



Università degli Studi di Genova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
SCUOLA DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Magistrale in Matematica Generale

**Il teorema spettrale per operatori autoaggiunti
non limitati e applicazioni in meccanica
quantistica**

Relatore:

Chiar.mo Prof. Marco Benini

Correlatore:

Prof. Dott. Simone Murro

Candidato:

Filippo Garbarino

Anno Accademico 2025-2026

*Se la fisica quantistica non vi confonde,
allora non l'avete capita.
Niels Bohr*

Ringraziamenti

Ed ecco la parte più difficile della tesi di laurea: i ringraziamenti . . .

Ci sono così tante cose che vorrei scrivere che non so neanche da che parte cominciare. Inizierei col ringraziare la mia famiglia, e mia mamma in particolare, che mi ha permesso di giungere fino a qui, che mi ha aiutato, assistito e spronato a concludere questo mio percorso: più volte mi sono chiesto se tutti gli sforzi fatti per laurearmi fossero finalizzati al mio futuro o alla sua felicità, troppo spesso compromessa dalle disavventure della vita; avendo sempre studiato per passione, e non per dovere, nei momenti in cui la stanchezza e la fatica erano più forti della passione, la sua presenza mi ha dato lo sprono necessario.

Non posso non ringraziare la mia fidanzata che, nonostante sia la causa principale dei miei anni fuoricorso, mi ha fatto capire quanto sia importante seguire il proprio cuore: tutti i problemi annessi e connessi alle scelte difficili e radicali della vita si possono risolvere, basta impegnarsi e volerlo davvero.

Cosa sarebbe la mia vita senza i miei amici? Non oso neanche pensarci. Loro ci sono sempre stati, ci sono sempre e ho la presunzione di pensare che ci saranno per sempre. Le distanze sembrano insormontabili, ma l'amicizia è puntualmente più forte! Loro due non hanno mai perso occasione per starmi vicino, volermi bene, aiutarmi quando ne avevo bisogno e farmi svagare quando ero in difficoltà. Molto spesso neanche erano consapevoli di quanto la loro presenza mi servisse, tendo sempre a non mostrarmi bisognoso, ma loro sono sempre pronti e non posso che ringraziarli in occasione di questo mio traguardo.

I compagni di avventura sono la scoperta più importante: ho inaspettatamente tessuto delle nuove amicizie vere, e ne sono felice! Ho iniziato a voler davvero bene a ragazze e ragazzi della mia età, col mio stesso percorso, con la mia stessa voglia di divertirmi e di non studiare, con le mie stesse ansie, frustrazioni e fragilità. Ci siamo accolti, aiutati e non vedo l'ora di coltivare questi rapporti anche dopo la fine del mio percorso di studi; magari ci rivedremo un giorno a lavorare fianco a fianco ricordando i bei momenti passati insieme.

Non posso dimenticarmi dei miei docenti. Nutro da sempre un rispetto e un'ammirazione fortissima per coloro che hanno faticato affinché diventassi quello che sono; la scuola mi ha formato e plasmato sotto le abili mani dei miei docenti. Mentre scrivo sto pensando a tutti, dalle maestra Monica dell'asilo, alla maestra Francesca delle elementari, alla Banacchioni alle medie, fino ad arrivare a Calzona alle superiori, la prima volta che ho invidiato l'intelligenza di un'altra persona: un'invidia sana però, atta ad elogiare ed emulare, fino a giungere all'università, dove mi sono follemente innamorato dell'assurdità di Pino, da lui ho imparato cosa significa intrattenere mentre si insegna e ho imparato quanto si possa trasmettere facendo ridere i discenti. Infine, il mio relatore! L'ho scelto e l'ho voluto non tanto per la sua materia, anche se il mio desiderio era proprio laurearmi in fisica matematica, quanto per la sua persona. Una persona così giovane ma così competente, chiara, calma e rassicurante, attenta agli studenti e alle loro necessità. Tutti i miei amici laureandi hanno avuto difficoltà coi relatori, chi non rispondeva alle mail, chi li abbandonava alla deriva, il Prof. Benini no, lui non mi ha mai abbandonato, mi ha sempre risposto, anche di sera, anche di domenica, è

stata la miglior scelta che potessi fare. Ringrazio anche il mio correlatore che mi ha dato la possibilità di vantarmi con tutti del fatto che formiamo una squadra di giovanissimi, col fine di rompere il cliché che i docenti universitari devono essere per definizione decrepiti.

In questi anni ho imparato quanto sia difficile lavorare e studiare; mi sono reso conto che al primo anno riuscivo a dare un esame al mese mentre all'ultimo anno, dovendo lavorare tutti i giorni, sono riuscito a dare un esame in sei mesi. Dopo la delusione per non essere stato performante come desideravo, mi sono reso conto che i miei anni fuoricorso significano anche che non sto mai con le mani in mano, che ho voglia di lavorare e che tutto sommato va bene così. Colgo l'occasione per ringraziare i miei colleghi, che mi hanno sempre agevolato quando ho chiesto loro aiuto.

Ecco il momento di nonna Mariuccia. La lontananza, che se ricordo bene è come un vento che spegne i fuochi piccoli e accende quelli grandi, ci ha fatto soffrire. Il fatto di non poterla vedere ogni volta che l'ho desiderato mi ha davvero rimpicciolito; mi sono sentito impotente e ho avuto paura di non vederla abbastanza e di perdermi dei momenti importanti in cui la mia presenza sarebbe stata necessaria. Lei ha sofferto con me, prima velatamente, poi sempre più esplicitamente. La ringrazio perché mi vuole bene e la mia laurea è anche un modo per ripagarla: se lo merita.

Infine voglio ringraziare coloro che non ci sono più: i più distanti fisicamente, ma quelli più vicini, perché sempre nei miei pensieri e nel mio cuore ogni volta che ne ho bisogno. Mi hanno trasmesso i loro geni e insegnato le loro peculiarità: da nonna Carla la determinazione, da Nonno Giuliano la pazienza, da Nonno Renzo l'abilità e da Papà, tutto!

Grazie,

Garba

Indice

Ringraziamenti	1
1 Introduzione	4
2 Contesto storico	6
2.1 Il dualismo onda-particella della luce	6
2.2 La radiazione di corpo nero	6
2.3 L'effetto fotoelettrico	7
2.4 Il dualismo onda-particella della materia	8
2.5 Heisenberg e Schrödinger	8
2.6 Il problema dello spazio infinito-dimensionale	9
3 Il teorema spettrale per operatori autoaggiunti limitati	12
3.1 Proprietà elementari sugli operatori limitati	12
3.2 Teorema spettrale per operatori autoaggiunti limitati	19
3.3 Dimostrazione del teorema spettrale	26
3.3.1 Passo 1: il calcolo funzionale continuo	26
3.3.2 Passo 2: il teorema di rappresentazione di Riesz	30
4 Operatori autoaggiunti illimitati	34
4.1 Definizioni e proprietà principali	34
4.2 Spettro di un operatore illimitato	39
4.3 Condizioni di autoaggiunzione e di essenziale autoaggiunzione . .	42
5 Il teorema spettrale per operatori autoaggiunti illimitati	45
5.1 Enunciato del teorema spettrale per operatori autoaggiunti illimitati	45
5.2 Teorema spettrale per operatori normali limitati	52
5.3 Dimostrazione del teorema spettrale per operatori autoaggiunti illimitati	63
6 Applicazioni del teorema spettrale	70
6.1 Modellizzazione del problema	70
6.2 L'operatore Hamiltoniano	70
6.3 L'operatore aggiunto $\hat{H}^*$	73
6.4 Indici di difetto ed estensioni autoaggiunte	74
6.5 Applicazione del Teorema Spettrale	78
7 Appendice	81

1 Introduzione

Il teorema spettrale è un fondamento della matematica che nel corso dei secoli si è evoluto fino a diventare il ponte definitivo tra l'astrazione dell'analisi funzionale e la realtà fenomenologica della fisica. Esso ha permesso di utilizzare le teorie discrete legate al calcolo matriciale per affrontare problemi complessi nel continuo. Il teorema spettrale ha portato il linguaggio degli operatori ad essere l'unico alfabeto possibile per descrivere l'infinitamente piccolo. Inoltre, riesce a compiere tutti questi prodigi non complicando la questione, bensì semplificandola: citando i latini, si potrebbe dire che il teorema spettrale agisce secondo il motto "divide et impera", poichè scompone un operatore lineare complesso in una collezione di proiettori unidimensionali più semplici. Questa frammentazione non è fine a sè stessa, ma è volta a dominare la complessità dell'operatore, rendendo accessibili informazioni cruciali come i valori di osservazione e l'evoluzione temporale del sistema.

La sua storia non può che iniziare con un grande matematico, Augustin-Louis Cauchy, il quale nel 1820, accostandosi allo studio delle forme quadratiche e alle trasformazioni nello spazio delle figure geometriche, scoprì che ogni matrice simmetrica reale ha autovalori reali [4]. L'aggettivo "spettrale" venne però associato al teorema solo nel 1897 da Wilhelm Wirtinger, il quale accostò l'idea della luce che viene scomposta nel suo spettro attraverso un prisma retto, all'idea del teorema, che permette di scomporre un operatore nelle sue componenti elementari. Nei primi anni del '900 David Hilbert si cimentò nello studio delle equazioni integrali; volendo estendere il lavoro di Cauchy, si rese conto che non sempre esistono autovettori nel caso di spazi infinito-dimensionali: in sostanza le equazioni integrali possono intendersi come sistemi lineari infiniti, motivo per cui si dovette ricorrere all'introduzione del concetto di spettro continuo formulando così la prima versione del teorema spettrale per operatori limitati [5].

La necessità di ampliare il teorema ad operatori illimitati giunse solo con la nascita della meccanica quantistica: Come illustrato in [3], nel 1925 Werner Karl Heisenberg introdusse una teoria matriciale della meccanica quantistica e, contemporaneamente, Erwin Schrödinger sviluppò il concetto di funzione d'onda atto a strutturare la teoria appena nata. A differenza delle matrici però, molti operatori fisici non hanno autovalori discreti, bensì formano uno spettro continuo; la meccanica ondulatoria di Schrödinger necessitava proprio di una estensione del concetto di diagonalizzazione di una matrice per operatori illimitati. Infatti, in meccanica quantistica gli operatori che descrivono la posizione, il momento angolare o l'energia non sono limitati, ovvero possono assumere valori arbitrariamente grandi, ma la matematica di inizio XX secolo non era ancora in grado di gestirli rigorosamente. Sebbene i due metodi (matriciale e ondulatorio) fornissero essenzialmente gli stessi risultati, serviva un ponte matematico che dimostrasse l'effettiva equivalenza tra le due rappresentazioni: queste due idee apparentemente incompatibili furono unite da Paul Dirac mediante un formalismo molto poco rigoroso. Il mancato rigore di Dirac era dovuto all'introduzione della sua famigerata δ , che però a tutti gli effetti non è una funzione, sebbene i fisici la considerassero tale ([3]). Inoltre, il concetto di autovettore era utilizzato anche

per descrivere spazi illimitati che ne erano sprovvisti: da qui la necessità di introdurre l'idea di un autovettore generalizzato. Un discente di Hilbert, John von Neumann, mentre si trovava a Gottinga per i suoi studi, ricevette l'illuminazione necessaria per affrontare gli operatori illimitati; nel 1927 capì che il problema risiedeva nel dominio di tali operatori e che l'ambiente adatto a questi studi erano gli spazi di Hilbert: lo stato di un sistema fisico è rappresentato da un vettore in uno spazio di Hilbert complesso infinito-dimensionale, le osservabili sono operatori autoaggiunti lineari che agiscono sullo spazio e rappresentano quelle grandezze fisiche misurabili come la posizione, il momento angolare e l'energia, due diverse rappresentazioni del sistema sono semplicemente lo stesso vettore dello spazio di Hilbert scritto utilizzando due basi differenti. Così, mentre Stone nel 1929 studiava il suo celebre teorema associato ai gruppi ad un parametro, Von Neumann pubblicò un manoscritto atto a risolvere i limiti della teoria di Dirac: *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, ovvero *I fondamenti matematici della meccanica quantistica* [2]. Nell'introduzione di tale volume Von Neumann sottolineò proprio come la teoria di Dirac fosse tanto calzante da un punto di vista fisico, quanto insufficiente da un punto di vista formale: scopo del suo lavoro fu proprio quello di rendere rigorosa la matematica alla base della meccanica quantistica appena ipotizzata. Vi era innanzitutto tra i fisici un po' di confusione sull'attributo hermitiano: in tal senso lo stesso Von Neumann precisò come nel caso illimitato fosse necessario distinguere il concetto di operatore autoaggiunto dal concetto di operatore simmetrico. Tale differenza è imprescindibile nel caso di operatori illimitati su spazi infinito-dimensionali: senza tale distinzione è possibile trovare esempi di fenomeni fisici in cui, ad esempio, l'energia del sistema scompare nel nulla o appare dal nulla. Inoltre, formalizzò le misure spettrali, ovvero le misure a valori di proiettore, per definire il calcolo integrale su questi spettri continui, permettendo di decomporre così gli operatori autoaggiunti illimitati. Il lavoro di Von Neumann ha permesso a varie idee della meccanica quantistica di rientrare a far parte di una teoria matematica rigorosa. Con Von Neumann ci fu un cambio di direzione nella ricerca scientifica: se in passato spesso la matematica aveva seguito la fisica per giustificare i risultati ottenuti, adesso era la fisica a piegarsi alla teoria matematica per prevedere nuovi comportamenti fisici ed evitare errori concettuali.

La prima parte dello scritto seguente fungerà da introduzione storica alla fisica del '900 la quale, come appena sottolineato, fornì i presupposti per la formulazione del teorema ([3]). In seguito, dopo aver affrontato alcune definizioni e proprietà matematiche legate agli operatori limitati, si enuncerà e si dimostrerà il teorema spettrale per operatori autoaggiunti limitati. Infine, dopo aver osservato le proprietà fondamentali degli operatori illimitati, si formulerà e si dimostrerà il teorema spettrale anche per operatori illimitati. Le dimostrazioni dei teoremi e delle proposizioni illustrati in queste sezioni seguono le trattazioni di tali argomenti di [3] e [1]. L'ultima parte della tesi conterrà un'applicazione del teorema spettrale, la quale farà intravedere l'utilità pratica del teorema per evidenziare come esso non sia stato sviluppato solo per amore della ricerca, bensì per la sua importanza nel mondo reale. Infine, in una breve appendice, elencheremo quei concetti alla base della matematica che spesso verranno richiamati nel testo.

2 Contesto storico

2.1 Il dualismo onda-particella della luce

La meccanica quantistica deve la sua origine alla ricerca della risposta alla seguente domanda: "la luce è un'onda o è un insieme di particelle?". Già nel diciassettesimo secolo si discuteva in merito a questo dualismo sulla natura della luce: Isaac Newton sosteneva che la luce fosse costituita da corpuscoli, i quali potevano spiegare la tendenza della luce stessa a muoversi in linea retta; d'altro canto Christiaan Huygens sosteneva che la luce fosse un'onda, affinché fosse possibile spiegare i fenomeni di rifrazione osservabili quando la luce passa da un mezzo di propagazione a un altro. Data la reputazione di Newton in ambito scientifico internazionale, fu accettata la sua idea della natura corpuscolare della luce e così rimase fino al diciannovesimo secolo. Nel 1804 Thomas Young pubblicò due articoli che spiegavano le conclusioni tratte dal suo esperimento della doppia fenditura: la luce del sole veniva incanalata attraverso un piccolo buco in uno schermo, attraverso il quale essa poteva giungere verso un secondo schermo dotato questa volta di due fenditure. A questo punto i raggi luminosi attraversavano le due fenditure per giungere su di un terzo schermo sul quale era possibile osservare gli effetti dell'esperimento. La luce costruiva delle frange luminose più intense e delle frange luminose meno intense, quasi come se vi fosse dell'interferenza, costruttiva e distruttiva, tra i raggi luminosi che attraversavano l'una o l'altra fenditura. Evidenziò inoltre come tale risultato si sarebbe potuto ottenere eseguendo il medesimo procedimento utilizzando un liquido come l'acqua al posto della luce: si sarebbero osservati fenomeni di interferenza tra le onde generate dall'acqua. Grazie a questo esperimento Young fu anche in grado di misurare la lunghezza d'onda della luce utilizzata. Nonostante l'evidenza sperimentale, molti promotori della natura corpuscolare della luce non si convinsero e continuarono ad essere fedeli alla teoria newtoniana. Nel 1865 James Clerk Maxwell mise insieme quelle che noi oggi conosciamo come le equazioni di Maxwell, le quali dimostrano che le onde elettromagnetiche si muovono in linea retta ad una velocità costante di $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$; tale valore coincideva incredibilmente con la misura sperimentale della velocità della luce. Maxwell concluse allora che la luce doveva essere proprio un'onda elettromagnetica. Con questa ulteriore evidenza anche i più scettici dovettero arrendersi all'evidente natura ondulatoria della luce, almeno fino all'inizio del secolo successivo.

2.2 La radiazione di corpo nero

Dalla metà del 1800, grazie al fisico Gustav Kirchhoff, si iniziò a studiare la radiazione elettromagnetica emessa dai corpi, restò però insoluto per molti anni il problema della radiazione di corpo nero: il corpo nero è un sistema fisico ideale costituito da una cavità in grado di assorbire la totalità della radiazione elettromagnetica incidente su di essa (da cui il nome). Tutta l'energia assorbita dal corpo nero viene emessa sotto forma di energia termica; tale emissione dipende unicamente dalla temperatura del corpo e non dalle caratteristiche fisico-chimiche del materiale di cui il corpo è costituito. Nel 1900 Max Planck propone

una soluzione al problema della radiazione del corpo nero; tale soluzione implica l'introduzione di un concetto rivoluzionario, ovvero che lo scambio di energia tra le cariche elettriche che compongono il corpo e le onde elettromagnetiche da esso emesse varia in modo discreto e non continuo. Questa idea è talmente assurda, se osservata con gli occhi della fisica classica, da essere definita dallo stesso Planck come un "atto di disperazione", proprio perché implica la rinuncia alle leggi della fisica fino a quel momento assodate. Studiando modelli macroscopici sembra che tale scambio energetico sia continuo, in realtà è discreto ma i "salti" sono talmente piccoli da non essere percepiti se non a livello microscopico. Ogni scambio di energia tra materia e radiazione elettromagnetica nel corpo nero avviene per multipli interi di quantità minime di energia, detti quanti, secondo la legge:

$$E = hf, \quad (2.1)$$

dove E è l'energia scambiata, $h = 6,63 \times 10^{-34} J \cdot s$ è la costante di Planck, f è la frequenza della radiazione in Hertz.

2.3 L'effetto fotoelettrico

Nel 1887 Heinrich Rudolph Hertz osservò sperimentalmente che una radiazione elettromagnetica di frequenza sufficientemente elevata su di una lastra metallica causava l'emissione di elettroni. Philipp von Leonard dimostrò inoltre che l'intensità di radiazione non influenza l'energia cinetica degli elettroni emessi; l'emissione avviene infatti solo se si supera un certo valore di soglia della frequenza della radiazione. Anche se l'intensità è molto bassa, raggiunta la frequenza di soglia si verifica l'effetto fotoelettrico. La fisica classica sostiene che fornendo sufficiente energia agli elettroni essi iniziano ad oscillare e dopo sufficiente tempo vengono emessi, ciò dipende dall'intensità del raggio luminoso; in realtà avviene l'esatto contrario. Nel 1905 Albert Einstein si aggiudicò il nobel per la fisica pubblicando un articolo in grado di spiegare l'effetto fotoelettrico: in tale articolo teorizzò che la luce è composta da pacchetti discreti di energia, detti fotoni, che si propagano a velocità c . A ognuno di essi è associata un'energia data da $E = hf$ come sosteneva lo stesso Planck. L'aumento dell'intensità della radiazione non amplifica l'effetto, ma aumenta la densità dei fotoni e non la loro energia, la quale dipende solo dalla frequenza. Da questa dimostrazione di Einstein, nonostante le equazioni di Maxwell avessero convinto il mondo della natura ondulatoria della luce, tornò in auge anche la teoria corpuscolare; nel 1924 Arthur Holly Compton verificò sperimentalmente l'esistenza dei fotoni. Questi pacchetti di energia viaggiano alla velocità della luce e per questo motivo devono avere massa nulla, altrimenti ci sarebbe un'incongruenza con la teoria della relatività. Inoltre hanno una quantità di moto che aumenta con l'energia, e quindi con la frequenza, secondo la legge

$$p = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{f}{\lambda} \quad (2.2)$$

In accordo con la definizione di energia secondo Planck e con la definizione di lunghezza d'onda $\lambda = c/f$.

2.4 Il dualismo onda-particella della materia

Nel 1924 Louis De Broglie ipotizzò che, così come la luce, nonostante sembri un'onda, ha anche una natura corpuscolare, allora anche la materia, nonostante sembri formata da corpuscoli, deve avere una natura ondulatoria. Data allora una particella di quantità di moto p , definì la lunghezza d'onda di De Broglie della particella come

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (2.3)$$

Egli immaginò che le sue onde di materia assomigliassero alle vibrazioni di una corda fissata agli estremi: è noto che fissando una corda agli estremi e perturbandola si possano creare delle onde stazionarie, e così immaginò avvenisse anche per le particelle, sebbene la "corda" in questo caso non fosse fissata agli estremi, bensì fosse chiusa a formare una circonferenza. Tutta questa teoria, apparentemente frutto dell'immaginazione del suo ideatore, risultò in realtà perfettamente in accordo con la teoria di Niels Bohr e venne dimostrata sperimentalmente nel 1926 da Clinton Davisson e Lester Germer. Alla luce delle suddette scoperte, negli anni 60 del '900 si volle riprovare l'esperimento di Young con degli strumenti avanzati in grado di tracciare i movimenti degli elettroni. Sebbene venne mandato un elettrone alla volta attraverso le fenditure, in modo tale da evitare che tra di essi potesse esserci interferenza e nonostante furono tracciate le traiettorie di tali elettroni, dopo un certo numero di emissioni attraverso le due fenditure si verificarono nuovamente le frange più o meno intensamente illuminate. Questa evidenza sorprendente portò ad una sola conclusione: gli elettroni interferiscono con loro stessi. Inoltre, riproducendo l'esperimento con gli stessi parametri iniziali, si riscontrano esiti sempre differenti: gli elettroni non arrivano mai esattamente negli stessi punti, anche se la figura finale a frange rimane sempre uguale; sembra che il tutto sia regolato dalla casualità.

2.5 Heisenberg e Schrödinger

Nel 1925, Werner Heisenberg propose un modello quantistico basato sulla trattazione della posizione e del momento di una particella come una matrice a dimensione infinita. Nonostante lo studio delle matrici non fosse ancora parte integrante dell'istruzione universitaria destinata ai fisici, Max Born fu in grado di riconoscere nel suo lavoro una radicata struttura matriciale e la esplicitò in un articolo scritto a quattro mani con Pascual Jordan. Tutto ciò fu pubblicato nell'arco dello stesso anno e fece aggiudicare nel 1932 allo stesso Heisenberg il premio nobel per la fisica.

Sulla base delle evidenze di De Broglie, Erwin Schrödinger pubblicò nel 1926 quattro articoli nei quali propose una teoria ondulatoria della meccanica quantistica; Egli introdusse un'equazione per descrivere il comportamento delle onde di materia di De Broglie: l'equazione ha lo stesso ruolo che le leggi di Newton hanno nella meccanica classica e che le leggi di Maxwell hanno nell'elettromagnetismo. In meccanica quantistica il moto di una particella è dettato da una funzione, detta funzione d'onda, che dipende dallo spazio e dal tempo. Viene indicata con

la lettera greca ψ . Il modulo quadrato di tale funzione rappresenta la probabilità che una particella si trovi in una determinata regione dello spazio in un determinato istante di tempo. La rappresentazione migliore di tale concetto è la nuvola elettronica, ovvero l'idea che intorno all'atomo sia presente una nuvola di elettroni la cui densità è proporzionale alla probabilità di trovare un elettrone in una determinata regione di tale nuvola. In conclusione, l'esperimento di Young, letto alla luce della funzione d'onda, ci fa capire come il quadrato di ψ fornisca la probabilità che un elettrone colpisca un punto specifico dello schermo finale, ma non è in grado di determinare tale punto a priori.

L'interpretazione della teoria di Schrödinger fu data da Born e diede origine alla celebre interpretazione di Copenhagen. L'introduzione di elementi probabilistici nella fisica fu controversa: principale esponente della fazione contraria fu Einstein, del quale ricordiamo la famosa frase *Dio non gioca a dadi con l'universo*; nonostante ciò, l'interpretazione di Born del 1926 è rimasta essenzialmente invariata fino ad oggi.

Tra il 1926 e il 1928 Paul Dirac tentò di unificare le due teorie appena descritte dimostrando la loro equivalenza: creò un formalismo generale denominato *teoria della trasformazione* che permise di passare da una rappresentazione all'altra della stessa teoria sottostante. Introdusse inoltre una nuova notazione, detta *notazione bra-ket*, per descrivere gli stati quantistici e le osservabili negli spazi di Hilbert. Tale unificazione, ineccepibile da un punto di vista fisico, era però incerta da un punto di vista matematico: per ovviare ad alcuni problemi fisici, vennero commessi degli errori formali che negarono a tale teoria quella base matematica solida indispensabile per la sua trattazione. Con lo scopo di elevare la meccanica quantistica a teoria matematicamente rispettabile, John von Neumann pubblicò nel 1929 il libro *I fondamenti matematici della meccanica quantistica* [2] su cui sono basate le pagine seguenti.

2.6 Il problema dello spazio infinito-dimensionale

In algebra lineare il teorema spettrale afferma che una matrice simmetrica è sempre diagonalizzabile mediante una matrice ortogonale, ovvero che è sempre possibile trovare una base ortonormale di autovettori per la matrice. Interpretando le matrici come operatori lineari su spazi vettoriali, si può riformulare il teorema come segue:

Per ogni operatore lineare simmetrico è possibile trovare una base ortonormale dello spazio vettoriale su cui è definito, costituita da suoi autovettori.

In simboli, data A una matrice $n \times n$ autoaggiunta, ovvero una matrice che coincide con la sua trasposta coniugata, allora esiste una base ortonormale $\{v_j\}_{j=1}^n$ di $\mathbb{C}^n$ ed esistono i numeri reali $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, tali per cui

$$Av_j = \lambda_j v_j. \quad (2.4)$$

Si può giungere ad una conclusione analoga generalizzando il discorso ad uno spazio di Hilbert H di dimensione finita: sia A un operatore lineare autoaggiunto

su H , ovvero tale per cui $\langle \phi, A\psi \rangle = \langle A\phi, \psi \rangle$ per ogni $\phi, \psi \in H$, esiste allora una base ortonormale di H formata dagli autovettori di A .

Dal momento che il concetto di base ortonormale si può estendere agli spazi di Hilbert infinito-dimensionali, ci si aspetta che valga un analogo risultato; in realtà semplici esempi mostrano come ciò non avviene. Ad esempio, consideriamo lo spazio di Hilbert infinito-dimensionale $L^2([0, 1])$ e l'operatore autoaggiunto A definito da $(A\psi)(x) = x\psi(x)$, se $x\psi(x) = \lambda\psi(x)$, allora ψ dovrebbe avere supporto nell'insieme in cui $x = \lambda$ che però su $L^2([0, 1])$ ha misura nulla. Allora concludiamo che l'unico autovettore di A è il vettore nullo.

Dovremmo quindi concludere che non ci sono autovettori e che non è quindi possibile costruire una base ortonormale dello spazio di Hilbert dell'esempio. In realtà è possibile costruire degli "autovettori generalizzati", ovvero degli autovettori definiti su uno spazio più esteso di $L^2([0, 1])$, i quali emergono nella teoria se si introduce il concetto di distribuzione (questa l'idea poco rigorosa di Dirac citata nell'introduzione: la delta di Dirac $\delta(x - \lambda)$ è effettivamente un autovettore per l'operatore A appena definito, ma non è una funzione e non appartiene quindi allo spazio di Hilbert dell'esempio).

Un altro problema associato allo studio degli operatori autoaggiunti negli spazi infinito-dimensionali è legato al fatto che molti operatori autoaggiunti che si utilizzano in meccanica quantistica non sono limitati, ovvero non è possibile trovare una costante C tale che

$$\|A\psi\| \leq C\|\psi\|, \quad \forall \psi \in H. \quad (2.5)$$

Attraverso il teorema (7.1) del grafico chiuso è possibile dimostrare che un operatore A autoaggiunto definito su tutto lo spazio H deve essere per forza limitato, e da ciò deduciamo che gli operatori autoaggiunti illimitati non possono essere definiti su tutto H , bensì devono avere un dominio $Dom(A)$ strettamente contenuto in H , in particolare il dominio di A deve essere un sottospazio denso di H . Persino la definizione di operatore autoaggiunto risulta complicata nel caso illimitato: un operatore illimitato A si dice autoaggiunto se possiamo definire il suo aggiunto A^* , se $Dom(A) = Dom(A^*)$ e se A e A^* coincidono sui loro domini comuni. È quindi evidente da questo breve preambolo come il teorema spettrale nel caso infinito-dimensionale, associato alla presenza di operatori illimitati, sia decisamente più complicato da trattare.

