Università degli Studi di Genova

Scuola di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Dipartimento di Matematica

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Tesi in Geometria Algebrica

Varietà toriche e ventagli poliedrali

Relatore
Prof. Victor Lozovanu

Correlatrice
Prof. Eleonora Anna Romano

Candidato
Francesco Minervini
S4488112

Anno Accademico 2024–2025

Indice

Introduzione **iii**

1 Varietà toriche affini e coni poliedrali **1**
1.1 I caratteri del toro 1
1.2 Costruzione con punti del reticolo 3
1.3 Costruzione con ideali torici 4
1.4 Costruzione con semigruppi affini 6
1.5 Coni poliedrali e politopi convessi 9
1.6 Varietà toriche normali e lisce 12

2 Varietà toriche proiettive e politopi convessi **15**
2.1 Punti del reticolo 15
2.2 Varietà proiettive e politopi 20
2.2.1 Politopi normali 22
2.2.2 Politopi molto ampi 24
2.3 Politopi e ventagli 26
2.4 Proprietà delle varietà toriche proiettive 30
2.5 Prodotto di varietà toriche proiettive 32

3 Ventagli poliedrali e corrispondenza orbite-coni **35**
3.1 Varietà e ventagli 35
3.2 Corrispondenza orbite-coni 37

4 Divisori su varietà toriche e teorema di Bernstein **43**
4.1 Divisori su varietà toriche 43
4.2 Il teorema di Bernstein 46

Bibliografia **51**

Introduzione

Lo studio delle varietà toriche è negli anni recenti diventato sempre più in voga nell'ambito della geometria. Le varietà toriche sono varietà algebriche complesse, su cui un gruppo algebrico isomorfo a $(\mathbb{C}^*)^n$, detto "toro", agisce in modo opportuno, estendendo la sua operazione naturale. Il termine "toro" che le accomuna proviene dal linguaggio dei gruppi di Lie nella geometria differenziale e dai gruppi algebrici lineari.

Vari sono i motivi per cui vale la pena approfondire questa teoria. In primo luogo le varietà toriche offrono un terreno fertile per visualizzare e mettere in pratica con esempi concreti i vari teoremi visti e dimostrati in contesti più generali nei corsi di geometria algebrica.
L'aspetto più interessante delle varietà torica è secondo me la loro natura intrinsecamente combinatorica. La geometria torica infatti fa da "ponte" fra strutture come i coni convessi, i ventagli poliedrali ed i politopi e le varietà che ad essi sono associate.
Inoltre presentano diverse applicazioni ad altri campi matematici e non, quali la statistica algebrica, la teoria dei codici, l'algebra computazionale e la fisica teorica. All'interno della famosa teoria delle stringhe, le cosiddette varietà di Calabi-Yau giocano un ruolo cruciale. Queste varietà infatti possono nascere come ipersuperfici immerse in varietà toriche e sono strettamente legate alla simmetria a specchio.

Nel primo capitolo di questa tesi affronteremo il toro algebrico e le diverse costruzioni di varietà toriche affini: tramite punti di un reticolo, con ideali torici e infine mediante i semigruppi affini. Introdurremo inoltre i primi oggetti combinatorici di questa tesi, ovvero i coni convessi poliedrali e dimostreremo alcuni risultati che li legano fortemente alle varietà toriche. Infine analizzeremo alcune proprietà classiche della geometria algebrica quali la normalità e la liscezza in relazione ai semigruppi affini e ai coni convessi.

Il secondo capitolo sarà dedicato alle varietà toriche proiettive. Daremo un po' di spazio anche alla teoria dei politopi convessi, in particolare ai politopi "molto ampi" e "normali"; queste proprietà risultano molto importanti nello studio delle varietà toriche proiettive. Verso la fine del capitolo introdurremo anche i ventagli associati ad un politopo.

Nel terzo capitolo daremo la definizione generale di ventagli poliedrali, che ci porte-

rà a considerare le varietà toriche in senso più astratto, indipendentemente dallo spazio ambiente. Inoltre illustreremo un'affascinante corrispondenza bigettiva tra i coni di un ventaglio e le orbite del toro sulla varietà associata.

