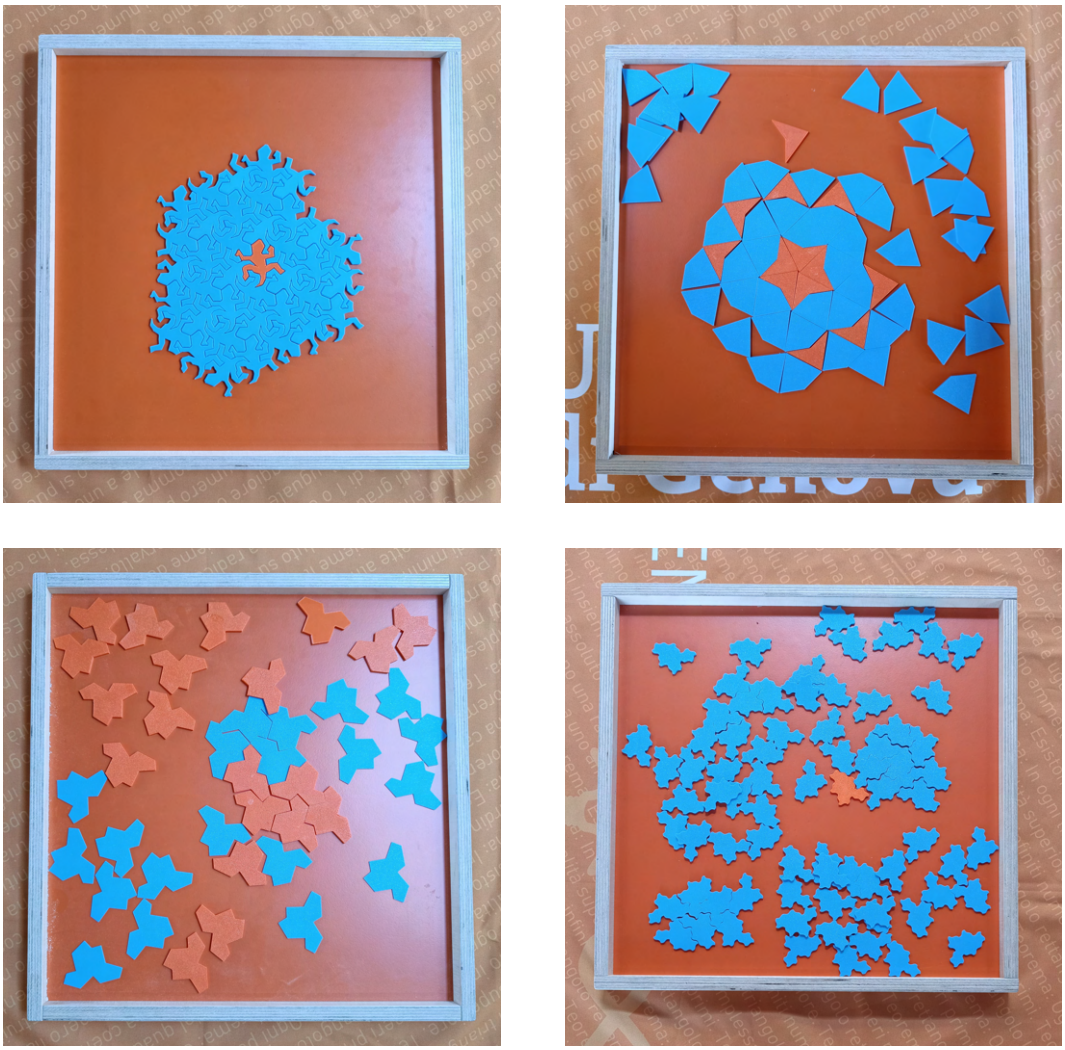

Figura 3.34: Tassellazioni: Lucertole, Penrose, Ein Stein e Spettro

3.3 Seconda edizione della mostra

La seconda edizione della mostra si è tenuta durante "Fosforo: la festa della scienza" di Senigallia nel maggio 2026. In occasione di questo evento è stato necessario apportare delle modifiche alla precedente edizione della mostra. Dall'esperienza precedente abbiamo compreso che qualora un visitatore avesse voluto compiere una visita non guidata sarebbe stato utile aggiungere delle didascalie di supporto per gli exhibit. Inoltre, per problemi logistici di trasportabilità della mostra è stato necessario riprogettare alcuni exhibit in versioni più piccole. Infine, so-

no state apportate delle modifiche al percorso espositivo per via dell'età media dei partecipanti di questo evento. Infatti, la Festa della scienza si caratterizza per un pubblico molto giovane principalmente nella fascia 6-14 anni e sono molto numerose le famiglie con bambini che partecipano all'evento. Anche in questa edizione erano presenti animatori che accompagnavano i visitatori lungo il percorso espositivo.

3.3.1 Progetto grafico

Il progetto grafico rimane sostanzialmente lo stesso della prima edizione, mantenendo la medesima impostazione visiva. In questa seconda edizione è stato aggiunto un nuovo elemento: le didascalie degli exhibit.

Le didascalie sono state concepite con una funzione prevalentemente predicativa, secondo la classificazione formulata da Jacobi, 2016, con l'obiettivo di accompagnare e integrare l'esperienza visiva e interattiva del visitatore. Seguendo le linee guida del medesimo autore, si è inteso offrire differenti livelli di fruizione: ciascuna didascalia unisce infatti una spiegazione del concetto matematico alla base dell'exhibit a una sezione dedicata alle sue applicazioni pratiche nella "vita reale" e nelle arti. Come illustrato in Figura 3.35, ad esempio, la sezione in blu descrive matematicamente la differenza tra una tassellazione periodica e una non periodica, evidenziando poi come tali strutture si ritrovino sia in natura sia nel design e nell'arte.



Figura 3.35: Didascalie tassellazioni

3.3.2 Percorso espositivo

La location, in questo caso, era un unico grande salone nella Biblioteca Antonelliana di Senigallia. Non avendo a disposizione delle sale per suddividere le aree tematiche della mostra, abbiamo optato per l'utilizzo di tavoli al fine di costituire delle isole tematiche.

- **Prima isola tematica – Ingresso e illusioni ottiche:** in quest'isola si seguiva la filosofia della stanza di ingresso della mostra originale: un tavolo di illusioni ottiche per agganciare i più piccoli e coinvolgerli a parlare del tema dell'infinito.
- **Seconda isola tematica – Il punto che non c'è:** dedicata alla prospettiva rinascimentale e alla geometria proiettiva.
- **Terza isola tematica – L'infinitamente piccolo:** dedicata agli infinitesimi.

- **Quarta isola tematica – Modi per ricoprire un piano:** riguardava l'infinitamente grande in una chiave diversa rispetto a quella della precedente edizione: è stata infatti eliminata la parte relativa all'Hotel Hilbert e al Motel Cantor e si è dato più spazio alle tassellazioni e ai modi per ricoprire un piano infinito.

Per i visitatori più curiosi è stato allestito un tavolino dedicato alla bottiglia di Klein nella stessa maniera della mostra originale.

La decisione di eliminare la trattazione dell'Hotel Hilbert e del Motel Cantor è stata dettata dalle caratteristiche del pubblico di Senigallia, mediamente più giovane rispetto a quello del "Festival della Scienza", e dal livello di astrazione richiesto da questi argomenti. Tenendo conto del principio alla base dei musei interattivi, secondo cui i contenuti proposti devono rappresentare delle sfide stimolanti, ma al tempo stesso proporzionate alle capacità del pubblico, si è scelto di rimuovere questa parte.

3.3.3 Installazioni

Presentiamo adesso le installazioni seguendo il percorso espositivo della mostra. Ci concentreremo in particolare sulle installazioni nuove e sulla modifiche rispetto all'edizione precedente. Per mettere in risalto i mini-exhibit e dare continuità visiva, le installazioni sono state presentate su vassoi che nell'edizione precedente erano stati utilizzati solo per le tassellazioni.

Prima isola tematica - Ingresso e illusioni ottiche

Cubo e dodecaedro a riflessioni infinite. Questi exhibit avevano la funzione di introdurre i visitatori al tema dell'infinito. Grazie a un gioco di riflessione con specchi e led ci permettono di immaginare una camera infinita creando un effetto davvero suggestivo.

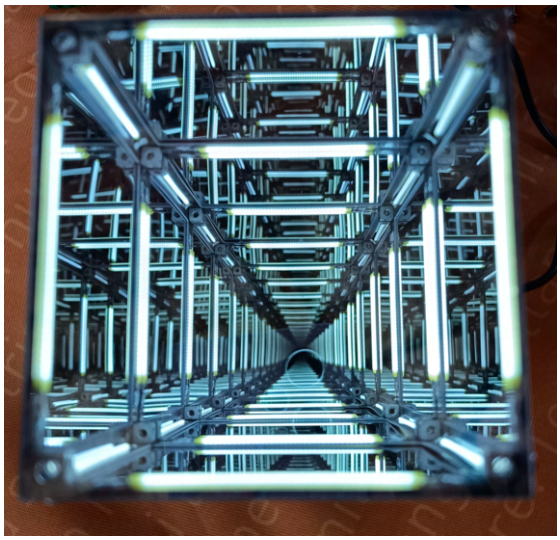

Figura 3.36: Cubo a riflessione infinita



Figura 3.37: Dodecaedro

Camera di Ames. Nella mostra era presente un exhibit dedicato alla Camera di Ames, un'illusione ottica ideata dall'oftalmologo statunitense Adelbert Ames a partire da un'idea del poliedrico scienziato tedesco Hermann von Helmholtz. L'exhibit, di dimensioni piuttosto ridotte, permetteva al visitatore di osservare l'interno della stanza attraverso uno spioncino. Posizionando due oggetti identici negli angoli opposti si assiste al seguente fenomeno: un oggetto appare più grande

dell'altro. Sebbene dallo spioncino la pianta della stanza appaia rettangolare in realtà è un trapezio. Guardando attraverso lo spioncino il cervello si trova davanti a un conflitto: deve scegliere se ritenere che la stanza sia deformata o ritenere che gli oggetti abbiano dimensioni diverse. In questo caso il cervello sceglie di mantenere intatta la forma della stanza e deforma le dimensioni degli oggetti.



Figura 3.38: Camera di Ames

Draghetto. In questa edizione della mostra il Draghetto è stato realizzato in una versione piccola con la stampa 3D come è possibile vedere in Figura 3.39.

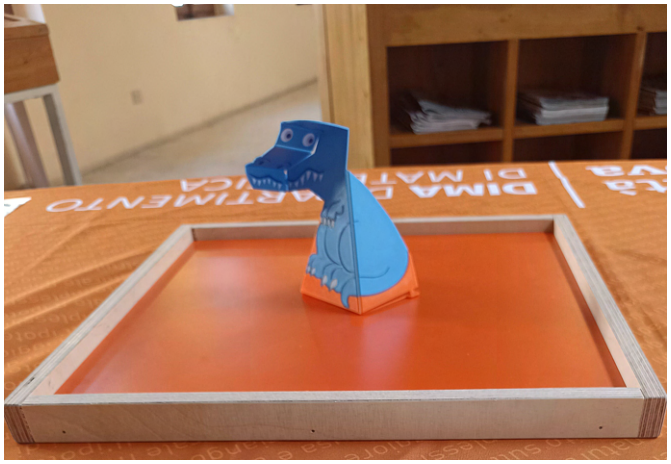

Figura 3.39: Draghetto

Anamorfosi cilindrica. Gli specchi piani riflettono le immagini senza alterarne le proporzioni, mantenendo invariato il rapporto tra altezza e larghezza. Uno specchio cilindrico, invece, produce una riflessione compressa delle immagini. Per questo motivo, un disegno realizzato con proporzioni normali appare deformato nello specchio curvo. Al contrario, un'immagine intenzionalmente allungata e alterata viene ricompressa dalla riflessione, correggendola. Questo processo di deformazione e ricostruzione dell'immagine prende il nome di anamorfosi (dal greco antico: ana = di nuovo, morfé = forma). Grazie all'utilizzo di una lattina ricoperta di materiale riflettente e alcune immagini di animali opportunamente deformate abbiamo ottenuto questo effetto.



Figura 3.40: Anamorfosi cilindrica

Scala di Penrose. La Scala di Penrose, anche chiamata Scala Infinita o Impossibile, è una celebre illusione ottica descritta nel 1958 dallo psichiatra inglese Lionel Penrose e dal figlio matematico Roger Penrose. Si tratta della rappresentazione bidimensionale di una scala che cambia direzione quattro volte tornando però al punto di partenza; dà così l'impressione di salire (e scendere) all'infinito. La scala di Penrose ispirò l'artista olandese M. C. Escher, che la utilizzò in particolare nella litografia Salita e discesa (1960), raffigurando monaci impegnati in un percorso apparentemente infinito. La Scala di Penrose non può esistere realmente nello spazio tridimensionale: l'effetto è possibile solo grazie a una costruzione prospettica che inganna la percezione visiva. La struttura esposta in questa mostra è una ricostruzione tridimensionale aperta della scala di Penrose. Da un preciso punto di osservazione, gli elementi si allineano ricreando l'illusione della scala infinita; osservandola da altre angolazioni, però, emerge la reale struttura spaziale.

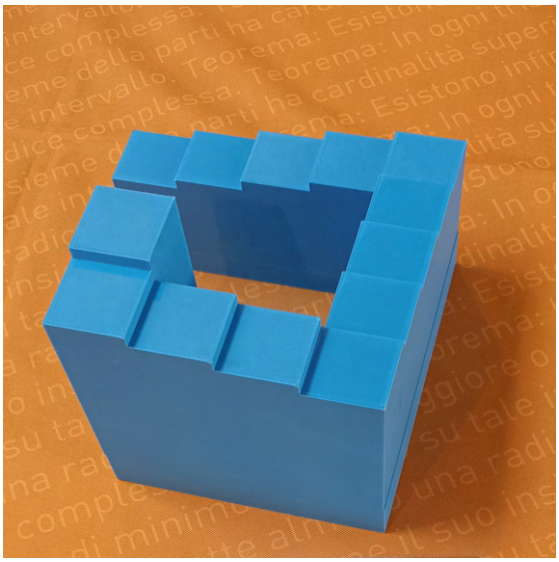

Figura 3.41: Scala di Penrose

Seconda isola tematica – Il punto che non c'è

Questa isola tematica era dedicata alla prospettiva rinascimentale e alla geometria proiettiva. I quadri presenti erano: "Le nozze di Cana" di Duccio di Buoninsegna, "La flagellazione di Cristo" di Piero della Francesca, "L'ultima cena" di Leonardo e "Gli ambasciatori" di Hans Holbein il Giovane. Le opere sono state presentate con le stesse funzioni della mostra precedente. La principale modifica ha riguardato il supporto utilizzato per la loro presentazione: le opere sono state riprodotte su tele, come mostrato in Figura 3.42.



Figura 3.42: Tele con quadri

Terza isola tematica – L'infinitamente piccolo

Per affrontare il concetto degli infinitesimi abbiamo deciso di selezionare solo alcuni degli exhibit dalla precedente edizione. In particolare abbiamo selezionato quelli che secondo noi potevano essere più adatti per il target di "Fosforo". Gli exhibit selezionati sono stati la brachistocrona, il paradosso del granello di miglio e il paradosso di Achille e la tartaruga.

I concetti presentati sono stati gli stessi della precedente edizione. Anche in questo caso la principale modifica è stata nei supporti utilizzati. La brachistocrona è stata realizzata in un versione più piccola con l'utilizzo della stampa 3D e il paradosso di Achille e la tartaruga era presentato mediante un cartellone plastificato. Invece, il paradosso del granello di miglio è stato presentato come nella precedente edizione.

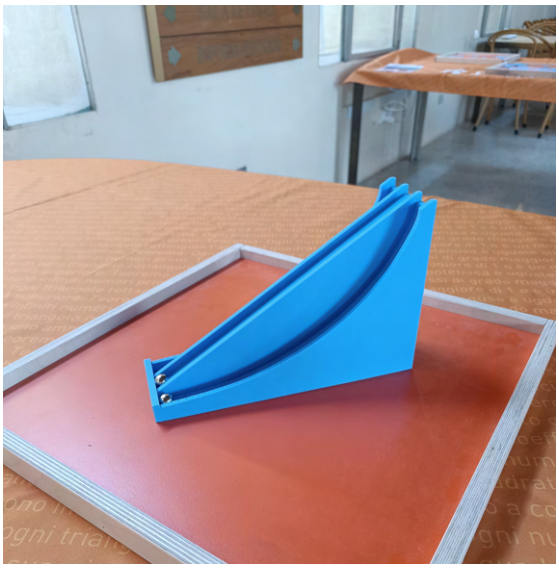

Figura 3.43: Brachistocrona

Quarta isola tematica – Modi per ricoprire un piano

Questa isola era interamente dedicata alle tassellazioni, utilizzando le stesse installazioni dell'edizione precedente.

Capitolo 4

Metodologia di ricerca

4.1 Costruzione dei questionari

La progettazione dello strumento di indagine ha dovuto tenere conto delle caratteristiche del contesto nel quale si è svolta la ricerca. La raccolta dei dati, infatti, è avvenuta all'interno di un contesto di comunicazione della matematica, coinvolgendo oltre settanta partecipanti in un arco temporale limitato. Pertanto si è ritenuto necessario individuare uno strumento di rilevazione che consentisse di raccogliere le informazioni necessarie senza interferire in modo significativo con l'esperienza dei partecipanti.