La teoria spettrale ha come scopo quello di fornire delle regole di calcolo per riuscire ad applicare delle funzioni agli operatori, anche senza utilizzare gli autovettori dell'operatore, che magari non esistono. Inoltre ci fornirà una distribuzione di probabilità per il risultato della misurazione degli operatori autoaggiunti: ricordiamo che dato un operatore A avente una base ortonormale di autovettori $\{e_j\}$ con i relativi autovalori λ_j , dato un insieme di Borel E e detto V_E lo spazio vettoriale generato da quegli autovettori di A i cui autovalori sono contenuti in E , allora per ogni vettore unitario ψ la probabilità che il risultato della misurazione dell'osservabile A ricada nell'insieme di valori E è

$$prob_\psi(A \in E) = \langle \psi, P_E \psi \rangle \quad (2.6)$$

Dove P_E rappresenta la proiezione ortogonale su V_E . Inoltre, se scriviamo lo stato ψ come combinazione lineare degli elementi della base, ovvero se $\psi = \sum_j c_j e_j$, allora la probabilità di misurare esattamente il valore λ_j è proprio $|c_j|^2$, dal momento che P_{λ_j} è proprio la proiezione su e_j . Senza una base ortonormale, sarà proprio il teorema spettrale a fornire delle proiezioni spettrali e dei sottospazi spettrali atti a produrre una definizione di probabilità analoga a quella precedente.

3 Il teorema spettrale per operatori autoaggiunti limitati

In questa sezione verranno enunciate le principali definizioni e proprietà relative agli operatori limitati, utili per la dimostrazione del teorema spettrale; in seguito si enuncerà e dimostrerà tale teorema. Laddove verrà citato lo spazio H , si intenderà uno spazio di Hilbert separabile su $\mathbb{C}$, ovvero uno spazio di Hilbert che possiede una base ortonormale al più numerabile.

3.1 Proprietà elementari sugli operatori limitati

Definizione 3.1. *Sia H uno spazio di Hilbert separabile, un operatore lineare A su H è detto **limitato** se è finita la sua norma operatoriale*

$$\|A\| := \sup_{\psi \in H \setminus \{0\}} \frac{\|A\psi\|}{\|\psi\|} \quad (3.1)$$

Lo spazio di Banach degli operatori limitati su H , rispetto a tale norma operatoriale, si indica con $B(H)$

Per ogni elemento di $B(H)$ esiste un unico operatore A^* , anch'esso limitato, chiamato l'**aggiunto** di A , tale che

$$\langle \phi, A\psi \rangle = \langle A^*\phi, \psi \rangle, \quad \forall \phi, \psi \in H \quad (3.2)$$

Un operatore limitato è detto **autoaggiunto** se $A^* = A$ ed è detto **non negativo** se

$$\langle \psi, A\psi \rangle \geq 0, \quad \forall \psi \in H. \quad (3.3)$$

Proposizione 3.2. *Per ogni operatore limitato A*

1. $\|A\| = \|A^*\|$
2. $\|A^*A\| = \|A\|^2$
3. Se A è autoaggiunto, $\|A^2\| = \|A\|^2$

Dimostrazione. 1. La norma operatoriale può essere definita anche

$$\|A\| = \sup_{\|\psi\|=1} \|A\psi\| \quad (3.4)$$

Inoltre, per ogni vettore $\psi \in H$, grazie alla disuguaglianza di Cauchy-Schwartz (Proposizione 7.5)

$$\|\psi\| = \sup_{\|\chi\|=1} |\langle \chi, \psi \rangle| \quad (3.5)$$

infatti, se $|\langle x, \psi \rangle| \leq \|x\| \cdot \|\psi\|$, facendo il *sup* su $\|x\| = 1$ si ottiene che $|\langle x, \psi \rangle| \leq \|\psi\|$ e il massimo si raggiunge proprio in $\|\psi\|$. Equivalentemente

si può osservare che se $\chi = \frac{\psi}{\|\psi\|}$, allora $\|\chi\| = 1$ ed effettivamente $|\langle \chi, \psi \rangle| = \|\psi\|$, quindi il sup sui χ di norma 1 deve essere sicuramente maggiore di $\|\psi\|$, ma per Cauchy-Schwarz vale anche la disuguaglianza opposta, e allora vale l'uguaglianza.

Possiamo allora definire la norma di A sostituendo nella formula precedente ψ con $A\psi$

$$\|A\| = \sup_{\|\psi\|=\|\chi\|=1} |\langle \chi, A\psi \rangle|. \quad (3.6)$$

Da ciò segue, ricordando che il modulo del prodotto scalare è simmetrico, che

$$\begin{aligned} \|A^*\| &= \\ &= \sup_{\|\psi\|=\|\chi\|=1} |\langle \chi, A^*\psi \rangle| = \\ &= \sup_{\|\psi\|=\|\chi\|=1} |\langle A\chi, \psi \rangle| \\ &= \sup_{\|\psi\|=\|\chi\|=1} |\langle \psi, A\chi \rangle| \\ &= \|A\| \end{aligned} \quad (3.7)$$

2. Per sub-moltiplicatività della norma sappiamo che $\|A^*A\| \leq \|A^*\| \cdot \|A\| = \|A\|^2$; D'altro canto però, per definizione di norma operatoriale su $B(H)$, si ha

$$\begin{aligned} \|A^*A\| &= \\ &= \sup_{\|\psi\|=\|\chi\|=1} |\langle \chi, A^*A\psi \rangle| = \\ &= \sup_{\|\psi\|=\|\chi\|=1} |\langle A\chi, A\psi \rangle| \\ &\geq \sup_{\|\psi\|=1} |\langle A\psi, A\psi \rangle| \\ &= \|A\|^2 \end{aligned} \quad (3.8)$$

La disuguaglianza nella catena di espressioni precedenti è garantita dal fatto che si sta facendo il *sup* su tutti i vettori ψ e χ di norma unitaria: se consideriamo un caso particolare, ovvero il caso in cui $\chi = \psi$, si troverà sicuramente qualcosa di minore o uguale.

3. Essendo A autoaggiunto, $A^* = A$ e quindi $A^*A = AA = A^2$. Grazie al punto 2. si conclude

■

Proposizione 3.3. Per ogni $A \in B(H)$,

$$(Im(A))^\perp = Ker(A^*) \quad (3.9)$$

Dove il membro di sinistra rappresenta l'ortogonale dell'immagine dell'operatore A e il membro di destra rappresenta il nucleo dell'operatore aggiunto di A

Dimostrazione.

Supponiamo che $\psi \in (Im(A))^\perp$, allora $\forall \phi \in H$

$$0 = \langle \psi, A\phi \rangle = \langle A^*\psi, \phi \rangle \quad (3.10)$$

e per arbitrarietà di ϕ ciò implica che l'operatore $A^*\psi$ è nullo, ovvero che $\psi \in Ker(A^*)$.

Viceversa, se $\psi \in Ker(A^*)$, allora per ogni $\phi \in H$ continua a valere la (3.10) e leggendola da destra verso sinistra osserviamo che ψ risulta ortogonale agli elementi $A\phi$; per arbitrarietà di ϕ osserviamo che $\psi \perp Im(A)$, ovvero che $\psi \in (Im(A))^\perp$

■

Osservazione 3.4. Osserviamo che, se

$$(Im(A))^\perp = Ker(A^*) \quad (3.11)$$

allora

$$((Im(A))^\perp)^\perp = (Ker(A^*))^\perp \quad (3.12)$$

ricordando che l'ortogonale dell'ortogonale di uno spazio coincide con la chiusura di tale spazio, si ottiene

$$\overline{(Im(A))^\perp} = (Ker(A^*))^\perp \quad (3.13)$$

Anche se intuitivamente penseremmo che $(S^\perp)^\perp = S$ per ogni spazio S , in realtà ciò vale solo se lo spazio è chiuso; se non fosse chiuso potrebbero esistere delle successioni limitate di elementi di S i cui limiti appartenerebbero a $(S^\perp)^\perp$, essendo quest'ultimo chiuso, ma non appartenerebbero ad S , invalidando l'uguaglianza.

Definizione 3.5. Per ogni elemento A di $B(H)$, l'**insieme risolvente** di A , denotato con $\rho(A)$, è l'insieme dei $\lambda \in \mathbb{C}$ tali che $(A - \lambda I)$ è un operatore limitato invertibile con inverso anch'esso limitato. Il complementare di $\rho(A)$ in $\mathbb{C}$ è detto lo **spettro** di A ed è indicato con $\sigma(A)$. L'operatore limitato $(A - \lambda I)^{-1}$ è detto il **risolvente** di A in λ .

Dire che $A - \lambda I$ ha un inverso limitato significa che esiste $B \in B(H)$ tale che

$$(A - \lambda I)B = B(A - \lambda I) = I \quad (3.14)$$

Dal teorema (7.1) del grafico chiuso, la limitatezza di B è garantita dalla limitatezza di A , ovvero tale teorema garantisce che se l'operatore è biunivoco, allora la mappa inversa è continua.

Proposizione 3.6. Per ogni operatore limitato A su H :

1. $\sigma(A)$ è un sottoinsieme chiuso, limitato e non vuoto di $\mathbb{C}$
2. Se $|\lambda| > \|A\|$, allora $\lambda \in \rho(A)$
3. Se A è autoaggiunto, $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$

4. Se A è autoaggiunto, $\lambda \in \mathbb{R}$ appartiene a $\sigma(A)$ se e solo se esiste una successione ψ_n di vettori non nulli di H tali che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\|A\psi_n - \lambda\psi_n\|}{\|\psi_n\|} = 0 \quad (3.15)$$

Per dimostrare questa proposizione si utilizzano due lemmi:

Lemma 3.7. Sia $X \in B(H)$ tale che $\|X\| < 1$, allora l'operatore $I - X$ è invertibile, con inversa data dalla seguente serie convergente in $B(H)$

$$(I - X)^{-1} = I + X + X^2 + X^3 + \dots \quad (3.16)$$

Dimostrazione.

Per la sub-moltiplicatività della norma operatoriale definita in (3.1), si ha che $\|X^m\| \leq \|X\|^m$.

Deduciamo quindi che la serie geometrica $\sum_{i=0}^{\infty} X^i$ è convergente, essendo per ipotesi $\|X\| < 1$. Moltiplicando quindi tale serie per $I - X$ si ottiene l'identità, dimostrando che essa è proprio l'inversa di $(I - X)$

$$\begin{aligned} (I - X)(I + X + X^2 + X^3 + \dots) &= \\ &= I - X + X - X^2 + X^2 - X^3 + \dots = I \end{aligned} \quad (3.17)$$

■

Lemma 3.8. Se $A \in B(H)$ è autoaggiunto, allora $\forall \lambda = a + ib \in \mathbb{C}$ si ha

$$\langle (A - \lambda I)\psi, (A - \lambda I)\psi \rangle \geq b^2 \langle \psi, \psi \rangle \quad (3.18)$$

Dimostrazione.

Svolgendo il calcolo diretto otteniamo che

$$\begin{aligned} &\langle (A - (a + ib)I)\psi, (A - (a + ib)I)\psi \rangle = \\ &= \langle A\psi - a\psi - ib\psi, A\psi - a\psi - ib\psi \rangle = \\ &= \langle ((A - aI) - ibI)\psi, ((A - aI) - ibI)\psi \rangle = \\ &= \langle (A - aI)\psi, (A - aI)\psi \rangle + \langle (A - aI)\psi, -ibI\psi \rangle \\ &+ \langle -ibI\psi, (A - aI)\psi \rangle + \langle -ibI\psi, -ibI\psi \rangle = \\ &= \langle (A - aI)\psi, (A - aI)\psi \rangle - ib\langle (A - aI)\psi, \psi \rangle + \\ &+ \overline{(-ib)}\langle \psi, (A - aI)\psi \rangle + \overline{(-ib)}(+ib)\langle \psi, \psi \rangle = \\ &= \langle (A - aI)\psi, (A - aI)\psi \rangle + ib\langle \psi, (A - aI)\psi \rangle \\ &- ib\langle (A - aI)\psi, \psi \rangle + b^2\langle \psi, \psi \rangle \end{aligned} \quad (3.19)$$

Dal momento che A è autoaggiunto, allora anche $A - aI$ lo è essendo $a \in \mathbb{R}$, infatti

$$(A - aI)^* = A^* - \bar{a}I = A^* - aI = A - aI \quad (3.20)$$

da ciò deduciamo che il secondo e terzo termine dell'espressione precedente sono opposti e si cancellano, da cui

$$\begin{aligned} \langle (A - (a + ib)I)\psi, (A - (a + ib)I)\psi \rangle &= \\ &= \langle (A - aI)\psi, (A - aI)\psi \rangle + b^2 \langle \psi, \psi \rangle = \\ &= \|(A - aI)\psi\|^2 + b^2 \langle \psi, \psi \rangle \geq b^2 \langle \psi, \psi \rangle \end{aligned} \quad (3.21)$$

■

Dimostrazione (Della Proposizione (3.6)).

Per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ non nullo, consideriamo l'operatore

$$A - \lambda I = -\lambda \left(I - \frac{A}{\lambda} \right) \quad (3.22)$$

Se $|\lambda| > \|A\|$ allora $\|\frac{A}{\lambda}\| < 1$ e $I - \frac{A}{\lambda}$ è invertibile per il primo lemma con inverso limitato $\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{A}{\lambda} \right)^i$.

Segue quindi che

$$(A - \lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{A}{\lambda} \right)^i = -\frac{1}{\lambda} \left(I + \frac{A}{\lambda} + \frac{A^2}{\lambda^2} + \dots \right) \quad (3.23)$$

Per definizione, $\lambda \in \rho(A)$, perché per il lemma l'inverso è limitato. Questo dimostra il punto 2. della proposizione e mostra che $\sigma(A)$ è limitato, essendo il complementare di $\rho(A)$ ed avendo appena dimostrato che tutti i λ con modulo maggiore di $\|A\|$ appartengono a $\rho(A)$, ovvero che quest'ultimo è illimitato in $\mathbb{C}$. Per comprendere a fondo questo passaggio dobbiamo osservare che la dimostrazione ci ha permesso di vedere che $\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| > \|A\|\}$, e questo è evidentemente un insieme illimitato, di conseguenza lo spettro, ovvero il complementare dell'insieme risolvente nei complessi, deve essere limitato, trattandosi di dischi.

Supponiamo ora che $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ sia nel risolvente di A , allora

$$\begin{aligned} A - \lambda I &= A - \lambda_0 I - (\lambda - \lambda_0)I = \\ &= (A - \lambda_0 I)(I - (\lambda - \lambda_0)(A - \lambda_0 I)^{-1}) \end{aligned} \quad (3.24)$$

Nel caso in cui

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|(A - \lambda_0 I)^{-1}\|} \quad (3.25)$$

allora entrambi i fattori del membro di destra dell'equazione (3.24) sarebbero invertibili e limitati, da cui risulterebbe invertibile anche $A - \lambda I$, ovvero avremmo $\lambda \in \rho(A)$. Allora, per ogni $\lambda \in \rho(A)$ esiste un intorno di λ_0 i cui punti appartengono tutti a $\rho(A)$. $|\lambda - \lambda_0|$ è l'intorno di λ_0 di raggio $\frac{1}{\|(A - \lambda_0 I)^{-1}\|}$.

Concludiamo quindi che l'insieme risolvente di A è aperto e di conseguenza lo spettro di A è chiuso.

Per concludere la dimostrazione del punto 1. bisogna ancora mostrare che $\sigma(A)$ è non vuoto. Osserviamo che, grazie al lemma, l'inverso di $A - \lambda I$ è

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)^{-1} &= (I - (\lambda - \lambda_0)(A - \lambda_0 I)^{-1})^{-1}(A - \lambda_0 I)^{-1} = \\ &= \left(\sum_{m=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^m ((A - \lambda_0 I)^{-1})^m \right) (A - \lambda_0 I)^{-1} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Allora la funzione

$$\lambda \mapsto \langle \phi, (A - \lambda I)^{-1} \psi \rangle \quad (3.27)$$

è localmente definita dalla serie di potenze appena scritta, avente coefficienti in $\mathbb{C}$, da cui si deduce che è olomorfa in $\rho(A)$ (che è il suo disco di convergenza). Tale serie di potenze, convergente per il lemma 1, è scritta intorno a λ_0 .

Osserviamo che $\|(A - \lambda I)^{-1}\|$ tende a zero all'aumentare di $|\lambda|$ per la (3.23) e di conseguenza la funzione olomorfa appena scritta tende a zero all'infinito.

Osserviamo per chiarezza che, grazie alla (3.26)

$$\langle \phi, (A - \lambda I)^{-1} \psi \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \langle \phi, (A - \lambda_0 I)^{-m-1} \psi \rangle (\lambda - \lambda_0)^m \quad (3.28)$$

Se $\sigma(A)$ fosse vuoto, allora tale funzione sarebbe olomorfa su tutto $\mathbb{C}$ perché $\rho(A) = \mathbb{C}$ e tendendo a zero all'infinito, per il teorema di Liouville dovrebbe essere identicamente nulla per ogni ϕ e ψ , ma allora dovrebbe essere nullo l'operatore $(A - \lambda I)^{-1}$, ma dal momento che $(A - \lambda I)(A - \lambda I)^{-1} = I$, esso non può essere nullo e quindi si ha un assurdo. Concludiamo allora che $\sigma(A) \neq \emptyset$, dimostrando il punto 1.

Per il punto 3. della proposizione, dobbiamo mostrare che se $\lambda = a + ib$ con $b \neq 0$ allora $\lambda \in \rho(A)$. Dal momento che $b \neq 0$ per il secondo lemma abbiamo che $A - \lambda I$ è iniettivo, perché se così non fosse vorrebbe dire che il suo nucleo conterrebbe almeno un elemento $\psi \neq 0$ tale che $(A - \lambda I)\psi = 0$, da cui $\|(A - \lambda I)\psi\| = 0$, ma abbiamo dimostrato nel lemma che $\|(A - \lambda I)\psi\| \geq b\|\psi\|$, da cui $0 \geq b\|\psi\|$ che è assurdo a meno che ψ non sia nullo.

Dal momento che λ ha parte immaginaria non nulla, anche $A - \bar{\lambda}I$ è iniettivo e quindi l'immagine di $A - \lambda I$ è densa in H .

Ricordiamo infatti che se un operatore è iniettivo e ha quindi il nucleo che contiene solo 0, allora per la proposizione (3.3), la chiusura dell'ortogonale dell'immagine dell'operatore aggiunto deve contenere il solo elemento 0, ma allora la chiusura della sua immagine è tutto H , e quindi la sua immagine è densa in H . In generale, la chiusura dell'immagine di un operatore coincide con l'ortogonale del nucleo dell'operatore aggiunto

Per mostrare che l'immagine è tutto H consideriamo il vettore $\phi \in H$ e scegliamo una successione di $\phi_n = (A - \lambda I)\psi_n$ nell'immagine di $A - \lambda I$ con $\phi_n \rightarrow \phi$. Si osserva che la successione degli ψ_n è di Cauchy, infatti

$$\begin{aligned} \langle (A - \lambda I)\psi_n, (A - \lambda I)\psi_m \rangle &\geq b^2 \langle \psi_n, \psi_m \rangle \quad \text{per il secondo lemma} \\ \langle \phi_n, \phi_m \rangle &\geq b^2 \langle \psi_n, \psi_m \rangle \\ \|\psi_n - \psi_m\| &\leq \frac{1}{b} \|\phi_n - \phi_m\| < \epsilon \quad (\phi_n)_n \text{ convergente, quindi di Cauchy} \end{aligned} \quad (3.29)$$

quindi convergente ad un certo $\psi \in H$. Essendo A limitato si ha

$$(A - \lambda I)\psi = \lim_{n \rightarrow \infty} (A - \lambda I)\psi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n = \phi \quad (3.30)$$

Si conclude che $A - \lambda I$ è biiettivo con inverso limitato grazie al teorema del grafico chiuso (7.1). Allora $\lambda \in \rho(A)$. Però per ipotesi $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ e quindi ogni λ complesso non reale sta nel risolvente, di conseguenza lo spettro contiene solo λ reali e quindi $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.

Per il punto 4. assumiamo che esista una successione ψ_n come nell'enunciato della proposizione e supponiamo che $A - \lambda I$ abbia un'inversa. Sia $\phi_n = (A - \lambda I)\psi_n$, allora $\psi_n = (A - \lambda I)^{-1}\phi_n$ e quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|\phi_n\|}{\|(A - \lambda I)^{-1}\phi_n\|} = 0 \quad (3.31)$$

mostrando che $(A - \lambda I)^{-1}$ è illimitato, perché se fosse limitato esisterebbe una costante C tale che $\|(A - \lambda I)^{-1}\phi_n\| \leq C\|\phi_n\|$, ovvero tale che $\frac{\|\phi_n\|}{\|(A - \lambda I)^{-1}\phi_n\|} \geq \frac{1}{C}$, però il membro di sinistra è infinitesimo per ipotesi e ciò conferma il fatto che l'inversa non sia limitata.

Allora $A - \lambda I$ non ha un'inversa limitata, perciò $\lambda \in \sigma(A)$.

Viceversa, se per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$ non esiste una tale successione, allora esiste un certo $\epsilon > 0$ tale che

$$\|(A - \lambda I)\psi\| \geq \epsilon\|\psi\|, \quad \forall \psi \in H \quad (3.32)$$

ovvero tale che $\frac{\|(A - \lambda I)\psi\|}{\|\psi\|}$ non tenda a 0, allora, come nel punto 3., $A - \lambda I$ è iniettiva e l'immagine dell'operatore autoaggiunto $A - \lambda I$ è densa in H . Inoltre tale immagine è anche chiusa e quindi è tutto H , allora $A - \lambda I$ è invertibile e quindi λ non appartiene allo spettro di A

■

Osservazione 3.9. Osserviamo che se $A\psi = \lambda\psi$ per qualche λ complesso, allora $(A - \lambda I)$ ha un nucleo non vuoto, perché contiene ψ , e quindi $\lambda \in \sigma(A)$ per la non iniettività di $A - \lambda I$. Allora, ogni autovalore di A è contenuto nello spettro di A . Nel caso infinito-dimensionale non è però detto che ogni elemento dello spettro sia un autovalore per A .

Il punto 4. della proposizione fornisce la definizione di "quasi autovalore", ovvero suggerisce che un numero reale appartiene allo spettro di A se e solo se esiste un vettore ψ per cui $A\psi$ è uguale a $\lambda\psi$, a meno di un errore (minimo, se comparato con ψ).

3.2 Teorema spettrale per operatori autoaggiunti limitati

Lo scopo di questa sezione è fornire le basi per la dimostrazione del teorema spettrale per operatori limitati.

Dato un operatore limitato e autoaggiunto A , vorremmo associare ad ogni insieme di Borel $E \subset \sigma(A)$ (Definizione 7.2), un sottospazio chiuso di H , V_E . Intuitivamente, V_E sarà lo spazio vettoriale generato da quegli autovettori generalizzati di A i cui autovalori sono contenuti in E . Si potrebbe estendere tale concetto per ogni $E \subset \mathbb{R}$, ma non ci aspettiamo alcun contributo da $\mathbb{R} \setminus \sigma(A)$ dato che abbiamo osservato in precedenza che ogni autovalore di A è contenuto nel suo spettro.

I sottospazi chiusi V_E godranno delle seguenti proprietà:

1. $V_{\sigma(A)} = H$ e $V_\emptyset = \{0\}$
2. $E \cap F = \emptyset \Rightarrow V_E \perp V_F$
3. $V_{E \cap F} = V_E \cap V_F$
4. Siano $E_1, E_2, \dots$ disgiunti, sia $E = \bigcup_j E_j$ allora

$$V_E = \bigoplus_j V_{E_j} \quad (3.33)$$

5. V_E è invariante per A , per ogni E ovvero $\forall x \in V_E, Ax \in V_E$
6. Se $E \subset [\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon]$ e $\psi \in V_E$, allora

$$\|(A - \lambda_0 I)\psi\| \leq \epsilon \|\psi\| \quad (3.34)$$

Dalle condizioni appena imposte sugli spazi V_E osserviamo che, essendo $V_{\sigma(A)} = H$ allora gli autovettori generalizzati di A dovranno generare tutto H ; inoltre dal punto 2. notiamo che tra autovettori generalizzati distinti esiste una sorta di ortogonalità, che si riflette poi negli spazi da essi generati (nel caso classico, se v e w sono autovettori per A autoaggiunto con autovalori distinti λ e μ rispettivamente, allora $\langle Av, w \rangle = \langle v, Aw \rangle$ e per definizione di autovettore otteniamo che $(\lambda - \mu)\langle v, w \rangle = 0$; essendo gli autovalori distinti per ipotesi, si ha che $\langle v, w \rangle = 0$, ovvero che gli autovettori distinti di un operatore autoaggiunto limitato sono tra loro ortogonali). Nel punto 4. abbiamo utilizzato il concetto di somma diretta Hilbertiana (Definizione 7.3). Infine dai punti 5. e 6. deduciamo che gli spazi V_E sono degli spazi generati da quegli autovettori generalizzati di A i cui autovalori generalizzati sono contenuti in E .

I sottospazi chiusi appena descritti sono detti **sottospazi spettrali**

Conviene ai nostri scopi descrivere i sottospazi chiusi di H mediante gli operatori di proiezione ortogonale ad essi associati. Ricordando quindi la proposizione (7.7) definiamo l'operatore proiezione ortogonale su V , ovvero un operatore autoaggiunto e idempotente che coincide con l'identità sullo spazio V ed è nullo sul

suo ortogonale. La seguente definizione esprime alcune proprietà dei sottospazi spettrali, servendosi degli operatori proiezione ortogonale associati; dalla somiglianza di questa definizione con la definizione di misura, chiameremo misura la seguente mappa

Definizione 3.10. Dato X un insieme e Ω una σ -algebra su X , la mappa $\mu : \Omega \mapsto B(H)$ è detta una **misura a valori di proiettore** se sono soddisfatte le seguenti proprietà:

1. per ogni $E \in \Omega$, $\mu(E)$ è una proiezione ortogonale
2. $\mu(\emptyset) = 0$ e $\mu(X) = I$
3. siano $E_1, E_2, E_3 \dots \in \Omega$ disgiunti, sia $v \in H$ allora

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right)v = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)v \quad (3.35)$$

4. per ogni $E_1, E_2 \in \Omega$, si ha che $\mu(E_1 \cap E_2) = \mu(E_1)\mu(E_2)$

Osservazione 3.11. Il punto 3. suggerisce che se gli spazi E_j sono disgiunti, allora la misura dell'unione è la somma delle misure dei singoli spazi; questa è la condizione di σ -additività per la misura spettrale

Notiamo dalla definizione che se gli spazi E_1 e E_2 sono disgiunti, allora $\mu(E_1)\mu(E_2) = 0$, ovvero le immagini delle due proiezioni sono ortogonali. Inoltre, si può mostrare che $\mu(E_1)\mu(E_2)$ sia proprio la proiezione ortogonale sullo spazio intersezione delle immagini di $\mu(E_1)$ e di $\mu(E_2)$. Possiamo allora definire i sottospazi spettrali come le immagini di μ , ovvero

$$V_E = \text{Im}(\mu(E)), \quad \forall E \in \Omega \quad (3.36)$$

così facendo vengono soddisfatte le prime 4 proprietà di V_E elencate all'inizio della sezione:

1. $V_X = \text{Im}(\mu(X)) = \text{Im}(I) = H$
2. $V_{\emptyset} = \text{Im}(\mu(\emptyset)) = \text{Im}(0) = \{0\}$
3. $E \cap F = \emptyset \rightarrow \mu(E) \perp \mu(F) \rightarrow \text{Im}(\mu(E)) \perp \text{Im}(\mu(F)) \rightarrow V_E \perp V_F$
4. $V_{E \cap F} = \text{Im}(\mu(E \cap F)) = \text{Im}(\mu(E)\mu(F)) = \text{Im}(\mu(E)) \cap \text{Im}(\mu(F)) = V_E \cap V_F$
5. E_i disgiunti, $E = \bigcup_i E_i$ allora

$$V_E = \text{Im}(\mu(E)) = \text{Im}\left(\sum_i \mu(E_i)\right) = \bigoplus_i \text{Im}(\mu(E_i)) = \bigoplus_i V_{E_i} \quad (3.37)$$

Osserviamo che per ogni misura a valori di proiettore μ e per ogni vettore $\psi \in H$, possiamo costruire una misura positiva a valori reali μ_ψ come segue

$$\mu_\psi(E) = \langle \psi, \mu(E)\psi \rangle \quad \forall E \in \Omega \quad (3.38)$$

Questa osservazione permette di fare un collegamento tra l'integrazione classica rispetto ad una misura a valori reali e l'integrazione rispetto ad una misura a valori di proiettore

Proposizione 3.12. *Dato X un insieme e Ω una σ -algebra su X , sia la mappa $\mu : \Omega \mapsto B(H)$ una misura a valori di proiettore. Esiste un'unica mappa lineare $f \mapsto \int_\Omega f d\mu$, dallo spazio delle funzioni limitate misurabili a valori complessi su Ω allo spazio degli operatori limitati su H , tale che*

$$\left\langle \psi, \left(\int_X f d\mu \right) \psi \right\rangle = \int_X f d\mu_\psi \quad (3.39)$$

per ogni f e per ogni $\psi \in H$, con μ_ψ data dall'osservazione precedente. Tale integrale gode anche delle seguenti proprietà:

1. Per ogni $E \in \Omega$,

$$\int_X 1_E d\mu = \mu(E) \quad (3.40)$$

In particolare, l'integrale della funzione costantemente 1 è I

2. Per ogni f ,

$$\left\| \int_X f d\mu \right\| \leq \sup_{\lambda \in X} |f(\lambda)| \quad (3.41)$$

3. L'integrazione è moltiplicativa: Per ogni f e g ,

$$\int_X fg d\mu = \left(\int_X f d\mu \right) \left(\int_X g d\mu \right) \quad (3.42)$$

4. per ogni f ,

$$\int_X \bar{f} d\mu = \left(\int_X f d\mu \right)^* \quad (3.43)$$

in particolare, se f è a valori reali allora $\int_X f d\mu$ è un operatore autoaggiunto

Sebbene la proprietà 3. sulla moltiplicatività di questo integrale sembri stonare con le classiche proprietà degli integrali, si può osservare che grazie al punto 4. della definizione di misura a valori di proiettore e ricordando che $1_{A \cap B}(x) = 1_A(x) \cdot 1_B(x)$, si ha che

$$\begin{aligned} \left(\int_X 1_{E_1} d\mu \right) \left(\int_X 1_{E_2} d\mu \right) &= \mu(E_1)\mu(E_2) = \mu(E_1 \cap E_2) = \\ &= \int_X 1_{E_1} \cdot 1_{E_2} d\mu \end{aligned} \quad (3.44)$$

Per avere una misura reale moltiplicativa, dovremmo avere una misura idempotente, ma in $\mathbb{R}$ non ci sono misure non banali che ci permettano di definire un integrale moltiplicativo. Viceversa, in $B(H)$ ci sono molti operatori idempotenti, per cui la definizione di misura a valori operatoriali prende significato.