Infine concluderemo trattando i divisori invarianti rispetto all'azione del toro che sfrutteremo per dimostrare la formula di Bernstein. Introdurremo il poligono di Newton di un polinomio f in due variabili, che codifica nei suoi vertici le informazioni sui esponenti dei monomi di f. Il teorema di Bernstein è un risultato sorprendente, che lega il numero di zeri in comune di due polinomi all'area dei poligoni di Newton corrispondenti. Grazie al contributo di Khovanskii e Kushnirenko questo teorema è stato mostrato nella sua versione n-dimensionale per varietà toriche a intersezione completa.

Le dimostrazioni di alcuni risultati classici di geometria algebrica utilizzate in questa tesi saranno omessi per dare maggiore risalto agli argomenti più tipici della geometria torica.

Capitolo 1

Varietà toriche affini e coni poliedrali

Un toro algebrico è il gruppo algebrico $T \cong (\mathbb{C}^*)^n$ con l'operazione di prodotto componente per componente indotta dall'isomorfismo; lo chiameremo semplicemente toro quando non ci saranno ambiguità. Come vedremo, esistono diversi modi equivalenti di costruire una varietà torica affine ma la definizione standard è la seguente:

Definizione 1.0.1. Una varietà affine irriducibile si dice **torica** se contiene come aperto (denso) un toro, il quale estende la sua operazione naturale ad un'azione algebrica su tutta la varietà.

Il più semplice esempio di varietà torica è lo stesso toro algebrico $(\mathbb{C}^*)^n$. Un secondo esempio è lo spazio affine $\mathbb{C}^n$, che contiene un toro n-dimensionale. Poichè il toro è un aperto denso nella varietà, la dimensione di quest'ultima è sempre uguale a quella del toro stesso.

In questo primo capitolo illustreremo alcune delle principali costruzioni con cui produrre varietà toriche affini. Inizieremo definendo i caratteri ed i sottogruppi a un parametro del toro a cui assoceremo punti di un reticolo. Un'altra costruzione molto importante che vedremo proverrà dai cosiddetti "semigruppi affini".

1.1 I caratteri del toro

Siamo ora interessati a definire i caratteri ed i sottogruppi ad un parametro di un toro, poichè ci permettono di codificare in modo unico informazioni che descrivono il toro stesso.

Definizione 1.1.1. Un **carattere** di un toro T è un elemento di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(T, \mathbb{C}^*)$, ossia un morfismo di gruppi algebrici $\chi : T \to \mathbb{C}^*$.

Si può mostrare che ogni carattere di$(\mathbb{C}^*)^n$ è della forma

$$\chi^m(z_1, ..., z_n) = z_1^{m_1} \cdots z_n^{m_n}$$

per un certo $m = (m_1, ..., m_n) \in \mathbb{Z}^n$. Segue che il gruppo dei caratteri di un toro $T \cong (\mathbb{C}^*)^n$ è isomorfo a $\mathbb{Z}^n$ e dunque è un reticolo.

Definizione 1.1.2. Un **sottogruppo a un parametro** di un toro T è un elemento di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{C}^*, T)$, ovvero un morfismo di gruppi algebrici $\lambda : \mathbb{C}^* \to T$.

Usando l'isomorfismo fra T e $(\mathbb{C}^*)^n$, analogamente al caso dei caratteri, si dimostra che ogni sottogruppo a un parametro è della forma

$$\lambda^m(z) = (z^{m_1}, ..., z^{m_n})$$

per un $m = (m_1, ..., m_n) \in \mathbb{Z}^n$ e quindi anche tali morfismi costituiscono un gruppo isomorfo a $\mathbb{Z}^n$.