Alla luce di queste considerazioni, abbiamo scelto di utilizzare un questionario per raccogliere informazioni sulla concezioni di infinito matematico e sull'atteggiamento verso la matematica dei partecipanti. Dato il contesto è stato ritenuto importante evitare che il questionario assumesse le caratteristiche di una verifica scolastica. Un questionario eccessivamente lungo o caratterizzato prevalentemente da domande di tipo nozionistico avrebbe potuto generare ansia da prestazione o un atteggiamento di rifiuto da parte dei visitatori. Si è pertanto optato per un questionario breve, composto da domande a risposta chiusa con scala Likert a cinque livelli (da "Completamente in disaccordo" a "Completamente d'accordo"), da una domanda a risposta chiusa (non con scala Likert) e da una domanda a risposta aperta. La scelta di combinare queste diverse tipologie di domanda ha permesso di raccogliere informazioni attraverso modalità differenti, mantenendo

al contempo contenuti i tempi di compilazione. In particolare, le scale Likert hanno consentito di rilevare il grado di accordo dei partecipanti rispetto alle affermazioni proposte, la domanda a risposta aperta ha consentito ai partecipanti di rispondere senza essere vincolati a categorie individuate a priori e la domanda a risposta chiusa è stata utilizzata per rilevare eventuali esperienze pregresse dei partecipanti con le astrazioni matematiche del concetto di infinito.

Il questionario è stato somministrato in due momenti distinti, prima e dopo l'esperienza di visita alla mostra. Le domande con scala Likert sono state proposte in entrambe le fasi della somministrazione, mentre le restanti solamente dopo. La domanda a risposta aperta è stata proposta esclusivamente al termine della visita, poiché la sua formulazione presupponeva che i partecipanti avessero già avuto modo di entrare in contatto con le installazioni e di vivere l'esperienza proposta dalla mostra. Nel caso della domanda a risposta chiusa, la scelta è stata dettata dalla volontà di evitare che, prima dell'esperienza, la domanda potesse portare i partecipanti a ritenere che la visita richiedesse conoscenze pregresse relative ai temi affrontati nella mostra.

La scelta di una doppia somministrazione è stata finalizzata a poter confrontare le risposte fornite dai partecipanti prima e dopo l'esperienza, così da rilevare eventuali variazioni nelle posizioni espresse rispetto agli aspetti indagati. Al termine della visita, ai partecipanti è stato riconsegnato il questionario compilato all'inizio dell'esperienza, chiedendo loro di rispondere nuovamente alle domande. I partecipanti potevano quindi confermare le risposte precedentemente fornite oppure modificarle alla luce dell'esperienza appena vissuta.

Il confronto tra le due somministrazioni non è stato tuttavia inteso come una misura di un cambiamento stabile delle concezioni o degli atteggiamenti dei partecipanti. La somministrazione del questionario immediatamente prima e dopo una singola esperienza consente infatti di rilevare eventuali variazioni nelle risposte, ma non permette di stabilire se queste corrispondano a trasformazioni durature. Le eventuali modifiche delle risposte possono piuttosto essere considerate come segnali del fatto che alcuni aspetti incontrati durante la visita siano entrati in relazione con le posizioni precedentemente espresse, portando il partecipante a riconsiderare, almeno nel momento immediatamente successivo all'esperienza, la propria risposta rispetto a una determinata affermazione. In questa prospettiva, il confronto pre-post può fornire indicazioni utili circa il ruolo del contesto

informale come possibile ambiente nel quale avviare processi di riflessione e di riconsiderazione delle proprie posizioni nei confronti della matematica.

Il questionario completo è riportato in Appendice A. Le diverse sezioni del questionario vengono approfondite separatamente nelle due tesi, in relazione ai rispettivi oggetti di ricerca. Per quanto riguarda la sezione relativa all'atteggiamento nei confronti della matematica, si rimanda al capitolo dedicato alla metodologia di ricerca nella tesi di Sofia Palazzi. Nei paragrafi successivi approfondiamo invece la sezione del questionario relativa alla costruzione delle astrazioni matematiche del concetto di infinito, oggetto della presente tesi.

4.1.1 Costruzione delle domande relative alle astrazioni del concetto di infinito

Come presentato nel Capitolo 3, gli argomenti della mostra *Infiniti Intrecci* mettono in luce diverse prospettive matematiche dell'infinito: la geometria proiettiva, il calcolo infinitesimale e le tassellazioni infinite di un piano. Nel contesto espositivo, tali ambiti non vengono presentati formalmente nel registro tipico della matematica, bensì attraverso installazioni interattive, rappresentazioni visive e manipolative. In questa sezione si vedrà come è stato costruito il questionario che ha permesso di condurre l'indagine volta individuare quali *immagini concettuali* e quali misconcezioni sulle prospettive presentate di infinito matematico siano maggiormente diffuse tra il pubblico prima della visita e verificare se un contesto informale e interattivo come quello della mostra sia in grado di far emergere situazioni di *conflitto cognitivo* nei visitatori o quanto, al contrario, le loro convinzioni rimangano radicate.

Design della ricerca e vincoli del contesto informale

Per indagare in che modo l'esperienza della mostra influenzi le concezioni del pubblico sulle astrazioni del concetto di infinito, l'indagine ha previsto la somministrazione del questionario in due momenti distinti, prima e dopo la visita. Tale scelta risponde all'esigenza di rilevare le immagini concettuali di partenza del pubblico (Tall, Vinner, 1981) e confrontarle con i modelli presenti in letteratura. Inoltre, questa modalità ha consentito di rilevare eventuali spostamenti o

riconsiderazioni nelle risposte fornite dai visitatori al fine di valutare se l'ambiente della mostra sia stato in grado di generare situazioni di *conflitto cognitivo* e rilevare la presenza di misconcezioni radicate (Sezione 2.2.2)

I cinque item a scala Likert, somministrati sia nel Pre sia nel Post-test, sono i seguenti:

1. *"In matematica l'infinito è un'azione che può continuare senza fine."*
2. *"In matematica l'infinito è un modo per descrivere una quantità molto grande e indefinita."*
3. *"I matematici utilizzano l'infinito come una grandezza definita che segue delle regole proprie."*
4. *"Due rette parallele si incontrano sempre in un punto."*
5. *"È possibile rappresentare il concetto di infinito su un foglio."*

Nel solo questionario successivo alla visita è stata inserita una domanda finale volta a ricostruire i contatti pregressi del visitatore con l'argomento:

> *≪Quali contatti hai avuto prima della mostra con l'infinito in matematica? (scegli al massimo due risposte):≫*
>
> ☐ Nessuno
>
> ☐ Ne ho sentito parlare (documentario, film, libro...)
>
> ☐ Studiato a scuola
>
> ☐ Studiato in università

Il legame tra item e idee di infinito dei visitatori

Sulla base dei modelli teorici presenti in letteratura, sono stati elaborati item per verificare se i visitatori presentassero specifiche concezioni sull'infinito matematico. Nello specifico, si è voluto indagare la loro percezione della distinzione tra infinito potenziale e attuale come definiti nella Sezione 2.2.3.

Gli Item 1, 2, 3 e 5 indagano se il visitatore vede l'infinito come processo illimitato. Richiamano l'immagine intuitiva classica secondo cui l'infinito non è un oggetto concluso, ma un'operazione che continua indefinitamente nel tempo o nello spazio (Fischbein, 2001).

L'item 4 invece ha come obiettivo quello di misurare le resistenze dei visitatori, cioè quelle convinzioni talmente radicate che con un'attività di breve durata come quella della mostra non possono essere messe in discussione.

Qualora le risposte dei visitatori fossero contraddittorie, avremmo innescato in loro un principio di conflitto cognitivo.

Il legame tra item e installazioni

Poiché la progettazione della mostra ha preceduto la stesura del strumento di indagine, i singoli item del questionario sono stati strutturati in stretta relazione con le specifiche installazioni presenti nel percorso espositivo. Di seguito si illustra come i singoli nuclei tematici e installazioni della mostra possano creare conflitti cognitivi.

L'isola tematica introduttiva predispone il visitatore a mettere in discussione le proprie certezze legate alla percezione sensoriale. Le installazioni proposte mirano a stimolare una riflessione sul concetto di infinito attuale: attraverso la visione di rappresentazioni finite dell'infinito, s'intende suggerire come in matematica esso possa essere concepito come una quantità ben definita, tanto da poter essere formalizzata e rappresentata su un supporto fisico.

L'isola tematica focalizzata sulla geometria proiettiva confuta la regola euclidea sull'intersezione delle rette parallele. Anche qui l'obiettivo è superare la concezione di infinito processuale in favore di un infinito attuale e compiuto, nel quale il punto all'infinito non è un prolungamento illimitato, ma un'entità ben definita e rappresentabile sulla tela. L'isola degli infinitesimi esplora a sua volta il contrasto tra infinito potenziale e attuale, mostrando la tendenza spontanea della mente a concepire l'infinitamente piccolo come una sequenza senza fine, come la continua divisione a metà di un segmento. Questa prospettiva, tuttavia, rende incomprensibili i paradossi di Zenone. Per superarli occorre abbracciare la visione dell'infinito attuale: considerare l'infinita serie di sotto-intervalli di spazio e tempo non come

un elenco infinito di compiti da svolgere in successione, ma come un'entità unica e definita. Guardando alla somma complessiva di tali intervalli come a un tutt'uno, diventa evidente come Achille riesca a percorrere l'intero tragitto.

4.2 Tipi di dati

I dati analizzati nel presente progetto di ricerca sono stati raccolti attraverso questionari somministrati ai partecipanti in due momenti distinti: prima e dopo l'esperienza di visita alla mostra.

La raccolta dei dati è stata effettuata durante la seconda edizione della mostra, tenutasi a Senigallia, nelle Marche, dal 21 al 24 maggio 2026, nell'ambito di "Fosforo: la festa della scienza". La mostra è stata organizzata in sette turni di visita, distribuiti tra il venerdì, il sabato e la domenica pomeriggio. Per ciascun turno era previsto un tempo complessivo di un'ora, di cui circa 45 minuti erano dedicati alla visita della mostra. I 15 minuti rimanenti erano destinati alla compilazione dei questionari, suddivisi tra il momento precedente alla visita e quello al termine dell'esperienza.

Il campione analizzato è costituito complessivamente da 71 partecipanti, di età compresa tra i 7 e i 64 anni.

I dati raccolti comprendono le risposte fornite dai partecipanti ai cinque item, per i quali il grado di accordo poteva essere indicato selezionando con una crocetta una delle cinque opzioni della scala Likert, e le risposte alla domanda a scelta multipla.

4.3 Strategie di analisi dei dati

L'analisi dei risultati prende avvio dalla classificazione della familiarità dei visitatori con il tema dell'infinito. Le risposte sono state inizialmente rappresentate tramite un grafico a torta e, in seguito, integrate come dati aggiuntivi per l'analisi delle domande strutturate su scala Likert. Per queste ultime, sono state calcola-

te le frequenze percentuali relative a ciascun livello di accordo e che sono state rappresentate attraverso grafici a torta come mostrato in Figura 4.1.

Per quanto riguarda i dati raccolti prima della mostra, l'indagine si è concentrata sulla classificazione delle convinzioni e delle immagini concettuali dei visitatori, maturate attraverso le proprie esperienze scolastiche o di vita quotidiana.

I dati raccolti dopo la mostra sono stati anch'essi rappresentati tramite grafici a torta e per consentire un confronto con i rilevamenti precedenti, si è scelto di impiegare anche degli istogrammi. Un esempio è riportato nella Figura 4.2.

Infine, sono state utilizzate delle tabelle di contingenza per verificare l'esistenza di eventuali relazioni tra le risposte fornite. Tali tabelle hanno permesso di mettere a confronto item differenti volti a indagare la medesima immagine concettuale, consentendo di identificare le combinazioni di risposta più frequenti e di valutare se l'accordo su un determinato concetto possa influenzare la comprensione di un altro. A titolo esemplificativo, una di queste tabelle è riportata nella Tabella 4.1.

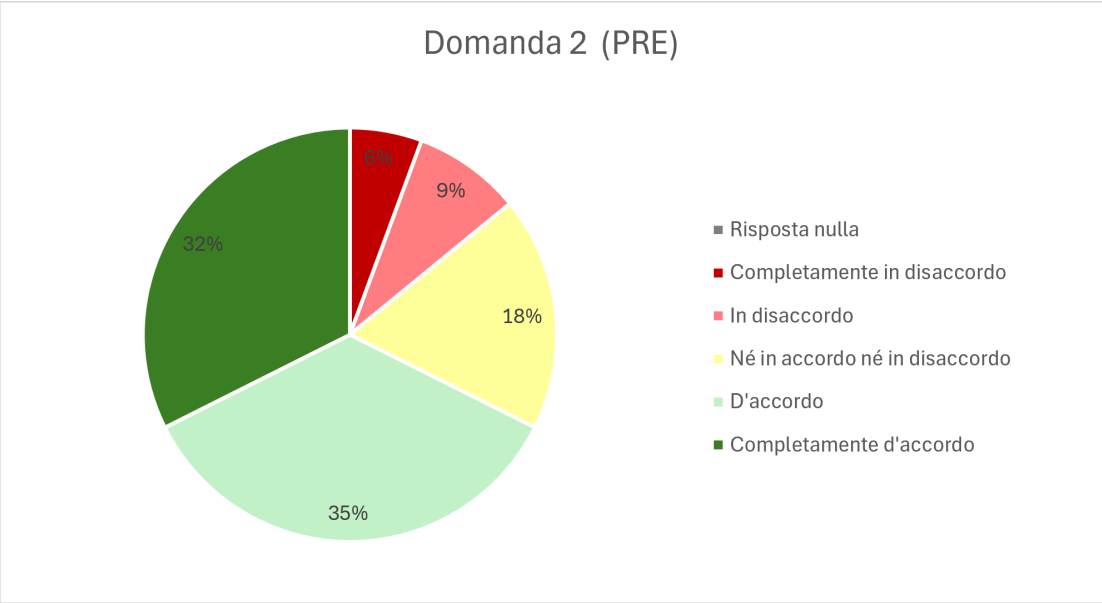

Figura 4.1: Grafico a torta per visualizzare la frequenza in percentuale delle risposte.

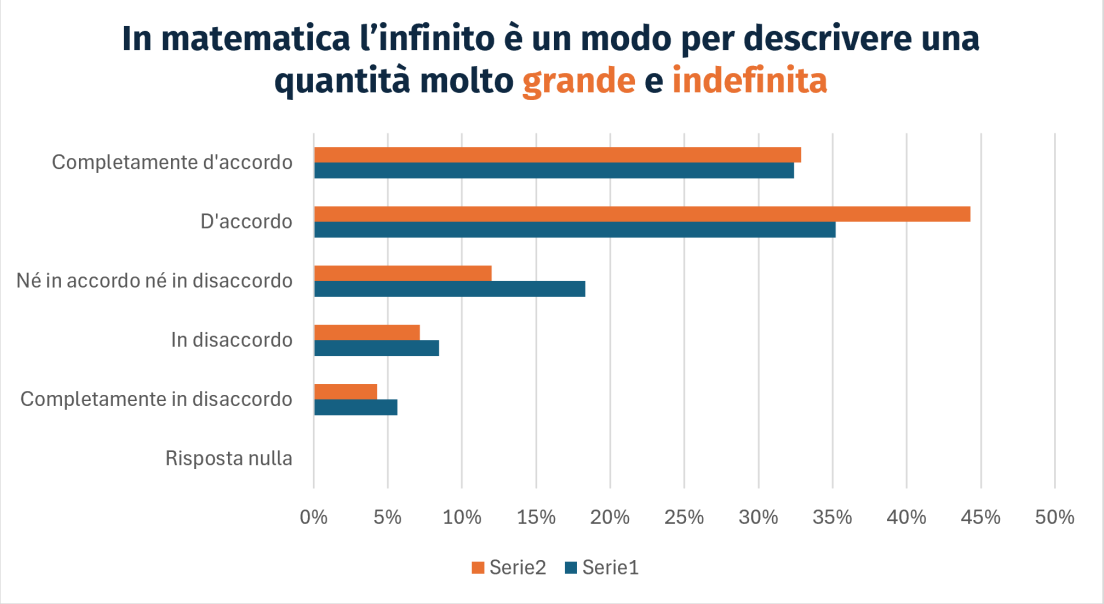

Figura 4.2: Istogramma per confrontare i dati raccolti prima e dopo la visita della mostra

Domanda 3 / Contatti con l'infinito	Completamente in disaccordo	In disaccordo	Né in accordo né in disaccordo	D'accordo	Completamente d'accordo	Totale
Nessuna	0%	1%	10%	5%	0%	16%
Ne ho sentito parlare	1%	6%	9%	7%	2%	25%
Studiato a scuola	3%	11%	10%	18%	6%	48%
Studiato in università	0%	0%	1%	3%	4%	8%
Risposta Nulla	0%	0%	0%	2%	1%	3%
Totale	4%	18%	30%	35%	13%	100%

Tabella 4.1: Esempio di tabella di contingenza

Capitolo 5

Analisi dei dati e risultati dell'analisi

5.1 Le esperienze pregresse dei visitatori con il concetto di infinito

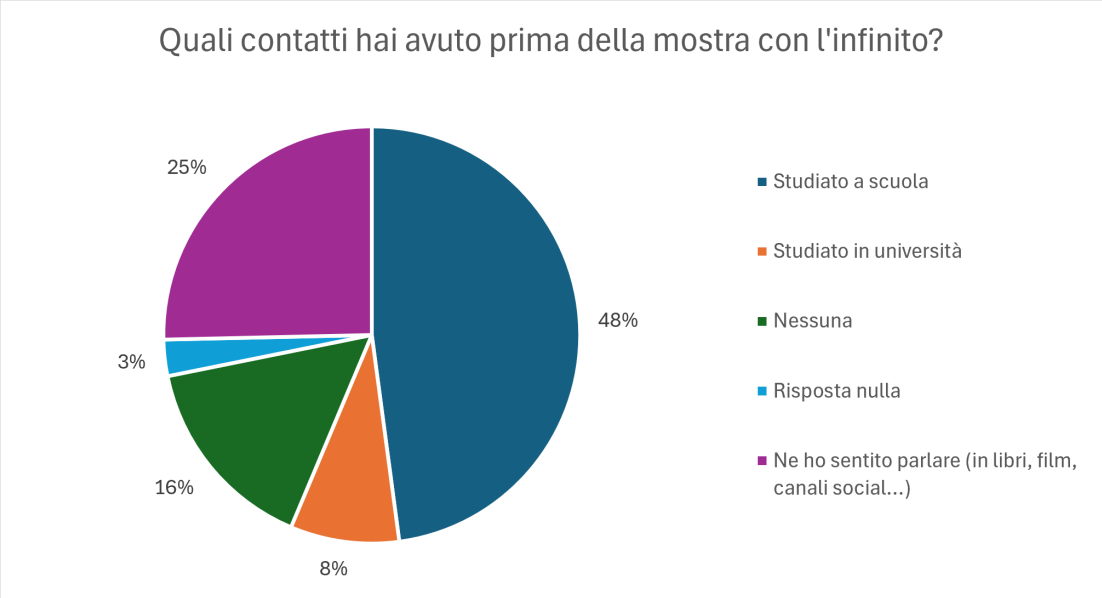

Figura 5.1: Le risposte dei visitatori alla domanda

Con questa domanda si intendeva valutare la familiarità dei visitatori della mostra con i concetti di infinito e conoscere i canali attraverso cui ne erano entrati in contatto prima della visita alla mostra. La maggior parte lo ha affrontato a scuola, ad esempio tramite l'algebra dei limiti (48%), o attraverso i media come libri, film e podcast (25%), mentre una quota minore lo ha approfondito all'università (8%). Solo il 16% dei visitatori non vi si era mai confrontato prima.