Osserviamo che la proprietà 2. della proposizione garantisce che una funzione limitata f , ovvero una funzione in cui il $\sup$ sia finito, genera necessariamente un operatore associato anch'esso limitato. Ciò permette quindi di passare dalla funzione f al suo operatore $\int f$ senza che quest'ultimo esploda.

Dimostrazione (della proposizione 3.12).

Data una misura a valori di proiettore μ e una funzione misurabile limitata f su X , definiamo una mappa $Q_f : H \mapsto \mathbb{C}$ ponendo

$$Q_f(\psi) = \int_X f d\mu_\psi,$$

dove μ_ψ è data dalla definizione della misura. Se f è una funzione indicatrice, allora $Q_f(\psi) = \mu_\psi(E) = \langle \psi, \mu(E)\psi \rangle$ è una forma quadratica limitata per definizione. È immediato mostrare, passando dalle funzioni indicatrici, alle funzioni semplici e quindi alle funzioni generali, che per ogni f misurabile limitata, Q_f è una forma quadratica limitata, con

$$|Q_f(\psi)| \leq \left(\sup_{\lambda \in X} |f(\lambda)| \right) \|\psi\|^2.$$

Questa stima si ottiene perché

$$\mu_\psi(X) = \langle \psi, \mu(X)\psi \rangle = \langle \psi, I\psi \rangle = \|\psi\|^2 \quad (3.45)$$

quindi:

$$|Q_f(\psi)| \leq \|f\|_\infty \cdot \mu_\psi(X) = \|f\|_\infty \cdot \|\psi\|^2$$

Segue allora (Teorema 7.9) che esiste un unico operatore limitato A_f tale che

$$Q_f(\psi) = \langle \psi, A_f \psi \rangle$$

per ogni $\psi \in H$. Poniamo $\int_X f d\mu = A_f$. Dal modo in cui A_f è definito, esso soddisfa le proprietà richieste. L'unicità della mappa lineare $f \mapsto \int_X f d\mu$ segue dall'unicità dell'operatore.

Se $f = 1_E$, allora $Q_f(\psi) = \mu_\psi(E) = \langle \psi, \mu(E)\psi \rangle$, nel qual caso l'unico operatore associato A_f è $\mu(E)$. Questo stabilisce la Proprietà 1. La Proprietà 2 segue dalla disuguaglianza precedente nel quale si stima $|Q_f(\psi)|$.

Per la Proprietà 3, abbiamo già osservato che la moltiplicatività dell'integrale, a livello di funzioni indicatrici, è incorporata nella definizione di misura a valori di proiezione. Poiché entrambi i membri sono bilineari in (ϕ, ψ) , la proprietà vale per le funzioni semplici. Usando la Proprietà 2, possiamo quindi ottenere la proprietà per tutte le funzioni misurabili limitate, passando al limite.

Infine, se f è a valori reali, allora $Q_f(\psi)$ sarà reale per ogni $\psi \in \mathbf{H}$. Pertanto, l'operatore associato A_f sarà autoaggiunto. La Proprietà 4 segue quindi per linearità. ■

Siamo finalmente pronti per enunciare il teorema spettrale per operatori autoaggiunti limitati

Teorema 3.13. *Sia $A \in B(H)$ un operatore autoaggiunto, esiste un'unica misura a valori di proiettore μ^A sulla σ -algebra di Borel su $\sigma(A)$ a valori nelle proiezioni su H , tale che*

$$\int_{\sigma(A)} \lambda d\mu^A(\lambda) = A \quad (3.46)$$

Dal momento che lo spettro di A è limitato, la funzione $f(\lambda) = \lambda$ è limitata su $\sigma(A)$

Prima di procedere con la dimostrazione del teorema, definiamo il calcolo funzionale per l'operatore A , attraverso la misura introdotta, e definiamo i suddetti sottospazi spettrali.

Definizione 3.14. *Sia A un operatore autoaggiunto e $f : \sigma(A) \mapsto \mathbb{C}$ una funzione misurabile e limitata, definiamo l'operatore $f(A)$*

$$f(A) = \int_{\sigma(A)} f(\lambda) d\mu^A(\lambda) \quad (3.47)$$

dove μ^A è la misura a valori di proiettore associata all'operatore A .

Possiamo estendere la misura μ^A a tutto $\mathbb{R}$, basta definirla nulla sul complementare dello spettro di A .

Dal momento che l'integrale è moltiplicativo, possiamo osservare che se $f(\lambda) = \lambda^m$ per qualche m intero positivo, allora $f(A) = A^m$ e analogamente, potendo scrivere l'esponenziale come serie di potenze convergente su $\sigma(A)$, se

$$f(\lambda) = e^{a\lambda} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a\lambda)^m}{m!} \quad (3.48)$$

allora $f(A) = e^{aA}$

Per capire cosa si intende per misura a valori di proiettore e per calcolo funzionale, proviamo a sviluppare un semplice esempio nel caso finito: sia dato l'operatore lineare A associato alla seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

è evidente che gli autovalori associati ad A siano 1 e 2 e quindi $\sigma(A) = \{1, 2\}$. La misura associata a questo operatore isola le parti dello spettro, ovvero costruisce le due proiezioni ortogonali

- $P_1 = \mu^A(\{1\}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
- $P_2 = \mu^A(\{2\}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Volendo misurare lo stato

$$\psi = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

la misura μ_ψ^A darà come risultato

- $\langle \psi, P_1 \psi \rangle = |a|^2$
- $\langle \psi, P_2 \psi \rangle = |b|^2$

Supponendo di voler calcolare $f(A)$ dove $f(x) = x^2$, interpretando l'integrale del caso generale come una somma, otteniamo che

$$f(A) = \int f(\lambda) d\mu^A(\lambda) = f(1)P_1 + f(2)P_2 = P_1 + 4P_2 \quad (3.49)$$

ottenendo che

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

In un sistema infinito non si avranno solo due valori nello spettro, bensì un intero intervallo. La logica però resta identica: la misura è l'infinito numero di "filtri" che coprono l'intervallo, e il calcolo funzionale è il modo di trasformare l'operatore applicando la funzione a ogni punto di quell'intervallo.

Definizione 3.15. Per ogni insieme di Borel $E \subset \mathbb{R}$ definiamo il **sottospazio spettrale** $V_E \subset H$ come

$$V_E = \text{Im}(\mu^A(E)) \quad (3.51)$$

Con queste definizioni sono sicuramente soddisfatte le prime quattro proprietà dei sottospazi spettrali elencate all'inizio della sezione; non resta che mostrare che sono soddisfatte anche le ultime due proprietà

Proposizione 3.16. Sia $A \in B(H)$ un operatore autoaggiunto. I sottospazi spettrali associati ad A godono delle seguenti proprietà:

1. V_E è invariante per A per ogni E
2. Se $E \subset [\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon]$ e $\psi \in V_E$, allora

$$\|(A - \lambda_0 I)\psi\| \leq \epsilon \|\psi\| \quad (3.52)$$

Dimostrazione.

Per il punto 1., osserviamo che per ogni funzione misurabile e limitata f e g su $\sigma(A)$, $f(A)$ e $g(A)$ commutano, dal momento che $fg = gf$ rispetto alla misura μ^A .

Osserviamo infatti che, se f e g sono due funzioni complesse, è ovvio che per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$, $f(\lambda)g(\lambda) = g(\lambda)f(\lambda)$; però per definizione dell'operatore $f(A)$, si ha

$$f(A)g(A) = \int_{\sigma(A)} f(\lambda)g(\lambda)d\mu^A(\lambda) = \int_{\sigma(A)} g(\lambda)f(\lambda)d\mu^A(\lambda) = g(A)f(A) \quad (3.53)$$

In particolare,

$$\int_{\sigma(A)} f(\lambda)d\mu^A(\lambda) \cdot \int_{\sigma(A)} 1_E(\lambda)d\mu^A(\lambda) = A\mu^A(E) = \mu^A(E)A \quad (3.54)$$

l'integrale di $f(\lambda) = \lambda$, ovvero A , commuta con $\mu^A(E)$ che è l'integrale di 1_E . Si ha allora che, preso il vettore ϕ nell'immagine di $\mu^A(E)$, ovvero in V_E , allora

$$\phi = \mu^A(E)\phi \quad (3.55)$$

perché appartenendo all'immagine di $\mu^A(E)$ la proiezione di ϕ è ϕ stesso. Di conseguenza

$$A\phi = A\mu^A(E)\phi = \mu^A(E)A\phi \quad (3.56)$$

che è ancora nell'immagine di $\mu^A(E)$, mostrando che $A\phi \in V_E$, ovvero che gli spazi V_E sono invarianti sotto A .

Per il punto 2., supponiamo che $\psi \in V_E$, con $E \subset [\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon]$, allora ψ è nell'immagine di $\mu^A(E)$ e quindi, come detto poc'anzi per un vettore che appartiene a V_E , $\psi = \mu^A(E)\psi$. Allora

$$(A - \lambda_0 I)\psi = (A - \lambda_0 I)\mu^A(E)\psi \quad (3.57)$$

Ma $\mu^A(E) = 1_E(A)$ e $A - \lambda_0 I = f(A)$ con $f(\lambda) = \lambda - \lambda_0$, cioè

$$A = \int_E \lambda d\mu^A(\lambda) \quad A - \lambda_0 I = \int_E (\lambda - \lambda_0) d\mu^A(\lambda) \quad (3.58)$$

Per la moltiplicatività dell'integrale,

$$(A - \lambda_0 I)\psi = \int_E (\lambda - \lambda_0) d\mu^A(\lambda)\psi \quad (3.59)$$

Passando alle norme e ricordando che su E , $|\lambda - \lambda_0| < \epsilon$

$$\begin{aligned} \|(A - \lambda_0 I)\psi\|^2 &= \\ &= \int_E |\lambda - \lambda_0|^2 d\langle \psi, \mu^A(\lambda)\psi \rangle \leq \\ &\leq \epsilon^2 \int_E d\langle \psi, \mu^A(\lambda)\psi \rangle = \\ &= \epsilon^2 \|\psi\|^2 \end{aligned} \quad (3.60)$$

■

3.3 Dimostrazione del teorema spettrale

Procediamo ora con la dimostrazione del teorema spettrale per operatori autoaggiunti limitati; essa avviene in due passi:

- Passo 1: definire un calcolo funzionale continuo, ovvero associare ad ogni funzione continua f su $\sigma(A)$ un operatore $f(A)$. La mappa $f \mapsto f(A)$ deve avere la proprietà che se $f(\lambda) = \lambda^m$ allora $f(A) = A^m$. Il calcolo funzionale continuo deriva dall'approssimazione di tali funzioni continue f con dei polinomi, i quali sono densi nello spazio delle funzioni continue. Si dimostra quindi che se una successione di polinomi P_n converge uniformemente ad una funzione continua f su $\sigma(A)$, allora la successione di operatori $P_n(A)$ converge a $f(A)$
- Passo 2: mostrare che tale calcolo funzionale continuo non è altro che un'integrazione contro una misura a valori di proiettore, e ciò si riduce ad essere una versione del teorema di rappresentazione di Riesz per tali misure.

3.3.1 Passo 1: il calcolo funzionale continuo

Definizione 3.17. Dato un operatore limitato A su H , si definisce **raggio spettrale** di A la quantità

$$R(A) = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda| \quad (3.61)$$

Tale quantità sappiamo essere finita dal momento che lo spettro di A è chiuso e limitato, come dimostrato in precedenza.

Abbiamo già osservato che $\lambda \in \mathbb{C}$ appartiene allo spettro di A se $|\lambda| < \|A\|$, da ciò deduciamo che

$$R(A) \leq \|A\| \quad (3.62)$$

Osserviamo inoltre che il raggio spettrale si può definire equivalentemente come

$$R(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \quad (3.63)$$

se tale limite esiste. Utilizzeremo quest'ultima forma per dimostrare la seguente proposizione

Proposizione 3.18. Se $A \in B(H)$ è autoaggiunto, allora $R(A) = \|A\|$

Dimostrazione.

Ricordiamo che se $A = A^*$ allora

$$\|A^*A\| = \|A^2\| = \|A\|^2; \quad (3.64)$$

iterando questo ragionamento possiamo affermare che

$$\|A^{2^n}\| = \|A\|^{2^n} \quad (3.65)$$

per ogni n . Inoltre, ricordiamo come è stato scritto esplicitamente l'inverso dell'operatore $A - \lambda I$:

$$(A - \lambda I)^{-1} = \left(-\lambda \left(I - \frac{A}{\lambda} \right) \right)^{-1} = -\frac{1}{\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{\lambda^m} = -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{\lambda^{m+1}} \quad (3.66)$$

quest'ultima serie geometrica è convergente se $\left\| \frac{A}{\lambda} \right\| < 1$, ovvero se $|\lambda| > \|A\|$. Ricapitolando, se $|\lambda| > \|A\|$ allora la serie converge in norma e quindi $(A - \lambda I)$ ha un inverso limitato, per cui $\lambda \notin \sigma(A)$. Allora tutti i λ con modulo minore o uguale alla norma di A stanno nello spettro, ovvero il raggio spettrale, essendo il loro *sup*, è sempre minore o uguale alla norma di A . D'altra parte però, se supponiamo per assurdo che $R(A) < \|A\|$, allora dovrebbe esistere un certo λ tale che $R(A) < |\lambda| < \|A\|$ e per un tale λ la serie dovrebbe convergere, ma i termini della serie sono della forma $\frac{A^m}{\lambda^{m+1}}$ e divergono se siamo in questa situazione, infatti se $m = 2^n$, si ha

$$\left\| \frac{A^m}{\lambda^{m+1}} \right\| = \frac{\|A^{2^n}\|}{|\lambda|^{2^n+1}} = \frac{\|A\|^{2^n}}{|\lambda|^{2^n+1}} = \frac{1}{|\lambda|} \left(\frac{\|A\|}{|\lambda|} \right)^{2^n} \quad (3.67)$$

ed essendo $|\lambda| < \|A\|$ si ha la non limitatezza.

Se $|\lambda| > R(A)$ allora l'inverso dell'operatore dovrebbe convergere, ovvero

$$\frac{\|A\|^m}{|\lambda|^m} \leq C \quad (3.68)$$

ma in tal caso $\|A\| \leq C^{1/m}|\lambda|$ che al tendere di m all'infinito converge a $|\lambda|$, da cui si ottiene che se $|\lambda| \geq R(A)$ allora $|\lambda| \geq \|A\|$, ma allora $\|A\| \geq R(A)$ e dal primo caso $R(A) \geq \|A\|$ allora $\|A\| = R(A)$. ■

Vogliamo adesso mostrare un risultato importante di algebra lineare: Dato un operatore A e un polinomio p , calcolare gli autovalori dell'operatore $p(A)$ è equivalente a calcolare gli autovalori λ_i di A , ovvero trovare esplicitamente lo spettro dell'operatore, e poi calcolare $p(\lambda_i)$

Proposizione 3.19. *Per ogni $A \in B(H)$, e per ogni polinomio p , si ha*

$$\sigma(p(A)) = p(\sigma(A)) \quad (3.69)$$

In altre parole, lo spettro di $p(A)$ consiste di quei numeri della forma $p(\lambda)$ con λ elementi dello spettro di A

Dimostrazione.

Sia dato il polinomio $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$ di grado $\deg(p) \geq 1$, altrimenti se p fosse costante la tesi sarebbe banale; mostriamo che $p(\sigma(A)) \subseteq \sigma(p(A))$

Sia $\lambda \in \sigma(A)$, osserviamo che

$$p(A) - p(\lambda)I = a_n(A^n - \lambda^n I) + \dots + a_0 I - a_0 I = \quad (3.70)$$

e osserviamo anche che

$$A^k - \lambda^k I = (A - \lambda I)(A^{k-1} + \lambda A^{k-2} + \lambda^2 A^{k-3} + \dots + \lambda^{k-1} I) \quad (3.71)$$

Unendo queste due osservazioni, possiamo tirare fuori da ogni termine non nullo di $p(A) - p(\lambda)I$ un fattore $(A - \lambda I)$, ottenendo

$$p(A) - p(\lambda)I = (A - \lambda I)q(A) \quad (3.72)$$

con $q(A)$ un altro polinomio. Per ipotesi, essendo λ nello spettro di A , $A - \lambda I$ non è invertibile e di conseguenza non lo è $(A - \lambda I)q(A)$, ma allora $p(A) - p(\lambda)I$ non è invertibile e dunque $p(\lambda)$ appartiene allo spettro di $p(A)$.

Viceversa, mostriamo che $\sigma(p(A)) \subseteq p(\sigma(A))$

Sia $\gamma \in \sigma(p(A))$, ovvero $p(A) - \gamma I$ non è invertibile. Dal momento che $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso, è possibile fattorizzare il polinomio $p(z) - \gamma$ come funzione di z :

$$p(z) - \gamma = c(z - b_1)(z - b_2) \dots (z - b_n) \quad (3.73)$$

e di conseguenza

$$p(A) - \gamma I = c(A - b_1 I)(A - b_2 I) \dots (A - b_n I) \quad (3.74)$$

essendo quest'ultimo non invertibile, necessariamente uno dei fattori deve essere non invertibile, supponiamo il j -esimo: allora significa che un certo $A - b_j I$ è non invertibile e quindi che $b_j \in \sigma(A)$, ovvero che $p(b_j) - \gamma = 0$, ma questo ci dice che l'elemento γ dello spettro di $p(A)$ è della forma $p(b_j)$ con b_j nello spettro di A .

■

L'ultima parte di questo primo passo della dimostrazione consiste nello sfruttare il teorema di approssimazione di Weierstrass per estendere i risultati appena dimostrati sui polinomi a tutte le funzioni continue a valori reali definite sullo spettro di A

Proposizione 3.20. *Dato un operatore $A \in B(H)$ autoaggiunto, allora esiste un'unica mappa lineare limitata che associa ad ogni funzione continua a valori reali definita su $\sigma(A)$ un operatore limitato $f(A) \in B(H)$, tale che se $f(\lambda) = \lambda^m$ allora $f(A) = A^m$. Tale mappa lineare è detta il **calcolo funzionale** per A*

Dimostrazione.

Osserviamo che essendo A autoaggiunto allora anche $p(A)$ è autoaggiunto, con p un generico polinomio a valori reali: infatti,

$$(a_n A^n + \dots + a_0)^* = \overline{a_n} (A^n)^* + \dots + \overline{a_0} = a_n A^n + \dots + a_0 \quad (3.75)$$

ne concludiamo che, grazie ai teoremi precedenti sul raggio spettrale di operatori autoaggiunti,

$$\|p(A)\| = \sup_{\mu \in \sigma(p(A))} |\mu| = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |p(\lambda)| = \|p\| \quad (3.76)$$

Dal momento che la mappa $p \mapsto p(A)$ che associa un polinomio a un operatore limitato su H è un'isometria (poiché abbiamo appena osservato che la norma di $p(A)$ coincide con la norma di p), e dal momento che i polinomi sono densi

nello spazio delle funzioni continue grazie al teorema di approssimazione (7.6), possiamo estendere tale mappa a una mappa dalle funzioni continue agli operatori limitati su H : voglio definire $f(A)$ per una funzione continua f , allora considero una successione di polinomi P_n che tendano alla funzione f .

Essendo la mappa $p \mapsto p(A)$ isometrica, allora $p_n(A)$ sarà di Cauchy in $B(H)$ e quindi convergente; tenderà proprio a quel $f(A)$ cercato.

Per osservare che $p_n(A)$ è di Cauchy notiamo che se $p_n \mapsto f$ allora $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy essendo convergente; in particolare, $\|p_n - p_m\| \mapsto 0$ e per linearità e per il fatto che p è una isometria, $\|p_n(A) - p_m(A)\| \mapsto 0$, mostrando che $(p_n(A))_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy.

■

Proposizione 3.21. *Sia $A \in B(H)$ un operatore autoaggiunto, allora il calcolo funzionale continuo su A ha le seguenti proprietà:*

1. *Moltiplicatività: per ogni funzione f, g*

$$(fg)(A) = f(A)g(A) \quad (3.77)$$

2. *Autoaggiuntezza: per ogni f , l'operatore $f(A)$ è autoaggiunto*

3. *Non negatività: per ogni f , se f è non negativo allora $f(A)$ è non negativo*

4. *Norma e proprietà spettrali: per ogni f ,*

$$\|f(A)\| = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |f(\lambda)| \quad (3.78)$$

$$\sigma(f(A)) = \{f(\lambda) | \lambda \in \sigma(A)\} \quad (3.79)$$

Dimostrazione.

La dimostrazione di queste proprietà è basata totalmente sulla possibilità di dimostrare tali proprietà per i polinomi e poi, costruendo una successione di polinomi che tende alla funzione continua per cui vogliamo dimostrare la proprietà e sfruttando la densità dei polinomi nelle funzioni continue, si passa al limite e si mostra che tale proprietà sussiste $\forall f \in \mathcal{C}(\sigma(A), \mathbb{R})$

■

3.3.2 Passo 2: il teorema di rappresentazione di Riesz

Per il secondo passo della dimostrazione ricorriamo al teorema di rappresentazione di Riesz, che ricordiamo brevemente

Teorema 3.22 (di rappresentazione di Riesz). *Sia X uno spazio metrico compatto e sia $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ lo spazio delle funzioni continue a valori reali definite su X . Supponiamo che $\Lambda : \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ sia un funzionale lineare con la proprietà che quando f è non negativa allora anche $\Lambda(f)$ è non negativa; allora esiste un'unica misura reale positiva μ sulla σ -algebra di Borel su X per cui, per ogni $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$*

$$\Lambda(f) = \int_X f d\mu \quad (3.80)$$

In particolare, μ è una misura finita e $\mu(X) = \Lambda(1)$

Sulla base del *Passo 1*, nel quale abbiamo costruito il calcolo funzionale per A , possiamo costruire il seguente funzionale lineare:

Definizione 3.23. *Dato $\psi \in H$, data f una funzione misurabile e limitata su $\sigma(A)$, definiamo il funzionale lineare su $\mathcal{C}(\sigma(A), \mathbb{R})$*

$$\Lambda_\psi(f) = \langle \psi, f(A)\psi \rangle \quad (3.81)$$

Tale funzionale soddisfa le ipotesi del teorema di rappresentazione di Riesz e quindi, per ogni $\psi \in H$ esiste un'unica misura μ_ψ tale che

$$\Lambda_\psi(f) = \langle \psi, f(A)\psi \rangle = \int_{\sigma(A)} f(\lambda) d\mu_\psi(\lambda) \quad (3.82)$$

Possiamo quindi costruire la mappa $Q_f(\psi) : H \mapsto \mathbb{C}$ data da

$$Q_f(\psi) = \int_{\sigma(A)} f(\lambda) d\mu_\psi(\lambda) \quad (3.83)$$

Notiamo infine che dal momento che

$$\Lambda_\psi(1) = \int_{\sigma(A)} 1 d\mu_\psi(\lambda) = \mu_\psi(\sigma(A)) \quad (3.84)$$

allora

$$\mu_\psi(\sigma(A)) = \Lambda_\psi(\mathbf{1}) = \langle \psi, 1\psi \rangle = \langle \psi, \psi \rangle = \|\psi\|^2 \quad (3.85)$$

Osservazione 3.24. *Osserviamo dall'ultima equazione che se ψ fosse un vettore unitario, allora la misura dello spettro sarebbe 1, proprio come ci si aspetta da una misura di probabilità.*

Inoltre, essendo $\mu_\psi(\sigma(A)) = \|\psi\|^2$, sicuramente tale misura sarà una misura finita.

Definizione 3.25. *Ricordiamo qualche definizione sulle forme quadratiche:*

- **Forma sesquilineare:** una mappa $L : H \times H \mapsto \mathbb{C}$ è detta una forma sesquilineare se è antilineare nella prima componente e lineare nella seconda componente.

- **Forma quadratica:** una forma quadratica sullo spazio di Hilbert H è una mappa $Q : H \mapsto \mathbb{C}$ tale che

1. $Q(\lambda\psi) = |\lambda|^2 Q(\psi)$
2. $L : H \times H \mapsto \mathbb{C}$ definita da

$$L(x, y) = \frac{1}{2}[Q(x+y) - Q(x) - Q(y)] - \frac{i}{2}[Q(x+iy) - Q(x) - Q(iy)] \quad (3.86)$$

è una forma sesquilineare.

- Una forma quadratica è detta limitata se

$$|Q(x)| \leq C\|x\|^2 \quad (3.87)$$

- Se A è un operatore limitato su H , si può costruire una forma quadratica limitata Q_A su H

$$Q_A(\psi) = \langle \psi, A\psi \rangle \quad (3.88)$$

La forma sesquilineare associata L_A sarà

$$L_A(x, y) = \langle x, Ay \rangle \quad (3.89)$$

Se f è a valori reali e continua, allora $Q_f(\psi) = \langle \psi, f(A)\psi \rangle$, che abbiamo appena visto essere una forma quadratica limitata associata all'operatore $f(A)$

Definizione 3.26. Data una funzione limitata e misurabile f su $\sigma(A)$, sia $f(A)$ l'operatore associato alla forma quadratica Q_f , ciò significa che $f(A)$ è l'unico operatore tale che

$$Q_f(\psi) = \langle \psi, f(A)\psi \rangle = \int_{\sigma(A)} f d\mu_\psi \quad (3.90)$$

Se inoltre f è a valori reali, allora lo è anche Q_f e quindi l'operatore associato $f(A)$ risulta autoaggiunto

Teorema 3.27. Sia $A \in B(H)$ autoaggiunto. Per ogni insieme misurabile $E \subset \sigma(A)$ definiamo l'operatore $\mu^A(E)$ come segue

$$\mu^A(E) = \mathbf{1}_E(A) \quad (3.91)$$

con $\mathbf{1}_E(A)$ l'unico operatore associato alla forma $Q_{\mathbf{1}_E}$ tale che

$$\langle x, \mathbf{1}_E(A)x \rangle = Q_{\mathbf{1}_E}(x) = \int_{\sigma(A)} \mathbf{1}_E d\mu_x. \quad (3.92)$$

Allora μ^A è una misura a valore di proiettore su $\sigma(A)$ e soddisfa

$$\int_{\sigma(A)} \lambda d\mu^A(\lambda) = A \quad (3.93)$$

Dimostrazione.

La prima cosa da dimostrare è che $\mathbf{1}_E(A)$ è una proiezione ortogonale: dal momento che $\mathbf{1}_E \cdot \mathbf{1}_E = \mathbf{1}_E$ e dato che $\mathbf{1}_E$ è a valori reali (potendo assumere solo i valori 1 e 0), sappiamo che $\mathbf{1}_E(A)$ è autoaggiunto, infatti $(\mathbf{1}_E(A))^* = \overline{\mathbf{1}_E(A)} = \mathbf{1}_E(A)$; inoltre soddisfa $\mathbf{1}_E(A)^2 = \mathbf{1}_E(A)$, quindi $\mu^A(E)$ è una proiezione ortogonale, per definizione.

Mostriamo ora l'ortogonalità delle immagini tramite μ^A di borelliani disgiunti: se E_1 e E_2 sono insiemi misurabili, allora $\mathbf{1}_{E_1 \cap E_2} = \mathbf{1}_{E_1} \cdot \mathbf{1}_{E_2}$ e quindi

$$\mu^A(E_1 \cap E_2) = \mu^A(E_1)\mu^A(E_2) \quad (3.94)$$

Inoltre, le immagini di $\mu^A(E_1)$ e di $\mu^A(E_2)$ sono ortogonali se E_1 e E_2 sono disgiunti, proprio perché la misura della loro intersezione, ovvero del vuoto, sarebbe uguale al prodotto delle loro misure e sarebbe zero, dunque ortogonali.

Da ciò ne concludiamo che

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu^A(E_j)\psi = P\psi \quad (3.95)$$

dove P è la proiezione ortogonale sul sottospazio chiuso generato dalle immagini di $\mu^A(E_j)$ per ogni j . Ciò si può scrivere perché P rappresenta la somma dei $\mu^A(E_j)$ che sono proiezioni ortogonali e si può mostrare che la somma di due o più proiezioni è sia autoaggiunta sia idempotente, quindi è anch'essa una proiezione ortogonale, infatti

$$(p_1 + p_2)^* = p_1^* + p_2^* = p_1 + p_2 \quad (3.96)$$

e osservando che le proiezioni sono ortogonali, ovvero che $p_1 p_2 = p_2 p_1 = 0$

$$(p_1 + p_2)^2 = p_1^2 + p_1 p_2 + p_2 p_1 + p_2^2 = p_1^2 + p_2^2 = p_1 + p_2 \quad (3.97)$$

D'altro canto, se E è l'unione di tutti gli E_j , che sono disgiunti a coppie, allora un elemento x può essere contenuto al massimo in uno di questi E_j e quindi la

successione di funzioni semplici $f_N = \sum_{j=1}^N \mathbf{1}_{E_j}$ valutata in x può assumere al massimo il valore 1; è quindi uniformemente limitata da 1 e converge puntualmente a $\mathbf{1}_E$, quindi usando la convergenza dominata, con la funzione 1 come dominante essendo finita e quindi integrabile, si ha che

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \psi, f_N(A)\psi \rangle &= \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \left\langle \psi, \sum_{j=1}^N \mathbf{1}_{E_j}(A)\psi \right\rangle &= \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N \langle \psi, \mu^A(E_j)\psi \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \left(\sum_{j=1}^N \mathbf{1}_{E_j} \right) dp = \\ \int \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N \mathbf{1}_{E_j} dp &= \int \mathbf{1}_E dp = \langle \psi, \mathbf{1}_E(A)\psi \rangle = \\ \langle \psi, \mu^A(E)\psi \rangle \end{aligned} \quad (3.98)$$

ne concludiamo che $\mathbf{1}_E(A) = P$ e questo fornisce l'additività desiderata per μ^A . Infatti, al tendere di N all'infinito, f_N assumerà sicuramente il valore 1, perché prima o poi si arriverà a quel E_j tale per cui $x \in E_j$. Avendo mostrato che $\mathbf{1}_E(A) = P$, abbiamo dimostrato che $\mu^A(E)$ è proprio una misura a valori di proiezione.