Se chiamiamo M e N rispettivamente i reticoli relativi ai caratteri e ai sottogruppi ad un parametro di un toro, otteniamo un pairing di dualità

$$\langle\ ,\rangle : M \times N \to \mathbb{Z}.$$

Tale mappa si può definire attraverso la composizione di un carattere χ^m e di un sottogruppo ad un parametro λ^u associati alla coppia di punti $(m, u) \in M \times N$. La loro composizione $\chi^m \circ \lambda^u$ è un automorfismo di $\mathbb{C}^*$ che manda $z \mapsto z^l$ per un $l \in \mathbb{Z}$ dato da:

$$\chi^m \circ \lambda^u(z) = \chi^m(z^{u_1}, ..., z^{u_n}) = (z^{u_1})^{m_1} \cdots (z^{u_n})^{m_n} = z^{\sum_{i=1}^n m_i u_i}$$

Possiamo quindi definire $\langle\ ,\rangle$ in modo più diretto come il prodotto scalare fra i vettori interi m e u, il chè ci garantisce la bilinearità del pairing.

Riportiamo di seguito una proposizione che useremo diverse volte:

Proposizione 1.1.1. *1. Siano T_1 e T_2 due tori e $\Phi : T_1 \to T_2$ un morfismo di gruppi algebrici. Allora $\Phi(T_1)$ è un toro ed è chiuso in T_2.*

2. Siano T un toro e $H \subseteq T$ un sottogruppo e sottovarietà irriducibile di T. Allora H è un toro.

Sketch della dimostrazione. 1. Siano M_1 ed M_2 i reticoli dei caratteri associati rispettivamente a T_1 e T_2. Il morfismo Φ ci fornisce un omomorfismo di reticoli duale $\tilde{\Phi} : M_2 \to M_1$. Allora $\Phi(T_1)$ è il toro corrispondente al reticolo dei caratteri $\tilde{\Phi}(M_2)$. Tale toro è chiuso in $T_2 \cong (\mathbb{C}^*)^s$ perché è intersezione di un chiuso di Zariski in $\mathbb{C}^s$ (del tipo $\mathbb{C}^n \times \{1\} \cdots \times \{1\}$ per un $n \leq s$) con $(\mathbb{C}^*)^s$.

2. L'inclusione di varietà $i : H \hookrightarrow T$ induce il morfismo surgettivo di algebre delle coordinate $\mathbb{C}[T] \to \mathbb{C}[H]$. L'immagine di un carattere $\chi \in \mathbb{C}[T]$ mediante tale mappa è la sua restrizione ad H, che è ancora un carattere poichè è un sottogruppo. Allora $\mathbb{C}[H]$ è generato dai caratteri e quindi H è un toro.

□

1.2 Costruzione con punti del reticolo

Sia T_N il toro n-dimensionale con reticolo dei sottogruppi a un parametro N e reticolo dei caratteri M. Consideriamo un'insieme finito di punti $F = \{m_1, ..., m_s\} \subseteq M$. Associando ad ogni punto $m_i \in F$ il carattere χ^{m_i}, otteniamo l'applicazione
$\Phi_F : T_N \to \mathbb{C}^s$ data da $\Phi_F(t) = (\chi^{m_1}(t), ..., \chi^{m_s}(t)) \in (\mathbb{C}^*)^s$.

Definizione 1.2.1. Definiamo $Y_F := \overline{\Phi_F(T_N)} \subseteq \mathbb{C}^s$, la chiusura di Zariski dell'immagine di tale mappa.

Prima di dimostrare che Y_F è effettivamente una varietà torica affine, vediamo un esempio concreto:

Esempio 1.2.1. Sia $F = \{(d, 0), (d-1, 1), ..., (0, d)\} \subset \mathbb{Z}^2$ reticolo con $d \in \mathbb{N}$. La chiusura dell'applicazione Φ_F definita da $\Phi_F(s, t) = (s^d, s^{d-1}t, ..., t^d)$ dà luogo alla parametrizzazione omogenea di una superficie complessa di grado d in $\mathbb{C}^{d+1}$ che possiamo chiamare C_d. La varietà C_d è detta *cono razionale normale di grado d* e, come dimostreremo nella proposizione 1.2.1, è torica con toro bidimensionale T. Infatti

$$\Phi_F((\mathbb{C}^*)^2) = C_d \cap (\mathbb{C}^*)^{d+1} \cong (\mathbb{C}^*)^2.$$