5.2 Analisi dei dati pre-visita

In matematica l'infinito è un'azione che può continuare senza fine.

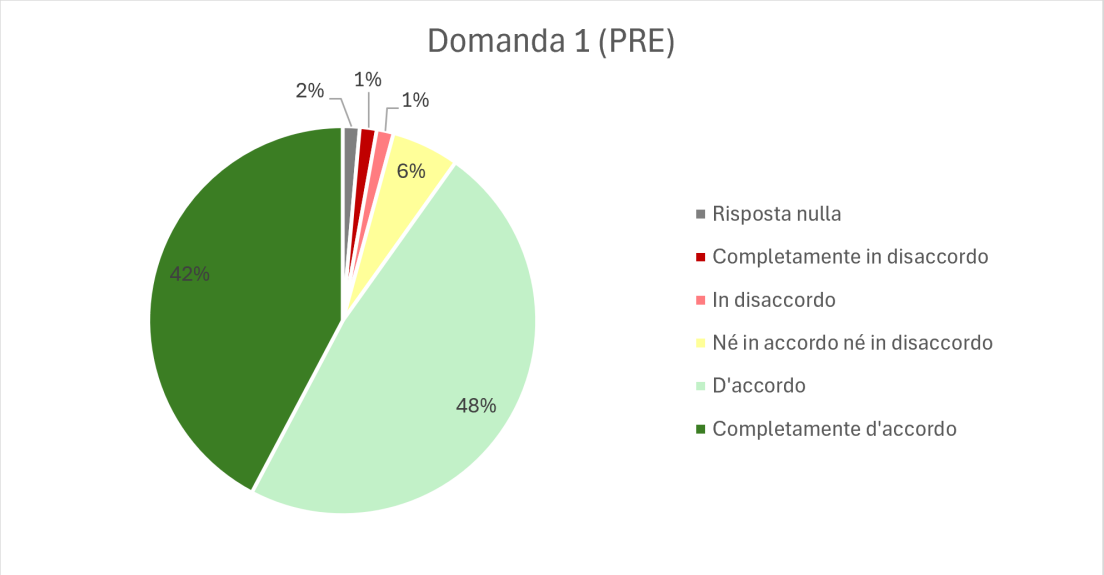

Figura 5.2: Domanda 1 (PRE)

Analizzando le risposte relative all'affermazione "In matematica l'infinito è un'azione che può continuare senza fine" si evince dal grafico che la maggioranza del campione si colloca sulle posizioni di accordo: il 48% si dichiara "D'accordo" e il 42% "Completamente d'accordo". Il 6% si dichiara "Né in accordo né in disaccordo", l'1% "In disaccordo" e un altro 1% "Completamente in disaccordo". A questi si aggiunge un 2% di "Risposta nulla".

Considerando congiuntamente le due risposte positive, emerge che il 90% degli intervistati concorda con l'affermazione proposta. Questo risultato suggerisce che, nel campione considerato, l'infinito tenda a essere concepito prevalentemente come un processo potenzialmente inesauribile, caratterizzato da un proseguimento senza termine, piuttosto che come un'entità compiuta, assimilabile a un numero o a un oggetto statico. In altre parole, per la maggior parte degli intervistati, l'idea di infinito sembra rimandare a qualcosa che non raggiunge mai una conclusione. Questa immagine delle astrazioni di infinità potrebbe avere radici nell'esperienza quotidiana e legata ai sensi. Le persone tendono a interiorizzare l'infinito come un "continuare senza fine" perché, fin dall'infanzia, ne fanno esperienza in forme intuitive: quando si impara a contare, si comprende che è sempre possibile aggiungere un'ulteriore unità senza arrivare mai alla fine. Allo stesso modo, la natura ci offre esempi di questo processo inesauribile, come quando cerchiamo di raggiungere l'orizzonte e questo si sposta sempre più avanti, oppure quando perdiamo lo sguardo nella vastità del cielo notturno osservando le stelle. Queste esperienze non costituiscono necessariamente una concezione matematica dell'infinito, ma possono contribuire a costruire un'immagine intuitiva più vicina all'infinito potenziale che a quello attuale.

In matematica l'infinito è un modo per descrivere una quantità molto grande e indefinita.

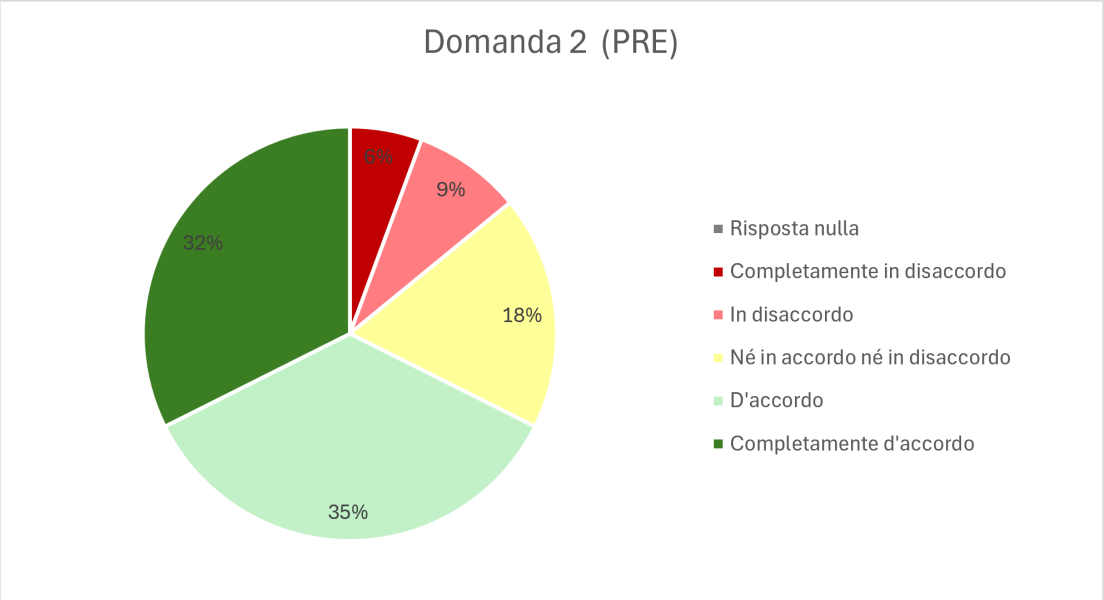

Figura 5.3: Domanda 2 (PRE)

Il grafico delle risposte dei visitatori relative all'affermazione "In matematica l'infinito è un modo per descrivere una quantità molto grande e indefinita" mostra che la maggioranza degli intervistati si ritrova in questa definizione: ben il 67% si posiziona sui poli positivi, con il 35% che si dichiara "D'accordo" e il 32% "Completamente d'accordo". Nell'uso quotidiano la parola "infinito" viene impiegata per descrivere qualcosa di immensamente grande, vago o impossibile da quantificare. Questa percentuale potrebbe pertanto riflettere un'immagine intuitiva dell'infinito, influenzata dall'intuito e dal linguaggio comune.

Tale rappresentazione può essere messa in relazione con il concetto di ostacolo epistemologico: identificare l'infinito con una quantità molto grande, infatti, rischia di confondere due nozioni matematicamente distinte, quella di una quantità finita, per quanto grande, e quella di infinito. Questa concezione intuitiva, pur risultando adeguata in determinati contesti della comunicazione quotidiana, può ostacolare la comprensione dei concetti matematici di infinito, che richiede di superare l'idea di una grandezza semplicemente elevata per confrontarsi con la nozione di illimitatezza e, nel caso dell'infinito attuale, con quella di una totalità infinita.

Il 15% dei partecipanti (composto dal 9% “In disaccordo” e dal 6% “Completamente in disaccordo”) rifiuta questa affermazione. Questa posizione potrebbe riflettere la consapevolezza della differenza tra una quantità finita, per quanto elevata, e infinito inteso come assenza di un limite.

Infine, un 18% si colloca nella posizione neutra (“Né in accordo né in disaccordo”). Questo potrebbe indicare che una parte del gruppo nutre delle perplessità o manca delle competenze necessarie per assumere una posizione definita sull’argomento.

I matematici utilizzano l’infinito come una grandezza definita che segue delle regole proprie.

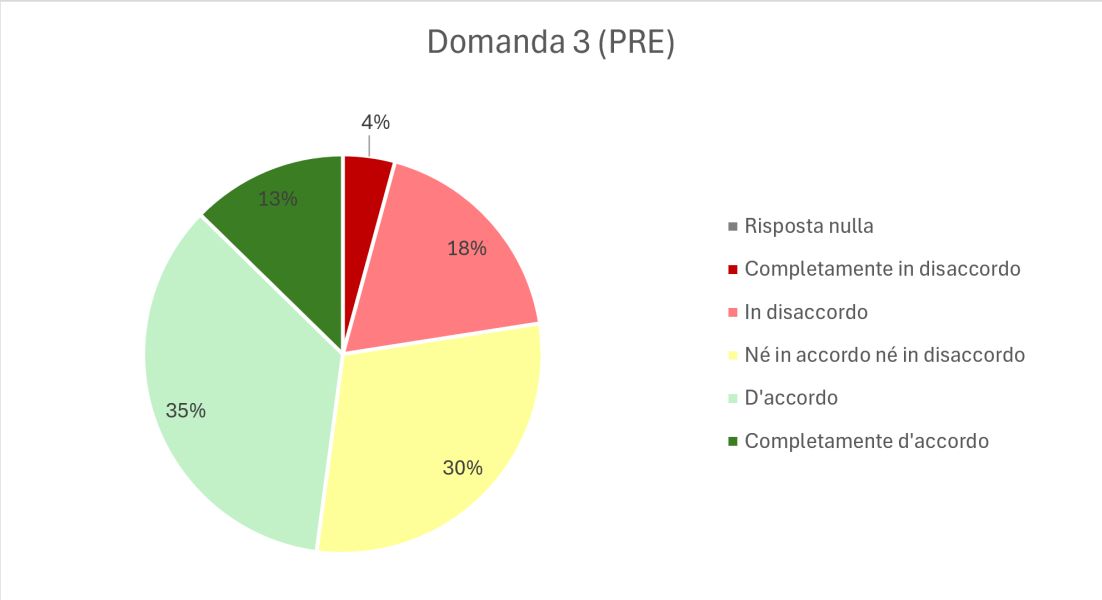

Figura 5.4: Domanda 3 (PRE)

Il grafico delle risposte dei visitatori relativo all’affermazione “I matematici utilizzano l’infinito come una grandezza definita che segue delle regole proprie”, mostra uno scenario più frammentato rispetto ai quesiti precedenti. Il 35% si dichiara “D’accordo” e il 13% “Completamente d’accordo”. Il 30% del campione sceglie l’opzione “Né in accordo né in disaccordo”. Infine il 22% si dichiara in disaccordo con l’affermazione con un 18% “In disaccordo” e un 4% “Completamente in disaccordo”.

Al fine di interpretare le risposte relative a questa domanda è stata realizzata una tabella di contingenza per valutare se esistesse una relazione tra le risposte a questa affermazione e il livello di conoscenza delle astrazioni del concetto di infinito.

Domanda 3 / Contatti con l'infinito	Completamente in disaccordo	In disaccordo	Né in accordo né in disaccordo	D'accordo	Completamente d'accordo	Totale
Nessuna	0%	1%	10%	5%	0%	16%
Ne ho sentito parlare	1%	6%	9%	7%	2%	25%
Studiato a scuola	3%	11%	10%	18%	6%	48%
Studiato in università	0%	0%	1%	3%	4%	8%
Risposta Nulla	0%	0%	0%	2%	1%	3%
Totale	4%	18%	30%	35%	13%	100%

Tabella 5.1: Tabella di contingenza delle risposte riguardanti l'item 3 (PRE) e la domanda relativa alle esperienze pregresse dei visitatori con il concetto di infinito

La consistente quota di risposte neutrali alla terza affermazione, pari al 30% del campione, potrebbe indicare una limitata familiarità con la dimensione operativa dei concetti di infinito in ambito matematico. In effetti, come si legge nella Tabella 5.1 il 19% del totale è costituito da coloro che non hanno mai studiato astrazioni del concetto di infinito a scuola e che si dichiarano neutrali alla terza affermazione. È possibile, infatti, che questi partecipanti siano abituati ad associare l'infinito prevalentemente a una dimensione filosofica o poetica, senza aver avuto occasione di riflettere sulle modalità con cui esso viene impiegato e formalizzato in matematica. In questo senso, gli exhibit potrebbero favorire una maggiore consapevolezza dell'infinito come oggetto matematico, introducendo i visitatori alla possibilità di esplorarlo attraverso operazioni e ragionamenti specifici.

Il gruppo dei partecipanti che esprimono un giudizio in accordo con l'affermazione rimane il più numeroso, rappresentando complessivamente il 48% del campione. Come si legge dai dati della Tabella 5.1 una parte consistente di questi partecipanti, pari al 31%, ha incontrato almeno una astrazione di infinito durante il percorso scolastico. Potrebbe essere che questi visitatori siano abbiano studiato il concetto di limite di funzione e delle relative operazioni algebriche quindi probabilmente i visitatori associano l'idea delle "regole proprie" ai procedimenti di calcolo in cui compare il simbolo di infinito come, appunto, nei limiti. Tale esperienza potrebbe aver contribuito a consolidare la consapevolezza che la matematica dispone di strumenti teorici e operativi per descrivere e affrontare situazioni che coinvolgono l'infinito.

Due rette parallele si incontrano sempre in un punto.

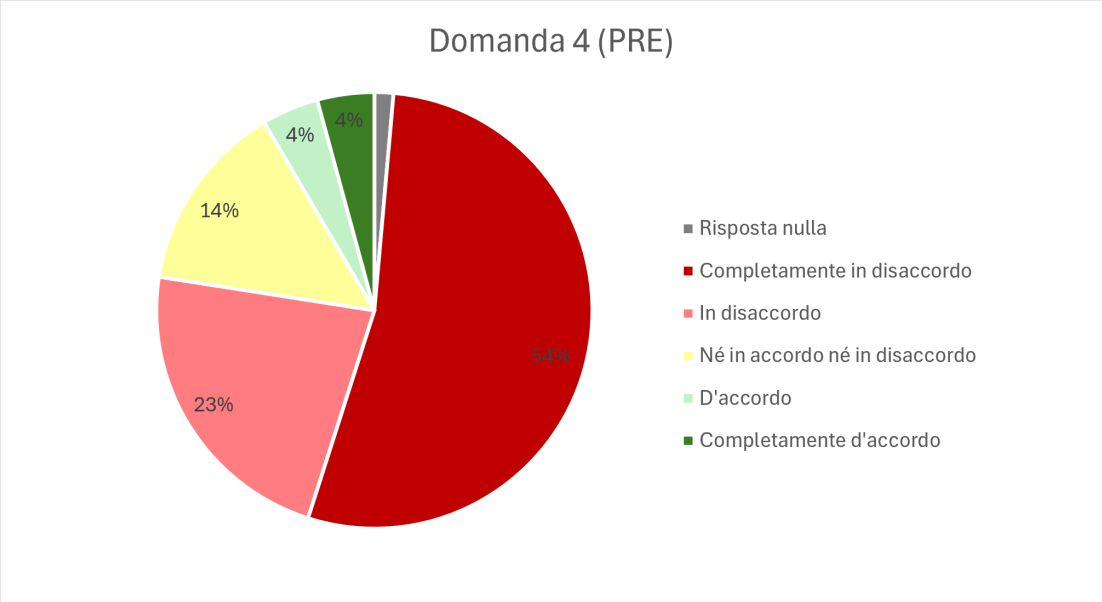

Figura 5.5: Domanda 4 (PRE)

Analizzando le risposte all'Item 4, relativo all'affermazione "Due rette parallele si incontrano sempre in un punto", il grafico 5.5 mostra che la grande maggioranza del campione si posiziona sui poli negativi della scala: il 54% si dichiara "Completamente in disaccordo" e un 23% "In disaccordo". Le posizioni positive sono l'8% (divisa equamente tra un 4% "D'accordo" e un 4% "Completamente d'accordo"),

mentre il 14% sceglie l'opzione neutra "Né in accordo né in disaccordo". L'1% dei visitatori ha dato una "Risposta nulla".