Infine, se $f = \mathbf{1}_E$ per qualche insieme di Borel E , allora

$$f(A) = \mathbf{1}_E(A) = \mu^A(E) = \int_{\sigma(A)} f(\lambda) d\mu^A(\lambda) = \int_{\sigma(A)} \mathbf{1}_E(\lambda) d\mu^A(\lambda) \quad (3.99)$$

Tale uguaglianza vale per la funzione caratteristica, per le funzioni semplici, per le funzioni limitate, per le funzioni misurabili, con il solito argomento di linearità e passando al limite.

In particolare, se $f(\lambda) = \lambda$, funzione limitata e misurabile su un compatto, allora l'integrale di f contro μ^A diventa

$$\int_{\sigma(A)} \lambda d\mu^A(\lambda) = A \quad (3.100)$$

in accordo con tutto ciò che abbiamo dimostrato sopra; questa è esattamente la tesi cercata. Abbiamo essenzialmente scritto A attraverso la sua misura spettrale, decomponendolo mediante i suoi autovalori

■

Abbiamo quindi concluso la dimostrazione, dimostrando l'esistenza della misura a valori di proiettore enunciata nel teorema (3.13).

Per concludere il teorema spettrale non ci resta che dimostrare l'unicità:

Siano μ^1 e μ^2 due misure su $\sigma(A)$ tali che

$$A = \int_{\sigma(A)} \lambda d\mu^1(\lambda) = \int_{\sigma(A)} \lambda d\mu^2(\lambda) \quad (3.101)$$

Per ogni $\phi, \psi \in H$ siano date le seguenti misure scalari $\mu_\psi^1(E) = \langle \psi, \mu^1(E)\phi \rangle$ e $\mu_\psi^2(E) = \langle \psi, \mu^2(E)\phi \rangle$.

Per ogni funzione continua f sappiamo che

$$\int f(\lambda) dp_1(\lambda) = \int f(\lambda) dp_2(\lambda) \quad (3.102)$$

Questo è valido perché se l'operatore A lo abbiamo scritto in maniera equivalente come i due integrali rispetto alle due misure, allora specificando tali operatori in ϕ e ψ , i risultati degli integrali dovranno essere gli stessi. Per il teorema di Riesz, se due misure producono lo stesso integrale per ogni funzione continua, allora tali misure devono coincidere su tutti i borelliani, ovvero $\mu_\psi^1(E) = \mu_\psi^2(E)$ per ogni borelliano E e per arbitrarietà di ϕ e ψ , le due misure coincidono.

Ma allora

$$\langle \psi, \mu^1(E)\phi \rangle = \mu_\psi^1(E) = \mu_\psi^2(E) = \langle \psi, \mu^2(E)\phi \rangle \quad (3.103)$$

da cui deduciamo, per arbitrarietà di E , che $\mu^1 = \mu^2$

4 Operatori autoaggiunti illimitati

Come si è più volte sottolineato in precedenza, molti operatori utilizzati in meccanica quantistica non sono limitati, inoltre non è possibile definire tali operatori su tutto lo spazio di Hilbert soggiacente, ma solo su di un suo sottospazio denso. A causa della non limitatezza, non è possibile applicare a tali operatori il teorema di estensione delle trasformazioni lineari limitate (7.4) e quindi non c'è un modo naturale di estenderli a tutto lo spazio. Infine, le definizioni di operatore aggiunto e di operatore autoaggiunto sono più delicate rispetto al caso limitato; lo scopo del capitolo è quello di fornire gli strumenti necessari ad affrontare il teorema spettrale per operatori autoaggiunti illimitati.

4.1 Definizioni e proprietà principali

Riprendiamo una definizione già fornita:

Definizione 4.1. *Un operatore, non necessariamente limitato, A su H è una mappa lineare definita su un sottospazio denso di H , detto il dominio di A e indicato con $Dom(A)$,*

Se l'operatore A è limitato, allora è limitato anche il funzionale

$$\psi \mapsto \langle \phi, A\psi \rangle \quad (4.1)$$

e dal teorema di Riesz sappiamo esistere un unico vettore χ tale che

$$\langle \phi, A\cdot \rangle = \langle \chi, \cdot \rangle \quad (4.2)$$

Utilizzeremo tale vettore χ per definire l'operatore aggiunto di A , ovvero A^* , ponendo $A^*\phi = \chi$.

Se però A è illimitato, allora $\psi \mapsto \langle \phi, A\psi \rangle$ non è necessariamente limitato, o meglio, è limitato solo per alcuni $\phi \in H$; per tali vettori allora è possibile applicare il teorema di estensione dei funzionali lineari ed è possibile quindi estendere il funzionale da $Dom(A)$ a tutto H . Il teorema di Riesz in questo caso garantisce l'esistenza di un unico χ . Questo ragionamento ci porta alla seguente definizione

Definizione 4.2. *Dato un operatore A illimitato definito su $Dom(A)$, un sotto-spazio denso dello spazio di Hilbert H , sia $Dom(A^*)$ l'insieme dei vettori ϕ in H tali per cui risulti limitato il funzionale*

$$\psi \mapsto \langle \phi, A\psi \rangle, \quad \psi \in Dom(A) \quad (4.3)$$

Per tali ϕ definiamo allora A^ϕ come l'unico vettore tale che, per ogni $\psi \in Dom(A)$*

$$\langle \phi, A\psi \rangle = \langle A^*\phi, \psi \rangle \quad (4.4)$$

Ciò definisce l'operatore $A^ : Dom(A^*) \rightarrow H$, detto aggiunto di A .*

Definizione 4.3. Un operatore illimitato A è detto *simmetrico* se

$$\langle \phi, A\psi \rangle = \langle A\phi, \psi \rangle \quad (4.5)$$

per ogni $\phi, \psi \in \text{Dom}(A)$.

Inoltre, dati due operatori illimitati A e B , diremo che A è un'estensione di B se

$$\text{Dom}(B) \subset \text{Dom}(A) \quad e \quad A = B \quad \text{su} \quad \text{Dom}(B) \quad (4.6)$$

In generale, se un operatore è l'estensione di un altro, allora avranno la stessa espressione analitica; se però tali operatori non sono definiti sullo stesso dominio, allora saranno a tutti gli effetti operatori differenti.

Proposizione 4.4. Un operatore A è *simmetrico* se e solo se A^* è una estensione di A

Dimostrazione.

Se A è simmetrico allora $\forall \phi \in \text{Dom}(A)$ si ha, per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (proposizione 7.5), che

$$|\langle \phi, A\psi \rangle| = |\langle A\phi, \psi \rangle| \leq \|A\phi\| \cdot \|\psi\| \quad (4.7)$$

Osservando ora che essendo $\|A\phi\|$ indipendente da ψ , esso risulta essere costante, affermiamo quindi che il funzionale $\psi \mapsto \langle \phi, A\psi \rangle$ è limitato. Per definizione di operatore aggiunto esiste un unico vettore $A^*\phi$ tale che $\langle \phi, A\psi \rangle = \langle A^*\phi, \psi \rangle$ ed essendo A simmetrico, $A^*\phi = A\phi$, allora $A^* = A$ sul dominio di A , ovvero A^* è una estensione di A .

D'altra parte, se A^* è una estensione di A , allora dato un $\phi \in \text{Dom}(A)$,

$$\langle \phi, A\psi \rangle = \langle A^*\phi, \psi \rangle = \langle A\phi, \psi \rangle \quad (4.8)$$

e ciò mostra che A è simmetrico sul suo dominio. ■

La proposizione appena dimostrata sottolinea la differenza tra operatore autoaggiunto e operatore simmetrico che emerge quando lavoriamo con operatori illimitati: se A è simmetrico allora il suo dominio è contenuto nel dominio del suo aggiunto e A e A^* coincidono su $\text{Dom}(A)$, invece, se A è autoaggiunto allora $\text{Dom}(A) = \text{Dom}(A^*)$ e su tale dominio comune A e A^* coincidono.

Definizione 4.5. Un operatore illimitato A è detto *autoaggiunto* se

$$\text{Dom}(A^*) = \text{Dom}(A) \quad (4.9)$$

e se $A^*\phi = A\phi$ per ogni $\phi \in \text{Dom}(A)$

Tale definizione, indispensabile per formulare le ipotesi del teorema spettrale, può essere interpretata anche come segue: un operatore è autoaggiunto se è uguale al suo aggiunto, intendendo che devono coincidere anche i loro domini.

Osserviamo inoltre che essere autoaggiunti implica essere simmetrici, ma non vale il viceversa.

In generale, diremo che due operatori coincidono se hanno lo stesso dominio e se su tale dominio comune essi sono uguali.

Definizione 4.6. Un operatore A è detto chiuso se il suo grafico è un sottoinsieme chiuso del prodotto cartesiano $H \times H$. Un operatore A è detto chiudibile se la chiusura in $H \times H$ del suo grafico è il grafico di una funzione. In tal caso, l'operatore che ha per grafico la chiusura del grafico di A sarà indicato con A^{cl} e sarà detto la chiusura di A .

Per essere più espliciti,

- Un operatore è chiuso se data una successione $\psi_n \in \text{Dom}(A)$ tale che $\psi_n \rightarrow \psi \in H$ e $A\psi_n \rightarrow \phi \in H$ allora $\psi \in \text{Dom}(A)$ e $A\psi = \phi$.
- Un operatore non è chiudibile se la chiusura del suo grafico non è il grafico di una funzione, ovvero se esistono nella chiusura del grafico di A delle coppie (ϕ, ψ) e (ϕ, χ) con $\psi \neq \chi$.
- Un operatore è chiudibile se esistono delle sue estensioni chiuse; in tal caso, la chiusura dell'operatore è l'estensione chiusa più piccola. Questa interpretazione della chiusura ci porta a pensare che diversi domini possano dare origine alla stessa chiusura, ovvero che l'arbitrarietà della scelta del dominio dell'operatore non porta necessariamente a chiusure diverse dello stesso operatore.

Osservazione 4.7. Il grafico di un operatore A si definisce come

$$\Gamma(A) = \{(\psi, A\psi) | \psi \in \text{Dom}(A)\} \subseteq H \times H \quad (4.10)$$

Definizione 4.8. Un operatore illimitato A è detto essenzialmente autoaggiunto se è simmetrico e chiudibile con A^{cl} autoaggiunto.

Affrontiamo ora le proprietà principali ricordando che da ora in avanti, l'uguaglianza tra operatori coinvolgerà anche la coincidenza dei loro domini.

Proposizione 4.9. Sia A un operatore illimitato, allora il grafico di A^* è chiuso in $H \times H$.

Dimostrazione.

Supponiamo sia $\psi_n \in \text{Dom}(A^*)$ una successione che converge a un certo $\psi \in H$. Supponiamo inoltre che $A^*\psi_n$ converga a un certo $\phi \in H$. Allora $\langle \psi_n, A \cdot \rangle = \langle A^*\psi_n, \cdot \rangle$ e per ogni $\chi \in \text{Dom}(A)$ si ha

$$\langle \psi, A\chi \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle \psi_n, A\chi \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle A^*\psi_n, \chi \rangle = \langle \phi, \chi \rangle \quad (4.11)$$

questo mostra che ψ appartiene al dominio di A^* , perché ψ appartiene al dominio di A^* se e solo se esiste un ϕ tale che per ogni χ nel dominio di A , $\langle \psi, A\chi \rangle = \langle \phi, \chi \rangle$, e mostra anche che $A^*\psi = \phi$, ottenendo che il grafico di A^* è chiuso. ■

Osservazione 4.10. Osserviamo che, se per ipotesi A è simmetrico, per la caratterizzazione fatta in precedenza sugli operatori simmetrici possiamo affermare che A^* è un'estensione di A , ma per la proposizione appena dimostrata A^* è chiuso, allora l'operatore simmetrico A ammette un'estensione chiusa e quindi è chiudibile. In definitiva, un operatore simmetrico è sempre chiudibile.

Corollario 4.11. *Un operatore simmetrico A tale che $\text{Dom}(A) = H$ deve essere necessariamente limitato.*

Dimostrazione.

Essendo A simmetrico, allora è chiudibile grazie alla proposizione precedente. Essendo però il dominio di A tutto H , allora la sua chiusura deve coincidere con A stesso (A e A^{cl} devono coincidere su $\text{Dom}(A)$). Risulta quindi che A è un operatore chiuso definito su tutto H e per il teorema del grafico chiuso (7.1) è limitato. ■

Proposizione 4.12. *Se A è un operatore chiudibile allora l'aggiunto di A^{cl} coincide con l'aggiunto di A .*

Inoltre, se A è essenzialmente autoaggiunto, allora A^{cl} è l'unica estensione autoaggiunta di A

Dimostrazione.

Supponiamo che $\psi \in \text{Dom}((A^{cl})^*)$, ovvero che esista un certo ϕ tale che $\langle \psi, A^{cl}\chi \rangle = \langle \phi, \chi \rangle$ per ogni $\chi \in \text{Dom}(A^{cl})$. Dal momento che A^{cl} è un'estensione di A , deduciamo che $\langle \psi, A\chi \rangle = \langle \phi, \chi \rangle$ per ogni $\chi \in \text{Dom}(A)$ (poiché sul dominio di A coincidono). Allora $\text{Dom}(A^*) \supset \text{Dom}((A^{cl})^*)$ e A^* coincide con $(A^{cl})^*$ su $\text{Dom}((A^{cl})^*)$.

Nell'altra direzione, supponiamo che $\psi \in \text{Dom}(A^*)$, ovvero che esista un ϕ tale che $\langle \psi, A\chi \rangle = \langle \phi, \chi \rangle$ per ogni $\chi \in \text{Dom}(A)$. Supponiamo ora che $\theta \in \text{Dom}(A^{cl})$ con $A^{cl}\theta = \eta$. Allora esiste una sequenza di χ_n in $\text{Dom}(A)$ con $\chi_n \rightarrow \theta$ e $A\chi_n \rightarrow \eta$, da cui

$$\langle \psi, A\chi_n \rangle = \langle \phi, \chi_n \rangle \quad (4.12)$$

Facendo tendere n all'infinito, si ottiene $\langle \psi, \eta \rangle = \langle \phi, \theta \rangle$ ovvero $\langle \psi, A^{cl}\theta \rangle = \langle \phi, \theta \rangle$. Ciò mostra che $\psi \in \text{Dom}((A^{cl})^*)$ e $A^{cl}\psi = \phi$, ovvero $\text{Dom}(A^*) \subset \text{Dom}((A^{cl})^*)$. Per la seconda parte della proposizione, supponiamo che B sia un'estensione autoaggiunta di A . Dal momento che $B = B^*$, allora è chiuso e di conseguenza è una estensione di A^{cl} . Per definizione di aggiunto, $\text{Dom}(B^*) \subset \text{Dom}(A^{cl})$ e quindi

$$\begin{aligned} A \subset B &\implies B^* \subset A^* \implies \\ \text{Dom}(B^*) \subset \text{Dom}(A^*) &= \text{Dom}(A^{cl*}) = \text{Dom}(A^{cl}) \subset \text{Dom}(B) \end{aligned} \quad (4.13)$$

Dal momento che B è autoaggiunto, i tre insiemi appena scritti devono coincidere, quindi $B = A^{cl}$ ■

Proposizione 4.13. *Sia A un operatore illimitato, allora*

$$(\text{Im}(A))^\perp = \text{Ker}(A^*) \quad (4.14)$$

Dimostrazione.

Assumiamo che $\psi \in (Im(A))^\perp$, allora per ogni $\phi \in Dom(A)$ si ha

$$\langle \psi, A\phi \rangle = 0 \quad (4.15)$$

Allora il funzionale $\langle \psi, A\cdot \rangle$ è limitato sul dominio di A , essendo nullo. Per definizione di aggiunto concludiamo osservando che $\psi \in Dom(A^*)$ per arbitrarietà di $\phi \in Dom(A)$ e di $\psi \in Ker(A^*)$ e segue quindi che $A^*\psi = 0$. Supponiamo ora che $\psi \in Dom(A^*)$ e che $A^*\psi = 0$: l'unica possibilità per far sì che ciò accada è che l'operatore $\langle \psi, A\cdot \rangle$ sia nullo sul dominio di A , ovvero necessariamente $\psi \in (Im(A))^\perp$

$$\langle A^*\psi, \phi \rangle = 0, \phi \in Dom(A) \implies \langle \psi, A\phi \rangle = 0 \quad (4.16)$$

■

Proposizione 4.14. *Dato un operatore illimitato A e un operatore limitato B definito su H , denotiamo con $A + B$ la loro somma, avente dominio uguale al dominio di A , allora $(A + B)^*$ ha lo stesso dominio di A^* . In particolare, se A e B fossero autoaggiunti, allora sarebbe autoaggiunta anche la loro somma e quest'ultima sarebbe definita sul dominio di A , ovvero dell'operatore illimitato. In generale, la somma di due operatori illimitati autoaggiunti non è necessariamente autoaggiunta*

Proposizione 4.15. *Sia A un operatore chiuso e sia $\lambda \in \mathbb{C}$, supponendo che esista un $\epsilon > 0$ tale che*

$$\|(A - \lambda I)\psi\| \geq \epsilon \|\psi\| \quad \forall \psi \in Dom(A) \quad (4.17)$$

Allora l'immagine di $A - \lambda I$ è un sottospazio chiuso di H .

Dimostrazione.

Sia ϕ_n una successione di elementi dell'immagine di $A - \lambda I$ convergente ad un certo ϕ . Allora $\phi_n = (A - \lambda I)\psi_n$ per qualche $\psi_n \in Dom(A)$. Applicando la disuguaglianza dell'enunciato a $\psi = \psi_n - \psi_m$ si ottiene

$$\|\phi_n - \phi_m\| \geq \epsilon \|\psi_n - \psi_m\| \quad (4.18)$$

ottenendo che $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy e quindi convergente a ψ . Per le convergenze appena descritte,

$$A\psi_n = \lambda\psi_n + \phi_n \rightarrow \lambda\psi + \phi \quad (4.19)$$

Allora, per definizione di operatore chiuso, $\psi \in Dom(A)$ e $A\psi = \lambda\psi + \phi$, ovvero $(A - \lambda I)\psi = \phi$ e quindi l'immagine di $A - \lambda I$ è chiusa.

■

4.2 Spettro di un operatore illimitato

Concentriamoci ora sull'insieme risolvente e sullo spettro degli operatori illimitati: sebbene gli operatori A in oggetto siano illimitati, continueremo a definire l'insieme risolvente come l'insieme di quei $\lambda \in \mathbb{C}$ tali per cui $A - \lambda I$ ha un inverso limitato.

Definizione 4.16. *Sia A un operatore illimitato su H ; un numero $\lambda \in \mathbb{C}$ appartiene all'insieme risolvente di A se esiste un operatore limitato B con le seguenti proprietà:*

- $\forall \psi \in H, B\psi \in \text{Dom}(A)$ e $(A - \lambda I)B\psi = \psi$
- $\forall \psi \in \text{Dom}(A), B(A - \lambda I)\psi = \psi$

Se un tale operatore non esiste diremo che λ appartiene allo spettro di A .

Come nel caso limitato, anche per lo spettro degli operatori illimitati vale la caratteristica per cui se un elemento appartiene allo spettro non significa che sia necessariamente un autovalore, ovvero non è detto che se $\lambda \in \sigma(A)$ allora esiste un vettore $\psi \in H$ tale che $A\psi = \lambda\psi$. Risulta però vero il viceversa. Inoltre stiamo supponendo che $\text{Dom}(A) = \text{Dom}(A - \lambda I)$ come osservato nella proposizione precedente sul dominio della somma di operatori illimitati.

Teorema 4.17. *Se A è un operatore illimitato e autoaggiunto, lo spettro di A è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$*

Dimostrazione.

Sia $\lambda = a + ib$ un numero complesso, con $b \neq 0$. Dal momento che A è simmetrico sappiamo che

$$\langle (A - \lambda I)\psi, (A - \lambda I)\psi \rangle \geq b^2 \langle \psi, \psi \rangle \quad (4.20)$$

come nella dimostrazione nel caso limitato; questo mostra che $A - \lambda I$ è iniettivo e osservando che anche l'operatore $A - \lambda I$ è autoaggiunto, sappiamo che

$$(\text{Im}(A - \lambda I))^\perp = \text{Ker}((A - \lambda I)^*) = \text{Ker}(A^* - \bar{\lambda}I) = \text{Ker}(A - \bar{\lambda}I) \quad (4.21)$$

Dato che $\bar{\lambda}$ ha parte immaginaria non nulla, allora $A - \bar{\lambda}I$ è anch'esso iniettivo per lo stesso motivo e quindi $\text{Im}(A - \lambda I)$ è un insieme denso di H . Essendo A autoaggiunto, esso è chiuso e quindi anche l'immagine di $A - \lambda I$ è chiusa, ma allora è tutta H , ovvero l'operatore è anche suriettivo.

Abbiamo mostrato che $A - \lambda I$ è una mappa biettiva da $\text{Dom}(A)$ in H : dal teorema del grafico chiuso (7.1) si ha che la mappa inversa è limitata, allora λ appartiene all'insieme risolvente di A , cioè

$$\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \subset \rho(A), \text{ ovvero } \sigma(A) \subset \mathbb{R} \quad (4.22)$$

■

Proposizione 4.18. *Se A è un operatore autoaggiunto illimitato, allora:*

1. $\lambda \in \mathbb{R}$ appartiene allo spettro di A se e solo se esiste una successione di vettori ψ_n non nulli appartenenti al dominio di A tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|(A - \lambda I)\psi_n\|}{\|\psi_n\|} = 0 \quad (4.23)$$

2. Lo spettro di A è un sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}$

Osserviamo che lo spettro di un operatore autoaggiunto limitato è un sottoinsieme chiuso e limitato della retta reale; invece, lo spettro di un operatore autoaggiunto e illimitato è un sottoinsieme chiuso non necessariamente limitato della retta reale. La limitatezza dello spettro implica la limitatezza dell'operatore.

Dimostrazione.

Per il punto 1, se una tale successione di ψ_n esiste, allora $A - \lambda I$ non può avere inversa limitata, quindi λ deve appartenere allo spettro di A . Infatti,

$$\psi_n = (A - \lambda I)^{-1}(A - \lambda I)\psi_n \implies \|\psi_n\| \leq \|(A - \lambda I)^{-1}\| \|(A - \lambda I)\psi_n\| \quad (4.24)$$

e dividendo tutto per la norma di ψ_n si ottiene che $1 \leq 0$ che è assurdo. Quindi $\lambda \in \sigma(A)$.

Viceversa, supponiamo che non esiste una tale successione, allora esiste un $\epsilon > 0$ tale che

$$\|(A - \lambda I)\psi\| \geq \epsilon \|\psi\| \quad (4.25)$$

per ogni $\psi \in \text{Dom}(A)$. Grazie alla proposizione (4.15), essendo $A - \lambda I$ autoaggiunto, è anche chiuso e quindi la sua immagine è chiusa; da ciò e dalla proposizione (4.13) deduciamo che $A - \lambda I$ è anche iniettivo, infatti se $\psi \in \text{Ker}(A - \lambda I)$ allora $\epsilon \|\psi\| \leq \|(A - \lambda I)\psi\| = 0$, da cui $\psi = 0$, perciò $\text{Ker}(A - \lambda I) = \{0\}$. Però dalla proposizione (4.13) sappiamo che $\text{Im}(A - \lambda I) = H$ e tale immagine abbiamo dimostrato essere chiusa, perciò $A - \lambda I$ è anche suriettivo, e quindi biiettivo e invertibile. Da questo deduciamo che $A - \lambda I$ ha un'inversa limitata dal teorema del grafico chiuso (7.1) e quindi che λ non appartiene allo spettro di A .

Il punto 2. si dimostra analogamente al caso limitato.

■

Definizione 4.19. Sia A un operatore illimitato, allora A è non negativo se $\langle \psi, A\psi \rangle \geq 0$ per ogni $\psi \in \text{Dom}(A)$. Diremo inoltre che A è inferiormente limitato da $c \in \mathbb{R}$ se $\langle \psi, A\psi \rangle \geq c\|\psi\|^2$, per ogni $\psi \in \text{Dom}(A)$

Proposizione 4.20. Se un operatore illimitato e autoaggiunto A è non negativo, allora lo spettro di A è contenuto in $[0, +\infty)$ e se A è inferiormente limitato da c allora lo spettro di A è contenuto in $[c, +\infty)$

Di queste proprietà vale anche il viceversa, ovvero osservando lo spettro dell'operatore è possibile capire se l'operatore è non negativo o inferiormente limitato.

Dimostrazione.

Supponiamo che A sia inferiormente limitato da c e che λ sia nello spettro di A , allora se ψ_n è una successione come nel punto 1. della proposizione precedente, normalizzata in modo tale che ogni ψ_n sia un vettore unitario ($\|\psi_n\| = 1$), si ha per Cauchy-Schwartz (7.5)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\langle \psi_n, (A - \lambda I)\psi_n \rangle| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|(A - \lambda I)\psi_n\| = 0 \quad (4.26)$$

D'altra parte, $A = (A - \lambda I) + \lambda I$ e quindi

$$\langle \psi_n, A\psi_n \rangle = \lambda \|\psi_n\|^2 + \langle \psi_n, (A - \lambda I)\psi_n \rangle \quad (4.27)$$

Allora, $\langle \psi_n, A\psi_n \rangle$ converge a $\lambda \langle \psi_n, \psi_n \rangle = \lambda$ quando n tende all'infinito. Dal momento che A è limitato da c , si ha che $\lambda \geq c$ concludendo il caso generale. Se ora si ripete il ragionamento con $c = 0$ si ha anche la prima parte dell'enunciato.

■

4.3 Condizioni di autoaggiunzione e di essenziale autoaggiunzione

Analizzeremo ora le condizioni che un operatore simmetrico deve soddisfare per essere autoaggiunto o essenzialmente autoaggiunto

Teorema 4.21. *Un operatore simmetrico A è essenzialmente autoaggiunto se e solo se $Im(A - iI)$ e $Im(A + iI)$ sono sottospazi densi di H .*

Analogamente possiamo asserire che A simmetrico è essenzialmente autoaggiunto se e solo se gli operatori $A^ + iI$ e $A^* - iI$ sono iniettivi su $Dom(A^*)$*

Dimostrazione.

Dimostreremo la prima formulazione del teorema; sia A essenzialmente autoaggiunto, allora A^cl è autoaggiunto. Se esiste A^cl allora $A^* = (A^cl)^*$ e se $A \subset A^cl$ allora $(A^cl)^* \subset A^*$; quindi $A^* = (A^cl)^* = A^cl$ e quindi dal teorema precedente

$$(Im(A - iI))^\perp = Ker((A - iI)^*) = Ker(A^* + iI) = Ker(A^cl + iI) = \{0\} \quad (4.28)$$

Allora l'immagine di $A - iI$ è densa in H . In particolare, il nucleo di $A^cl + iI$ è il solo elemento zero perché A^cl è autoaggiunto e quindi il suo spettro è reale, allora i non appartiene allo spettro, quindi $A^cl + iI$ è invertibile, ovvero è iniettivo e quindi il suo nucleo contiene solo 0.

Similarmente si ottiene lo stesso risultato per $A + iI$.

Viceversa, assumiamo che A sia simmetrico e che gli operatori $A + iI$ e $A - iI$ abbiano entrambi immagine densa, allora dal momento che $(A^cl)^* = A^*$ è un'estensione chiusa di A , è anche una estensione chiusa di A^cl , ottenendo che A^cl è simmetrico; infatti, se A è simmetrico, siano $\phi, \psi \in Dom(A^cl)$. Per definizione di chiusura, esistono successioni $\phi_n, \psi_n \in Dom(A)$ tali che $\phi_n \rightarrow \phi$ e $A\phi_n \rightarrow A^cl\phi$, e analogamente per ψ . Allora: $\langle A\phi_n, \psi_n \rangle = \langle \phi_n, A\psi_n \rangle$ e passando al limite si ottiene $\langle A^cl\phi, \psi \rangle = \langle \phi, A^cl\psi \rangle$, cioè A^cl è simmetrico.

Dalle proprietà descritte nei capitoli precedenti, si ha

$$\|(A^cl - iI)\psi\|^2 \geq \|\psi\|^2 \quad (4.29)$$

mostrando che $A^cl - iI$ è iniettivo. Dal momento che l'immagine di $A - iI$ è densa, lo è anche l'immagine di $A^cl - iI$, ma essendo A^cl chiuso, allora l'immagine di $A^cl - iI$ deve essere tutto H . Con un ragionamento analogo si arriva alla stessa conclusione per $A^cl + iI$. Osserviamo che $(A^cl - iI)^* = (A^cl)^* + iI$ è un'estensione di $A^cl + iI$. Sappiamo che $A^cl + iI$ è iniettivo e ha immagine densa quindi mappa surgettivamente su H . Se $(A^cl)^* + iI$ fosse un'estensione propria, avrebbe un dominio strettamente più grande, e quindi $(A^cl)^* + iI$ avrebbe un nucleo non banale. Questo contraddirebbe l'injectività di $(A - iI)^* = A^* + iI$. In altre parole, grazie alla proposizione (4.13), se l'estensione fosse propria esisterebbe un elemento $w \in Dom((A^cl)^*) \setminus Dom(A^cl)$ tale per cui la stima (4.29) potrebbe non valere più, ovvero $((A^cl)^* + iI)w$ potrebbe fare zero, da cui otterremmo che il nucleo di tale operatore non sarebbe più banale, ma abbiamo osservato che esso è iniettivo e quindi si ha l'assurdo.