Dimostriamo ora la seguente proposizione che giustifica le affermazioni fatte nell'esempio precedente:

Proposizione 1.2.1. *Sia $\mathbb{Z}F$ il reticolo generato dall'insieme finito di punti F. Allora Y_F definito come sopra è una varietà torica. Inoltre ha reticolo dei caratteri $\mathbb{Z}F$ e la sua dimensione è pari al rango di $\mathbb{Z}F$.*

Dimostrazione. Innanzitutto possiamo vedere $\Phi_F : T_N \to (\mathbb{C}^*)^s$ come una mappa fra tori e quindi $\Phi_F(T_N) := T$ è ancora un toro ed è chiuso in $(\mathbb{C}^*)^s$ per la proposizione 1.1.1. Per quest'ultimo fatto segue che

$$T = Y_F \cap (\mathbb{C}^*)^s$$

visto che Y_F è proprio la chiusura di Zariski di T. Pertanto T è anche un aperto (denso) in Y_F. Inoltre il toro è irriducibile e per densità lo è pure Y_F.

Ora dobbiamo provare che Y_F sia invariante rispetto all'azione di T. Sia $t \in T$; chiaramente $t \cdot Y_F$ è ancora una varietà affine e, poiché $T = t \cdot T \subseteq t \cdot Y_F$, contiene anche il toro T. Ma Y_F è la chiusura di Zariski di T, da cui $Y_F \subseteq t \cdot Y_F$. Se sostituiamo t con t^{-1} otteniamo proprio l'uguaglianza $Y_F = t \cdot Y_F$, cioè che Y_F è una varietà torica.

Per l'ultima parte dell'enunciato, abbiamo il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} T_N \arrow[r, "\Phi_F"] \arrow[dr, two heads] & (\mathbb{C}^*)^s \\ & T \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

da cui si ottiene, applicando il funtore $\mathrm{Hom}(-, \mathbb{C}^*)$, il diagramma:

$$\begin{tikzcd} M & \mathbb{Z}^s \arrow[l, "\widehat{\Phi}_F"'] \arrow[d, two heads] \\ & M'. \arrow[ul, hook] \end{tikzcd}$$

dove M' è il reticolo dei caratteri di T. Poichè $\widehat{\Phi}_F$ manda la base $\{e_1, ..., e_s\}$ in $\{m_1, ..., m_s\}$, allora

$$\widehat{\Phi}_F(\mathbb{Z}^s) = \mathbb{Z}F \cong M'$$

per commutatività del diagramma. Segue l'asserzione sulla dimensione e il rango del reticolo. □

1.3 Costruzione con ideali torici

Sappiamo che ad ogni ideale $I \subseteq \mathbb{C}[x_1, ..., x_s]$ corrisponde una varietà affine per la topologia di Zariski. Vogliamo dunque individuare una particolare classe di ideali che ci permetta di costruire varietà *toriche* affini, che chiameremo *ideali torici*.

Innanzitutto definiamo:

Definizione 1.3.1. Sia $L \subseteq \mathbb{Z}^s$ un sottoreticolo.

- Un ideale **reticolo** è un ideale $I_L \subseteq \mathbb{C}[x_1, ..., x_s]$ della forma

$$I_L = \langle x^\alpha - x^\beta | \alpha, \beta \in \mathbb{N}^s,\ \alpha - \beta \in L \rangle.$$

- Un ideale **torico** è un ideale reticolo primo.

Al momento non è affatto immediato il perchè l'ideale di una varietà torica debba essere di questa forma. Nella costruzione vista all'interno della sezione precedente, la mappa $\Phi_F : T \to (\mathbb{C}^*)^s$ ci dava un morfismo di reticoli $\widehat{\Phi}_F : \mathbb{Z}^s \to M$.