Questa distribuzione delle risposte potrebbe essere ricondotta, almeno in parte, al percorso scolastico dei partecipanti. Nel corso degli studi, infatti, gli studenti entrano in contatto con la geometria euclidea e apprendono che, nel piano euclideo, due rette parallele non si incontrano mai.

Sul versante opposto si rileva una minoranza dell'8% di individui in accordo. Simmetricamente al discorso precedente possiamo ipotizzare che queste persone abbiano visto la geometria proiettiva. Inoltre, un 14% si dichiara neutrale. Sebbene una parte di queste risposte affermative possa derivare da un'errata interpretazione del quesito o da lacune concettuali, una piccola parte del campione, come risulta dai dati relativi alla prima domanda di questo Capitolo, dichiara di aver affrontato le astrazioni del concetto di infinito matematico in ambito universitario.

I dati, dunque, dimostrano che la visione euclidea tradizionale è rigidamente radicata.

È possibile rappresentare il concetto di infinito su un foglio

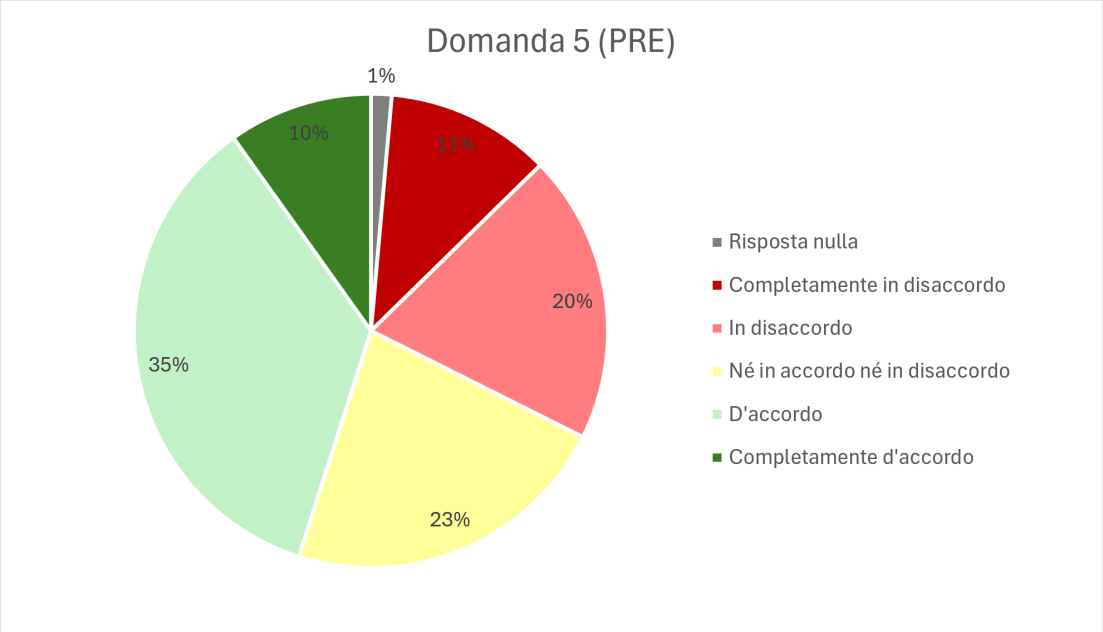

Figura 5.6: Domanda 5 (PRE)

Analizzando le risposte relative all'affermazione "È possibile rappresentare il concetto di infinito su un foglio", si nota che la maggioranza si posiziona in accordo con il 45% totale di consensi (di cui il 35% si dichiara "D'accordo" e il 10% "Completamente d'accordo"). Il 31% si dichiara di parere opposto (composto da un 20% "In disaccordo" e un 11% "Completamente in disaccordo"), mentre il 23% sceglie la posizione neutra "Né in accordo né in disaccordo".

Questa divisione di opinioni nasce probabilmente dall'ambiguità del verbo rappresentare. Chi si dichiara d'accordo probabilmente intende la rappresentazione in senso grafico. In quest'ottica, sul foglio è immediato tracciare un segno che evochi l'idea di infinito, come il simbolo convenzionale (∞), una retta con le frecce alle estremità ma anche un cielo stellato.

Chi si dichiara in disaccordo guarda invece al supporto fisico. Poiché il foglio di carta è un oggetto con dimensioni e confini ben definiti, non potrà mai contenere o mostrare l'infinito nella sua reale totalità, ossia un'estensione priva di limiti.

È proprio la presenza di queste due chiavi di lettura a spiegare l'elevata concentrazione di risposte nella fascia neutra (23%).

5.3 Analisi dei dati a confronto

In matematica l'infinito è un'azione che può continuare senza fine.

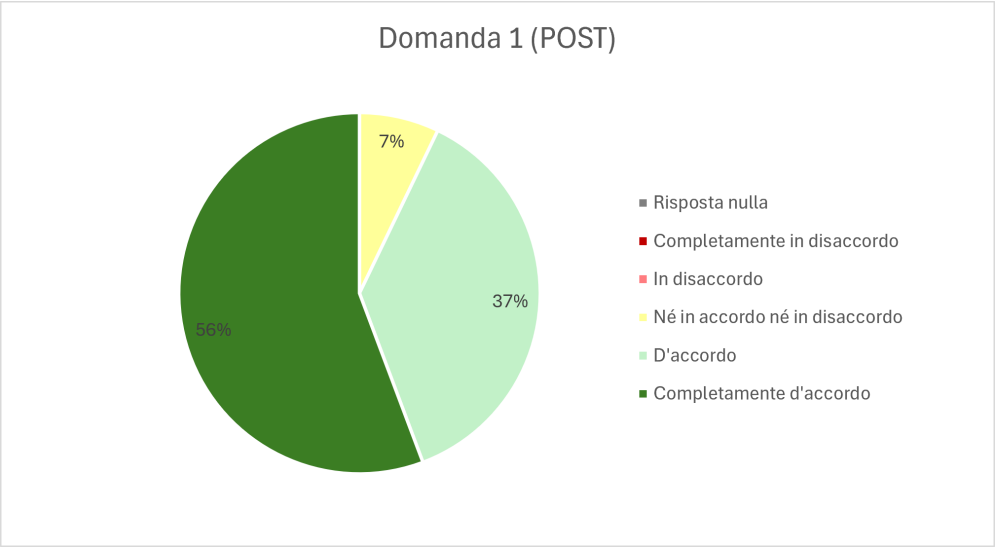

Figura 5.7: Risposte dei visitatori dopo la visita all'item 1

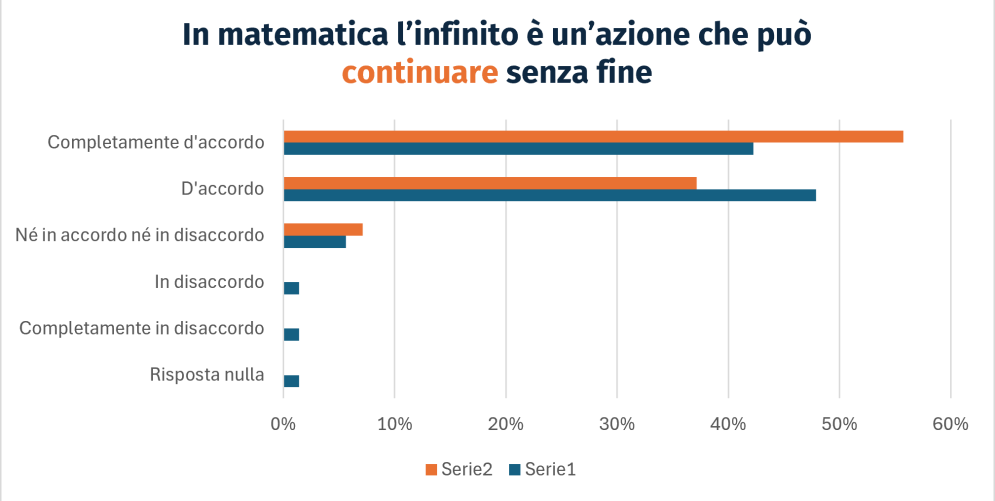

Figura 5.8: Confronto dei dati raccolti prima e dopo la visita relativi all'item 1

Dopo la visita alla mostra le risposte si sono mantenute stabili con il 56% dei partecipanti che si dichiara "Completamente d'accordo", il 37% "D'accordo", il 7%

“Né in accordo né in disaccordo”. Mentre scompaiono le risposte in “Disaccordo” e “Completamente in disaccordo”.

Rispetto ai dati raccolti prima della visita si verifica uno spostamento verso l’accordo. I visitatori che si dicono “Completamente d’accordo” aumentano di 14 punti percentuali, passando dal 42% al 56%. Inoltre, la voce “D’accordo” scende dal 48% al 37% e le voci in disaccordo si annullano. Nel complesso, questa variazione suggerisce che, al termine della visita, una parte dei partecipanti abbia rafforzato la propria convinzione. La fascia di neutralità si mantiene pressoché stabile passando dal 6% al 7%.

Il consolidamento della concezione dell’immagine concettuale di infinito come processo riscontrato nei visitatori può essere interpretato considerando alcune installazioni della mostra. In primo luogo, l’installazione dedicata al paradosso di Achille la cui narrazione evidenzia il processo di suddivisione dello spazio e del tempo in maniera iterata. A questo aspetto si affiancano le tassellazioni, che hanno contribuito a rafforzare una visione spaziale dell’infinito: la regolarità del motivo induce a completare la trama oltre i bordi del pannello espositivo seguendo un pattern di ripetizione.

In definitiva, l’esperienza immersiva ha accentuato le percezioni sensoriali poiché le installazioni hanno fornito un supporto fisico alla natura iterativa dell’infinito.

In matematica l'infinito è un modo per descrivere una quantità molto grande e indefinita.

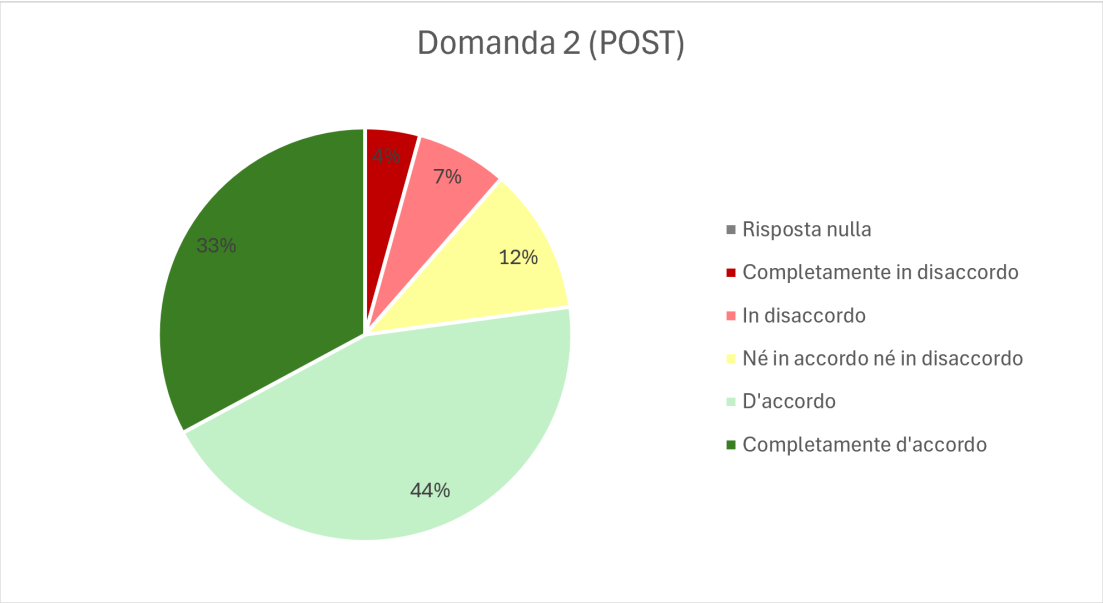

Figura 5.9: Risposte dei visitatori dopo la visita all'item 2

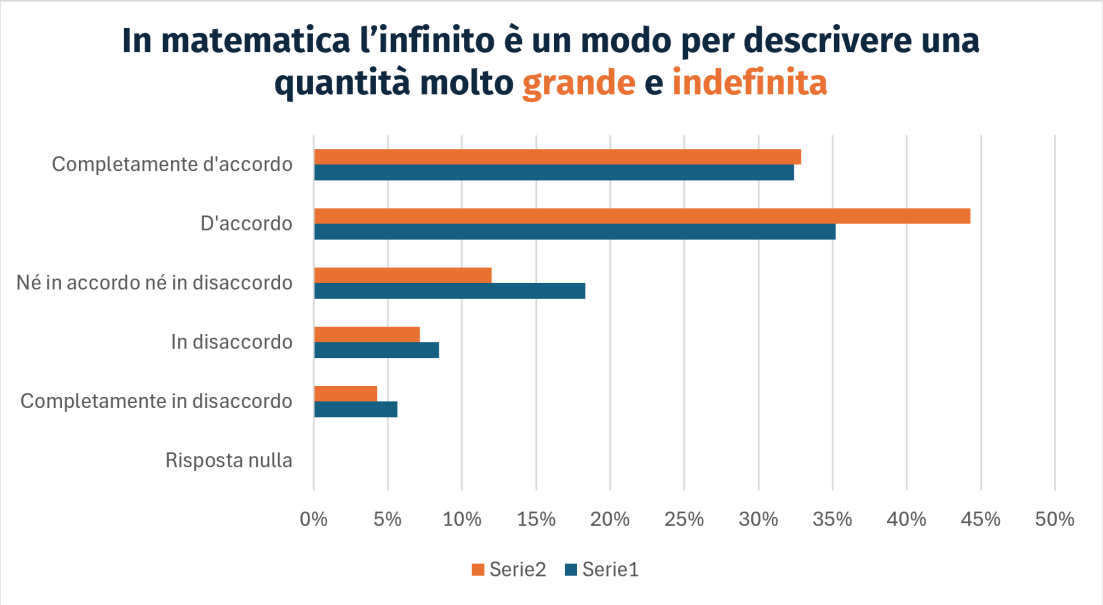

Figura 5.10: Confronto dei dati raccolti prima e dopo la visita relativi all'item 2

Il totale delle risposte favorevoli all'affermazione cresce di 10 punti percentuali, passando dal 67% al 77%. Questa crescita è dovuta alla voce "D'accordo", che sale dal 35% al 44%. La quota di chi si dichiara "Completamente d'accordo" subisce un leggero incremento dal 32% al 33%. La fascia "Né in accordo né in disaccordo" cala dal 18% al 12%. Le posizioni in disaccordo diminuiscono dal 15% all'11%, con "In disaccordo" che scende dal 9% al 7% e "Completamente in disaccordo" dal 6% al 4%.

L'esito mostra un ulteriore rafforzamento dell'immagine concettuale riscontrata prima della visita. Questo probabilmente è accaduto poiché il percorso espositivo della seconda edizione della mostra non prevedeva un'installazione che generasse conflitto cognitivo in tal senso, come l'Hotel di Hilbert. Infatti, non avendo a disposizione l'installazione attraverso la quale mostrare perché l'infinito non equivale a una quantità molto grande ma corrisponde a una quantità precisa, l'esperienza quotidiana è rimasta l'unico strumento interpretativo a disposizione del pubblico per rispondere a questa domanda

I matematici utilizzano l'infinito come una grandezza definita che segue delle regole proprie.