Concludiamo che $(A^cl)^* + iI$ non è un'estensione propria di $A^cl + iI$ e quindi è

proprio uguale a $A^{cl} + iI$, con l'uguaglianza dei loro domini. Ciò implica che $(A^{cl})^* = A^*$, con uguaglianza anche dei loro domini, ed è quello che volevamo dimostrare, perché A^{cl} è autoaggiunto. ■

Proposizione 4.22. *Sia A un operatore simmetrico, allora è autoaggiunto se e solo se*

$$Im(A - iI) = Im(A + iI) = H \quad (4.30)$$

Dimostrazione.

Sia A autoaggiunto, allora le immagini di $A - iI$ e di $A + iI$ sono dense in H . D'altra parte, per le dimostrazioni dei capitoli precedenti,

$$||(A - iI)\psi||^2 \geq ||\psi||^2 \quad (4.31)$$

Però A è autoaggiunto e chiuso, allora $Im(A - iI)$ è chiusa e densa e quindi è tutto H . Analoghi risultati si ottengono con $A + iI$.

Viceversa, seguendo un ragionamento analogo a quello utilizzato nella proposizione precedente, supponiamo che le immagini dei due operatori siano tutto H , allora A risulterebbe essenzialmente autoaggiunto e quindi A^* autoaggiunto. Se A^* non fosse una estensione banale di A allora $A^* - iI$ non potrebbe essere iniettivo, ma dalla disuguaglianza scritta poc'anzi, con A sostituito da A^* , si ha che lo è, allora A^* è una estensione banale di A , in particolare $A = A^*$, ovvero è autoaggiunto. ■

Teorema 4.23. *Sia A un operatore simmetrico non negativo, allora A è essenzialmente autoaggiunto se e solo se $Im(A + I)$ è densa in H ; equivalentemente, se e solo se $A^* + I$ è iniettivo*

Dimostrazione.

Assumiamo che A sia essenzialmente autoaggiunto, allora $(A + I)^* = A^* + I = A^{cl} + I$. Si vede facilmente come A^{cl} sia positivo e quindi

$$\langle \psi, (A^{cl} + I)\psi \rangle = \langle \psi, \psi \rangle + \langle \psi, A^{cl}\psi \rangle \geq \langle \psi, \psi \rangle \quad (4.32)$$

Allora $A^{cl} + I = (A + I)^*$ è iniettivo e $Im(A + I)$ è densa.

Assumiamo ora che $A + I$ abbia immagine densa, allora $A^{cl} + I$ è iniettiva e $Im(A^{cl} + I)$ è chiusa, quindi è tutto H .

Se $Dom(A^*)$ contiene strettamente $Dom(A^{cl})$, dal momento che $A^{cl} + I$ è suriettivo, $A^* + I$ non può essere iniettivo. Allora, $A^* + I = (A + I)^*$ ha un nucleo non banale, che significa che $Im(A + I)$ non è densa. Questo genera la contraddizione, quindi $Dom(A^*)$ deve essere uguale al dominio di A^{cl} , ma dato che sia A che la sua chiusura sono simmetrici, A^{cl} è autoaggiunto. Per essere più espliciti, se supponiamo che $Dom(A^*)$ contenga strettamente $Dom(A^{cl})$, poiché $A^{cl} + I$ è suriettivo, per ogni $\psi \in Dom(A^*)$ esiste un $\phi \in Dom(A^{cl})$ tale che

$$(A^{cl} + I)\phi = (A^* + I)\psi \quad (4.33)$$

Questo significa che $A^* + I$ non è iniettivo, altrimenti $\phi - \psi$ sarebbe nel nucleo, quindi

$$Ker(A^* + I) = Ker((A + I)^*) \neq \{0\} \quad (4.34)$$

Ma allora $Im(A + I)^\perp \neq \{0\}$ e cioè $Im(A + I)$ non è densa, portando ad una contraddizione.

Poiché A^{cl} è simmetrico, $Dom(A^{cl}) = Dom(A^*)$ e si ha

$$A^{cl} \subset A^* \quad Dom(A^*) = Dom(A^{cl}) \implies A^{cl} = A^* \quad (4.35)$$

Ovvero, A^{cl} è autoaggiunto

■

5 Il teorema spettrale per operatori autoaggiunti illimitati

In questa sezione enunceremo e dimostreremo il cuore della tesi: il teorema spettrale per operatori autoaggiunti illimitati A ; tali operatori verranno studiati attraverso l'operatore limitato unitario

$$U = (A + iI)(A - iI)^{-1} \quad (5.1)$$

Essendo quest'ultimo normale, commutando col suo aggiunto, ci servirà una versione intermedia del teorema spettrale per operatori normali. Estenderemo quindi questa versione agli operatori autoaggiunti.

5.1 Enunciato del teorema spettrale per operatori autoaggiunti illimitati

L'enunciato del teorema spettrale nel caso illimitato è sostanzialmente identico al caso limitato: l'unica differenza risiede nel fatto che risulterà essenziale esplicitare il dominio degli operatori.

Come già osservato nelle sezioni precedenti, data una misura a valore di proiettore μ sullo spazio di misura (X, Ω) a valori in $B(H)$ e dato un elemento $\psi \in H$, possiamo costruire una misura positiva reale μ_ψ tale che

$$\mu_\psi(E) = \langle \psi, \mu(E)\psi \rangle \quad \forall E \in \Omega \quad (5.2)$$

Abbiamo inoltre già osservato che per ogni funzione limitata e misurabile f

$$\begin{aligned} \left\| \left(\int_X f d\mu \right) \psi \right\|^2 &= \left\langle \left(\int_X f d\mu \right) \psi, \left(\int_X f d\mu \right) \psi \right\rangle \\ &= \left\langle \psi, \left(\int_X \bar{f} f d\mu \right) \psi \right\rangle = \int_X |f|^2 d\mu_\psi = \|f\|_{L^2(X, \mu_\psi)}^2 \end{aligned} \quad (5.3)$$

dal momento che l'integrale è moltiplicativo e il complesso coniugato di una funzione coincide con l'aggiunto dell'operatore. Per l'ultimo passaggio della precedente equazione è bene osservare che

$$\int_X f(\lambda) d\mu_\psi(\lambda) = \left\langle \psi, \left(\int_X f d\mu \right) \psi \right\rangle \quad (5.4)$$

Vorremo ora definire l'operatore $\int_X f d\mu$ per una funzione illimitata f , ma si presume a questo punto che anche l'operatore così definito risulti illimitato, allora ci serve un dominio di definizione per poter scrivere l'operatore

Proposizione 5.1. *Sia μ una misura a valore di proiettore come sopra e sia $f : X \mapsto \mathbb{C}$ una funzione misurabile non necessariamente limitata. Definiamo come segue il sottospazio W_f di H*

$$W_f = \left\{ \psi \in H \mid \int_X |f(\lambda)|^2 d\mu_\psi(\lambda) < \infty \right\} = \left\{ \psi \in H \mid \|f\|_{L^2(X, \mu_\psi)}^2 < \infty \right\} \quad (5.5)$$

Allora esiste un unico operatore illimitato $\int_X f d\mu$ su H con dominio W_f tale che

$$\left\langle \psi, \left(\int_X f d\mu \right) \psi \right\rangle = \int_X f(\lambda) d\mu_\psi(\lambda) \quad (5.6)$$

Osservazione 5.2. Osserviamo che l'operatore così definito godrà delle stesse proprietà appena descritte per le funzioni limitate grazie alla definizione del suo dominio.

Notiamo inoltre che se f fosse limitata, allora $W_f = H$ perché per definizione la misura è finita e quindi tutto l'integrale sarebbe necessariamente finito per ogni $\psi \in H$. Questo crea concordanza tra la definizione appena data e la definizione dell'operatore $\int_X f d\mu$ fornita nei capitoli precedenti per le funzioni limitate, infatti tale operatore risulta limitato se lo è f .

Proposizione 5.3. Sia f una funzione misurabile su X e sia W_f come sopra, allora:

1. W_f è un sottospazio denso di H e la mappa $Q_f : W_f \mapsto \mathbb{C}$ data da

$$Q_f(\psi) = \int_X f(\lambda) d\mu_\psi(\lambda) \quad (5.7)$$

è una forma quadratica su W_f

2. Se L_f è la forma sesquilineare associata su W_f , si ha

$$|L_f(\phi, \psi)| \leq \|\phi\| \cdot \|f\|_{L^2(X, \mu_\psi)} \quad (5.8)$$

per ogni $\phi, \psi \in W_f$

3. Per ogni $\psi \in W_f$, esiste un unico $\chi \in H$ tale che $L_f(\phi, \psi) = \langle \phi, \chi \rangle$ per ogni $\phi \in W_f$. Inoltre, la mappa $\psi \mapsto \chi$ è lineare e per ogni $\psi \in W_f$ si ha

$$\|\chi\|^2 = \int_X |f|^2 d\mu_\psi \quad (5.9)$$

Dimostrazione.

Vogliamo mostrare che W_f è un sottospazio di H , osserviamo quindi che W_f è chiuso per la moltiplicazione per scalare, infatti se $\psi \in W_f$, allora

$$\mu_{c\psi}(E) = \langle c\psi, \mu(E)c\psi \rangle = |c|^2 \langle \psi, \mu(E)\psi \rangle = |c|^2 \mu_\psi(E) \quad (5.10)$$

e se $\int_X |f(\lambda)|^2 d\mu_\psi(\lambda) < \infty$, essendo $\psi \in W_f$, allora lo sarà anche $|c|^2 \int_X |f(\lambda)|^2 d\mu_\psi(\lambda)$. Inoltre W_f è chiuso anche rispetto alla somma, infatti ricordando che $\mu(E)$ è una proiezione ortogonale, ovvero autoaggiunto e idempotente,

$$\begin{aligned} \mu_{\phi+\psi}(E) &= \langle (\phi + \psi), \mu(E)(\phi + \psi) \rangle = \langle (\phi + \psi), \mu(E)^2(\phi + \psi) \rangle \\ &= \langle \mu(E)(\phi + \psi), \mu(E)(\phi + \psi) \rangle = \|\mu(E)(\phi + \psi)\|^2 \\ &= \|\mu(E)\phi + \mu(E)\psi\|^2 \leq (\|\mu(E)\phi\| + \|\mu(E)\psi\|)^2 \\ &\leq 2\|\mu(E)\phi\|^2 + 2\|\mu(E)\psi\|^2 = 2\mu_\phi(E) + 2\mu_\psi(E) \end{aligned} \quad (5.11)$$

dove abbiamo utilizzato la proprietà

$$0 \leq (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 = 2x^2 - x^2 + 2y^2 - y^2 - 2xy \quad (5.12)$$

Considerando solo l'inizio e la fine si ottiene che

$$0 \leq 2x^2 - x^2 + 2y^2 - y^2 - 2xy \quad (5.13)$$

ovvero che

$$\begin{aligned} x^2 + 2xy + y^2 &\leq 2x^2 + 2y^2 \\ (x + y)^2 &\leq 2x^2 + 2y^2 \end{aligned} \quad (5.14)$$

Per mostrare che W_f è anche denso in H , vogliamo mostrare che un generico $v \in H$ è il limite di una successione di elementi di W_f . Sia $E_n = \{x \in X \mid |f(x)| < n\}$ un insieme misurabile in cui la funzione f è per costruzione limitata. Se $v \in \text{Im}(\mu(E_n))$, allora la misura associata a v "vivrà" solo su E_n (cioè $\mu(E_n^c) = 0$) e quindi l'integrale su X si restringe. Inoltre su tale insieme f ha modulo minore di n e quindi

$$\int_X |f|^2 d\mu_v = \int_{E_n} |f|^2 d\mu_v \leq n^2 \mu_v(E_n) < \infty \quad (5.15)$$

Per dire che la misura $\mu_v(E) = \langle v, \mu(E)v \rangle$ è finita, osserviamo che $\mu_v(E) = \langle v, \mu(E)v \rangle \leq \|v\| \|\mu(E)v\| \leq \|v\|^2$ dal momento che $\mu(E)$ è una proiezione ortogonale e quindi la sua norma è al massimo 1; essendo $v \in H$, per definizione la sua norma deve essere un numero finito, da cui deduciamo che $v \in W_f$.

Osserviamo inoltre che dal momento che $X = \bigcup_n E_n$, allora l'unione delle immagini di $\mu(E_n)$ è densa e contenuta in W_f , infatti se chiamiamo $\psi_n = \mu(E_n)v$ allora abbiamo dimostrato che $\psi_n \in W_f$ ed essendo $X = \bigcup_n E_n$, allora $\lim_n \psi_n = v$, ovvero W_f è denso in H perché ogni vettore di X è il limite di una successione di elementi di W_f .

$$\|\psi_n - v\|^2 = \|\mu(E_n)v - v\|^2 = \|\mu(E_n^c)v\|^2 = \mu_v(E_n^c) \rightarrow 0 \quad (5.16)$$

grazie alla continuità della misura μ_v .

Se f è limitata, allora Q_f risulta essere

$$Q_f(\psi) = \left\langle \psi, \left(\int_X f d\mu \right) \psi \right\rangle \quad (5.17)$$

da cui deduciamo che Q_f è una forma quadratica con la forma sesquilineare associata

$$L_f(\phi, \psi) = \left\langle \phi, \left(\int_X f d\mu \right) \psi \right\rangle \quad (5.18)$$

che soddisfa, per Cauchy-Schwartz (proposizione 7.5) e grazie alla (5.3)

$$|L_f(\phi, \psi)| \leq \|\phi\| \left\| \left(\int_X f d\mu \right) \psi \right\| = \|\phi\| \cdot \|f\|_{L^2(X, \mu_\psi)} \quad (5.19)$$

per ogni $\phi, \psi \in H$

Se invece f è illimitata e $\psi \in W_f$, allora sia $f_n = f1_{E_n}$. Allora $Q_f(\psi) = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_{f_n}(\psi)$ per convergenza dominata (il limite passa attraverso l'integrale) e quindi Q_f continua ad essere una forma quadratica, infatti $f_n \rightarrow f$ puntualmente e $|f_n| \leq |f|$ e $\int_X |f| d\mu_\psi < \infty \forall \psi \in W_f$, che è la dominante integrabile. Il funzionale lineare $\phi \mapsto L_f(\phi, \psi)$ è limitato per la (5.19), la quale continua a valere sempre per la convergenza dominata, e quindi per il teorema di Riesz esiste un unico vettore χ tale che $L_f(\phi, \psi) = \langle \phi, \chi \rangle$. Inoltre si osserva che $\|\chi\| \leq \|f\|_{L^2(X, \mu_\psi)}$. Viceversa, essendo $L_f(\phi, \psi) = \langle \phi, \chi \rangle$, quando $\phi = \chi$ la (5.19) diventa un'uguaglianza mostrando che $\|\chi\| \geq \|f\|_{L^2(X, \mu_\psi)}$, infatti

$$\|\chi\| \cdot \|f\|_{L^2(X, \mu_\psi)} \geq |L_f(\chi, \psi)| = |\langle \chi, \chi \rangle| = \|\chi\|^2 \quad (5.20)$$

Si può anche osservare che

$$\|\chi\|^2 = \left\| \int_X f d\mu_\psi \right\|^2 = \int_X |f|^2 d\mu_\psi = \|f\|_{L^2(X, \mu_\psi)}^2 \quad (5.21)$$

Infine la mappa $\psi \mapsto \chi$ è lineare perché $L_f(\phi, \psi)$ è lineare in ψ e quindi per la definizione di χ data dal teorema di Riesz, eredita le proprietà di linearità di L_f . ■

Proposizione 5.4. *Se f è una funzione misurabile a valori reali su X , allora $\int_X f d\mu$ è autoaggiunto su W_f*

Dimostrazione.

Sia $A_f = \int_X f d\mu$ e definiamo i sottoinsiemi F_n di X come

$$F_n = \{x \in X \mid n-1 \leq |f(x)| < n\} \quad (5.22)$$

tali che X risulti l'unione disgiunta degli F_n . Sia $W^n = \text{Im}(\mu(F_n))$. Come nella dimostrazione precedente, W^n è contenuto in W_f e la forma quadratica Q_f è limitata su W^n . Inoltre, se $\phi \in (W^n)^\perp$ e $\psi \in W^n$, è facile osservare che $\mu_{\phi+\psi} = \mu_\phi + \mu_\psi$ e quindi l'additività passa a Q_f

$$Q_f(\phi + \psi) = Q_f(\phi) + Q_f(\psi) \quad (5.23)$$

Se Q_f della somma di due vettori si spezza nella somma dei Q_f senza creare termini misti, allora necessariamente il prodotto scalare tra ϕ e ψ deve essere nullo, ottenendo che

$$\langle \phi, A_f \psi \rangle = L_f(\phi, \psi) = 0 \quad (5.24)$$

mostrando che $A_f \psi \in ((W^n)^\perp)^\perp = W^n$ essendo ortogonale ad un generico elemento di $(W^n)^\perp$.

Concludiamo quindi che A_f è un operatore che mappa in maniera limitata W^n in sé stesso e che, essendo la forma quadratica Q_f a valori reali, si deduce dalle proprietà delle forme quadratiche che A_f ristretto a W^n è anche autoaggiunto.

Sia ora H la somma diretta ortogonale degli spazi di Hilbert W^n (definizione 7.3), ovvero H è l'insieme delle successioni $(\psi_1, \psi_2, \dots)$ tali che $\psi_n \in W^n$ e tali che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\psi_n\|^2 < \infty \quad (5.25)$$

Se denotiamo con A_n la restrizione di A_f a W^n , si ha

$$\begin{aligned} \int_X |f|^2 d\mu_\psi &= \sum_n \int_{F_n} |f|^2 d\mu_\psi = \\ \sum_n \int_{F_n} |f|^2 d\mu_{\psi_n} &= \sum_n \left\| \left(\int_{F_n} f d\mu \right) \psi \right\|^2 = \\ \sum_n \|A_n \psi_n\|^2 \end{aligned} \quad (5.26)$$

$$\begin{aligned} W_f &= \left\{ \psi \in H \mid \sum_{n=1}^{\infty} \|A_n \psi_n\|^2 < \infty \right\} \\ &= \left\{ \psi = (\psi_1, \psi_2, \dots) \mid \sum_{n=1}^{\infty} (\|\psi_n\|^2 + \|A_n \psi_n\|^2) < \infty \right\} \end{aligned} \quad (5.27)$$

L'uguaglianza delle due espressioni è data dal fatto che la successione sta in H se la serie dei quadrati delle norme delle componenti è finita, perciò dico che W_f è l'insieme delle successioni generiche che godono di questa caratteristica, ovvero che stanno in H , e tali che la serie delle norme quadrate di $A_n \psi_n$ è finito. Riassumiamo le due condizioni in un'unica scrittura dentro un'unica serie.

Osserviamo adesso che

$$\int_X |f|^2 d\mu_\psi = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{W_n} |f|^2 d\mu_\psi = \sum_{n=1}^{\infty} \|A_n \psi_n\|^2 \quad (5.28)$$

dove la prima uguaglianza è data dalla convergenza monotona, infatti lo spazio X si decompone nelle componenti W_n e l'integrale della funzione positiva $|f|^2$ permette di scambiare la serie con l'integrale. La seconda uguaglianza è data invece dal fatto che su W_n le due misure μ_ψ e μ_{ψ_n} coincidono. In sostanza, la prima quantità è finita se e solo se lo è l'ultima, ovvero un vettore ψ appartiene a W_f , il dominio dell'operatore A_f , se e solo se l'integrale è finito.

Analogamente si ha

$$Q_f(\psi) = \int_X f(\lambda) d\mu_\psi(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \psi_n, A_n \psi_n \rangle \quad (5.29)$$

ovvero si osserva che l'effetto globale dell'operatore A_f su ψ è la serie degli effetti dei singoli A_n sulle componenti ψ_n ; da cui segue che

$$L_f(\phi, \psi) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \phi_n, A_n \psi_n \rangle \quad (5.30)$$

per ogni $\phi, \psi \in W_f$.

Da ciò vediamo che $A_f\psi = (A_f\psi_1, A_f\psi_2, \dots)$ e quindi A_f è autoaggiunto essendo autoaggiunta ogni componente A_n , essendo il dominio W_f denso in H e dato che la somma diretta ortogonale preserva l'autoaggiuntezza. ■

Grazie a queste due proposizioni appena dimostrate è possibile dedurre la prima proposizione del capitolo; ciò sarà indispensabile per la formulazione seguente del teorema spettrale

Teorema 5.5. *(Teorema spettrale)*

Supponiamo che A sia un operatore autoaggiunto su H non necessariamente limitato. Allora esiste un'unica misura a valore di proiettore μ^A su $\sigma(A)$ a valori in $B(H)$ tale che

$$\int_{\sigma(A)} \lambda d\mu^A(\lambda) = A \quad (5.31)$$

Osservazione 5.6. *Dal momento che lo spettro di A potrebbe essere illimitato, allora anche la funzione $f(\lambda) = \lambda$ potrebbe essere illimitata per $\lambda \in \sigma(A)$.*

Notiamo inoltre che l'uguaglianza espressa nel teorema deve riguardare anche i domini degli operatori, ovvero il dominio dell'integrale di sinistra, ciò che abbiamo finora chiamato W_f , deve coincidere col dominio di A , $\text{Dom}(A)$.

Definizione 5.7. *Per ogni funzione misurabile f su $\sigma(A)$, definiamo un operatore possibilmente illimitato $f(A)$ come*

$$f(A) = \int_{\sigma(A)} f(\lambda) d\mu^A(\lambda) \quad (5.32)$$

Come nel caso limitato si può estendere la misura a tutto $\mathbb{R}$ ponendo uguale a zero la misura fuori da $\sigma(A)$.

Definizione 5.8. *Se A è un operatore autoaggiunto su H , allora per ogni boreliano $E \subset \mathbb{R}$ definiamo il sottospazio spettrale V_E di H come*

$$V_E = \text{Im}(\mu^A(E)) \quad (5.33)$$

Definizione 5.9. *Sia A un operatore autoaggiunto su H , allora per ogni vettore unitario ψ di H definiamo la misura di probabilità μ_ψ^A su $\mathbb{R}$ mediante la formula*

$$\mu_\psi^A(E) = \langle \psi, \mu^A(E)\psi \rangle \quad (5.34)$$

Se l'operatore A rappresenta un'osservabile quantistica, allora interpretiamo tale misura di probabilità come la distribuzione di probabilità per il risultato della misurazione di A nello stato ψ .

Proposizione 5.10. *Sia A un operatore autoaggiunto su H , allora il sottospazio spettrale V_E associato ad A ha le seguenti proprietà:*

1. Se E è un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}$, allora $V_E \subset \text{Dom}(A)$, è invariante sotto l'azione di A e la restrizione di A a V_E è limitata
2. Se E è contenuto in $(\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)$, allora per ogni $\psi \in V_E$ si ha

$$\|(A - \lambda_0 I)\psi\| \leq \epsilon \|\psi\| \quad (5.35)$$

Dimostrazione.

Il punto 1. è verificato perché la funzione $f(\lambda) = \lambda$ è limitata su E e si segue la dimostrazione della proposizione precedente: supponiamo che $|\lambda| < M, \forall \lambda \in E$, allora $\forall \psi \in V_E$

$$\|A\psi\|^2 = \int_E |\lambda|^2 d\mu_\psi \leq M^2 \mu_\psi(E) = M^2 \|\psi\|^2 \quad (5.36)$$

l'ultimo termine è finito, mostrando che l'integrale è finito e ponendo quindi $\psi \in \text{Dom}(A)$.

Il punto 2. è allo stesso modo verificato perché la restrizione di A a V_E coincide con la restrizione di $f(A)$ a V_E dove $f(\lambda) = \lambda 1_E(\lambda)$. Basta quindi osservare che in $(\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)$, si ha $\lambda - \lambda_0 < \epsilon$ e quindi la funzione $f(\lambda) = \lambda - \lambda_0$ è limitata da ϵ da cui

$$\|(A - \lambda_0 I)\psi\|^2 = \int_E |\lambda - \lambda_0|^2 d\mu_\psi \leq \epsilon^2 \int_E d\mu_\psi = \epsilon^2 \|\psi\|^2 \quad (5.37)$$

ricordando che $A = \int_X \lambda d\mu$ e che $\mu_\psi(E) = \|\psi\|^2$ per definizione di misura di probabilità.

■

5.2 Teorema spettrale per operatori normali limitati

Essendo il nostro scopo ultimo quello di dimostrare il teorema spettrale per operatori illimitati e autoaggiunti, come spiegato nell'introduzione del capitolo è conveniente passare alla dimostrazione del teorema per operatori normali, per poi estendere tale dimostrazione agli operatori illimitati e autoaggiunti. Iniziamo quindi la sezione con la seguente definizione

Definizione 5.11. *Un operatore limitato A è detto normale se A commuta col suo aggiunto, ovvero se $AA^* = A^*A$.*

Osservazione 5.12. *Ovviamente un operatore autoaggiunto è anche normale, ma non vale il viceversa; il tipo di operatori normali utili ai nostri scopi sono gli operatori unitari, ovvero quegli $U \in B(H)$ tali che $UU^* = U^*U = I$.*

Osserviamo inoltre che lo spettro di un operatore normale limitato non è necessariamente contenuto in $\mathbb{R}$, ma può essere un sottospazio chiuso, non vuoto e limitato di $\mathbb{C}$. Se però l'operatore è unitario, allora il suo spettro è contenuto nel disco unitario.

Teorema 5.13. *Sia $A \in B(H)$ un operatore normale, allora esiste un'unica misura a valore di proiettore μ^A sulla σ -algebra di Borel su $\sigma(A)$ a valori in $B(H)$ tale che*

$$\int_{\sigma(A)} \lambda d\mu^A(\lambda) = A \quad (5.38)$$

Inoltre, per ogni insieme misurabile $E \subset \sigma(A)$, $Im(\mu^A(E))$ è invariante sotto l'azione di A e A^ .*

Con la misura a valore di proiettore possiamo definire il calcolo funzionale per A definendo

$$f(A) = \int_{\sigma(A)} f(\lambda) d\mu^A(\lambda) \quad (5.39)$$

per ogni funzione limitata e misurabile f su $\sigma(A)$. Possiamo inoltre definire i sottospazi spettrali definendo

$$V_E = Im(\mu^A(E)) \quad (5.40)$$

per ogni insieme di Borel $E \subset \sigma(A)$.

In maniera analoga al caso degli operatori limitati e autoaggiunti, tutte queste definizioni prendono senso e le proprietà che esse soddisfano possono essere equivalentemente dimostrate. Le uniche differenze degne di nota sono che V_E non è più solo invariante sotto A , bensì sotto A e A^* (osserviamo che nel caso autoaggiunto $A = A^*$, proprietà che non sussiste più nel caso normale) e che lo spettro di A non deve più essere strettamente contenuto nella retta reale, ma può essere un sottoinsieme chiuso, non vuoto e limitato di $\mathbb{C}$, motivo per cui il borelliano E che nel caso autoaggiunto (3.2) era contenuto in $[\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon]$ in questa sezione sarà contenuto nel disco chiuso $\overline{D}(\lambda_0, \epsilon) \subset \mathbb{C}$.

Volendo ripercorrere la dimostrazione del teorema spettrale per operatori autoaggiunti limitati espressa nei capitoli precedenti, incappiamo nella dimostrazione

dell'uguaglianza tra il raggio spettrale e la norma operatoriale dell'operatore in esame. Per gli operatori normali, risulta indispensabile ridefinire il concetto di polinomio: dal momento che lo spettro di A non è contenuto necessariamente nella retta reale, le potenze degli autovalori di A sono funzioni a valori complessi di $\sigma(A)$ e bisogna quindi utilizzare un teorema di approssimazione di Weierstrass (Teorema 7.6) a valori complessi. Dovremo quindi considerare dei polinomi in λ e $\bar{\lambda}$, ovvero combinazioni lineari di funzioni della forma $\lambda^m \bar{\lambda}^n$, e avremo bisogno di un nuovo teorema della mappa spettrale che, come per il caso autoaggiunto, eguagli $\{\sigma(p(A))\}$ e $\{p(\lambda), \lambda \in \sigma(A)\}$; nello specifico,

$$\sigma(p(A, A^*)) = \{p(\lambda, \bar{\lambda}) \mid \lambda \in \sigma(A)\} \quad (5.41)$$

associando naturalmente A e λ e A^* e $\bar{\lambda}$. Dimostreremo questa uguaglianza in seguito.

Procediamo ora con la dimostrazione dell'uguaglianza tra raggio spettrale e norma operatoriale nel caso di operatori normali; necessitiamo per la dimostrazione del seguente lemma.

Lemma 5.14. *Se A e B sono elementi che commutano di $B(H)$, allora*

$$R(AB) \leq R(A)R(B) \quad (5.42)$$

Dimostrazione.

Se A è limitato, osserviamo che poiché A e B commutano, si ha $(AB)^m = A^m B^m$, e quindi per la sub-moltiplicatività della norma

$$\|(AB)^m\| = \|A^m B^m\| \leq \|A^m\| \cdot \|B^m\| \quad (5.43)$$

Passando alla radice m -esima e mandando $m \rightarrow \infty$, per la formula di Gelfand (proposizione 7.11) si ottiene

$$R(AB) = \lim_{m \rightarrow \infty} \|(AB)^m\|^{1/m} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \|A^m\|^{1/m} \cdot \|B^m\|^{1/m} = R(A) \cdot R(B) \quad (5.44)$$

■

Possiamo ora procedere alla dimostrazione della proposizione

Proposizione 5.15. *Sia $A \in B(H)$ un operatore normale, allora*

$$\|A\| = R(A) \quad (5.45)$$

Dimostrazione.

Per ogni operatore limitato A , abbiamo già dimostrato che $\|A\| \geq R(A)$; vogliamo mostrare la disuguaglianza opposta.