Nella seguente proposizione proveremo che un ideale associato ad una varietà torica è effettivamente torico, come ci aspettiamo.

Proposizione 1.3.1. *L'ideale della varietà torica $Y_F \subseteq \mathbb{C}^s$ è*

$$I(Y_F) = \langle x^{\ell_+} - x^{\ell_-} | l \in L \rangle = \langle x^\alpha - x^\beta | \alpha, \beta \in \mathbb{N}^s, \alpha - \beta \in L \rangle.$$

Dimostrazione. Proviamo innanzitutto la prima uguaglianza. Chiamiamo L il nucleo di $\widehat{\Phi}_F$; allora ogni elemento $\ell = (\ell_1, ..., \ell_s) \in L$ ci fornisce una relazione lineare fra i punti di F, del tipo $\sum_{i=1}^s \ell_i m_i = 0$. Denotiamo poi ℓ_+ e ℓ_- come

$$\ell_+ = \sum_{\ell_i > 0} \ell_i e_i \quad \ell_- = -\sum_{\ell_i < 0} \ell_i e_i;$$

(notare che $\ell_+, \ell_- \in \mathbb{N}^s$ e $\ell = \ell_+ - \ell_-$). Osserviamo che un binomio della forma

$$x^{\ell_+} - x^{\ell_-} = \prod_{\ell_i > 0} x_i^{\ell_i} - \prod_{\ell_i < 0} x_i^{-\ell_i}$$

si annulla su tutti i punti dell'immagine di Φ_F e quindi sulla sua chiusura Y_F. Abbiamo dunque mostrato che l'ideale generato da tali elementi è contenuto in $I(Y_F)$..

Supponiamo ora che $I_L \neq I(Y_F)$, e fissiamo un ordine monomiale $>$ su $\mathbb{C}[x_1, ..., x_s]$. Prendiamo un $f \in I(Y_F)\backslash I_L$ con termine di testa di grado minimale $x^\alpha = \prod_{i=1}^s x_i^{a_i}$. Notiamo che, poiché f deve essere identicamente nullo sui punti di Y_F, il termine di testa si cancellerà con un monomio $x^\beta = \prod_{i=1}^s x_i^{b_i} < x^\alpha$. Quindi dovremo avere che

$$\prod_{i=1}^s (t^{m_i})^{a_i} = \prod_{i=1}^s (t^{m_i})^{b_i}$$

da cui

$$\sum_{i=1}^s a_i m_i = \sum_{i=1}^s b_i m_i.$$

Ma allora $\alpha - \beta = \sum_{i=1}^s (a_i - b_i)e_i \in L$ e per la seconda uguaglianza $x^\alpha - x^\beta \in I_L$. In questo modo otteniamo che $f - x^\alpha - x^\beta$ è ancora in $I(Y_F)\backslash I_L$ ma ha termine di testa strettamente minore di f il chè contraddice l'ipotesi di minimalità.

Per quanto riguarda la seconda uguaglianza, la prima delle due inclusioni segue poiché ogni $x^{\ell_+} - x^{\ell_-} \in \langle x^\alpha - x^\beta | \alpha, \beta \in \mathbb{N}^s,\ \alpha - \beta \in L\rangle$, come ossevato in precedenza. Per la seconda inclusione, osserviamo che se $\alpha - \beta = \ell$ per $\ell \in L$, allora $\alpha = \ell_+ + \gamma$ e $\beta = \ell_- + \gamma$ per un $\gamma \in \mathbb{N}^s$. Questo implica che

$$x^\alpha - x^\beta = x^{\ell_+ + \gamma} - x^{\ell_- + \gamma} = x^\gamma (x^{\ell_+} - x^{\ell_-}) \in \langle x^{\ell_+} - x^{\ell_-} | \ell \in L\rangle,$$

dal fatto che $I(Y_F)$ è primo. □

Usando la definizione può non essere così semplice verificare se un dato ideale sia torico o meno; la seguente proposizione ci permette invece di caratterizzarli in maniera molto efficace.