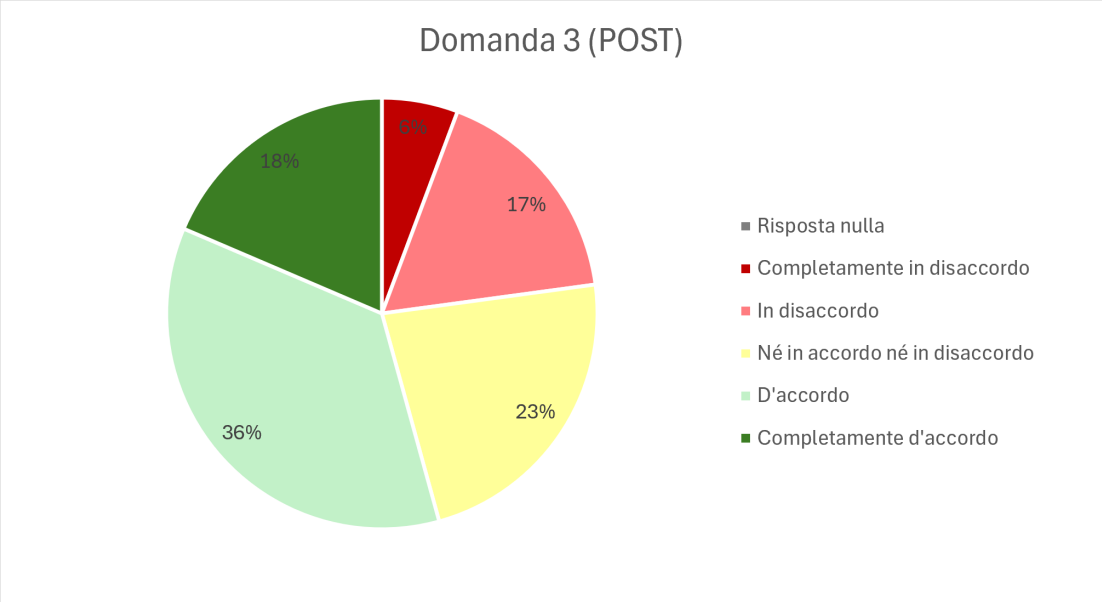

Figura 5.11: Risposte dei visitatori all'item 3 dopo la visita

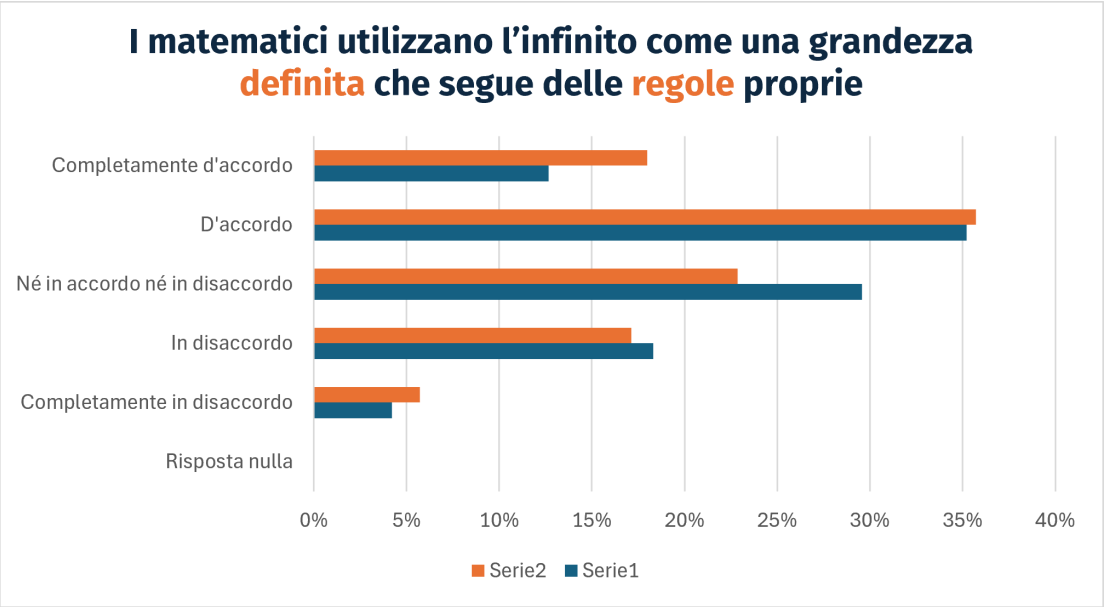

Figura 5.12: Confronto dei dati relativi all'item 3 raccolti prima e dopo la visita

Dai dati in merito all'affermazione secondo cui i matematici utilizzano l'infinito come una grandezza definita e che segue regole proprie emerge che la maggioranza dei partecipanti condivide la dichiarazione: il 36% si dichiara infatti "D'accordo" e un ulteriore 18% "Completamente d'accordo". Quasi un quarto del campione (23%) si colloca nella posizione "Né in accordo né in disaccordo". La quota di chi non condivide la frase raggiunge complessivamente il 23%, ripartita tra un 17% "In disaccordo" e un 6% "Completamente in disaccordo".

Dall'analisi comparativa tra la rilevazione effettuata prima e dopo la visita emerge un incremento delle posizioni di accordo che salgono dal 48% al 54% con coloro che si dichiarano "Completamente d'accordo" che passano dal 13% al 18%, a cui si affianca chi si dichiara "D'accordo" che passa dal 35% al 36%. È significativa la riduzione di coloro che si dichiarano "Né in accordo né in disaccordo". Questa posizione subisce infatti un calo di 7 punti percentuali, scendendo dal 30% al 23%. Si osserva infine una stabilità sostanziale delle posizioni contrarie, il cui totale passa dal 22% al 23%, ripartito tra il 17% di risposte "In disaccordo" e il 6% di "Completamente in disaccordo".

Per quanto riguarda l'affermazione secondo cui i matematici utilizzano l'infinito come una grandezza definita e soggetta a regole proprie, la Tabella 5.2 consente di

approfondire il confronto tra le risposte raccolte prima e dopo la visita, mettendo in evidenza la stabilità delle posizioni individuali e i cambiamenti intervenuti nei livelli di accordo.

I dati riportati nella Tabella 5.2 suggeriscono che alcune installazioni abbiano contribuito a rafforzare l'adesione all'affermazione proposta. In particolare, sei partecipanti (7%) che inizialmente si dichiaravano in disaccordo hanno successivamente espresso una posizione favorevole. Si osserva inoltre un consolidamento delle convinzioni positive già presenti e il passaggio di quattro partecipanti (6%), inizialmente indecisi, verso una posizione di accordo. Nel complesso, questi cambiamenti suggeriscono come le installazioni abbiano contribuito a rendere più concreta e comprensibile l'idea dell'infinito in ambito matematico, mostrando come esso non sia soltanto un'astrazione associata a una dimensione vaga o filosofica, ma possa essere affrontato attraverso strumenti, operazioni e regole formali.

La visita alla mostra sembra, quindi, aver avuto un effetto prevalentemente consolidante e chiarificatore: ha ridotto l'area dell'indecisione (i neutri calano dal 30% al 23%) e ha polarizzato positivamente i partecipanti verso una maggiore consapevolezza dell'accordo, aumentando i consensi forti sulla visione che i matematici hanno dell'infinito.

POST / **PRE**	Nulla	Complet. in disaccordo	In disaccordo	Neutro	D'accordo	Complet. d'accordo	Totale
Nulla	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Complet. in disaccordo	0%	2%	2%	0%	0%	0%	4%
In disaccordo	0%	0%	8%	3%	5%	2%	18%
Neutro	0%	3%	4%	17%	6%	0%	30%
D'accordo	0%	0%	3%	2%	23%	7%	35%
Complet. d'accordo	0%	1%	0%	1%	2%	9%	13%
Totale	0%	6%	17%	23%	36%	18%	100%

Tabella 5.2: Tabella di contingenza con i dati raccolti prima e dopo la visita relativi all'item 3

Poiché le prime tre affermazioni sono volte a rilevare l'immagine concettuale dell'infinito come processo, risulta particolarmente opportuno incrociarne le risposte ottenute dai questionari mediante le Tabelle 5.3 e 5.4. L'esame di queste distribuzioni congiunte consente di osservare nel dettaglio come si siano posizionati i visitatori e di fare luce sulle apparenti contraddizioni emerse tra le prime due affermazioni e la terza.

Domanda 3 POST / Domanda 1 POST	Nulla	Complet. in disaccordo	In disaccordo	Neutro	D'accordo	Complet. d'accordo	Totale
Nulla	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Complet. in disaccordo	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
In disaccordo	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Neutro	0%	0%	1%	3%	2%	1%	7%
D'accordo	0%	0%	8%	10%	17%	2%	37%
Complet. d'accordo	0%	6%	8%	10%	17%	15%	56%
Totale	0%	6%	17%	23%	36%	18%	100%

Tabella 5.3: Tabella di contingenza delle risposte dei visitatori riguardanti gli item 1 e 3 relativi ai dati raccolti dopo la mostra.

Come emerge dalla tabella, le due combinazioni di risposta più frequenti, entrambe pari al 17% del campione, corrispondono a posizioni di accordo: la prima comprende i partecipanti che hanno risposto "D'accordo" a entrambe le affermazioni, mentre la seconda riguarda coloro che hanno espresso "Completamente d'accordo" alla prima affermazione e "D'accordo" alla terza. I partecipanti che si dichiarano "Completamente d'accordo" in entrambe le domande rappresentano invece il 15% del campione. Alla luce dei risultati relativi alla prima affermazione, dai quali emerge una concezione delle infinità prevalentemente potenziale, ci si sarebbe potuti aspettare una maggiore tendenza al disaccordo rispetto alla terza affermazione. I risultati sembrano quindi evidenziare una possibile contraddizione tra le risposte alle due affermazioni.

Domanda 3 POST / Domanda 2 POST	Nulla	Complet. in disaccordo	In disaccordo	Neutro	D'accordo	Complet. d'accordo	Totale
Nulla	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Complet. in disaccordo	0%	0%	0%	1%	0%	3%	4%
In disaccordo	0%	0%	2%	2%	3%	0%	7%
Neutro	0%	0%	4%	4%	4%	0%	12%
D'accordo	0%	3%	7%	11%	19%	4%	44%
Complet. d'accordo	0%	3%	4%	5%	10%	11%	33%
Totale	0%	6%	17%	23%	36%	18%	100%

Tabella 5.4: Tabella di contingenza delle risposte dei visitatori riguardanti le affermazioni 2 e 3 relative ai dati raccolti dopo la mostra.

Passando all'analisi dei dati della seconda affermazione incrociati con quelli sulla terza possiamo vedere in Tabella 5.4 che il gruppo più numeroso, composto dal 19% del campione, è rappresentato da coloro che hanno risposto "D'accordo" ad entrambe le domande. Segue chi ha risposto "Completamente d'accordo" ad entrambe, con l'11%.

Anche chi afferma di essere "Completamente d'accordo" con la seconda affermazione (33%), si distribuisce nelle risposte relative alla terza affermazione in modo frammentato su tutta la scala, dimostrando che l'accordo su una affermazione non garantisce l'accordo sull'altra.

Queste apparenti contraddizioni potrebbero essere generate dal fatto che i visitatori, infatti, pur rifiutando a livello personale l'idea di infinito attuale, ne ammettono e legittimano l'utilizzo da parte dei matematici.

Due rette parallele si incontrano sempre in un punto.

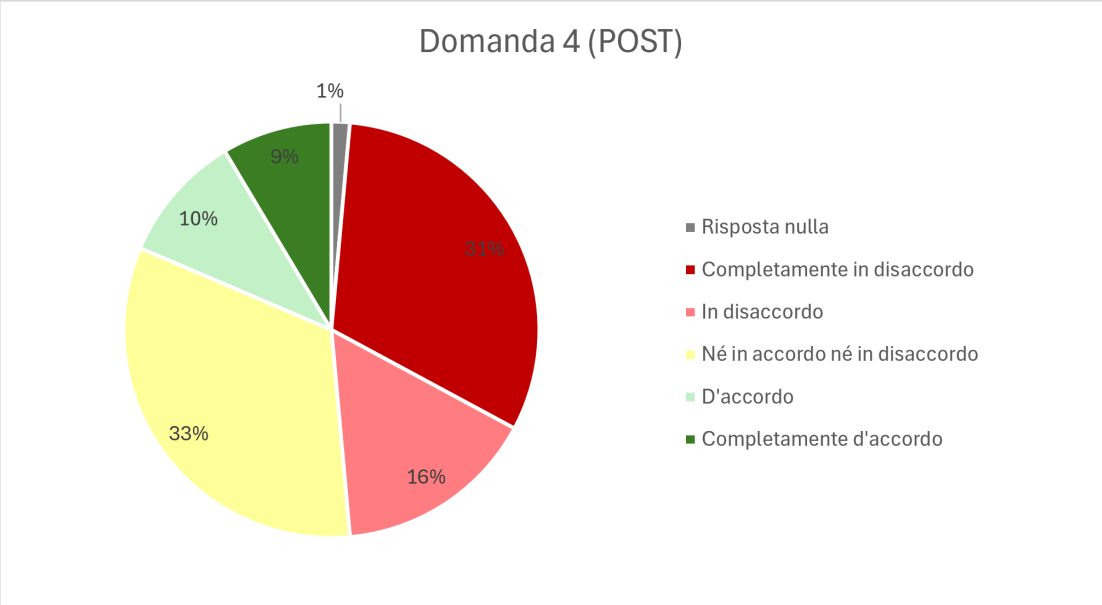

Figura 5.13: Risposte dei visitatori dopo la visita all'item 4

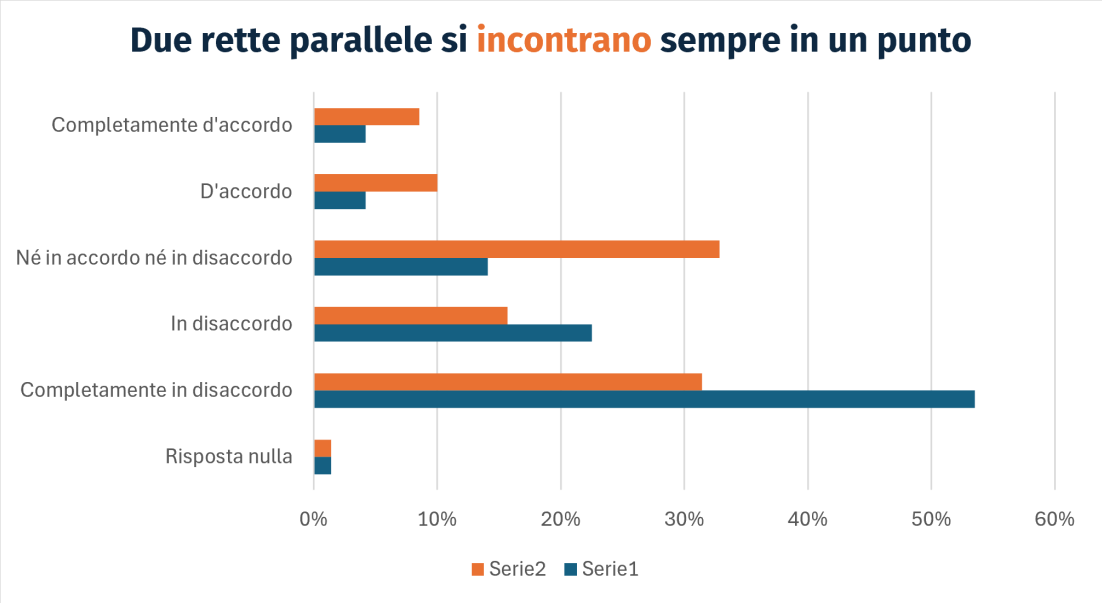

Figura 5.14: Confronto dei dati raccolti prima e dopo la visita relativi all'item 4

Dalla rilevazione effettuata dopo la mostra emerge che il 33% della popolazione analizzata dichiara una posizione neutrale. Inoltre, il 31% dei soggetti si dichiara

“Completamente in disaccordo”, a cui si aggiunge un ulteriore 16% che esprime una posizione “In disaccordo”. Il 10% si dichiara “D’accordo” e il 9% “Completamente d’accordo”. Infine, la quota di risposte non valide o non pervenute si attesta intorno all’1%.

L’analisi comparativa tra i dati raccolti prima e dopo la visita alla mostra evidenzia un significativo riposizionamento delle opinioni dei partecipanti. Il totale delle risposte contrarie, infatti, subisce una variazioni di ben 30 punti percentuali, passando dal 77% della rilevazione iniziale al 47% di quella finale. In particolare, la quota di chi si dichiara “Completamente in disaccordo” scende dal 54% al 31%, e chi si dichiara “In disaccordo” passa dal 23% al 16%.

Si osserva che la percentuale di visitatori che si dichiara “Né in accordo né in disaccordo” sale dal 14% al 33%. Infine, il totale dei pareri in accordo con l’affermazione cresce dall’8% al 19%, aumentando di 11 punti percentuali. In particolare, salgono sia le posizioni “D’accordo” (dal 4% al 10%) sia di quelle “Completamente d’accordo” (dal 4% al 9%).

Nel complesso, lo spostamento dei valori suggerisce un forte impatto dell’esperienza, capace di mitigare le immagini concettuali iniziali a favore di una maggiore prudenza valutativa o di un’apertura verso nuovi paradigmi.

Questo item rappresentava il test principale per misurare le resistenze cognitive del pubblico, tradizionalmente legate all’immagine concettuale euclidea. Sicuramente i visitatori restano ancorati all’idea che due rette parallele non si possano mai incontrare ma dall’elevata percentuale delle persone che si dichiarano “Né in accordo né in disaccordo”, si potrebbe dedurre che nel percorso espositivo vi sia stato l’innesto per generare un conflitto cognitivo.

Inoltre, circa un visitatore su cinque (19%) ha riconosciuto che cambiando il sistema geometrico di riferimento, due rette parallele si incontrano effettivamente in un punto ben definito.