Ricordiamo che $\|A\|^2 = \|A^*A\|$ e che A^*A è autoaggiunto (infatti $(A^*A)^* = A^*(A^*)^* = A^*A$) e quindi se A e A^* commutano, ovvero se A è normale, si ha

$$\|A\|^2 = \|A^*A\| = R(A^*A) \leq R(A^*)R(A) \leq \|A^*\| \cdot R(A) = \|A\|R(A) \quad (5.46)$$

Dividendo tutto per la norma dell'operatore, si ottiene la disuguaglianza desiderata. Ovviamente si sottintende che nel caso in cui la norma di A fosse nulla,

ovvero nel caso in cui A fosse nullo, la disuguaglianza sarebbe immediatamente soddisfatta.

Per comprendere a fondo la formula appena scritta, ricordiamo che

$$\|A\|^2 = \sup_{\|\psi\|=1} \|A\psi\|^2 = \sup_{\|\psi\|=1} \langle A\psi, A\psi \rangle = \sup_{\|\psi\|=1} \langle \psi, A^*A\psi \rangle = \|A^*A\| \quad (5.47)$$

e che

$$R(A^*A) = \lim_n \|(A^*A)^n\|^{1/n} \leq \lim_n (\|A\|^n \|A^*\|^n)^{1/n} = R(A^*)R(A) \quad (5.48)$$

■

Osservazione 5.16. B autoaggiunto, allora

$$\|B\| = \sup_{\|\psi\|=1} |\langle \psi, B\psi \rangle| \quad (5.49)$$

Infatti, per Cauchy-Schwarz $\sup_{\|\psi\|=1} |\langle \psi, B\psi \rangle| \leq \|B\|$, infatti $|\langle \psi, B\psi \rangle| \leq \|\psi\| \cdot \|B\psi\|$ e facendo il sup

$$\sup_{\|\psi\|=1} |\langle \psi, B\psi \rangle| \leq \sup_{\|\psi\|=1} \|B\psi\| = \|B\| \quad (5.50)$$

Però vale anche la disuguaglianza opposta, infatti se $\phi = \frac{B\psi}{\|B\psi\|}$, e la norma di ϕ vale 1, allora $\|B\psi\| = \langle \phi, B\psi \rangle = \langle B\phi, \psi \rangle$.

Usando l'identità di polarizzazione e il parallelogramma si ottiene che $\|B\psi\| \leq \sup_{\|\psi\|=1} |\langle \psi, B\psi \rangle|$. Facendo il sup si ha la tesi.

Dimostreremo ora tre lemmi indispensabili per mostrare l'uguaglianza (5.41)

Definizione 5.17. Sia A un operatore limitato, un ϵ -quasi autovettore per A con autovalore $\lambda \in \mathbb{C}$ è un vettore non nullo $\psi \in H$ tale che

$$\|(A - \lambda I)\psi\| < \epsilon \|\psi\| \quad (5.51)$$

Lemma 5.18. Sia $A \in B(H)$ normale

1. Se ψ è un ϵ -quasi autovettore per A con autovalore λ , allora ψ lo è anche per A^* con autovalore $\bar{\lambda}$
2. Un numero complesso λ appartiene allo spettro di A se e solo se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un ϵ -quasi autovettore con autovalore λ

Dimostrazione.

Per dimostrare il punto 1. basta notare che

$$\begin{aligned} \|(A^* - \bar{\lambda}I)\psi\|^2 &= \langle (A^* - \bar{\lambda}I)\psi, (A^* - \bar{\lambda}I)\psi \rangle \\ &= \langle \psi, (A - \lambda I)(A^* - \bar{\lambda}I)\psi \rangle \\ &= \langle \psi, (A^* - \bar{\lambda}I)(A - \lambda I)\psi \rangle \\ &= \langle (A - \lambda I)\psi, (A - \lambda I)\psi \rangle \\ &= \|(A - \lambda I)\psi\|^2 \end{aligned} \quad (5.52)$$

e quindi che se ψ è un ϵ -quasi autovettore per A , allora lo è anche per A^* e viceversa.

Per il punto 2. osserviamo che se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un ϵ -quasi autovettore con autovalore λ , allora $A - \lambda I$ non potrebbe avere un'inversa limitata e quindi $\lambda \in \sigma(A)$; infatti, se avesse un'inversa limitata, diciamo B , allora

$$\|\psi\| = \|B(A - \lambda I)\psi\| \leq \|B\| \cdot \|(A - \lambda I)\psi\| \leq \|B\| \cdot \epsilon \|\psi\| \quad (5.53)$$

e dividendo tutto per la norma dell'autovettore otterremmo per ogni $\epsilon > 0$, $\|B\| \geq 1/\epsilon$. Se scegliamo in particolare come ϵ dei valori tendenti a zero, osserviamo che $\|B\|$ esplode dimostrando che se esiste l'inverso esso non può essere limitato.

Viceversa, supponiamo vi sia un ϵ per cui non esiste alcun ϵ -quasi autovettore, allora per quel dato ϵ vale che

$$\|(A - \lambda I)\psi\| \geq \epsilon \|\psi\| \quad (5.54)$$

Da questa disuguaglianza deduciamo che

1. $A - \lambda I$ è iniettivo, perché se $(A - \lambda I)\psi = 0$ allora, per ragioni di norma, necessariamente $\psi = 0$, ovvero il nucleo di $A - \lambda I$ contiene solo lo zero. Inoltre, dalla dimostrazione del punto 1. osserviamo che anche $A^* - \bar{\lambda}I$ è iniettivo.
2. La disuguaglianza garantisce che l'immagine dell'operatore $A - \lambda I$ sia un sottospazio chiuso di H (3.10), infatti
sia $v_n \rightarrow v$ e $v_n = (A - \lambda I)\psi_n$ allora $v = \lim_n v_n = \lim_n (A - \lambda I)\psi_n$ che appartiene all'immagine di $A - \lambda I$; per ipotesi,
 $\|v_n - v_m\| = \|(A - \lambda I)(\psi_n - \psi_m)\| \geq \epsilon \|\psi_n - \psi_m\|$, dato che v_n è di Cauchy essendo convergente, la prima norma tende a 0, ma allora lo è anche $(\psi_n)_n$ e quindi $(A - \lambda I)\psi_n \rightarrow v \in \text{Im}(A - \lambda I)$
3. Dal momento che è iniettivo anche l'operatore aggiunto, allora l'immagine di $A - \lambda I$ è anche densa in H , ovvero è tutto H

Da queste tre deduzioni ne consegue che $A - \lambda I$ è iniettivo e suriettivo e quindi invertibile con inversa limitata (basta ripetere il ragionamento del punto 1. con la disuguaglianza al contrario)

■

Lemma 5.19. *Sia $A \in B(H)$ normale, allora per ogni polinomio p in due variabili e per ogni λ complesso esiste una costante C tale che se ψ è un ϵ -quasi autovettore per A con autovalore λ , allora ψ è un $(C\epsilon)$ -quasi autovettore per $p(A, A^*)$ con autovalore $p(\lambda, \bar{\lambda})$*

Dimostrazione.

Per semplicità, consideriamo uno ψ tale che $\|\psi\| = 1$. Decomponiamo $p(A, A^*) - p(\lambda, \bar{\lambda})I$ in una combinazione lineare di termini della forma $A^k(A^*)^l - \lambda^k \bar{\lambda}^l$ e ragioniamo per induzione su $k + l$: se $k = 1$ e $l = 0$ otteniamo l'operatore $A - \lambda I$ e per ipotesi $\|(A - \lambda I)\psi\| \leq \epsilon$ e analogamente se $k = 0$ e $l = 1$ giungiamo alla

stessa conclusione su $A^* - \bar{\lambda}I$ grazie al lemma precedente.

Supponiamo ora che esista una costante C tale che $\|(A^k(A^*)^l - \lambda^k \bar{\lambda}^l)\psi\| \leq C\epsilon$ per tutti i termini con grado $k+l = N$ e consideriamo il termine di grado $N+1$, otteniamo

$$(A^k(A^*)^l - \lambda^k \bar{\lambda}^l)\psi = A^{k-1}(A^*)^l(A - \lambda I)\psi + \lambda(A^{k-1}(A^*)^l - \lambda^{k-1}\bar{\lambda}^l I)\psi \quad (5.55)$$

Analizziamo le due quantità del membro destro dell'uguaglianza:

- Per quanto riguarda la prima quantità, sappiamo che $\|(A - \lambda I)\psi\| \leq \epsilon$. Poiché gli operatori A e A^* sono limitati per ipotesi, la loro applicazione ripetuta può al massimo moltiplicare la norma per una costante, diciamo c_1 , motivo per cui $\|A^{k-1}(A^*)^l(A - \lambda I)\psi\| \leq c_1\epsilon$
- Per la seconda quantità, osserviamo che ha grado $k+l-1$, cioè N e quindi per il passo induttivo ha norma limitata da una costante per ϵ , diciamo $c_2\epsilon$.

Sommando le due quantità si ottiene una norma minore o uguale a $(c_1 + |\lambda|c_2)\epsilon$ che ribattezziamo $C\epsilon$ concludendo la dimostrazione. ■

Lemma 5.20. *Sia $A \in B(H)$ normale, sia p un polinomio in due variabili e sia μ un elemento dello spettro di $p(A, A^*)$. Allora per ogni $\epsilon > 0$ esiste un sottospazio chiuso non vuoto W^ϵ di H tale che W^ϵ è invariante sotto l'azione di A e A^* e tale che ogni elemento non nullo di W^ϵ sia un ϵ -quasi autovettore di $p(A, A^*)$ con autovalore μ*

Dimostrazione.

Per semplificare il problema definiamo un operatore ausiliario $B = p(A, A^*) - \mu I$; lo scopo della dimostrazione è mostrare che $\|B\psi\| \leq \epsilon\|\psi\|$, ovvero che ogni $\psi \in W^\epsilon$ è un ϵ -quasi autovettore di $p(A, A^*)$ con autovalore μ .

Poiché μ è nello spettro di $p(A, A^*)$, allora $p(A, A^*) - \mu I$ non è invertibile, ovvero B non è invertibile e $B = B - 0I$, da cui deduciamo che $B - 0I$ non è invertibile, ovvero che $0 \in \sigma(B)$. Inoltre, essendo A normale lo è anche B , infatti essendo B un polinomio in A e A^* , se essi commutano allora commuta tutto B .

Consideriamo ora l'operatore B^*B : essendo il prodotto di un operatore per il suo aggiunto, abbiamo già osservato che esso è autoaggiunto ($(B^*B)^* = B^*B$) e non negativo ($\langle B^*B\psi, \psi \rangle = \|B\psi\|^2 \geq 0$); essendo 0 nello spettro di B , si deduce dai due lemmi precedenti che 0 è anche nello spettro di B^*B .

Utilizzando il teorema spettrale per operatori autoaggiunti su B^*B , per ogni $\epsilon > 0$ possiamo definire il sottospazio spettrale W^ϵ associato all'intervallo di autovalori vicini a zero, nello specifico $(-\epsilon^2, \epsilon^2)$. Sappiamo che il sottospazio spettrale è invariante sotto l'azione di B^*B ed è non vuoto (poiché contiene almeno 0). Per costruzione, la restrizione di B^*B a W^ϵ ha norma minore o uguale a ϵ^2 : ricordiamo infatti che la restrizione di un operatore ad un insieme ha uno spettro contenuto in quell'insieme e quindi, dal momento che la norma coincide con il raggio spettrale e in questa situazione il raggio spettrale deve essere minore o uguale a ϵ^2 , allora anche la norma di B^*B ristretto a W^ϵ dovrà esserlo. Allora, per ogni $\psi \in W^\epsilon$,

$$\|B\psi\|^2 = \langle B\psi, B\psi \rangle = \langle \psi, B^*B\psi \rangle \leq \|\psi\| \cdot \|B^*B\psi\| \leq \epsilon^2\|\psi\|^2 \quad (5.56)$$

Facendo la radice quadrata da entrambe le parti otteniamo che $\|B\psi\| \leq \epsilon\|\psi\|$ e ricordando la definizione di B si ha

$$\|(p(A, A^*) - \mu I)\psi\| \leq \epsilon\|\psi\| \quad (5.57)$$

da cui deduciamo che ogni $\psi \in W^\epsilon$ è un ϵ -quasi autovettore per $p(A, A^*)$. Infine, vogliamo mostrare l'invarianza di W^ϵ rispetto ad A e A^* ; poiché A è normale, esso commuta con A^* , di conseguenza A e A^* commutano con il polinomio $p(A, A^*)$ e quindi con B e B^*B . Commutando con B^*B , A e A^* preservano i sottospazi spettrali di B^*B e in particolare W^ϵ , da cui deriva l'invarianza di quest'ultimo sotto l'azione di A e A^* . Il teorema spettrale garantisce infatti che i sottospazi spettrali di un operatore autoaggiunto sono invarianti sotto qualsiasi operatore che commuta con tale operatore. Per esplicitare la natura di W^ϵ , indicando con μ la misura spettrale associata a B^*B , potremmo dire che $W^\epsilon = \mu((-\epsilon^2, \epsilon^2))H$. ■

Teorema 5.21. *Se $A \in B(H)$ è normale, allora per ogni polinomio p in due variabili, si ha*

$$\sigma(p(A, A^*)) = \{p(\lambda, \bar{\lambda}) \mid \lambda \in \sigma(A)\} \quad (5.58)$$

Osservazione 5.22. *Se ad esempio $p(\lambda, \bar{\lambda}) = \lambda^2 \bar{\lambda}^3$, allora $p(A, A^*) = A^2(A^*)^3$; dato che A e il suo aggiunto commutano, allora la trasformazione appena applicata risulta essere un omomorfismo tra algebre e quindi possiamo affermare che $(pq)(A, A^*) = p(A, A^*)q(A, A^*)$*

Dimostrazione.

Supponiamo innanzitutto che λ appartenga allo spettro di A , dal punto 2. del primo lemma A ha un ϵ -quasi autovettore con autovalore λ per ogni $\epsilon > 0$. Il secondo lemma mostra allora che per ogni $\epsilon > 0$, $p(A, A^*)$ ha un $(C\epsilon)$ -quasi autovettore con autovalore $p(\lambda, \bar{\lambda})$. Se però per ogni $\epsilon > 0$ si ha che $p(\lambda, \bar{\lambda})$ è un ϵ -quasi autovettore per $p(A, A^*)$, allora per il primo lemma (essendo un se e solo e) $p(\lambda, \bar{\lambda})$ è nello spettro di $p(A, A^*)$.

Viceversa, supponiamo che sia μ nello spettro di $p(A, A^*)$. Per ogni $\epsilon > 0$ consideriamo il sottospazio non vuoto W^ϵ definito nel lemma precedente, il quale è invariante sotto l'azione di A e A^* . La restrizione di A a W^ϵ , chiamiamola B , è un operatore normale e lo spettro di B è non vuoto.

1. B è normale per dimostrazione diretta: infatti si osserva che $(A|_{W^\epsilon})^* = (A^*|_{W^\epsilon})$ e quindi per ogni $\psi \in W^\epsilon$

$$\begin{aligned} (A|_{W^\epsilon})(A|_{W^\epsilon})^*\psi &= \\ &= (A|_{W^\epsilon})(A^*|_{W^\epsilon})\psi \\ &= AA^*\psi = A^*A\psi \\ &= (A^*|_{W^\epsilon})(A|_{W^\epsilon})\psi \\ &= (A|_{W^\epsilon})^*(A|_{W^\epsilon})\psi \end{aligned} \quad (5.59)$$

2. Lo spettro di B è non vuoto perché B è limitato e lo spettro di un operatore limitato è sempre non vuoto

Se prendiamo un certo $\lambda \in \sigma(B)$, allora sappiamo dal lemma che esiste un ϵ -quasi autovettore ψ di A in W^ϵ con autovalore λ . Abbiamo dimostrato nel lemma che allora ψ è anche un $(C\epsilon)$ -quasi autovettore per $p(A, A^*)$ con autovalore $p(\lambda, \bar{\lambda})$. Dal momento che $\psi \in W^\epsilon$, esso è anche un ϵ -quasi autovettore per $p(A, A^*)$ con autovalore μ , dal momento che per ipotesi μ è nello spettro di $p(A, A^*)$ e quindi per ogni $\epsilon > 0$ esiste ψ un ϵ -quasi autovettore per $p(A, A^*)$ con ϵ -quasi autovalore μ . Allora è facile vedere, grazie alla disuguaglianza triangolare e grazie al fatto che μ e $p(\lambda, \bar{\lambda})$ sono candidati autovalori per l' ϵ -quasi autovettore ψ , che

$$\begin{aligned} |(\mu - p(\lambda, \bar{\lambda}))\psi| &= |(p(A, A^*) - p(\lambda, \bar{\lambda})I)\psi - (p(A, A^*) - \mu I)\psi| \\ &\leq \|(p(A, A^*) - p(\lambda, \bar{\lambda}))\psi\| + \|(p(A, A^*) - \mu)\psi\| \\ &< (C\epsilon + \epsilon)\|\psi\| \end{aligned} \quad (5.60)$$

per ogni $\epsilon > 0$. Si deduce quindi che $|\mu - p(\lambda, \bar{\lambda})| \leq C\epsilon + \epsilon$.

Per ogni $\epsilon > 0$ siamo quindi in grado di trovare un $\lambda_\epsilon \in \sigma(A)$ tale che

$$|\mu - p(\lambda_\epsilon, \bar{\lambda}_\epsilon)| < C\epsilon + \epsilon \quad (5.61)$$

Riusciamo allora a trovare una successione di λ_n in $\sigma(A)$ tali che $p(\lambda_n, \bar{\lambda}_n) \rightarrow \mu$. Dal momento che $\sigma(A)$ è compatto, per Bolzano-Weierstrass possiamo passare ad una sottosuccessione che converge ad un certo $\lambda \in \sigma(A)$ e questo soddisfa che $p(\lambda, \bar{\lambda}) = \mu$ essendo il polinomio p una funzione continua ed essendo unico il limite della successione e della sottosuccessione. ■

Avendo appena dimostrato che per un operatore limitato e normale vale

1. $R(A) = \|A\|$
2. $\sigma(p(A, A^*)) = \{p(\lambda, \bar{\lambda}) | \lambda \in \sigma(A)\}$

allora possiamo affermare che

$$\|p(A, A^*)\| = \sup_{\mu \in \sigma(p(A, A^*))} |\mu| = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |p(\lambda, \bar{\lambda})| = \|p\| \quad (5.62)$$

Allora la mappa $p \mapsto p(A, A^*)$ è una isometria ed essendo i polinomi in due variabili a valori in $\mathbb{C}$ densi nell'insieme delle funzioni continue definite su $\sigma(A)$ a valori complessi, per il teorema di approssimazione di Weierstrass, per ogni funzione $f \in \mathcal{C}(\sigma(A), \mathbb{C})$ esiste un polinomio in due variabili $p(\lambda, \bar{\lambda})$ tale che per ogni $\epsilon > 0$,

$$\sup_{\lambda \in \sigma(A)} |f(\lambda) - p(\lambda, \bar{\lambda})| < \epsilon \quad (5.63)$$

Quindi, essendo la mappa scritta sopra una isometria ed essendo i polinomi densi nell'insieme delle funzioni continue, per ogni funzione f possiamo trovare una successione di polinomi $(p_n)_n$ che converge a f , e quindi di Cauchy, tale che

$$\|p_n(A, A^*) - p_m(A, A^*)\| \rightarrow 0 \quad (5.64)$$

dal momento che $\|p_n - p_m\| \rightarrow 0$, da cui deduciamo che la successione $(p_n(A, A^*))_n$ è di Cauchy, e quindi converge a un certo $p(A, A^*)$ che coinciderà con $f(A)$.

Tale estensione, che chiamiamo il calcolo funzionale per A , ha le stesse proprietà del caso autoaggiunto. Per avere la dimostrazione del teorema spettrale basta ripercorrere per filo e per segno tutta la dimostrazione del caso autoaggiunto e si giungerà alle medesime conclusioni.

Teorema 5.23 (Di rappresentazione di Riesz). *Sia X uno spazio metrico compatto e sia $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ lo spazio delle funzioni continue a valori reali definite su X . Supponiamo che $\Lambda : \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ sia un funzionale lineare con la proprietà che quando f è non negativa allora anche $\Lambda(f)$ è non negativa; allora esiste un'unica misura reale positiva μ sulla σ -algebra di Borel su X per cui, per ogni $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$*

$$\Lambda(f) = \int_X f d\mu \quad (5.65)$$

In particolare, μ è una misura finita e $\mu(X) = \Lambda(1)$

Vediamo come questo si applica ai nostri scopi

Teorema 5.24 (Di rappresentazione di Riesz). *Sia $A \in B(H)$ normale e sia $\sigma(A)$ uno spazio metrico compatto e sia $\mathcal{C}(\sigma(A), \mathbb{C})$ lo spazio delle funzioni continue a valori complessi definite su $\sigma(A)$. Supponiamo che $\Lambda_\psi : \mathcal{C}(\sigma(A), \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ sia un funzionale lineare con la proprietà che quando f è non negativa allora anche $\Lambda_\psi(f)$ è non negativa;*

$$\Lambda_\psi(f) = \langle \psi, f(A)\psi \rangle \quad (5.66)$$

allora esiste un'unica misura reale positiva μ_ψ sulla σ -algebra di Borel su $\sigma(A)$ per cui, per ogni $f \in \mathcal{C}(\sigma(A), \mathbb{C})$

$$\Lambda_\psi(f) = \int_{\sigma(A)} f(\lambda) d\mu_\psi(\lambda) \quad (5.67)$$

In particolare, μ_ψ è una misura finita e $\mu_\psi(\sigma(A)) = \Lambda_\psi(1) = \|\psi\|^2$. Se f è una funzione complessa, applicheremo il teorema alla sua parte reale e immaginaria

Introduciamo ora le forme quadratiche per poter estendere il calcolo funzionale continuo del teorema di Riesz dalle funzioni continue alle funzioni in generale misurabili.

Possiamo quindi costruire la mappa $Q_f(\psi) : H \mapsto \mathbb{C}$ data da

$$Q_f(\psi) = \int_{\sigma(A)} f(\lambda) d\mu_\psi(\lambda) \quad (5.68)$$

Definizione 5.25. *Data una funzione limitata e misurabile f su $\sigma(A)$, sia $f(A)$ l'operatore associato alla forma quadratica Q_f , cioè significa che $f(A)$ è l'unico operatore tale che*

$$Q_f(\psi) = \langle \psi, f(A)\psi \rangle = \int_{\sigma(A)} f d\mu_\psi \quad (5.69)$$

Se inoltre f è a valori reali, allora lo è anche Q_f e quindi l'operatore associato $f(A)$ risulta autoaggiunto

Teorema 5.26. *Sia $A \in B(H)$ normale. Per ogni insieme misurabile $E \subset \sigma(A)$ definiamo l'operatore $\mu^A(E)$ come segue*

$$\mu^A(E) = \mathbf{1}_E(A) \quad (5.70)$$

con $\mathbf{1}_E(A)$ l'unico operatore associato alla forma $Q_{\mathbf{1}_E}$ tale che

$$\langle x, \mathbf{1}_E(A)x \rangle = Q_{\mathbf{1}_E}(x) = \int_{\sigma(A)} \mathbf{1}_E d\mu_x. \quad (5.71)$$

Allora μ^A è una misura a valore di proiettore su $\sigma(A)$ e soddisfa

$$\int_{\sigma(A)} \lambda d\mu^A(\lambda) = A \quad (5.72)$$

Dimostrazione.

La prima cosa da dimostrare è che $\mathbf{1}_E(A)$ è una proiezione ortogonale: dal momento che $\mathbf{1}_E \cdot \mathbf{1}_E = \mathbf{1}_E$ e dato che $\mathbf{1}_E$ è a valori reali (potendo assumere solo i valori 1 e 0), sappiamo che $\mathbf{1}_E(A)$ è autoaggiunto, infatti $(\mathbf{1}_E(A))^* = \overline{\mathbf{1}_E(A)} = \mathbf{1}_E(A)$; inoltre soddisfa $\mathbf{1}_E(A)^2 = \mathbf{1}_E(A)$, quindi $\mu^A(E)$ è una proiezione ortogonale, per definizione.

Mostriamo ora l'ortogonalità delle immagini tramite μ^A di borelliani disgiunti: se E_1 e E_2 sono insiemi misurabili, allora $\mathbf{1}_{E_1 \cap E_2} = \mathbf{1}_{E_1} \cdot \mathbf{1}_{E_2}$ e quindi

$$\mu^A(E_1 \cap E_2) = \mu^A(E_1)\mu^A(E_2) \quad (5.73)$$

Inoltre, le immagini di $\mu^A(E_1)$ e di $\mu^A(E_2)$ sono ortogonali se E_1 e E_2 sono disgiunti, proprio perché la misura della loro intersezione, ovvero del vuoto, sarebbe uguale al prodotto delle loro misure e sarebbe zero, dunque ortogonali.

Da ciò ne concludiamo che

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu^A(E_j)\psi = P\psi \quad (5.74)$$

dove P è la proiezione ortogonale sul sottospazio chiuso generato dalle immagini di $\mu^A(E_j)$ per ogni j . Ciò si può scrivere perché P rappresenta la somma dei $\mu^A(E_j)$ che sono proiezioni ortogonali e si può mostrare che la somma di due o più proiezioni è sia autoaggiunta sia idempotente, quindi è anch'essa una proiezione ortogonale, infatti

$$(p_1 + p_2)^* = p_1^* + p_2^* = p_1 + p_2 \quad (5.75)$$

e osservando che le proiezioni sono ortogonali, ovvero che $p_1 p_2 = p_2 p_1 = 0$

$$(p_1 + p_2)^2 = p_1^2 + p_1 p_2 + p_2 p_1 + p_2^2 = p_1^2 + p_2^2 = p_1 + p_2 \quad (5.76)$$

D'altro canto, se E è l'unione di tutti gli E_j , che sono disgiunti a coppie, allora un elemento x può essere contenuto al massimo in uno di questi E_j e quindi la

successione di funzioni semplici $f_N = \sum_{j=1}^N \mathbf{1}_{E_j}$ valutata in x può assumere al massimo il valore 1; è quindi uniformemente limitata da 1 e converge puntualmente a $\mathbf{1}_E$, quindi usando la convergenza dominata, con la funzione 1 come dominante essendo finita e quindi integrabile, si ha che

$$\begin{aligned}
 \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \psi, f_N(A) \psi \rangle &= \\
 \lim_{N \rightarrow \infty} \left\langle \psi, \sum_{j=1}^N \mathbf{1}_{E_j}(A) \psi \right\rangle &= \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N \langle \psi, \mu^A(E_j) \psi \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \left(\sum_{j=1}^N \mathbf{1}_{E_j} \right) d\mu = \\
 \int \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N \mathbf{1}_{E_j} d\mu &= \int \mathbf{1}_E d\mu = \langle \psi, \mathbf{1}_E(A) \psi \rangle = \\
 \langle \psi, \mu^A(E) \psi \rangle
 \end{aligned} \tag{5.77}$$

ne concludiamo che $\mathbf{1}_E(A) = P$ e questo fornisce l'additività desiderata per μ^A . Infatti, al tendere di N all'infinito, f_N assumerà sicuramente il valore 1, perché prima o poi si arriverà a quel E_j tale per cui $x \in E_j$. Avendo mostrato che $\mathbf{1}_E(A) = P$, abbiamo dimostrato che $\mu^A(E)$ è proprio una misura a valori di proiezione.

Infine, se $f = \mathbf{1}_E$ per qualche insieme di Borel E , allora

$$f(A) = \mathbf{1}_E(A) = \mu^A(E) = \int_{\sigma(A)} f(\lambda) d\mu^A(\lambda) = \int_{\sigma(A)} \mathbf{1}_E(\lambda) d\mu^A(\lambda) \tag{5.78}$$

Tale uguaglianza vale per la funzione caratteristica, per le funzioni semplici, per le funzioni limitate, per le funzioni misurabili, con il solito argomento di linearità e passando al limite.

In particolare, se $f(\lambda) = \lambda$, funzione limitata e misurabile su un compatto, allora l'integrale di f contro μ^A diventa

$$\int_{\sigma(A)} \lambda d\mu^A(\lambda) = A \tag{5.79}$$

in accordo con tutto ciò che abbiamo dimostrato sopra; questa è esattamente la tesi cercata. Abbiamo essenzialmente scritto A attraverso la sua misura spettrale, scomponendolo mediante i suoi autovalori

■

Per concludere il teorema spettrale non ci resta che dimostrare l'unicità: Siano μ^1 e μ^2 due misure su $\sigma(A)$ tali che

$$A = \int_{\sigma(A)} \lambda d\mu^1(\lambda) = \int_{\sigma(A)} \lambda d\mu^2(\lambda) \tag{5.80}$$

Per ogni $\phi, \psi \in H$ siano date le seguenti misure scalari $\mu_\psi^1(E) = \langle \psi, \mu^1(E)\phi \rangle$ e $\mu_\psi^2(E) = \langle \psi, \mu^2(E)\phi \rangle$.

Per ogni funzione continua f sappiamo che

$$\int f(\lambda) dp_1(\lambda) = \int f(\lambda) dp_2(\lambda) \quad (5.81)$$

Questo è valido perché se l'operatore A lo abbiamo scritto in maniera equivalente come i due integrali rispetto alle due misure, allora specificando tali operatori in ϕ e ψ , i risultati degli integrali dovranno essere gli stessi. Per il teorema di Riesz, se due misure producono lo stesso integrale per ogni funzione continua, allora tali misure devono coincidere su tutti i borelliani, ovvero $\mu_\psi^1(E) = \mu_\psi^2(E)$ per ogni borelliano E e per arbitrarietà di ϕ e ψ , le due misure coincidono.