Proposizione 1.3.2. *Un ideale è torico se e solo se è primo e generato da binomi.*

Dimostrazione. L'implicazione verso destra segue dalla definizione 1.3.1.
D'altra parte, sia I un ideale primo generato da binomi; osserviamo che $V(I) \cap (\mathbb{C}^*)^s$ è non vuoto perché contiene $(1, ..., 1)$ ed è un sottogruppo di $(\mathbb{C}^*)^s$. Infatti se $p, q \in V(I) \cap (\mathbb{C}^*)^s$ vale che

$$(p \cdot q)^\alpha - (p \cdot q)^\beta = p^\alpha \cdot q^\alpha - p^\beta \cdot q^\beta = (p^\alpha - p^\beta)q^\alpha + (q^\alpha - q^\beta)p^\beta = 0,$$

cioè $p \cdot q \in V(I) \cap (\mathbb{C}^*)^s$. Inoltre, poichè I è primo, $V(I)$ è irriducibile e quindi anche $V(I) \cap (\mathbb{C}^*)^s$. Questo rende $V(I) \cap (\mathbb{C}^*)^s$ un sottogruppo algebrico irriducibile di $(\mathbb{C}^*)^s$ e dunque un toro per la prop. 1.1.1 , che chiameremo T.

Consideriamo ora la proiezione sull' i-esima componente di T; tali mappe sono caratteri di T ciascuno dato da un certo $m_i \in M$, che assieme formano una mappa Φ_F con $F = \{m_1, ..., m_s\}$, proprio come nella costruzione delle varietà toriche presentate nella sezione 1.2. Allora $V(I) = Y_F$ e, per il Nullstellensatz nel caso di ideali radicali, $I = I(V(I)) = I(Y_F)$, cioè l'ideale è torico per la prop. 1.3.1. □

1.4 Costruzione con semigruppi affini

Ricordiamo che un *semigruppo* $(S, +)$ è un insieme dotato di un'operazione binaria associativa $+$ e di un elemento neutro $0 \in S$. Dati S e S' due semigruppi, un *morfismo di semigruppi* è un' applicazione $\widehat{\Phi} : S \to S'$ tale che

$$\widehat{\Phi}(s_1 + s_2) = \widehat{\Phi}(s_1) + \widehat{\Phi}(s_2) \quad \text{e} \quad \widehat{\Phi}(0) = 0.$$

In termini categoriali possiamo affermare che la categoria dei gruppi è una sottocategoria di quella dei semigruppi.

Un esempio immediato di semigruppo che non sia anche un gruppo è l'insieme dei numeri naturali con la somma: $(\mathbb{N}, +)$. Un altro esempio è quello di $(\mathbb{C}, \cdot)$.

Definizione 1.4.1. Un semigruppo si dice **affine** se è commutativo, finitamente generato e si può immergere in un reticolo $L \cong \mathbb{Z}^n$ per un $n \in \mathbb{N}$.

Equivalentemente possiamo richiedere l'esistenza di un morfismo di semigruppi $\widehat{\Phi} : \mathbb{N}^s \to \mathbb{Z}^n$ tale che $\mathrm{Im}(\widehat{\Phi}) \cong S$, cioè che ci siano s vettori $m_1, ..., m_s \in \mathbb{Z}^n$ per i quali $S = \mathbb{N}m_1 + ... + \mathbb{N}m_s$.

Notare che $(\mathbb{C}, \cdot)$ **non** è un semigruppo *affine* poichè non si può immergere in un reticolo, a differenza di $\mathbb{N}^n \subseteq \mathbb{Z}^n$.

Esiste un metodo naturale per costruire un'algebra a partire da un semigruppo S. Iniziamo considerando le combinazioni lineari su $\mathbb{C}$ di elementi del tipo χ^s al variare di $s \in S$. Possiamo definire su di essi anche un prodotto indotto dall'operazione del semigruppo, ovvero

$$\chi^s \cdot \chi^t = \chi^{s+t}$$

con $s, t \in S$. In questo modo otteniamo la $\mathbb{C}$-algebra commutativa e unitaria $\mathbb{C}[S]$.