È possibile rappresentare il concetto di infinito su un foglio

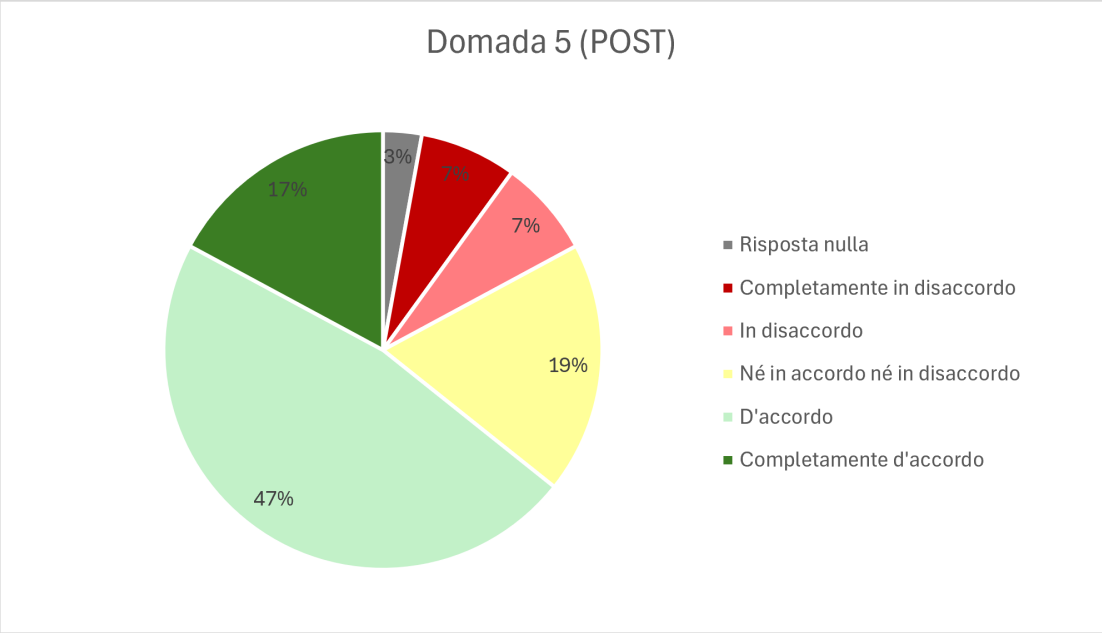

Figura 5.15: Risposte dei visitatori dopo la visita all'item 1

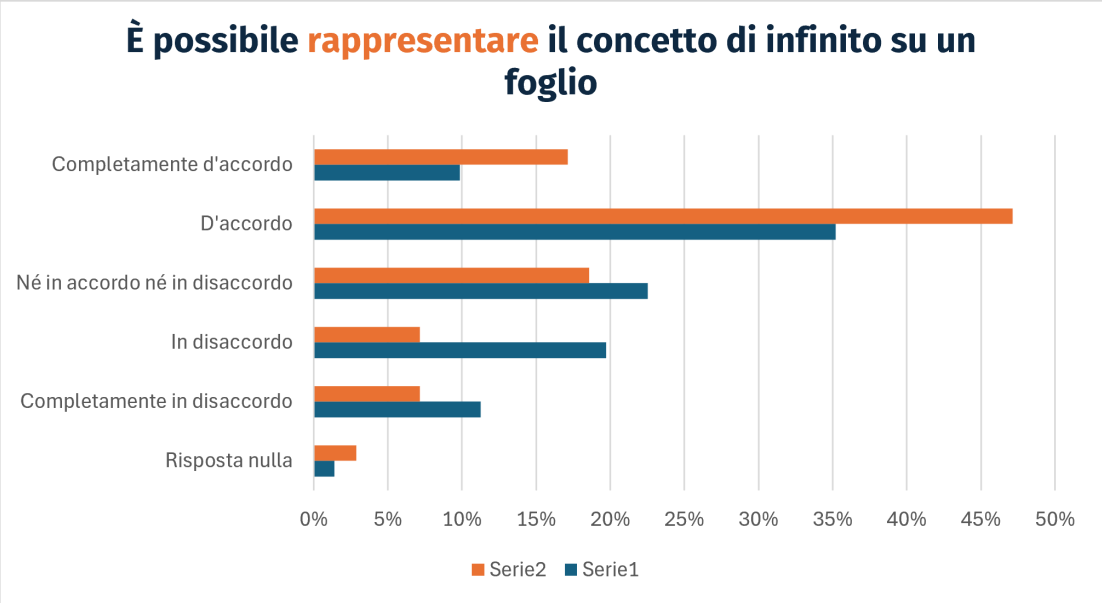

Figura 5.16: Confronto dei dati raccolti prima e dopo la visita relativi all'item 5

Dalla rilevazione dei dati raccolti dopo la visita emerge un quadro contrassegnato da una netta prevalenza dei pareri concordi con l'affermazione. Il consenso raggiunge infatti il 64% del campione, con il 47% dei rispondenti che si dichiara "D'accordo", a cui si aggiunge un ulteriore 17% di soggetti che esprime un giudizio "Completamente d'accordo". La fascia di chi si dichiara "Né in accordo né in disaccordo" è formata dal 19% dei partecipanti. Le posizioni "In disaccordo" e "Completamente d'accordo" sono presenti entrambe con il 7%. Infine, si registra una quota del 3% riferita a risposte nulle o non pervenute.

L'analisi comparativa tra i dati raccolti nella fase pre e post-intervento mostra che il totale delle risposte positive registra un aumento di 19 punti percentuali, passando dal 45% al 64% di quella finale. in particolare, "D'accordo" sale dal 35% al 47%, e "Completamente d'accordo" dal 10% al 17%. Il polo negativo scende dal 31% al 14%. La voce "In disaccordo" subisce un calo dal 20% al 7% e chi si dichiara "Completamente in disaccordo" passa dall'11% al 7%. Vi è inoltre la riduzione della fascia di neutralità che scende dal 23% al 19%.

Il passaggio verso posizioni più favorevoli potrebbe essere attribuito all'interazione dei visitatori con le installazioni dell'isola tematica introduttiva, che offrivano diverse occasioni per esplorare e visualizzare il concetto di infinito attraverso rappresentazioni concrete. Alcune di esse mostravano, ad esempio, come fosse possibile evocare un processo potenzialmente infinito all'interno di un supporto materiale finito, come nel caso del cubo a riflessioni infinite. Anche l'isola dedicata alla geometria proiettiva potrebbe aver contribuito a rafforzare questa concezione, mostrando come, in tale ambito geometrico, il punto all'infinito venga introdotto come un elemento a tutti gli effetti della rappresentazione sulla tela.

Poiché durante il percorso espositivo i visitatori venivano introdotti all'idea che, nell'ambito della geometria proiettiva, il punto all'infinito possa essere rappresentato sulla tela come un punto della rappresentazione geometrica, si è ritenuto opportuno approfondire il contributo delle installazioni della prima isola tematica e di quelle dedicate alla geometria proiettiva. A tal fine, sono state analizzate le risposte agli item 4 e 5, con l'obiettivo di individuare eventuali associazioni tra le valutazioni espresse dai visitatori, come riportato nella Tabella 5.5.

Domanda 5 POST / Domanda 4 POST	Nulla	Compl. in disaccordo	In disaccordo	Né in accordo né in disaccordo	D'accordo	Compl. d'accordo	Totale
Nulla	0%	0%	0%	0%	1%	0%	1%
Completamente in disaccordo	1%	6%	2%	2%	9%	11%	31%
In disaccordo	0%	0%	4%	2%	10%	0%	16%
Né in accordo né in disaccordo	1%	1%	0%	11%	17%	3%	33%
D'accordo	0%	0%	0%	1%	9%	0%	10%
Completamente d'accordo	1%	0%	1%	3%	1%	3%	9%
Totale	3%	7%	7%	19%	47%	17%	100%

Tabella 5.5: Tabella di contingenza delle risposte dei visitatori riguardanti gli item 4 e 5 relativi ai dati raccolti dopo la mostra.

Dall'esame quantitativo emerge un evidente scarto nell'adesione ai due concetti: mentre a partire dai dati relativi alla quinta affermazione si registra un consenso ampiamente maggioritario, pari al 64% del campione, la quarta affermazione raccoglie un'adesione decisamente più contenuta, fermandosi al 19%. Tale divergenza suggerisce che l'accettazione della rappresentabilità dell'infinito non sia dipesa in modo primario dall'isola tematica della geometria proiettiva. In effetti, 50% del totale si dichiara in accordo con la quinta affermazione ma in disaccordo o in posizione neutrale rispetto alla quarta, mentre soltanto il 13% ha condiviso entrambe le affermazioni. Ciononostante, per la ristretta cerchia di visitatori che si erano dichiarati in accordo con l'affermazione sulle rette parallele, la geometria proiettiva è stata un ponte efficace: circa l'80% di questo sottogruppo ha infatti validato anche la possibilità di rappresentare il concetto di infinito su un foglio.

Capitolo 6

Conclusioni

6.1 Risposta alle domande di ricerca

Nel presente progetto di ricerca ci siamo interrogate sulle potenzialità educative della mostra interattiva di matematica *Infiniti Intrecci*, un evento di comunicazione della matematica realizzato nell'ambito della 23ª edizione del "Festival della Scienza" di Genova. Poiché la mostra oggetto della nostra ricerca si colloca nell'ambito della comunicazione della matematica, era necessario innanzitutto comprendere che cosa significhi apprendere in un contesto di questo tipo. A questo proposito, la letteratura sull'educazione matematica informale introduce il concetto di apprendimento informale. L'educazione matematica informale è un ramo di ricerca della didattica della matematica che studia i processi di apprendimento che avvengono al di fuori dei tradizionali contesti formali di insegnamento. Quest'ultimo può manifestarsi attraverso forme e dimensioni differenti, che comprendono sia la costruzione e la comprensione di concetti matematici, sia aspetti legati agli atteggiamenti, agli interessi, alle emozioni e al rapporto che le persone instaurano con la matematica.

Per questo motivo, al fine di esplorare le potenzialità dell'apprendimento informale della mostra *Infiniti Intrecci*, abbiamo scelto di analizzare l'esperienza attraverso due differenti prospettive: una prospettiva affettivo-attitudinale, volta a indagare la possibilità che la mostra promuova atteggiamenti positivi nei confronti della matematica, e una prospettiva cognitiva, volta ad approfondire il possibile contributo

della mostra alla costruzione dei concetti matematici riguardanti l'infinito.

Presentiamo di seguito i risultati della ricerca relativi a entrambe le prospettive di analisi, iniziando da quella cognitiva, oggetto della presente tesi.

6.1.1 Prospettiva cognitiva

Discussione dei risultati alla luce del quadro teorico

I dati empirici raccolti nel corso della ricerca sono stati analizzati alla luce dei costrutti della didattica della matematica introdotti nel quadro teorico, con particolare riferimento alle immagini concettuali come definite da Tall e Vinner (1981), alla nozione di misconcezione e al concetto di conflitto cognitivo. La scelta di adottare tali strumenti teorici in un contesto di comunicazione della matematica nasce dalla volontà di indagare la dimensione cognitiva dell'esperienza proposta dalla mostra *Infiniti Intrecci*, assumendo la mostra interattiva come possibile ambiente di apprendimento informale.

Nel modello di Tall e Vinner, l'immagine concettuale comprende l'insieme delle rappresentazioni, delle immagini, delle proprietà, dei simboli e dei processi che un individuo associa a un concetto, mentre la definizione concettuale riguarda la formulazione verbale o simbolica attraverso cui il concetto viene definito. Un aspetto particolarmente rilevante per la presente ricerca è che non tutte le componenti dell'immagine concettuale vengono necessariamente attivate contemporaneamente: in un determinato momento o contesto viene evocata soltanto una sua parte, definita immagine concettuale evocata. Differenti componenti possono inoltre risultare tra loro incompatibili e, quando vengono evocate simultaneamente, possono generare una situazione di conflitto cognitivo (Tall, Vinner, 1981).

Questa prospettiva permette di interpretare le risposte dei visitatori non semplicemente come corrette o scorrette, ma come manifestazioni delle immagini concettuali evocate dal particolare modo in cui le domande e le esperienze della mostra hanno messo in gioco alcuni concetti di infinito. Tale distinzione è particolarmente rilevante nel caso dell'infinito matematico, per il quale la letteratura evidenzia una dualità tra una concezione potenziale, legata all'idea di un processo che può continuare indefinitamente, e una concezione attuale, nella quale l'infinito viene

pensato come un'entità compiuta e definita.

Nel caso della presente ricerca, questa dualità dell'infinito matematico è stata ulteriormente interpretata attraverso la nozione di misconcezione. Come discusso nel quadro teorico, una misconcezione può derivare da una conoscenza o da un'immagine concettuale costruita a partire dall'esperienza personale e successivamente risultare inadeguata quando viene applicata a contesti differenti (D'Amore, Sbaragli, 2005). Nel caso dell'infinito, le difficoltà possono derivare proprio dalla tendenza a estendere al dominio dell'infinito modelli intuitivi costruiti a partire dall'esperienza del finito.

Le immagini concettuali evocate prima della visita

I dati raccolti prima della visita evidenziano la presenza, nel campione, di immagini concettuali dell'infinito fortemente legate all'esperienza del finito e alla concezione dell'infinito potenziale. In particolare, emerge una rappresentazione dell'infinito come processo che può essere reiterato indefinitamente, coerente con l'idea di un'azione che può proseguire senza raggiungere un termine.

Accanto a questa rappresentazione emerge anche una concezione dell'infinito come quantità molto grande e indefinita. Tale immagine può essere interpretata come il risultato dell'estensione all'infinito di categorie costruite nell'esperienza quotidiana, nella quale ciò che non può essere esaurito o quantificato concretamente tende a essere descritto in termini di grandezza estremamente elevata o indefinita.

Infine, una parte consistente dei visitatori riconosce la possibilità da parte dei matematici di utilizzare l'infinito all'interno della matematica come una grandezza definita e soggetta a regole proprie. La presenza di queste rappresentazioni suggerisce che componenti differenti dell'immagine concettuale possano coesistere senza essere necessariamente integrate in una rappresentazione unitaria e coerente dell'infinito matematico.

Alla luce del modello di Tall e Vinner, questo risultato può essere interpretato come evidenza della pluralità delle componenti che costituiscono l'immagine concettuale. Una conoscenza relativa al modo in cui l'infinito viene trattato formalmente in matematica può infatti coesistere con rappresentazioni intuitive costruite attraverso l'esperienza quotidiana e scolastica, senza che la prima domini

necessariamente tutte le situazioni nelle quali il concetto viene evocato.

In conclusione, i dati della Tabella 5.2, interpretati con il modello di Tall e Vinner, forniscono una chiara evidenza della presenza e dell'efficacia dell'apprendimento informale veicolato dalla mostra. Un contesto espositivo non formale non agisce tramite l'imposizione di una definizione concettuale astratta, ma lavora direttamente sull'immagine concettuale dei partecipanti attraverso l'esperienza interattiva. L'efficacia di questo approccio è dimostrata principalmente da due indicatori: la contrazione della quota di partecipanti indecisi/neutri (dal 29,58% al 22,54%), che attesta come l'esperienza informale sia stata in grado di stimolare la riflessione e la maturazione di un'opinione e l'incremento dei consensi (con "Completamente d'accordo" che passa dal 12,68% al 18,31%), che mostra come gli exhibit abbiano aiutato i visitatori a integrare nella propria immagine concettuale l'idea di un infinito matematico governato da regole rigorose, dimostrando che l'ambiente informale è uno strumento didattico potente per scalfire o evolvere concezioni matematiche complesse.

Evoluzione dell'immagine concettuale dopo la visita

Il confronto tra le risposte raccolte prima e dopo la visita evidenzia innanzitutto un rafforzamento della componente dell'immagine concettuale associata all'infinito potenziale. L'esperienza della mostra sembra aver evidenziato la dimensione processuale dell'infinito, coerentemente con alcune delle caratteristiche delle installazioni incontrate dai visitatori. In particolare, la suddivisione iterativa dello spazio e del tempo proposta dal paradosso di Achille e le tassellazioni rendono visibile un processo di ripetizione che può essere idealmente prolungato oltre i limiti del supporto fisico.

Analogamente, si osserva il consolidamento della concezione dell'infinito come quantità molto grande e indefinita. In questo caso, l'esperienza espositiva non sembra aver messo in discussione una rappresentazione intuitiva. Tale risultato può essere ricondotto anche alle caratteristiche del percorso espositivo: nella seconda edizione non era presente un'installazione specificamente orientata a mettere in crisi l'identificazione tra infinito e quantità semplicemente molto grande e a problematizzare il rapporto tra infinito e cardinalità. Le esperienze proposte potevano quindi essere interpretate solo attraverso categorie concettuali già

disponibili.

Parallelamente, dopo la visita emerge una maggiore disponibilità a riconoscere l'infinito come oggetto matematico operativo, soggetto a proprietà e regole proprie. L'infinito sembra essere risultato maggiormente familiare non solo come idea astratta, ma come oggetto che può essere incorporato in costruzioni geometriche, processi e configurazioni matematiche esplorabili direttamente.

La lettura congiunta dei risultati mostra tuttavia che questo cambiamento non coincide necessariamente con il superamento delle rappresentazioni intuitive precedenti. Le diverse risposte evidenziano infatti la possibilità che componenti differenti dell'immagine concettuale coesistano: un visitatore può continuare a concepire l'infinito come processo o come quantità molto grande e indefinita e, allo stesso tempo, riconoscerne la natura di oggetto matematico definito e regolato. L'esperienza sembra quindi non sostituire una concezione con un'altra, ma ampliare e modificare le componenti dell'immagine concettuale che possono essere evocate in relazione alle astrazioni del concetto di infinito.

Un cambiamento evidente riguarda invece la geometria proiettiva. Dopo la visita si osserva una marcata riduzione delle posizioni di disaccordo rispetto alla possibilità di considerare incidenti due rette parallele, accompagnata soprattutto da un aumento delle posizioni neutrali e, in misura minore, di quelle favorevoli. Questo spostamento può essere interpretato come un indebolimento della certezza iniziale legata alla rappresentazione euclidea delle rette parallele.

Alla luce del modello di Tall e Vinner, l'esperienza sembra aver introdotto una componente alternativa dell'immagine concettuale: accanto alla rappresentazione delle rette parallele come rette che non si incontrano, si aggiunge una rappresentazione nella quale esse possono essere considerate incidenti in un punto all'infinito. La coesistenza di queste due componenti costituisce quindi un'indicazione di un possibile innesco di conflitto cognitivo. Tale interpretazione va tuttavia intesa con cautela, poiché le variazioni osservate non consentono di stabilire se si sia prodotta una ristrutturazione stabile dell'immagine concettuale.