Ma allora

$$\langle \psi, \mu^1(E)\phi \rangle = \mu_\psi^1(E) = \mu_\psi^2(E) = \langle \psi, \mu^2(E)\phi \rangle \quad (5.82)$$

da cui deduciamo, per arbitrarietà di E , che $\mu^1 = \mu^2$

5.3 Dimostrazione del teorema spettrale per operatori autoaggiunti illimitati

Per dimostrare il teorema spettrale per operatori illimitati autoaggiunti A dovremo costruire un operatore unitario, e quindi normale, U ; applicando il teorema spettrale a tale operatore si potranno dedurre i risultati desiderati per A . Per motivare la costruzione di U consideriamo la seguente funzione

$$C(x) := \frac{x+i}{x-i}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (5.83)$$

Si verifica facilmente che C mappa la retta reale sulla circonferenza $S^1 \setminus \{1\}$ e che la sua inversa è

$$D(y) := i \frac{y+1}{y-1}, \quad y \in S^1 \setminus \{1\} \quad (5.84)$$

Inoltre, il limite all'infinito di $C(x)$ è 1: la funzione C è la più semplice applicazione limitata ed iniettiva definibile su $\mathbb{R}$.

Vorremmo applicare C ad A operatore autoaggiunto: daremo senso all'operatore $U = C(A)$ e ritorneremo ad A a partire da U applicando D . L'operatore U è unitario ed è conosciuto come la **trasformata di Cayley** di A .

Ricordiamo che se A è autoaggiunto allora i è nell'insieme risolvente di A e l'operatore $(A - iI)^{-1}$ mappa H in $\text{Dom}(A)$.

Teorema 5.27. *Se A è un operatore autoaggiunto su H , sia U l'operatore definito da*

$$U\psi = (A + iI)(A - iI)^{-1}\psi \quad (5.85)$$

Allora i seguenti risultati sono verificati:

1. *L'operatore U è unitario su H*
2. *L'operatore $U - I$ è iniettivo*
3. *L'immagine dell'operatore $U - I$ è uguale al dominio di A e per ogni $\psi \in \text{Im}(U - I)$ si ha*

$$A\psi = i(U + I)(U - I)^{-1}\psi \quad (5.86)$$

Osservazione 5.28. *L'operatore U è l'equivalente della trasformata di Möbius $z \mapsto \frac{z+i}{z-i}$ nei numeri complessi: se A avesse autovalore λ , allora U avrebbe autovalore $\frac{\lambda+i}{\lambda-i}$; da questa intuizione si può immaginare il motivo per cui U sia unitario.*

Dimostrazione.

L'operatore risolvente $(A - iI)^{-1}$ deve essere iniettivo, dato che essendo A autoaggiunto allora $i \in \rho(A)$ e quindi $A - iI$ è biiettivo e invertibile; se $(A - iI)^{-1}\phi = (A - iI)^{-1}\psi$ allora applicando ambo i membri l'operatore $A - iI$ si ottiene

$$(A - iI)(A - iI)^{-1}\phi = (A - iI)(A - iI)^{-1}\psi, \quad \forall \phi, \psi \in H \quad (5.87)$$

Inoltre, $(A - iI)^{-1}$ mappa H in $\text{Dom}(A)$, perché

$$\psi = (A - iI)^{-1}(A - iI)\psi, \quad \forall \psi \in \text{Dom}(A) \quad (5.88)$$

dal momento che $-i$ è nell'insieme risolvente di A , ragionamenti simili mostrano che $A + iI$ mappa $Dom(A)$ iniettivamente in H . Tutto ciò è possibile scriverlo perché essendo A autoaggiunto, allora $\pm i$ appartengono al risolvente di A e quindi $(A \pm iI)^{-1}$ esistono limitati e definiti su tutto H . Per osservare l'iniettività di $A - iI$, si può anche vedere che

$$\|(A - iI)\psi\|^2 = \|A\psi\|^2 + \|\psi\|^2 \geq \|\psi\|^2 \quad (5.89)$$

usando il fatto che A è autoaggiunto e che si cancellano i termini misti. Analogamente vale per $A + iI$.

L'operatore U è la composizione di un operatore che manda iniettivamente H in $Dom(A)$ e di un altro operatore che manda iniettivamente $Dom(A)$ in H , quindi è una mappa iniettiva da H in H .

$$H \xrightarrow{(A-iI)^{-1}} Dom(A) \xrightarrow{(A+iI)} H \quad (5.90)$$

Ora, per ogni $\phi \in Dom(A)$ si ha

$$\begin{aligned} \langle (A + iI)\phi, (A + iI)\phi \rangle &= \\ \langle A\phi, A\phi \rangle + \langle i\phi, i\phi \rangle + \langle A\phi, i\phi \rangle + \langle i\phi, A\phi \rangle &= \\ \langle A\phi, A\phi \rangle + \langle \phi, \phi \rangle \end{aligned} \quad (5.91)$$

perché si cancellano i termini incrociati essendo A autoaggiunto. Si osserva come si giunge ad una analoga conclusione per $\langle (A - iI)\phi, (A - iI)\phi \rangle$.

Applicando ora $\phi = (A - iI)^{-1}\psi$ si mostra che per ogni $\psi \in H$ si ha

$$\begin{aligned} \|U\psi\|^2 &= \\ \langle (A + iI)(A - iI)^{-1}\psi, (A + iI)(A - iI)^{-1}\psi \rangle &= \\ = \langle (A - iI)(A - iI)^{-1}\psi, (A - iI)(A - iI)^{-1}\psi \rangle &= \\ = \langle \psi, \psi \rangle \end{aligned} \quad (5.92)$$

Allora U è biettiva e preserva le norme, perciò è unitaria, infatti la suriettività di U deriva dalla suriettività di $A + iI$ su H ed essendo U un'isometria e H completo, risulta anche U suriettivo (per dimostrare la suriettività di $A + iI$ si procede col solito argomento: si prende una successione di elementi nell'immagine di $A - iI$ che convergono ad un certo ϕ e si dimostra che tale ϕ è ancora in quell'immagine, allora $Im(A - iI)$ è chiuso ed essendo denso in H , quindi $A - iI$ è suriettivo).

Osserviamo che, essendo U una isometria,

•

$$\|U\psi\|^2 = \langle U\psi, U\psi \rangle = \langle U^*U\psi, \psi \rangle = \langle \psi, \psi \rangle = \|\psi\|^2 \quad (5.93)$$

Da cui otteniamo che $0 = \langle U^*U\psi, \psi \rangle - \langle \psi, \psi \rangle = \langle (U^*U - I)\psi, \psi \rangle = 0$ ovvero che $U^*U - I = 0$ e quindi che $U^*U = I$.

•

$$\forall \phi \in H \exists \psi \in H | U\psi = \phi \implies UU^*\phi = UU^*(U\psi) = U(U^*U)\psi = U\psi = \phi \quad (5.94)$$

Da cui otteniamo che $UU^* = I$

Ma allora $UU^* = U^*U = I$ e quindi U è unitario.

Per il punto 2. osserviamo che per ogni $\psi \in H$ si ha

$$\begin{aligned} U - I &= (A + iI)(A - iI)^{-1} - I \\ &= (A + iI)(A - iI)^{-1} - (A - iI)(A - iI)^{-1} \\ &= ((A + iI) - (A - iI))(A - iI)^{-1} \\ &= +2i(A - iI)^{-1} \end{aligned} \quad (5.95)$$

Dal momento che $(A - iI)^{-1}$ è iniettivo, lo sarà necessariamente anche $U - I$, per cui se $U\psi = \psi$, ovvero se $U\psi - \psi = 0$, cioè $(U - I)\psi = 0$, allora necessariamente $\psi = 0$.

Per il punto 3. l'equazione precedente suggerisce che

$$U - I = 2i(A - iI)^{-1} \quad (5.96)$$

e ciò significa che l'immagine di $U - I$ coincide con l'immagine di $(A - iI)^{-1}$ che è proprio il dominio di A . Se $\psi \in \text{Dom}(A)$ allora invertendo la trasformata di Cayley

$$\begin{aligned} (U + I)(U - I)^{-1}\psi &= \frac{1}{2i}(U + I)(A - iI)\psi \\ &= \frac{1}{2i}[(A + iI) + (A - iI)]\psi \\ &= \frac{1}{i}A\psi \end{aligned} \quad (5.97)$$

questo conclude la dimostrazione

■

Potremmo adesso applicare il teorema spettrale per operatori normali e limitati per associare una misura a valore di proiettore μ^U a U . Trasferiremo poi tale misura da $S^1 \setminus \{1\}$ a $\mathbb{R}$ grazie alla mappa inversa D definita in precedenza, ottenendo così una misura a valore di proiezione μ^A associata all'operatore originale A . Ricordiamo infatti che un operatore unitario, essendo una isometria, è limitato e in particolare ha norma operatoriale che vale proprio 1.

Proposizione 5.29. *Sia A un operatore autoaggiunto su H e sia U l'operatore unitario dato dalla trasformata di Cayley; sia $D : S^1 \setminus \{1\} \mapsto \mathbb{R}$ l'inversa definita all'inizio della sezione, allora*

$$A = D(U) \quad (5.98)$$

Dove $D(U)$ è definita dal calcolo funzionale su U

Osservazione 5.30. *L'integrale $D(U)$ è ben definito perché abbiamo osservato prima che $U - I$ è iniettivo e quindi il valore 1 non è un autovalore per U , di conseguenza $\mu^U(\{1\}) = 0$ e quindi la funzione D è definita quasi ovunque sullo spettro di U .*

Per dimostrare che tale insieme abbia misura nulla, basta osservare che $\mu^U(\{1\})$ è una proiezione ortogonale che ha immagine coincidente col nucleo di $U - I$, ma essendo $U - I$ iniettivo si ha che tale immagine è il solo elemento 0, da cui il fatto che la proiezione avente immagine 0 è proprio l'operatore nullo.

Dimostrazione.

Supponiamo che E sia un insieme di Borel e che sia un sottoinsieme di $S^1 \setminus \{1\}$ tale che la chiusura di E non contenga 1, in modo tale che esista $\epsilon > 0$ tale che il denominatore della funzione D si mantenga maggiore di ϵ su E , garantendo così la limitatezza di D su E . Sia V_E il sottospazio spettrale di U associato ad E , ovvero $V_E = \text{Im}(\mu^U(E))$ dove μ^U è la misura a valori di proiettore associata a U dal teorema spettrale per operatori unitari. Allora, proprio per definizione di misura spettrale intesa come proiezione su E , lo spettro di U ristretto ad E è contenuto nella chiusura di E , ovvero le funzioni $u \mapsto D(u)$ e $u \mapsto 1/(u-1)$ sono limitate sullo spettro di U ristretto a V_E .

Se vogliamo mostrare esplicitamente che $U|_{V_E}$ ha spettro contenuto in $\bar{E}$, possiamo prendere un valore λ_0 che non appartenga alla chiusura di E , ovvero tale che la distanza di λ_0 da $\bar{E}$ sia un certo valore $\delta > 0$ e osservare che si può costruire la funzione limitata $f(\lambda) = \frac{1}{\lambda_0 - \lambda}$ e di conseguenza l'operatore $R = \int_E \frac{1}{\lambda_0 - \lambda} d\mu^U(\lambda)$; moltiplicando ora R per $(\lambda_0 I - U)|_{V_E}$ si ottiene proprio I_{V_E} mostrando come $(\lambda_0 I - U)|_{V_E}$ abbia un inverso limitato R e quindi dimostrando che λ_0 non appartiene allo spettro di $U|_{V_E}$; deduciamo quindi che $\sigma(U|_{V_E}) \subset \bar{E}$.

Ora, comparando le forme quadratiche, possiamo osservare che $D(U)$ ristretto a V_E è proprio uguale a D applicato alla restrizione di U a V_E , infatti si può dimostrare che

$$\langle \psi, D(U)\psi \rangle = \langle \psi, A\psi \rangle \quad \forall \psi \in V_E \quad (5.99)$$

Osserviamo che

$$\langle \psi, A\psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \lambda d\mu_{\psi}^A(\lambda) \quad (5.100)$$

e che

$$\begin{aligned} \langle \psi, D(U)\psi \rangle &= \int_{S^1 \setminus \{1\}} D(u) d\mu_{\psi}^U(u) \\ &= \int_{S^1 \setminus \{1\}} i \frac{u+1}{u-1} d\mu_{\psi}^U(u) \\ &= \int_E i \frac{u+1}{u-1} d\mu_{\psi}^U(u) \end{aligned} \quad (5.101)$$

Per la moltiplicatività del calcolo funzionale per U sulle funzioni limitate si ha

$$D(U)\psi = i(U + I)(U - I)^{-1}\psi, \quad \forall \psi \in V_E \quad (5.102)$$

Infatti $D(U)$ si può scrivere come $i \frac{u+i}{u-i} = i(u+i) \frac{1}{u-i}$ e abbiamo già osservato che tali funzioni sono limitate, quindi vale che $(f \cdot g)(U) = f(U) \cdot g(U)$. Dal punto 3. del teorema precedente $D(U)$ coincide con A su V_E .

Inoltre si può osservare che essendo $D(u) = i \frac{u+1}{u-1} = i \frac{e^{i\theta}+1}{e^{i\theta}-1}$ allora $D(u)^* = -i \frac{e^{-i\theta}+1}{e^{-i\theta}-1}$ e con un semplice calcolo si ottiene che $D(u)^* = D(u)$ da cui deduciamo che $D(U)$ è autoaggiunto. Quindi, sia A (per ipotesi) sia $D(U)$ (perché integrale di una funzione reale) sono autoaggiunti.

Se decomponiamo $S^1 \setminus \{1\}$ come unione disgiunta di insiemi E_n per i quali le loro chiusure non contengono 1, allora H è la somma diretta Hilbertiana dei sottospazi V_{E_n} , per proprietà dei sottospazi spettrali. Sulla somma diretta finita dei V_{E_n} , gli

operatori A e $D(U)$ coincidono e su tale somma diretta finita sono essenzialmente autoaggiunti, infatti:

- $A = D(U)$ se ristretti a V_{E_n}
- Consideriamo ora W la somma diretta finita dei V_{E_n} : W è denso in H
- Consideriamo l'operatore $T_n = D(U)|_{V_{E_n}} = A|_{V_{E_n}}$; questo è autoaggiunto per quanto appena dimostrato e quindi ha lo spettro reale; perciò $\pm i$ non appartengono al suo spettro e quindi gli operatori $(T_n \pm iI)$ sono biettivi su V_{E_n} , ovvero hanno immagine che coincide proprio con V_{E_n} .
- Sia ora $T = D(U)|_T = A|_T$, allora l'immagine di $T - iI$ contiene V_{E_n} dato che contiene le immagini di $T_n - iI$ per ogni n .
- Allora $W \subseteq \text{Im}(T - iI)$, ma essendo denso in H si ha

$$H = \bar{W} \subseteq \overline{\text{Im}(T - iI)} \subseteq H \quad (5.103)$$

da cui deduciamo che $\overline{\text{Im}(T - iI)}$

- con un analoga argomentazione si ottiene lo stesso per $\overline{\text{Im}(T + iI)}$ dimostrando quindi che sia A sia $D(U)$ sono essenzialmente autoaggiunti.

Quindi le restrizioni di $D(U)$ e di A alla somma diretta algebrica $\bigoplus_n V_{E_n}$ coincidono e sono essenzialmente autoaggiunte. L'estensione autoaggiunta della restrizione di $D(U)$ è $D(U)$ stesso, che è autoaggiunto per costruzione; l'estensione autoaggiunta della restrizione di A è A stesso, che è autoaggiunto per ipotesi. Per unicità dell'estensione autoaggiunta, si conclude quindi che $D(U) = A$ su tutto H e in particolare che i loro domini coincidono.

■

Osservazione 5.31. Osserviamo che $D(U) = \int_{\sigma(U)} D(\lambda) d\mu^U(\lambda)$ e che il dominio di $D(U)$ è lo spazio W_D definito all'inizio del capitolo.

Teorema 5.32. Definiamo una misura a valore di proiettore μ^A su $\mathbb{R}$

$$\mu^A(E) = \mu^U(C(E)) \quad (5.104)$$

Allora

$$A = \int_{\mathbb{R}} \lambda d\mu^A(\lambda) \quad (5.105)$$

dove con C si intende la mappa definita all'inizio del capitolo.

Dimostrazione.

Dalla proposizione precedente sappiamo che $A = D(U)$, dove $D(U)$ è espresso mediante la misura spettrale come nell'osservazione appena fatta. Più precisamente, per ogni $\psi \in H$ definiamo

$$\mu_\psi^U(E) = \langle \psi, \mu^U(E)\psi \rangle \quad (5.106)$$

e similmente definiamo $\mu_\psi^A(E) = \mu_\psi^U(C(E))$. Ricordando che $C^{-1} = D$, possiamo effettuare un cambio di variabile tramite la trasformata di Cayley, ovvero

$$\int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d\mu_\psi^A(\lambda) = \int_{S^1 \setminus \{1\}} f(D(u)) d\mu_\psi^U(u) \quad (5.107)$$

Applicando questo cambio di variabile con $f(\lambda) = \lambda^2$ si ottiene

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda^2 d\mu_\psi^A(\lambda) = \int_{S^1 \setminus \{1\}} D(u)^2 d\mu_\psi^U(u) \quad (5.108)$$

essendo D l'inversa di C .

Si noti ora che a livello di domini si ha grazie al teorema precedente che $\text{Dom}(A) = \text{Dom}(D(U)) = W_D$, dove

$$W_D = \left\{ \psi \in H : \int_{\mathbb{R}} D(u)^2 d\mu_\psi^U(u) < \infty \right\}. \quad (5.109)$$

Ma dall'equazione precedente risulta allora che

$$W_D = \left\{ \psi \in H : \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 d\mu_\psi^A(\lambda) < \infty \right\}, \quad (5.110)$$

che è proprio il dominio dell'operatore $\int_{\mathbb{R}} \lambda d\mu^A(\lambda)$; da questo deduciamo che i due operatori nell'equazione (5.105) hanno effettivamente lo stesso dominio. Infatti, il cambio di variabile tramite la trasformata di Cayley mostra che W_D è esattamente l'insieme dei vettori ψ per cui l'integrale $\int_{\mathbb{R}} \lambda^2 d\mu_\psi^A(\lambda)$ è finito, ovvero è finito l'integrale $\int_{S^1 \setminus \{1\}} D(u)^2 d\mu_\psi^U(u)$. Allora A ha lo stesso dominio di $\int_{\mathbb{R}} \lambda d\mu^A(\lambda)$. Poiché i due domini coincidono, sostituendo λ^2 con λ e $D(u)^2$ con $D(u)$, i due operatori nell'equazione (5.105) non solo hanno lo stesso dominio, ma sono proprio uguali. ■

Finalmente possiamo dimostrare il teorema spettrale per operatori autoaggiunti illimitati

Dimostrazione (Del teorema spettrale per operatori autoaggiunti illimitati).

L'esistenza della desiderata misura a valore di proiettore μ^A per A è garantita dal teorema appena dimostrato. Per stabilire l'unicità, supponiamo che esista un'altra misura ν^A su $\sigma(A)$ tale che $\int \lambda d\nu^A(\lambda) = A$. Consideriamo l'operatore $C(A) = \int_{\sigma(A)} C(\lambda) d\nu^A(\lambda) = \int_{\sigma(A)} \frac{\lambda+i}{\lambda-i} d\nu^A(\lambda)$: seguendo le dimostrazioni precedenti si osserva che $C(A)$ coincide con l'operatore $U = (A + iI)(A - iI)^{-1}$ indipendentemente dalla misura spettrale scelta.

Definiamo ora una misura a valore di proiettore ν^U su S^1 data da $\nu^U(E) = \nu^A(C^{-1}(E))$, allora come nella dimostrazione del teorema precedente, col cambio di variabile $u = C(\lambda)$ si ha che $\int_{S^1} u d\nu^U(u) = \int_{\sigma(A)} C(\lambda) d\nu^A(\lambda) = C(A) = U = \int_{S^1} u d\mu^U(u)$. L'unicità del teorema spettrale per U ci suggerisce che $\mu^U = \nu^U$, da cui deriva l'unicità $\nu^A = \mu^A$, infatti

$$\nu^A(E) = \nu^U(C(E)) = \mu^U(C(E)) = \mu^A(E) \quad (5.111)$$

5.3 Dimostrazione del teorema spettrale per operatori autoaggiunti illimitati

dove la prima uguaglianza segue dalla definizione di ν^U come trasporto di ν^A tramite C , la seconda dall'unicità $\nu^U = \mu^U$, e la terza dalla definizione di μ^A . Poiché questo vale per ogni E borelliano, si conclude.

■

6 Applicazioni del teorema spettrale

In quest'ultima sezione forniremo un esempio pratico di applicazione del teorema spettrale per operatori illimitati. Le possibili applicazioni sono innumerevoli: il teorema spettrale è uno strumento indispensabile per affrontare la maggior parte dei problemi della meccanica quantistica, tra i quali la necessità di definire l'esponentiale dell'operatore Hamiltoniano di un sistema affinché si possa risolvere l'equazione di Schrödinger, oppure risolvere le equazioni alle derivate parziali, come l'equazione del calore o delle onde su domini illimitati.

In particolare, mostreremo l'utilità del teorema spettrale nello studio dell'hamiltoniana di una particella libera di muoversi in una scatola monodimensionale. Per semplicità, alleggeriremo la notazione ponendo tutte le costanti uguali a 1.

6.1 Modellizzazione del problema

Consideriamo una particella quantistica libera di muoversi in uno spazio chiuso e limitato $S = [0, 1]$.

Lo **spazio degli stati** del sistema è lo spazio di Hilbert $H = L^2([0, 1])$ munito del prodotto interno $\langle f, g \rangle = \int_0^1 \overline{f(x)} g(x) dx$ e della norma $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle$.

Osservazione 6.1. *In meccanica quantistica, uno **stato** è un oggetto matematico che contiene tutta l'informazione fisica disponibile su un sistema in un determinato istante di tempo. Lo stato quantistico non descrive valori certi, come ci si aspetta in meccanica classica, bensì ha lo scopo di rappresentare la probabilità che si verifichi un determinato risultato in seguito ad una misura. Proprio perché non rappresenta una situazione unica e definita a priori, uno stesso stato può essere la sovrapposizione, ovvero la combinazione lineare, di più stati. Prima di effettuare una misurazione, lo stato esiste solo in potenza; una volta fatta la misura di una certa proprietà, come la posizione o la velocità, lo stato collassa su uno dei possibili esiti e smette di essere tutti gli altri stati della combinazione lineare che lo componevano prima della misura. Lo spazio degli stati è lo spazio matematico che contiene tutti i possibili stati fisici di un sistema. Dal momento che uno stato è descritto matematicamente da un vettore, lo spazio degli stati è lo spazio di Hilbert che contiene tali vettori.*

6.2 L'operatore Hamiltoniano

L'hamiltoniana di un sistema è l'operatore che contiene tutta l'informazione energetica del sistema stesso: in generale $\hat{H} = K + V = -\frac{1}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)$. Per una particella confinata in una scatola ma libera di muoversi, ovvero non soggetta a forze, l'energia totale si riduce ad essere la sola energia cinetica poiché all'interno della scatola il potenziale è costante, dato che $F = -\frac{dV}{dx} = 0$. Scegliamo per comodità tale costante uguale a 0. Ne deduciamo quindi che

$$\hat{H}f = -\frac{d^2}{dx^2}f \quad (6.1)$$

Osservazione 6.2. Osserviamo che la derivata seconda nel membro di destra ha senso come derivata in senso debole, ovvero non è necessario che la funzione sia effettivamente derivabile puntualmente due volte, l'importante è che sia integrabile

Definizione 6.3. Definiamo l'operatore

$$\hat{H}: D \subset H \longrightarrow H, \quad \hat{H}f = -f''.$$

e sia

$$D = \{f \in L^2([0, 1]) : f, f' \in AC([0, 1]), f'' \in L^2([0, 1]), f(0) = f(1) = f'(0) = f'(1) = 0\} \subseteq H, \quad (6.2)$$

Dove $AC([0, 1])$ è lo spazio delle funzioni assolutamente continue su $[0, 1]$ (7.10) mentre la condizione $f(0) = f(1) = 0$, che vale analoga anche per f' , esprime la condizione al contorno di Dirichlet.

Il dominio di $\hat{H}$, indispensabile per definire l'operatore, ci permette di osservare che, integrando per parti contro una funzione test ϕ continua a supporto compatto e derivabile infinite volte,

$$\int_0^1 f''(x)\phi(x)dx = - \int_0^1 f'(x)\phi'(x)dx + [f'(x)\phi(x)]_0^1 \quad (6.3)$$

dalle condizioni poste su f e f' , tale formula si riduce a

$$\int_0^1 f''(x)\phi(x)dx = - \int_0^1 f'(x)\phi'(x)dx \quad (6.4)$$

La formula appena scritta motiva la definizione della derivata seconda in senso debole: si dice che $f'' \in L^2([0, 1])$ se esiste una funzione $g \in L^2$ tale che $\int_0^1 g(x)\phi(x)dx = - \int_0^1 f'(x)\phi'(x)dx$ per ogni funzione test ϕ . Questa non è una conseguenza automatica di $f' \in AC$, ma una condizione aggiuntiva che va richiesta esplicitamente nel dominio D .

Proposizione 6.4 ($\hat{H}$ è hermitiano). L'operatore $(\hat{H}, D)$ è hermitiano, ovvero

$$\langle \hat{H}f, g \rangle = \langle f, \hat{H}g \rangle \quad \forall f, g \in D.$$

Dimostrazione.

Integrando due volte per parti e usando le condizioni al contorno $f(0) = f(1) = f'(0) = f'(1) = 0$ (e analogamente per g) si ottiene

$$\begin{aligned} \langle \hat{H}f, g \rangle &= \int_0^1 \overline{(-f''(x))} g(x) dx = - \int_0^1 \overline{f''(x)} g(x) dx \\ &= - \left[\overline{f'(x)} g(x) \right]_0^1 + \int_0^1 \overline{f'(x)} g'(x) dx \\ &= \int_0^1 \overline{f'(x)} g'(x) dx \\ &= \left[\overline{f(x)} g'(x) \right]_0^1 - \int_0^1 \overline{f(x)} g''(x) dx \\ &= - \int_0^1 \overline{f(x)} g''(x) dx = \langle f, \hat{H}g \rangle. \end{aligned}$$

Il termine di bordo si annulla ad ogni passaggio grazie alle condizioni al contorno.

Proposizione 6.5 ($\hat{H}$ è chiuso). *L'operatore $(\hat{H}, D)$ è chiuso.*

Dimostrazione.

Sia $(f_n) \subseteq D$ una successione convergente in H tale che anche $(\hat{H}f_n) = (-f_n'')$ sia convergente in H . Siano $\varphi := \lim f_n \in H$ e $\psi := \lim \hat{H}f_n \in H$. Per concludere che $\hat{H}$ è chiuso, basta verificare che $\varphi \in D$ e $\hat{H}\varphi = \psi$.

Osserviamo che per ogni $f \in D$ si ha $\|f'\|^2 \leq \|f\|\|f''\|$, dove $\|\cdot\|$ denota la norma di $H = L^2([0, 1])$. Infatti, integrando per parti e ricordando le condizioni al contorno di D ,

$$\begin{aligned} \|f'\|^2 &= \left| \int_0^1 \overline{f'(x)} f'(x) dx \right| = \left| \left[\overline{f(x)} f'(x) \right]_0^1 - \int_0^1 \overline{f(x)} f''(x) dx \right| \\ &\leq \int_0^1 |f(x)| |f''(x)| dx \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|f\| \|f''\| \end{aligned}$$

Poiché (f_n) e (f_n'') sono successioni di Cauchy, essendo convergenti, l'osservazione appena fatta implica che anche (f_n') è una successione di Cauchy, che quindi converge a ξ in H .

Sia $1_{[0,t]}$ la funzione caratteristica di $[0, t] \subseteq [0, 1]$. Vale quanto segue:

$$\langle 1_{[0,t]}, \hat{H}f_n \rangle = \int_0^1 \overline{1_{[0,t]}(x)} (\hat{H}f_n)(x) dx = - \int_0^t f_n''(x) dx = -f_n'(t)$$

Poiché $(\hat{H}f_n)$ converge a ψ in H , si deduce che $(f_n'(t))$ converge a $-\langle 1_{[0,t]}, \psi \rangle$. Allora (f_n') converge sia in $L^2([0, 1])$ che puntualmente, da cui segue che il limite L^2 e quello puntuale coincidono:

$$\xi(t) = \lim f_n'(t) = -\langle 1_{[0,t]}, \psi \rangle = - \int_0^t \psi(x) dx$$

Se ne deduce che $\xi \in AC([0, 1])$, $\xi(0) = \lim f_n'(0) = 0$, $\xi(1) = \lim f_n'(1) = 0$ (tutti gli f_n' si annullano in 1 per le condizioni al contorno poste in D) e $\xi' = -\psi$.

Analogamente, $\langle 1_{[0,t]}, f_n' \rangle = f_n(t)$ e dalla convergenza di (f_n') in H si deduce la convergenza di $(f_n(t))$. Allora (f_n) converge sia in $L^2([0, 1])$ che puntualmente, da cui segue che il limite L^2 e quello puntuale coincidono:

$$\varphi(x) = \lim f_n(x) = \langle 1_{[0,t]}, \xi \rangle = \int_0^t \xi(x) dx$$

Se ne deduce che $\varphi \in AC([0, 1])$, $\varphi(0) = \lim f_n(0) = 0$, $\varphi(1) = \lim f_n(1) = 0$ (tutti gli f_n si annullano in 1 per le condizioni al contorno poste in D) e $\varphi' = \xi$.