Infine applicando il funtore Spec a tale algebra si ottiene una varietà affine: $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[S])$. Dimostreremo che è una varietà torica isomorfa a Y_F.

Esempio 1.4.1. Consideriamo $\mathbb{Z}^n$ come semigruppo generato dai vettori della base canonica e i loro opposti, $\pm e_1, ..., \pm e_n$. L'algebra ottenuta dal semigruppo è isomorfa all'anello dei *polinomi di Laurent*:

$$\mathbb{C}[\mathbb{Z}^n] = \mathbb{C}[\chi^{\pm e_1}, ..., \chi^{\pm e_n}] \cong \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, ..., x_n^{\pm 1}] = \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]_{x_1 \cdots x_n}$$

dove l'isomorfismo manda il carattere χ^{e_i} nella variabile x_i. Dunque $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, ..., x_n^{\pm 1}]) = (\mathbb{C}^*)^n$, il toro n-dimensionale.

Sia $S \subseteq \mathbb{Z}^n$ un semigruppo affine, definiamo il più piccolo gruppo che lo contiene $M := S^{gr} = \{s_1 - s_2 | s_1, s_2 \in S\}$. L'inclusione di semigruppi $S \hookrightarrow M$ induce l'inclusione fra le algebre $\mathbb{C}[S] \hookrightarrow \mathbb{C}[M]$ corrispondenti da cui si ottiene l'immersione aperta

$$i : \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[M]) \to \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[S]) := V$$

come dimostreremo nella proposizione seguente.

Proposizione 1.4.1. *L'immagine dell'immersione i è un aperto principale $D(f) = \{p \in V | f(p) \neq 0\} \subseteq V$ per una certa $f \in \mathbb{C}[S]$.*

Dimostrazione. Sia S generato da $\{s_1, ..., s_n\}$, allora $\{\pm s_1, ..., \pm s_n\}$ generano M. Da questo segue che $\mathbb{C}[M] = \mathbb{C}[S]_{\chi^{s_1+...+s_n}} = \mathcal{O}_V(D(\chi^{s_1+...+s_n}))$, ovvero l'anello delle coordinate del toro sono le sezioni di un'aperto principale dove $f = \chi^{s_1+...+s_n}$. □

Osserviamo che l'omomorfismo di algebre

$$\mathbb{C}[V] = \mathbb{C}[S] \to \mathbb{C}[M] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[S] = \mathbb{C}[T_N] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[V]$$

dato da $\chi^s \mapsto \chi^s \otimes \chi^s$ rende algebrica l'azione del toro $T \times V \to V$.

Nella seguente proposizione vediamo un'importante corrispondenza tra i punti di una varietà torica e i morfismi del suo semigruppo.

Proposizione 1.4.2. *Sia V una varietà torica. Allora sono in corrispondenza biunivoca:*

(1) I punti chiusi $p \in V$

(2) Gli ideali massimali $m \subseteq \mathbb{C}[S]$

(3) I morfismi di semigruppi $\phi \in \mathrm{Hom}(S, \mathbb{C})$, con $\mathbb{C}$ semigruppo rispetto alla moltiplicazione.

Dimostrazione. La corrispondenza (1)-(2) è già nota nel caso delle varietà algebriche grazie al *Nullstellensatz*. Per quanto riguarda quella tra (1) e (3), per ogni $p \in V$ abbiamo la mappa di valutazione $m \mapsto \chi^m(p)$ che è un morfismo di semigruppi.