Infine, la visita sembra aver ampliato anche la possibilità di rappresentare l'infinito attraverso supporti finiti. Le installazioni dell'isola introduttiva e della geometria proiettiva mostrano infatti come processi e oggetti associati all'infinito possano essere visualizzati e rappresentati concretamente, sia attraverso il gioco di riflessioni

infinite sia attraverso la rappresentazione del punto all'infinito.

L'aumento della possibilità di rappresentare l'infinito non implica tuttavia l'acquisizione di una concezione dell'infinito attuale. Il risultato può essere interpretato più prudentemente come un ampliamento dell'immagine concettuale evocabile, nel quale diventa disponibile una nuova relazione tra infinito e rappresentazione finita. In questo senso, la visualizzazione può costituire un possibile punto di accesso verso una successiva rielaborazione dei concetti. Passiamo ora ai risultati della ricerca relativi alla prospettiva affettivo-attitudinale, oggetto della tesi di Sofia Palazzi.

6.1.2 Prospettiva affettivo-attitudinale

L'ipotesi alla base di questa prospettiva era che l'esperienza di una mostra interattiva di matematica potesse mettere in discussione alcune delle convinzioni e delle rappresentazioni negative associate alla disciplina. L'esperienza, infatti, avrebbe potuto offrire ai visitatori un modo di vivere la matematica diverso da quello tradizionalmente sperimentato nel contesto scolastico, ambiente nel quale abitualmente si costruisce e si consolida il rapporto con la disciplina, creando così condizioni favorevoli allo sviluppo di un atteggiamento più positivo nei suoi confronti. A partire da tale ipotesi, è stata formulata la seguente domanda di ricerca: "Una mostra interattiva di matematica può promuovere atteggiamenti positivi nei confronti della disciplina?".

Nella ricerca si è scelto di interpretare l'atteggiamento nei confronti della matematica come un costrutto multidimensionale, facendo riferimento al modello di Di Martino e Zan (2009), che individua tre dimensioni interconnesse: la *visione della matematica*, la *disposizione emozionale nei confronti della matematica* e la *competenza personale percepita*. Poiché l'atteggiamento è inteso come un costrutto relativamente stabile nel tempo, la ricerca non si è posta l'obiettivo di verificare se l'esperienza della mostra *Infiniti Intrecci* potesse modificarlo nel suo complesso. L'indagine si è piuttosto concentrata sull'atteggiamento che emerge nei confronti della matematica presentata e vissuta all'interno della mostra. Come discusso nel Capitolo 5, l'analisi dei dati raccolti attraverso il questionario pre-visita ha permesso di delineare le caratteristiche dell'atteggiamento iniziale dei partecipanti, evidenziando elementi che, alla luce del modello teorico adottato, possono esse-

re interpretati come indicativi di un atteggiamento tendenzialmente negativo nei confronti della matematica. A partire da questo quadro iniziale, la ricerca intende comprendere se la visita alla mostra interattiva Infiniti Intrecci possa costituire un primo passo verso la costruzione di un atteggiamento più positivo nei confronti della matematica e delle esperienze ad essa relative.

La nostra ricerca ha mostrato che la visione della matematica e la disposizione emozionale nei confronti della matematica sono le dimensioni dell'atteggiamento rispetto alle quali emergono le potenzialità più interessanti della mostra. Per entrambe, infatti, l'esperienza sembra aver contribuito a promuovere un atteggiamento più positivo nei confronti della matematica. Per quanto riguarda la competenza personale percepita, i risultati non hanno evidenziato potenzialità altrettanto marcate. Le possibili ragioni di questo esito, legate sia agli strumenti di rilevazione sia alle caratteristiche degli exhibit e alle opportunità offerte ai visitatori di sperimentare direttamente le proprie capacità, saranno approfondite nel paragrafo dedicato ai limiti della ricerca.

Per quanto riguarda la visione della matematica, i risultati mostrano un quadro articolato, nel quale sono presenti, nelle concezioni dei partecipanti prima della visita, sia aspetti riconducibili a una visione strumentale sia aspetti riconducibili a una visione relazionale. Le due componenti non risultano necessariamente contrapposte: i partecipanti possono infatti riconoscere l'importanza di regole e procedure e, allo stesso tempo, attribuire alla matematica caratteristiche quali la creatività, la possibilità di fare nuove scoperte e l'utilizzo di strategie differenti nella risoluzione dei problemi.

Sono tre gli aspetti della visione della matematica rispetto ai quali emergono le potenzialità più interessanti della mostra: la creatività come caratteristica dell'attività matematica, la matematica come disciplina in continua evoluzione e la possibilità di risolvere uno stesso problema attraverso strategie differenti. I risultati del confronto tra le risposte raccolte prima e dopo la visita suggeriscono alcuni spostamenti verso una concezione più relazionale della disciplina. In particolare, rispetto alla possibilità di risolvere un problema matematico in modi diversi, tutti i partecipanti che inizialmente avevano espresso disaccordo si sono spostati, nel post-visita, verso una posizione neutrale o di accordo; inoltre, tra coloro che inizialmente avevano assunto una posizione neutrale, il 67% è passato all'accordo. Anche rispetto alla creatività emergono cambiamenti interessanti: il 75% dei par-

tecipanti che prima della visita si dichiarava completamente in disaccordo con l'idea che la matematica sia un'attività creativa ha espresso, dopo l'esperienza, accordo o completo accordo. Infine, rispetto all'idea che in matematica ci siano sempre nuove scoperte, il 50% dei partecipanti inizialmente in disaccordo è passato all'accordo e il restante 50% al completo accordo. Alla luce di questi risultati e delle analisi più approfondite presentate nel Capitolo 5, le potenzialità dell'esperienza sembrano manifestarsi principalmente in due direzioni. Da un lato, tra i partecipanti che inizialmente presentavano una visione maggiormente strumentale, la mostra sembra aver favorito una maggiore apertura verso una concezione della matematica più creativa, dinamica e flessibile. Dall'altro, tra coloro che già presentavano una visione maggiormente relazionale, l'esperienza sembra aver contribuito a confermare e consolidare concezioni già presenti.

Per quanto riguarda la sfera delle emozioni, la mostra sembra presentare una particolare rilevanza nel favorire un rapporto positivo con la matematica. L'esperienza proposta è stata infatti vissuta dai partecipanti in modo positivo sul piano emozionale. È particolarmente interessante osservare che, nel descrivere la mostra, i partecipanti abbiano utilizzato esclusivamente termini con una connotazione positiva. Tali espressioni sembrano riflettere una disposizione emozionale favorevole nei confronti dell'esperienza proposta. Considerando che la mostra era incentrata sulla matematica, si può ipotizzare che questa disposizione positiva verso l'esperienza espositiva possa, almeno in parte, essere associata anche al modo in cui i partecipanti si sono rapportati alla matematica presentata e vissuta all'interno della mostra.

Le risposte dei partecipanti hanno inoltre permesso di comprendere come è stato percepito il contesto nel quale si sono manifestate le potenzialità precedentemente descritte e quali caratteristiche lo hanno contraddistinto. Tra queste emergono in particolare il coinvolgimento e la curiosità suscitati dall'esperienza, la bellezza e la creatività dell'allestimento e degli elementi visivi e la percezione di originalità e innovazione della proposta.

Le caratteristiche messe in evidenza dai partecipanti sembrano quindi indicare che le potenzialità educative della mostra non dipendono esclusivamente dai contenuti matematici proposti, ma anche dalle modalità attraverso le quali tali contenuti vengono presentati e vissuti dai visitatori. La mostra sembra così configurarsi come un ambiente nel quale comunicazione, interazione, esplorazione e apprendi-

mento possono intrecciarsi, favorendo un'esperienza della matematica diversa da quella più abitualmente sperimentata nel contesto scolastico.

6.2 Limiti della ricerca e sviluppi futuri

A conclusione del presente lavoro, presentiamo una riflessione sui principali limiti della ricerca e sulle possibili prospettive di sviluppo futuro, con l'obiettivo di evidenziare le opportunità di approfondimento e le direzioni per eventuali ricerche successive.

6.2.1 Limiti della ricerca

Prima di discutere i limiti specifici delle due prospettive di analisi, presentiamo alcuni limiti comuni alle due ricerche. Il primo riguarda la durata dell'esperienza e la natura immediata della rilevazione post-visita. La visita alla mostra costituisce infatti un'esperienza relativamente breve e, per quanto possa offrire occasioni di confronto con modi diversi di concepire, vivere e sperimentare la matematica, una singola esperienza non può essere considerata di per sé sufficiente a produrre cambiamenti che siano stabili nel tempo né rispetto all'atteggiamento verso la matematica né rispetto all'apprendimento informale di concetti matematici. Le variazioni rilevate immediatamente dopo la visita possono riflettere l'effetto dell'esperienza appena vissuta e, pur fornendo indicazioni significative sulle reazioni dei partecipanti, non permettono di stabilire se i cambiamenti osservati si mantengano nel tempo. Questo aspetto assume forme differenti nelle due prospettive considerate: nella dimensione cognitiva, le variazioni riguardano le componenti dell'immagine concettuale evocate dal visitatore, mentre nella dimensione affettiva riguardano atteggiamenti e posizioni nei confronti della matematica.

Un secondo limite comune riguarda gli strumenti di rilevazione. Le scale di tipo Likert hanno permesso di raccogliere dati in modo compatibile con il contesto della mostra (per esempio, in un tempo ragionevolmente breve), consentendo di confrontare le risposte fornite prima e dopo l'esperienza senza trasformare il questionario in una verifica scolastica. Tuttavia, il dato quantitativo non permette di ricostruire direttamente le ragioni alla base delle risposte dei partecipanti né il

significato da essi attribuito alle affermazioni proposte. Una stessa posizione sulla scala può infatti derivare da interpretazioni differenti e, nel caso di cambiamenti osservati tra la rilevazione pre e quella post, non è possibile stabilire attraverso il solo dato quantitativo quali aspetti dell'esperienza abbiano determinato tale variazione.

Un terzo limite è rappresentato dalla ridotta numerosità del campione, che restituisce solo una parte della varietà di esperienze ed emozioni che le persone associano alla matematica. Un numero maggiore di testimonianze avrebbe potuto far emergere ulteriori prospettive e offrire un quadro più articolato dei modi in cui le persone si rapportano alla disciplina e costruiscono i concetti matematici, anche alla luce delle proprie esperienze personali e scolastiche.

A partire da questi limiti comuni, è possibile individuare ulteriori aspetti specifici da approfondire per ciascuna delle due prospettive di ricerca.

Limiti prospettiva affettivo-attitudinale

Sebbene i risultati della ricerca abbiano mostrato il potenziale della mostra nel migliorare la disposizione emozionale dei partecipanti e nel favorire una visione della matematica più relazionale, la ricerca non ha mostrato potenzialità per quanto riguarda la competenza personale percepita in matematica. Questo potrebbe essere legato a due fattori. Il primo riguarda l'adeguatezza degli strumenti di rilevazione. È possibile che i metodi utilizzati per la raccolta dei dati non siano stati sufficientemente specifici e sensibili nel rilevare eventuali variazioni nella competenza personale percepita. Il secondo fattore riguarda la progettazione degli exhibit e, in particolare, il livello di interattività proposto. Affinché un'esperienza possa contribuire allo sviluppo della percezione di competenza, è importante che il visitatore abbia l'opportunità di mettersi concretamente alla prova, affrontando una sfida e sperimentando la possibilità di risolverla con successo. Qualora gli exhibit prevedano un'interazione superficiale o una fruizione soprattutto osservativa, il visitatore potrebbe avere meno occasioni per sperimentare direttamente le proprie capacità e sviluppare una competenza personale percepita più alta.

Infine, i risultati relativi ad alcuni aspetti della visione della matematica che non hanno mostrato variazioni rilevanti invitano a riflettere sui limiti delle poten-

zialità della mostra. La maggior parte dei partecipanti condivideva una visione della matematica nella quale regole e procedure occupavano un ruolo importante, e tale concezione appare piuttosto consolidata. L'esperienza proposta non sembra aver fornito stimoli sufficienti a modificare in modo significativo questa componente della visione della matematica. Un quadro analogo emerge rispetto al ruolo attribuito alla memoria. Una parte consistente dei partecipanti riteneva che per fare matematica fosse necessario possedere una buona memoria, concezione spesso associata a una visione della matematica come insieme di regole e procedure. Le attività della mostra non richiedevano di ricordare formule o procedure per poter partecipare e individuare soluzioni; questo non sembra essere stato sufficiente, però, a rendere esplicita una riflessione sul ruolo della memoria nell'attività matematica. Il fatto di poter svolgere un'attività matematica senza ricorrere direttamente alla memorizzazione non implica infatti necessariamente che il visitatore riconosca questa esperienza come un'occasione per riflettere sulla propria concezione del rapporto tra memoria e matematica.

Limiti prospettiva cognitiva

Per quanto riguarda la sfera cognitiva, un primo limite della ricerca riguarda la possibilità di attribuire i cambiamenti osservati alle singole installazioni della mostra. Lo studio ha considerato l'esperienza complessiva della visita, confrontando le risposte dei partecipanti prima e dopo il percorso espositivo. Tale approccio non consente quindi di stabilire quale specifica installazione, o quale combinazione di installazioni, abbia contribuito in misura determinante alle variazioni osservate, né di distinguere gli effetti delle singole esperienze da quelli derivanti dall'interazione complessiva con la mostra.

Un secondo limite riguarda la specificità del caso di studio e, di conseguenza, la trasferibilità dei risultati ad altri contesti di comunicazione informale della matematica. La ricerca si concentra sulle diverse astrazioni del concetto di infinito e gli strumenti di rilevazione sono stati costruiti in stretta relazione con le immagini concettuali e le misconcezioni individuate nella letteratura, nonché con i contenuti matematici della mostra *Infiniti Intrecci*. I risultati devono pertanto essere interpretati alla luce di questo specifico contesto.

6.2.2 Sviluppi futuri

Tra le possibili prospettive future della ricerca, si individua innanzitutto l'opportunità di integrare le scale Likert con strumenti di carattere qualitativo, quali domande aperte, interviste o brevi momenti di discussione, che consentano di approfondire le ragioni delle risposte dei partecipanti e di comprendere più precisamente i processi attraverso i quali l'esperienza espositiva può influire sugli atteggiamenti nei confronti della matematica e sulle immagini concettuali.

Un ulteriore sviluppo potrebbe consistere nell'ampliare l'indagine distinguendo i visitatori in diverse fasce d'età, così da esplorare eventuali differenze nel rapporto con la disciplina e nei modi di costruire i concetti matematici.

Sarebbe inoltre interessante approfondire il ruolo dell'animatore all'interno della mostra, analizzando come le sue domande, le spiegazioni e le modalità di interazione con i visitatori possano contribuire a orientare l'esperienza, stimolare la riflessione sulle diverse componenti dell'atteggiamento nei confronti della matematica e favorire la costruzione di significati matematici. In particolare, potrebbe essere utile indagare in che modo la mediazione dell'animatore influenzi non solo le rappresentazioni concettuali dei visitatori, ma anche le loro reazioni emotive, le convinzioni nei confronti della disciplina, il senso di autoefficacia e la disponibilità a confrontarsi con problemi matematici. In questa prospettiva, un ulteriore sviluppo della ricerca potrebbe riguardare la formazione degli animatori, approfondendo come essa possa aiutarli a riconoscere le immagini concettuali dei visitatori e le manifestazioni del loro atteggiamento nei confronti della matematica, a valorizzare le intuizioni del pubblico e a sollecitare la messa in discussione delle convinzioni iniziali attraverso domande e interventi mirati. Approfondire questi aspetti permetterebbe di individuare strategie formative capaci di orientare consapevolmente la mediazione educativa, sostenendo sia le potenzialità cognitive degli exhibit sia la possibilità di promuovere un rapporto positivo con la matematica.

Infine, una prospettiva di ricerca potrebbe prevedere una rilevazione a distanza di alcune settimane o mesi dalla visita, allo scopo di indagare la persistenza nel tempo nei cambiamenti osservati negli atteggiamenti e nelle immagini concettuali. Tale approfondimento richiederebbe tuttavia di considerare anche l'influenza di possibili fattori, quali esperienze scolastiche o ulteriori occasioni di incontro con la matematica, che potrebbero contribuire a modificare il rapporto dei partecipanti

con la disciplina nel periodo considerato.

Sviluppi futuri della prospettiva affettivo-attitudinale

Alla luce dei risultati emersi, una prospettiva futura riguarda la riprogettazione della mostra, con l'obiettivo di incidere non solo sul coinvolgimento emotivo e sulla rappresentazione della matematica, ma anche sulla percezione di competenza dei visitatori e sulle componenti della loro visione della disciplina che si sono dimostrate meno sensibili al cambiamento. In questa direzione, potrebbe essere utile rendere più esplicito il contrasto tra una concezione della matematica prevalentemente fondata sulla memorizzazione di formule e algoritmi e una pratica matematica basata sul ragionamento, sull'esplorazione e sulla costruzione di strategie personali. Ciò potrebbe tradursi nella progettazione di exhibit maggiormente sfidanti, manipolabili e orientati all'azione, capaci di offrire ai visitatori occasioni concrete per sperimentare le proprie capacità, elaborare strategie e confrontarsi con situazioni problematiche. Parallelamente, si potrebbe affiancare a tali interventi strumenti di valutazione più specifici e sensibili, in grado di rilevare eventuali cambiamenti nelle diverse componenti dell'atteggiamento nei confronti della matematica e di comprendere più approfonditamente quali caratteristiche dell'esperienza espositiva contribuiscano a promuoverli.