Ricapitolando, abbiamo verificato che

$$\begin{aligned} \varphi &\in AC([0, 1]), \quad \varphi(0) = 0 = \varphi(1), \\ \varphi' &= \xi \in AC([0, 1]), \quad \varphi'(0) = 0 = \varphi'(1), \\ \varphi'' &= \xi' = -\psi, \end{aligned}$$

ovvero $\varphi \in D$ e $\hat{H}\varphi = \psi$. ■

6.3 L'operatore aggiunto $\hat{H}^*$

Vogliamo adesso definire l'operatore aggiunto e mostrare come l'operatore $\hat{H}$, benché sia simmetrico, non è autoaggiunto; come spesso accade, l'autoaggiuntezza non sussiste a causa dei domini di definizione degli operatori

Proposizione 6.6. *L'aggiunto $\hat{H}^*$ dell'operatore $(\hat{H}, D)$ ha dominio*

$$Dom(\hat{H}^*) = D' := \{f \in L^2([0, 1]) : f, f' \in AC([0, 1]), f'' \in L^2([0, 1])\},$$

e agisce come $\hat{H}^*f = -f''$ per ogni $f \in D'$.

Dimostrazione.

Sia $f \in AC([0, 1])$ tale che $f' \in AC([0, 1])$, $f'' \in L^2([0, 1])$.

Allora, per ogni $g \in D$, si ha

$$\langle f, \hat{H}g \rangle = - \int_0^1 \overline{f(x)} g''(x) dx = - \int_0^1 \overline{f''(x)} g(x) dx = \langle -f'', g \rangle,$$

avendo usato le condizioni al contorno di g nei due integrali per parti. Ciò mostra che il funzionale lineare $\langle f, \hat{H}(\cdot) \rangle : D \rightarrow \mathbb{C}$ è rappresentato da $-f'' \in H$, quindi limitato; ciò mostra che $f \in D'$.

Viceversa, se $f \in Dom(\hat{H}^*) \subseteq H$, allora esiste $h \in H$ tale che

$$\langle f, \hat{H}g \rangle = \langle h, g \rangle \quad (6.5)$$

per ogni $g \in D$.

Considero $g \in C_c^\infty((0, 1)) \subseteq D$ liscia a supporto compatto in $(0, 1)$. Osservo che le restrizioni

$$\langle f, \hat{H}(\cdot) \rangle : C_c^\infty((0, 1)) \rightarrow \mathbb{C}, g \mapsto - \int_0^1 \overline{f(x)} g''(x) dx \quad (6.6)$$

$$\langle h, \cdot \rangle : C_c^\infty((0, 1)) \rightarrow \mathbb{C}, g \mapsto \int_0^1 \overline{h(x)} g(x) dx \quad (6.7)$$

sono distribuzioni, che per l'equazione (6.5) coincidono:

$$\langle f, \hat{H}(\cdot) \rangle = -f'' : C_c^\infty((0, 1)) \rightarrow \mathbb{C}$$

è l'opposto della derivata seconda della distribuzione

$$f : C_c^\infty((0, 1)) \rightarrow \mathbb{C}, g \mapsto \int_0^1 \overline{f(x)} g(x) dx$$

invece

$$\langle h, \cdot \rangle = h : C_c^\infty((0, 1)) \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{è la distribuzione} \quad g \mapsto \int_0^1 \overline{h(x)} g(x) dx$$

L'equazione (6.5) significa che $-f'' = h$ come distribuzioni.

In particolare, deduciamo che $f \in L^2([0, 1])$ ammette derivata seconda (in senso distribuzionale) f'' e quest'ultima $f'' = -h \in L^2([0, 1])$ è a quadrato sommabile. (Di conseguenza, sia f che f' sono assolutamente continue.)

Infine, per $f \in D'$ e $g \in D$, si ha

$$\langle \hat{H}^* f, g \rangle = \langle f, \hat{H} g \rangle = \langle -f'', g \rangle$$

(dove l'ultima uguaglianza segue da verifiche precedenti). Poiché $D \subseteq H$ è denso, deduciamo $\hat{H}^* f = -f''$ per ogni $f \in D'$.

■

Osservazione 6.7. Poiché $D \subsetneq D'$ (il dominio dell'aggiunto è strettamente più grande del dominio di $\hat{H}$), l'operatore $\hat{H}$ è hermitiano ma non autoaggiunto. Ciò è fisicamente rilevante: per applicare il teorema spettrale occorre prima trovare un'estensione autoaggiunta.

6.4 Indici di difetto ed estensioni autoaggiunte

Per trovare un'estensione autoaggiunta dell'hamiltoniana del sistema dobbiamo ancora definire gli indici di difetto di $\hat{H}$: Von Neumann ha introdotto il concetto di indice di difetto per capire se un operatore simmetrico potesse essere esteso ad un operatore autoaggiunto: l'indice di difetto da un'idea di quanto un operatore hermitiano sia "distante" dall'essere anche autoaggiunto.

Dato un operatore simmetrico $\hat{H}$, si definiscono i sottospazi di difetto come gli spazi

$$K_{\pm} = \text{Ker}(\hat{H}^* \pm iI) \quad (6.8)$$

gli indici di difetto sono le dimensioni di tali autospazi di $\hat{H}^*$ associati agli autovalori $\pm i$; li indicheremo con $n_{\pm}$.

Se i due valori sono entrambi nulli l'operatore ammette un'unica estensione autoaggiunta, se coincidono ma sono entrambi non nulli allora esistono infinite estensioni autoaggiunte, se non coincidono allora non è possibile estendere l'operatore ad un operatore autoaggiunto.

Definizione 6.8 (Spazi di difetto e indici di difetto). Gli spazi di difetto di $\hat{H}$ sono

$$K_+ = \ker(\hat{H}^* - iI), \quad K_- = \ker(\hat{H}^* + iI),$$

e gli indici di difetto sono $n_+ = \dim K_+$, $n_- = \dim K_-$.

Proposizione 6.9 (Calcolo degli indici di difetto). Gli indici di difetto di $\hat{H}$ sono $n_+ = n_- = 2$.

Dimostrazione.

Dobbiamo determinare le soluzioni $f \in D'$ dell'equazione $-f'' = \lambda f$ per $\lambda = \pm i$.

Caso $\lambda = i$. L'equazione $-f'' = if$, ovvero $f'' = -if$, ha soluzione generale

$$f(x) = A e^{\alpha x} + B e^{-\alpha x}, \quad \alpha = e^{-i\pi/4} = \frac{1-i}{\sqrt{2}},$$

che è sempre in $L^2([0, 1])$ (essendo su un intervallo limitato). Poiché D' non impone condizioni al contorno, entrambe le soluzioni $e^{\alpha x}$ e $e^{-\alpha x}$ appartengono a K_+ ; dunque $n_+ = 2$.

Caso $\lambda = -i$. Analogamente, l'equazione $f'' = if$ ha soluzione generale

$$f(x) = A e^{\beta x} + B e^{-\beta x}, \quad \beta = e^{i\pi/4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}},$$

sempre in $L^2([0, 1])$, quindi $n_- = 2$.

Osservazione 6.10. *Da questa dimostrazione e dalla teoria di Von Neumann, confermiamo che $\hat{H}$ non è autoaggiunto, è però possibile trovare infinite estensioni autoaggiunte: vogliamo trovare quella estensione autoaggiunta che soddisfa le condizioni al bordo di Dirichlet.*

Inoltre, il teorema di Von Neumann afferma che le estensioni autoaggiunte di $\hat{H}$ sono in corrispondenza biunivoca con le isometrie unitarie $U: K_+ \rightarrow K_-$. Il dominio dell'aggiunto si decompone ortogonalmente come:

$$\text{Dom}(\hat{H}^*) = \text{Dom}(\hat{H}) \oplus K_+ \oplus K_-.$$

Ogni vettore $\psi \in \text{Dom}(\hat{H}^*)$ si scrive univocamente come:

$$\psi = \phi + \psi_+ + \psi_-, \quad \phi \in \text{Dom}(\hat{H}), \quad \psi_{\pm} \in K_{\pm}.$$

L'aggiunto $\hat{H}^*$ agisce come:

$$\hat{H}^* \psi = \hat{H} \phi + i\psi_+ - i\psi_-.$$

$\hat{H}^*$ non è simmetrico sull'intero dominio, perché compaiono termini di bordo. Calcolando $\langle \hat{H}^* \psi, \chi \rangle - \langle \psi, \hat{H}^* \chi \rangle$ per due vettori generici del dominio di $\hat{H}^*$, si ottiene:

$$\langle \psi, \hat{H}^* \chi \rangle - \langle \hat{H}^* \psi, \chi \rangle = 2i(\langle \psi_+, \chi_+ \rangle - \langle \psi_-, \chi_- \rangle).$$

Affinché una restrizione di $\hat{H}^*$ sia simmetrica (e quindi autoaggiunta), questo termine deve annullarsi. Tale annullamento può essere ottenuto mediante una trasformazione unitaria tra K_+ e K_-

$$\psi_- = U\psi_+, \quad U: K_+ \rightarrow K_- \text{ unitario.}$$

Sostituendo:

$$\langle \psi_+, \chi_+ \rangle - \langle U\psi_+, U\chi_+ \rangle = \langle \psi_+, \chi_+ \rangle - \langle \psi_+, \chi_+ \rangle = 0$$

poiché U preserva il prodotto scalare.

Data $U: K_+ \rightarrow K_-$ unitaria, l'estensione autoaggiunta $\hat{H}_U$ è definita da:

$$\text{Dom}(\hat{H}_U) = \{ \phi + \psi_+ + U\psi_+ : \phi \in \text{Dom}(\hat{H}), \psi_+ \in K_+ \},$$

$$\hat{H}_U(\phi + \psi_+ + U\psi_+) = \hat{H}\phi + i\psi_+ - iU\psi_+.$$

Ogni U dà un'estensione diversa: un dominio diverso si associa ad una situazione fisica diversa al bordo.

Nel nostro caso $n_+ = n_- = 2$; le isometrie da K_+ a K_- , entrambi di dimensione 2, sono esattamente le matrici unitarie 2×2 .

Infatti, il nostro obbiettivo è ora trovare esplicitamente la matrice U che produce le condizioni al bordo di Dirichlet $f(0) = f(1) = 0$.

Le equazioni che definiscono $K_\pm$ sono:

$$K_+ : \quad -f'' = if \iff f'' = -if, \quad K_- : \quad -f'' = -if \iff f'' = if.$$

Soluzione per K_+ . L'equazione $f'' = -if$ ha soluzione $f(x) = e^{\mu x}$ con $\mu^2 = -i$. Poiché $-i = e^{-i\pi/2}$, si ottiene $\mu = \pm e^{-i\pi/4} = \pm \frac{1-i}{\sqrt{2}}$. Poniamo $\alpha = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$; una base di K_+ è:

$$e_1^+(x) = e^{\alpha x}, \quad e_2^+(x) = e^{-\alpha x}.$$

Soluzione per K_- . L'equazione $f'' = if$ dà $\mu^2 = i = e^{i\pi/2}$, quindi $\mu = \pm e^{i\pi/4} = \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}}$. Poniamo $\beta = \bar{\alpha} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$; una base di K_- è:

$$e_1^-(x) = e^{\beta x}, \quad e_2^-(x) = e^{-\beta x}.$$

Poiché $\beta = \bar{\alpha}$, si ha $e_j^- = \overline{e_j^+}$. Questa relazione di coniugio riflette il fatto che K_- è, in senso preciso, il “coniugato” di K_+ .

Un generico elemento di $\text{Dom}(\hat{H}_U)$ è $f = \varphi + g$, dove $\varphi \in \text{Dom}(\hat{H})$ soddisfa già le quattro condizioni al bordo $\varphi(0) = \varphi(1) = \varphi'(0) = \varphi'(1) = 0$. Pertanto le condizioni al bordo di f sono determinate interamente dalla parte

$$g = \psi_+ + U\psi_+.$$

Scriviamo $\psi_+ = a e_1^+ + b e_2^+$ con $a, b \in \mathbb{C}$, e $U\psi_+ = c e_1^- + d e_2^-$. Allora:

$$g(x) = a e^{\alpha x} + b e^{-\alpha x} + c e^{\beta x} + d e^{-\beta x}.$$

Vogliamo imporre **esattamente** le condizioni di Dirichlet: $g(0) = 0$ e $g(1) = 0$, senza vincolare $g'(0)$ e $g'(1)$.

Condizione in $x = 0$.

$$g(0) = a + b + c + d = 0 \implies c + d = -(a + b). \quad (1)$$

Condizione in $x = 1$.

$$g(1) = a e^\alpha + b e^{-\alpha} + c e^\beta + d e^{-\beta} = 0. \quad (2)$$

Poiché $\beta = \bar{\alpha}$, possiamo scrivere $e^\alpha = p + iq$ e $e^\beta = e^{\bar{\alpha}} = p - iq$ con $p, q \in \mathbb{R}$. Sostituendo nella (2):

$$a(p + iq) + b(p - iq) + c(p - iq) + d(p + iq) = 0,$$

ovvero, separando parte reale e immaginaria:

$$\begin{aligned} p(a + b + c + d) &= 0, \\ q(a - b - c + d) &= 0. \end{aligned}$$

Il primo termine è automaticamente zero per la condizione (1). Il secondo dà:

$$c - d = -(a - b). \quad (3)$$

Dalle equazioni (1) e (3):

$$\begin{cases} c + d = -(a + b) \\ c - d = -(a - b) \end{cases}$$

Sommando le due righe: $2c = -2a$, quindi $c = -a$.

Sottraendo: $2d = -2b$, quindi $d = -b$.

La mappa $U : (a, b) \mapsto (c, d) = (-a, -b)$ è rappresentata, nelle basi $\{e_1^+, e_2^+\}$ e $\{e_1^-, e_2^-\}$, dalla matrice:

$$U = -I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$U = -I_2$ soddisfa $U^*U = (-I_2)^*(-I_2) = (-I_2)(-I_2) = I_2$, quindi è effettivamente una mappa unitaria $K_+ \rightarrow K_-$, come richiesto dalla teoria di von Neumann.

Un punto cruciale è che non abbiamo imposto nulla su $g'(0)$ e $g'(1)$. Verifichiamolo esplicitamente calcolando g' con $U = -I_2$, cioè con $c = -a$ e $d = -b$:

$$g(x) = a(e^{\alpha x} - e^{\beta x}) + b(e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}).$$

La derivata è:

$$g'(x) = a(\alpha e^{\alpha x} - \beta e^{\beta x}) + b(-\alpha e^{-\alpha x} + \beta e^{-\beta x}).$$

In $x = 0$:

$$g'(0) = a(\alpha - \beta) + b(-\alpha + \beta) = (a - b)(\alpha - \beta).$$

Poiché $\alpha - \beta = \frac{1-i}{\sqrt{2}} - \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{-2i}{\sqrt{2}} \neq 0$, il valore $g'(0)$ dipende da $a - b$ e in generale non è zero. Analogamente per $g'(1)$.

Questo conferma che il dominio $\text{Dom}(\hat{H}_D)$ ottenuto con $U = -I_2$ impone solo $f(0) = f(1) = 0$ e lascia libere le derivate al bordo, in perfetto accordo con la definizione della tesi:

$$\text{Dom}(\hat{H}_D) = \{f \in D' : f(0) = f(1) = 0\}.$$

6.5 Applicazione del Teorema Spettrale

Definizione 6.11 (Estensione di Dirichlet $\hat{H}_D$). *Definiamo l'operatore*

$$\hat{H}_D: \text{Dom}(\hat{H}_D) \subset H \longrightarrow H, \quad \hat{H}_D f = -f'',$$

con dominio

$$\text{Dom}(\hat{H}_D) = \{f \in D' : f(0) = f(1) = 0\}.$$

Proposizione 6.12 ($\hat{H}_D$ è autoaggiunto). *L'operatore $\hat{H}_D$ è autoaggiunto, ovvero $\hat{H}_D^* = \hat{H}_D$.*

Dimostrazione.

Per costruzione $\hat{H}_D$ è un'estensione autoaggiunta di $\hat{H}$ (è l'estensione corrispondente all'operatore unitario $U: K_+ \rightarrow K_-$ che "annulla" le condizioni al contorno). Verifichiamolo direttamente.

$\hat{H}_D$ è **hermitiano**. Per $f, g \in \text{Dom}(\hat{H}_D)$, integrando due volte per parti:

$$\begin{aligned} \langle \hat{H}_D f, g \rangle &= - \int_0^1 \overline{f''} g \, dx = -[\overline{f'} g]_0^1 + \int_0^1 \overline{f'} g' \, dx \\ &= \int_0^1 \overline{f'} g' \, dx \quad (\text{usando } g(0) = g(1) = 0) \\ &= [\overline{f} g']_0^1 - \int_0^1 \overline{f} g'' \, dx = \langle f, \hat{H}_D g \rangle. \end{aligned}$$

Sappiamo già che $\text{Dom}(\hat{H}_D^*) \subseteq \text{Dom}(\hat{H}^*) = D'$, poiché $\hat{H}_D$ è un'estensione di $\hat{H}$ e quindi il suo aggiunto è contenuto in quello di $\hat{H}$. Dunque ogni $g \in \text{Dom}(\hat{H}_D^*)$ appartiene a D' , ovvero $g, g' \in AC([0, 1])$ e $g'' \in L^2([0, 1])$, ma senza condizioni al contorno a priori.

Poiché $\hat{H}_D$ è hermitiano, per ogni $f \in \text{Dom}(\hat{H}_D)$ e $g \in \text{Dom}(\hat{H}_D^*)$ deve valere

$$\langle \hat{H}_D f, g \rangle = \langle f, \hat{H}_D^* g \rangle.$$

Integrando due volte per parti il lato sinistro:

$$\begin{aligned} \langle \hat{H}_D f, g \rangle &= - \int_0^1 \overline{f''} g \, dx \\ &= [\overline{f'} g]_0^1 - \int_0^1 \overline{f'} g' \, dx \\ &= [\overline{f'} g]_0^1 - [\overline{f} g']_0^1 + \int_0^1 \overline{f} g'' \, dx. \end{aligned}$$

Poiché $f \in \text{Dom}(\hat{H}_D)$ soddisfa $f(0) = f(1) = 0$, il termine $[\overline{f} g']_0^1$ si annulla, e si ottiene

$$\langle \hat{H}_D f, g \rangle = [\overline{f'(x)} g(x)]_0^1 + \langle f, -g'' \rangle = [\overline{f'(x)} g(x)]_0^1 + \langle f, \hat{H}_D^* g \rangle.$$

Affinché questa uguaglianza sia compatibile con $\langle \hat{H}_D f, g \rangle = \langle f, \hat{H}_D^* g \rangle$ per ogni $f \in \text{Dom}(\hat{H}_D)$, è necessario che

$$[\overline{f'(x)} g(x)]_0^1 = \overline{f'(1)} g(1) - \overline{f'(0)} g(0) = 0.$$

Poiché nel dominio di $\hat{H}_D$ non viene imposta alcuna condizione su $f'(0)$ e $f'(1)$, che sono quindi arbitrari, l'unica possibilità è che $g(0) = g(1) = 0$. Ne segue $Dom(\hat{H}_D^*) \subseteq Dom(\hat{H}_D)$, e combinando con l'inclusione opposta fornita dall'hermitianità si conclude $\hat{H}_D^* = \hat{H}_D$. ■

Avendo stabilito che $\hat{H}_D$ è autoaggiunto, possiamo applicare il Teorema Spettrale.

Teorema 6.13 (Autovalori e autofunzioni di $\hat{H}_D$). *Gli autovalori di $\hat{H}_D$ sono*

$$\lambda_n = n^2\pi^2, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},$$

con autofunzioni normalizzate

$$\varphi_n(x) = \sqrt{2} \sin(n\pi x), \quad x \in [0, 1].$$

L'insieme $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ forma una base ortonormale completa di $H = L^2([0, 1])$.

Dimostrazione.

Cerchiamo $f \in Dom(\hat{H}_D)$ e $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tali che $-f'' = \lambda f$.

Il caso $\lambda < 0$ non è rilevante perchè la soluzione generale sarebbe della forma $f(x) = A \sinh(\sqrt{-\lambda}x) + B \cosh(\sqrt{-\lambda}x)$ e le condizioni al contorno impongono che $A=B=0$, pertanto l'unica soluzione sarebbe $f(x) = 0$. Il caso invece $\lambda = 0$ darebbe come soluzione $f(x) = Ax + B$ e imponendo anche qui le condizioni al contorno avremmo $A = B = 0$, da cui $f(x) = 0$.

Ci concentriamo quindi sul caso $\lambda > 0$; La soluzione generale è

$$f(x) = A \sin(\sqrt{\lambda}x) + B \cos(\sqrt{\lambda}x).$$

Dalla condizione $f(0) = 0$ si ricava $B = 0$. Dalla condizione $f(1) = 0$ e $A \neq 0$ si ottiene $\sin(\sqrt{\lambda}) = 0$, cioè $\sqrt{\lambda} = n\pi$ per qualche $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Poiché $\lambda = n^2\pi^2 > 0$ e la funzione seno è dispari a meno del segno di n , possiamo prendere $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. La normalizzazione

$$\|\varphi_n\|^2 = 2 \int_0^1 \sin^2(n\pi x) dx = 1$$

determina la costante $A = \sqrt{2}$. La completezza di $\{\varphi_n\}$ in $L^2([0, 1])$ è la completezza classica delle serie di Fourier sinusoidali.

Teorema 6.14 (Decomposizione spettrale di $\hat{H}_D$). *Lo spettro di $\hat{H}_D$ è puramente discreto:*

$$\sigma(\hat{H}_D) = \{n^2\pi^2 : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}.$$

Per ogni $f \in Dom(\hat{H}_D)$, la decomposizione spettrale di $\hat{H}_D$ è

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \varphi_n, f \rangle \varphi_n,$$

e

$$\hat{H}_D f = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \pi^2 \langle \varphi_n, f \rangle \varphi_n \quad \forall f \in \text{Dom}(\hat{H}_D).$$

Più precisamente, la misura spettrale associata a $\hat{H}_D$ è

$$\mu^{\hat{H}_D}(E) = \sum_{n \geq 1 : n^2 \pi^2 \in E} \langle \varphi_n, \cdot \rangle \varphi_n, \quad \text{con } E \text{ un borelliano di } \mathbb{R},$$

e si ha la rappresentazione integrale

$$\hat{H}_D = \int_{\mathbb{R}} \lambda d\mu^{\hat{H}_D}(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \pi^2 \langle \varphi_n, \cdot \rangle \varphi_n.$$

Dimostrazione.

Poiché $\hat{H}_D$ è autoaggiunto e ha base ortonormale di autovettori $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ con autovalori $\lambda_n = n^2 \pi^2$, il Teorema Spettrale (nella versione per operatori con spettro discreto) garantisce la decomposizione

$$\hat{H}_D = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n,$$

dove $P_n = \langle \varphi_n, \cdot \rangle \varphi_n$ è il proiettore ortogonale sul sottospazio generato da φ_n .

■

Osservazione 6.15 (Interpretazione fisica). *In meccanica quantistica gli autovalori $E_n = n^2 \pi^2$ rappresentano i livelli energetici della particella confinata nella scatola. La decomposizione spettrale afferma che ogni stato $f \in H$ si espande in una serie di stati stazionari φ_n ; la probabilità di osservare l'energia E_n nello stato f è $|\langle \varphi_n, f \rangle|^2$. Il fatto che lo spettro sia discreto riflette la quantizzazione dell'energia, uno dei fenomeni fondamentali della meccanica quantistica.*

7 Appendice

In questa brevissima appendice sono elencati quei teoremi e proposizioni e definizioni utilizzati nel corso dello scritto precedente, che esulano dall'argomento principale ma sono necessari come nozioni al contorno per comprendere alcune deduzioni logiche; non sono stati quindi dimostrati, ma per approfondirli si può consultare [3].

Teorema 7.1 (Teorema del grafico chiuso). *Dato un operatore lineare T tra gli spazi di Banach X e Y , definiamo come segue il suo grafico:*

$$\Gamma(T) = \{(x, Tx) | x \in X\}. \quad (7.1)$$

Se $\Gamma(T)$ è chiuso, allora $T : X \rightarrow Y$ è limitato e quindi continuo.

In particolare, se T è biiettivo, allora T^{-1} è continuo.

Definizione 7.2 (Insieme di Borel). *Un insieme di Borel è un elemento della σ -algebra di Borel, la più piccola famiglia di sottoinsiemi di uno spazio topologico che contiene tutti gli insiemi aperti; Includono aperti, chiusi, unioni e intersezioni numerabili. Sono insiemi generati partendo dagli aperti tramite le operazioni di unione, intersezione e complementare, applicate un numero numerabile di volte. La σ -algebra di Borel contiene tutti gli insiemi aperti, tutti gli insiemi chiusi, tra cui i singoletti, le unioni numerabili di chiusi e le intersezioni numerabili di aperti. Sulla retta reale, qualsiasi intervallo, sia aperto sia chiuso, sia una loro unione, è un insieme di Borel.*

Definizione 7.3 (Somma diretta Hilbertiana). *La somma diretta Hilbertiana, ovvero la somma diretta tra spazi di Hilbert, è il completamento della somma diretta algebrica che garantisce la chiusura topologica.*

La somma diretta algebrica tra due spazi topologici U e V è l'insieme di quegli elementi che si scrivono univocamente come somma di un elemento di U e un elemento di V ; tale insieme è dotato della topologia prodotto. Essenzialmente gli elementi della somma diretta sono combinazioni lineari finite di elementi degli spazi sommati.

La somma diretta Hilbertiana tra i due spazi di Hilbert U e V è invece un nuovo spazio di Hilbert, costruito a partire dai due spazi originali, che ne preserva la natura geometrica e ortogonale. Tale insieme risulta essere il prodotto cartesiano tra U e V e i suoi elementi sono quindi delle sequenze per cui la somma dei quadrati delle norme delle entrate di queste sequenze convergono.

Facendo la somma diretta tra spazi di Hilbert garantiamo che il risultato preservi la struttura algebrica e preservi quindi il prodotto scalare e la completezza.

Siano H_j degli spazi di Hilbert separabili, definiamo la somma diretta tra spazi di Hilbert come

$$H := \bigoplus_j H_j \quad (7.2)$$

lo spazio delle sequenze $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots)$ tale che $\psi_n \in H_n$. Definiamo una norma su questo spazio

$$\|\psi\|^2 = \sum_j \|\psi_j\|^2 \quad (7.3)$$

e un prodotto interno

$$\langle \psi, \phi \rangle = \sum_j \langle \psi_j, \phi_j \rangle \quad (7.4)$$

i quali rendono lo spazio H uno spazio di Hilbert.

Teorema 7.4 (Teorema di estensione lineare limitata). *Il teorema dell'estensione lineare limitata è un teorema di analisi funzionale che afferma che, dato un operatore lineare limitato A definito su un sottospazio denso dello spazio di Hilbert, allora esiste un'unica estensione lineare definita su tutto lo spazio che mantiene la norma, ovvero che rimane limitato.*

Proposizione 7.5 (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz). *La disuguaglianza di Cauchy-Schwarz stabilisce che, in uno spazio vettoriale con prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$, il valore assoluto del prodotto scalare tra due vettori u e v è minore o uguale al prodotto delle loro norme:*

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\| \quad (7.5)$$

Attraverso la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si può osservare che la lunghezza di un vettore può essere misurata proiettando ortogonalmente il vettore su tutte le possibili direzioni unitarie e prendendo il valore massimo di queste proiezioni

Teorema 7.6 (Teorema di approssimazione di Weierstrass). *Per ogni funzione continua f , reale o complessa, a supporto compatto esiste una successione di polinomi P_n che riesce ad approssimare la funzione f con una precisione arbitraria.*

Proposizione 7.7 (Proiezione ortogonale). *Per ogni sottospazio chiuso $V \subset H$, esiste un unico operatore limitato $P : H \mapsto V$ tale che*

- $P = I$ su V
- $P = 0$ su $V^\perp$

*Tale operatore è detto la **proiezione ortogonale** su V e soddisfa $P^2 = P$ e $P^* = P$.*

Viceversa, se P è un operatore limitato su H che soddisfa $P^2 = P$ e $P^ = P$, allora P è la proiezione ortogonale su un sottospazio chiuso V , dove V è l'immagine di P*

Teorema 7.8 (Teorema di uniforme limitatezza di Banach-Steinhaus). *Sia X uno spazio di Banach e $\{T_m\}_{m \geq 0}$ una famiglia di operatori lineari continui $T_m : X \rightarrow X$. Se la famiglia è puntualmente limitata, cioè*

$$\sup_{m \geq 0} \|T_m x\| < \infty \quad \text{per ogni } x \in X, \quad (7.6)$$

allora è uniformemente limitata in norma:

$$\sup_{m \geq 0} \|T_m\| < \infty. \quad (7.7)$$

Teorema 7.9. *Se Q è una forma quadratica limitata su H , allora esiste un unico $A \in B(H)$ tale che $Q(\psi) = \langle \psi, A\psi \rangle$ per ogni $\psi \in H$. Se $Q(\psi)$ appartiene a $\mathbb{R}$ per ogni $\psi \in H$, allora l'operatore A è autoaggiunto.*

Definizione 7.10 (funzioni assolutamente continue (AC)). *Una funzione $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è **assolutamente continua** se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni collezione finita di intervalli disgiunti $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n) \subseteq [a, b]$:*

$$\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta \implies \sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Le funzioni assolutamente continue sono differenziabili quasi ovunque

Proposizione 7.11 (Formula di Gelfand). *La formula di Gelfand afferma che*

$$R(A) = \lim_{m \rightarrow \infty} \|A^m\|^{1/m} \quad (7.8)$$

ovvero che il raggio spettrale di un operatore limitato A è uguale alla radice m -esima di $\|A^m\|$

Riferimenti bibliografici

- [1] Marco Benini. Note del corso metodi matematici in meccanica quantistica, anno accademico 2024-2025.
- [2] Giovanni Boniolo et al. *J. von Neumann, I fondamenti matematici della meccanica quantistica*. Il Poligrafo, 1998.
- [3] Brian C Hall. *Quantum theory for mathematicians*. Springer, 2013.
- [4] Evans Harrell. A short history of operator theory. *Mathphysics. com*, 2004.
- [5] David Hilbert. Grundzüge einer allgemeinen theorie der linearen integralgleichungen. In *Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten*, pages 6–169. Springer, 1989.