Sviluppi futuri della prospettiva cognitiva

Alla luce dei limiti individuati, una prima prospettiva di ricerca consiste nell'approfondire la relazione tra le caratteristiche degli exhibit e le dinamiche cognitive dei visitatori. Sarebbe possibile, ad esempio, associare a specifici exhibit brevi strumenti di rilevazione pre e post-interazione, osservazioni dei comportamenti dei visitatori o interviste condotte immediatamente dopo l'esperienza. Un approccio di questo tipo consentirebbe di indagare più direttamente le modalità attraverso cui le caratteristiche di un'installazione entrano in relazione con le immagini concettuali iniziali e possono contribuire all'emergere di situazioni di conflitto cognitivo.

Quest'ultimo aspetto assume particolare rilevanza alla luce dei risultati emersi dalla ricerca, secondo cui l'interattività non sembra costituire, di per sé, una con-

dizione sufficiente per produrre conflitto cognitivo. L'effetto dell'esperienza appare piuttosto legato alla relazione tra la rappresentazione iniziale del visitatore e il tipo di esperienza proposta dall'installazione. Quando l'exhibit rende visibile o manipolabile una proprietà coerente con l'intuizione iniziale, l'esperienza può contribuire a rafforzarla; quando, invece, presenta una situazione che contraddice una convinzione consolidata, può favorire l'emergere di incertezza o di nuove possibilità interpretative. La progettazione futura di mostre matematiche potrebbe quindi prestare maggiore attenzione non soltanto alla possibilità di rendere un concetto osservabile, manipolabile o sorprendente, ma anche alla costruzione intenzionale di situazioni in cui diverse componenti dell'immagine concettuale possano entrare in relazione e, eventualmente, in contrasto.

Un'ulteriore prospettiva riguarda lo sviluppo di un framework concettuale e metodologico per l'analisi delle dinamiche cognitive che possono emergere nei contesti informali di comunicazione della matematica. Più che perseguire una generalizzazione immediata dei risultati, sarebbe utile individuare una struttura di analisi capace di mettere in relazione almeno tre dimensioni: le caratteristiche del concetto matematico e delle immagini concettuali a esso associate; le caratteristiche dell'esperienza proposta dall'exhibit e la possibilità che essa confermi, rafforzi o contraddica tali rappresentazioni; infine, le variazioni osservabili nelle risposte e nelle argomentazioni dei visitatori.

Un framework di questo tipo permetterebbe di preservare la specificità dei singoli concetti matematici e al contempo fornirebbe una struttura comune per confrontare esperienze espositive differenti. Potrebbe inoltre contribuire a orientare la progettazione degli exhibit, aiutando a individuare le condizioni che rendono più probabile l'emergere di situazioni di conflitto cognitivo e quelle che, al contrario, possono favorire il consolidamento delle immagini concettuali iniziali.

Appendice A

Concetto di infinito
Atteggiamento

Benvenuta/o alla mostra-laboratorio **Infiniti Intrecci**!

Ciao, ti chiediamo di compilare due brevi questionari (uno iniziale e uno finale). Verranno raccolti esclusivamente un nickname scelto dal partecipante e l'età, al solo fine di associare correttamente i questionari compilati dalla stessa persona. I dati raccolti verranno analizzati esclusivamente in forma aggregata per i soli fini scientifici legati alla stesura di una tesi di laurea magistrale in Divulgazione e Didattica della Matematica, nel pieno rispetto della normativa sulla privacy (GDPR – Regolamento UE 2016/679). La compilazione è totalmente volontaria e puoi interromperla in qualsiasi momento.

☐ Acconsento al trattamento dei miei dati personali per le finalità indicate.

Rispondi in libertà: qui non ci sono voti, risposte giuste o sbagliate! Ci interessa solo sapere cosa ti suggerisce la tua fantasia quando pensi all'infinito.

Nickname:

Età:

---

1. **In matematica l'infinito è un'azione che può continuare senza fine.**

☐ Completamente d'accordo	☐ D'accordo	☐ Né in accordo né in disaccordo	☐ In disaccordo	☐ Completamente in disaccordo

2. **In matematica l'infinito è un modo per descrivere una quantità molto grande e indefinita.**

☐ Completamente d'accordo	☐ D'accordo	☐ Né in accordo né in disaccordo	☐ In disaccordo	☐ Completamente in disaccordo

3. **I matematici utilizzano l'infinito come una grandezza definita che segue delle regole proprie.**

☐ Completamente d'accordo	☐ D'accordo	☐ Né in accordo né in disaccordo	☐ In disaccordo	☐ Completamente in disaccordo

4. **Due rette parallele si incontrano sempre in un punto.**

☐ Completamente d'accordo	☐ D'accordo	☐ Né in accordo né in disaccordo	☐ In disaccordo	☐ Completamente in disaccordo

5. È possibile rappresentare il concetto di infinito su un foglio.

☐ Completamente d'accordo	☐ D'accordo	☐ Né in accordo né in disaccordo	☐ In disaccordo	☐ Completamente in disaccordo

6. La matematica è una raccolta di regole e procedure.

☐ Completamente d'accordo	☐ D'accordo	☐ Né in accordo né in disaccordo	☐ In disaccordo	☐ Completamente in disaccordo

7. Un problema matematico può essere risolto in diversi modi.

☐ Completamente d'accordo	☐ D'accordo	☐ Né in accordo né in disaccordo	☐ In disaccordo	☐ Completamente in disaccordo

8. La matematica è una attività creativa.

☐ Completamente d'accordo	☐ D'accordo	☐ Né in accordo né in disaccordo	☐ In disaccordo	☐ Completamente in disaccordo

9. Ci sono sempre nuove scoperte in matematica.

☐ Completamente d'accordo	☐ D'accordo	☐ Né in accordo né in disaccordo	☐ In disaccordo	☐ Completamente in disaccordo

10. Per fare matematica serve memoria.

☐ Completamente d'accordo	☐ D'accordo	☐ Né in accordo né in disaccordo	☐ In disaccordo	☐ Completamente in disaccordo

Sei giunta/o al termine dell'esperienza! Le domande qui sotto sono le stesse dell'inizio. Ora che hai esplorato gli infiniti in matematica vuoi cambiare qualche risposta?

Se hai cambiato idea su qualcosa, scegli un'opzione diversa. Se invece la pensi ancora allo stesso modo, segna la risposta di prima!

Nickname:

Età:

1. **In matematica l'infinito è un'azione che può continuare senza fine.**

☐ Completamente d'accordo	☐ D'accordo	☐ Né in accordo né in disaccordo	☐ In disaccordo	☐ Completamente in disaccordo

2. **In matematica l'infinito è un modo per descrivere una quantità molto grande e indefinita.**

☐ Completamente d'accordo	☐ D'accordo	☐ Né in accordo né in disaccordo	☐ In disaccordo	☐ Completamente in disaccordo

3. **I matematici utilizzano l'infinito come una grandezza definita che segue delle regole proprie.**

☐ Completamente d'accordo	☐ D'accordo	☐ Né in accordo né in disaccordo	☐ In disaccordo	☐ Completamente in disaccordo

4. **Due rette parallele si incontrano sempre in un punto.**

☐ Completamente d'accordo	☐ D'accordo	☐ Né in accordo né in disaccordo	☐ In disaccordo	☐ Completamente in disaccordo

5. **È possibile rappresentare il concetto di infinito su un foglio.**

☐ Completamente d'accordo	☐ D'accordo	☐ Né in accordo né in disaccordo	☐ In disaccordo	☐ Completamente in disaccordo

6. **La matematica è una raccolta di regole e procedure.**

☐ Completamente d'accordo	☐ D'accordo	☐ Né in accordo né in disaccordo	☐ In disaccordo	☐ Completamente in disaccordo

7. **Un problema matematico può essere risolto in diversi modi.**

☐	☐	☐	☐	☐
Completamente d'accordo	D'accordo	Né in accordo né in disaccordo	In disaccordo	Completamente in disaccordo

8. **La matematica è una attività creativa.**

☐	☐	☐	☐	☐
Completamente d'accordo	D'accordo	Né in accordo né in disaccordo	In disaccordo	Completamente in disaccordo

9. **Ci sono sempre nuove scoperte in matematica.**

☐	☐	☐	☐	☐
Completamente d'accordo	D'accordo	Né in accordo né in disaccordo	In disaccordo	Completamente in disaccordo

10. **Per fare matematica serve memoria.**

☐	☐	☐	☐	☐
Completamente d'accordo	D'accordo	Né in accordo né in disaccordo	In disaccordo	Completamente in disaccordo

---

Ci sei quasi! Rispondi a queste ultime domande per raccontarci come è andata la tua esperienza.

Rispondi in libertà e grazie per aver partecipato a Infiniti Intrecci!

1. **Scrivi due aggettivi per descrivere la mostra.**
   _____
   _____

2. **Quali contatti hai avuto prima della mostra con l'infinito in matematica (scegli al massimo due risposte):**
   □ Nessuna
   □ Ne ho sentito parlare (documentario, film, libro...)
   □ Studiato a scuola
   □ Studiato in università

Bibliografia

Alfonsi, L., Ghattas, R., Gnucci, A. (2011). *Da qui a Maxwell il passo è breve. La prima guida all'animazione scientifica*. Scienza Express.

Andersen, K. (2010). The Geometry of an Art. The History of Perspective from Alberti to Monge. In *Architecture, Mathematics and Perspective* (pp. 153–157). Springer.

ANVUR – Agenzia Nazionale di Valutazione del sistema Universitario e della Ricerca. (2022, maggio). *Valutazione della Qualità della Ricerca 2015-2019 (VQR 2015-2019): Rapporto finale di Area. Gruppo di Esperti della Valutazione Interdisciplinare Impatto/Terza Missione (GEV TM)* (Rapporto finale di Area) (Coordinatore: Sauro Longhi). ANVUR. Roma, Italia. https://www.anvur.it/it/ricerca/qualita-della-ricerca/rapporti-di-valutazione/vqr-2015-2019

Arrigo, G., D'Amore, B. (1999). «Lo vedo, ma non ci credo». Ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di un teorema di Georg Cantor che coinvolge l'infinito attuale. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, *22B*(5), 465–494.

Bellano, M. (2025). Animation as a visual bridge between science and society. *Mutual Images Journal*, (13), 12–19.

Bencivelli, S., de Ceglia, F. P., Rollini, R. (2013). *Comunicare la scienza* (Seconda Edizione, aprile 2025). Carocci editore.

Benvenuti, S., Natalini, R. (2017). Comunicare la matematica: chi, come, dove, quando e, soprattutto, perché?! *MATEMATICA, CULTURA E SOCIETÀ*, *2*(2), 175–193.

Boyer, C. B. (1990). *Storia della matematica*. Arnoldo Mondadori Editore.

Brousseau, G. (1998). Les obstacles épistémologiques, problèmes et ingénierie didactique. *La théorie des situations didactiques*, 115–160.

Bucchi, M. (2008). Dal deficit al dialogo, dal dialogo alla partecipazione-e poi? Modelli di interazione tra scienza e pubblico. *Rassegna italiana di sociologia*, *49*(3), 377–402.

Bucchi, M., Saracino, B. (2016). "Visual Science Literacy" images and public understanding of science in the digital age. *Science Communication*, *38*(6), 812–819.

Bucchi, M., Trench, B. (2016). Science communication and science in society: A conceptual review in ten keywords. *Tecnoscienza*, *7(2)*, 151–168.

Bucchi, M., Trench, B. (2021). *Routledge handbook of public communication of science and technology*. Routledge.

Casi, R., Sabena, C., Borsero, M., Pizzarelli, C. (2023). Circonferenze e spirali in un percorso di educazione matematica informale tra scuola e museo. *DIDATTICA DELLA MATEMATICA*, (14), 30–58.

Commissione Europea. (2023). *Raccomandazione del Consiglio relativa a un quadro europeo per attrarre e trattenere talenti nel settore della ricerca, dell'innovazione e dell'imprenditorialità (Allegato II: Carta Europea dei Ricercatori)* (rapp. tecn.) (https://eur-lex.europa.eu/legal-content/IT/TXT/PDF/?uri=OJ:C_202301640). Unione Europea.

Consiglio dell'Unione Europea. (2018, giugno). *Raccomandazione del Consiglio del 22 maggio 2018 relativa alle competenze chiave per l'apprendimento permanente* (Raccomandazione N. 2018/C 189/01) (GU C 189 del 4.6.2018, pag. 1–13). Gazzetta ufficiale dell'Unione europea. https://eur-lex.europa.eu/legal-content/IT/TXT/PDF/?uri=CELEX:32018H0604(01)

Consiglio Nazionale delle Ricerche. (2026). *Agorà*. Recuperato luglio 24, 2026, da https://www.cnr.it/it/agora

D'Amore, B., Sbaragli, S. (2005). Analisi semantica e didattica dell'idea di "misconcezione". *La matematica e la sua didattica*, *2*, 139–163.

Dedò, M., Di Sieno, S. (2024). Contenuti e metodologie. Matematica a Milano. *Matematica, Cultura e Società (Bologna)*, *9*(2), 197.

Echazarra, A., Salinas, D., Méndez, I., Radinger, T., Lorenceau, É. (2016). *How teachers teach and students learn: Successful strategies for school* (OECD Education Working Papers N. 130). OECD Publishing. Paris. https://doi.org/10.1787/5jm29kpt0xxx-en

European Commission: Directorate-General for Communication. (2025, febbraio). *Special Eurobarometer SP557: European citizens' knowledge and attitudes*

towards science and technology (Report N. SP557). European Commission. https://europa.eu/eurobarometer/surveys/detail/3227

Fischbein, E. (2001). Tacit models and infinity. *Educational studies in Mathematics*, *48*(2), 309–329.

Gascoigne, T., Schiele, B. (2020). INTRODUCTION: A global trend, an emerging field, a multiplicity of understandings: Science communication in 39 countries. In *Communicating Science: A Global Perspective* (1ª ed., pp. 1–14). ANU Press. Recuperato luglio 25, 2026, da http://www.jstor.org/stable/j.ctv1bvnctz.5

Greco, P. (2008). La cittadinanza scientifica. *Micron*, *9*, 6–7.

Istituto Nazionale di Astrofisica. (2026). *Mostre*. Recuperato luglio 23, 2026, da https://www.beniculturali.inaf.it/mostre/

Istituto Nazionale di Fisica Nucleare. (2026). *Mostre*. Recuperato luglio 23, 2026, da https://www.infn.it/cultura/mostre/

Istituto Nazionale di Geofisica e Vulcanologia. (2026). *Mostre*. INGV. Recuperato luglio 23, 2026, da https://www.ingv.it/ricerca-articoli/divulgazione/mostre

Jacobi, D. (2016). *Textexpo. Produire, éditer et afficher des textes d'exposition*. OCIM.

Merzagora, M., Rodari, P. (2007). *La scienza in mostra. Musei, science centre e comunicazione*. Paravia Bruno Mondadori.

Messina, F., Gaggero, D., Sozzi, F. (2024). *La scienza si fa bella: Mostre interattive e itineranti, Exhibit per esposizioni permanenti, Iniziative per la scuola* (F. Messina, Cur.) [Edizione digitale. ISBN ed. stampa: 978-88-8080-681-3. Licenza CC BY-NC-ND]. CNR Edizioni.

Naturaliter S.r.l. (2026). *Mostre Itineranti*. Recuperato luglio 24, 2026, da https://www.naturaliter.com/mostre-itineranti/

Nurwahyu, B., Tinungki, G. M. (2020). Concept image and its influence on beliefs: Case study on undergraduate engineering students in solving of calculus concept problems. *International Journal of Advanced Science and Technology*, *29*(5), 2227–2243.

OECD. (2023). *PISA 2022 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Creative Thinking and Financial Literacy* (rapp. tecn.). OECD Publishing. Paris. https://doi.org/10.1787/dfe0bf9c-en

Ottaviani, G., Tessieri, S. (2024). Il Giardino di Archimede, ieri e oggi. *Matematica, Cultura e Società (Bologna)*, *9*(2), 91.

Panza, M., Struppa, D. C. (2026). *Three Infinities in Mathematics - Projective Geometry, Infinitesimal Analysis, Set Theory*. Springer Cham.

Pattison, S., Rubin, A., Wright, T. (2016). Mathematics in informal learning environments: A summary of the literature. *Institute for Learning Innovation. Math in the Making Project*.

Rosolini, G. (2025). Una passeggiata tra gli infiniti. *Atti della Accademia Ligure di Scienze e Lettere*, *VII/1*.

Sáenz de Cabezón, E. (2023, settembre). How to speak about mathematics to a broad audience [Video YouTube: https://www.youtube.com/watch?v=mnZSIGum6Wo].

Tall, D., Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics*, *12*(2), 151–169.

Trench, B. (2008). Towards an Analytical Framework of Science Communication Models. In D. Cheng, M. Claessens, T. Gascoigne, J. Metcalfe, B. Schiele, S. Shi (Cur.), *Communicating Science in Social Contexts: New models, new practices* (pp. 119–135). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-1-4020-8598-7_7

Ughi, E. (2024). La Galleria di Matematica" Emanuela Ughi". *Matematica, Cultura e Società (Bologna)*, *9*(2).

Università degli Studi di Firenze. (2026). *Archimede*. Recuperato agosto 10, 2026, da https://archimede.dimai.unifi.it/archimede/archimede/index.html