Viceversa sia $\phi : S \to \mathbb{C}$ un morfismo di semigruppi, Poichè $\{\chi^s\}_{s \in S}$ forma una base per $\mathbb{C}$, ϕ induce un'applicazione lineare surgettiva $\overline{\phi} : \mathbb{C}[S] \to \mathbb{C}$ che è anche un morfismo di $\mathbb{C}$-algebre. Il Ker di $\overline{\phi}$ è un ideale massimale $m_p \subseteq \mathbb{C}[S]$, che ci dà la corrispondenza cercata con un punto chiuso $p \in V$. □

È ben nota l'equivalenza di categorie che sussiste fra le K-varietà e le K-algebre finitamente generate quando K è un campo algebricamente chiuso. Ora esibiremo una seconda equivalenza di categorie caratteristica del caso torico: quella fra le varietà toriche e i semigruppi affini. Per provarla è necessario mostrare che il funtore che indicheremo con $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[-])$ sia *essenzialmente surgettivo* e *pienamente fedele.*
La prima condizione viene esplicitata nel seguente modo:

Proposizione 1.4.3. *Sia V una varietà torica con toro T, allora esiste un semigruppo affine S tale che $V \cong \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[S])$, il cui isomorfismo induce $T \cong \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[S^{gr}])$.*

Per dimostrarlo avremo bisogno di un lemma di algebra lineare.

Lemma 1.4.1. *Siano $M' \subseteq M$ un inclusione di reticoli dello stesso rango s. Allora esiste una base di M, $\{m_1, ..., m_s\}$, ed $a_1, ..., a_s \in \mathbb{Z}$ tali che $\{a_1 m_1, ..., a_s m_s\}$ è una base di M'.*

Dimostrazione della Proposizione 1.4.3. Sappiamo già che $T \cong \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[M])$ dove M è il suo reticolo dei caratteri. L'azione del toro che si estende algebricamente alla varietà ci dà il diagramma commutativo di algebre seguente:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_V(V) \arrow[r, "\phi'"] \arrow[d, hook] & \mathbb{C}[M] \otimes \mathcal{O}_V(V) \arrow[d, hook] \\ \mathbb{C}[M] \arrow[r, "\phi^*"] & \mathbb{C}[M] \otimes \mathbb{C}[M]. \end{tikzcd}$$

Sia $f \in \sum a_s \chi^s \in \mathcal{O}_V(V)$. Allora

$$\phi^*(f) = \sum \chi^s \otimes (a_s \chi^s) \in \mathbb{C}[M] \otimes \mathcal{O}_V(V),$$

da cui $a_s\chi^s \in \mathcal{O}_V(V)$ e $\mathcal{O}_V(V) = \bigoplus_{s \in S} \mathbb{C}\chi^s$ per un certo $S \subseteq M$. Inoltre, poichè $\mathcal{O}_V(V) \subseteq \mathbb{C}[M]$ è un sottoanello, $\chi^s \cdot \chi^{s'} = \chi^{s+s'} \in \mathcal{O}_V(V)$, il chè restituisce la struttura di semigruppo a S.
Infine osserviamo che $\mathrm{rank}(S^{gr})$=$\mathrm{rank}(M)$=$\dim(V)$. Supponiamo per assurdo che $S \subsetneq M$, per il lemma precedente abbiamo la mappa

$$\mathbb{C}[M] = \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, ..., x_s^{\pm 1}] \to \mathbb{C}[S^{gr}] \cong \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, ..., x_s^{\pm 1}]$$

data da $x_i \mapsto x_i^{a_i}$. Il morfismo di tori corrispondente è finito e dunque surgettivo ma per ipotesi almeno un $a_i \neq \pm 1$. Questo ci dice che non può essere un isomorfismo da cui la contraddizione che conclude. □

Affinchè il funtore $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[-])$ sia anche pienamente fedele deve valere l'enunciato che segue.

Proposizione 1.4.4. *Siano S, S' due semigruppi affini e $f : \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[S]) \to \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[S'])$ un morfismo di varietà algebriche con $g : \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[S^{gr}]) \to \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[S'^{gr}])$ il morfismo di gruppi algebrici compatibile con l'azione del toro. Allora esiste unico un morfismo di semigruppi affini $\widehat{f} : S' \to S$ che induce f.*

Dimostrazione. Innanzitutto consideriamo il caso in cui $S = S^{gr} = M$ e $S' = S'^{gr} = M'$. Dalle ipotesi su g, troviamo il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}[M'] \arrow[r, "\psi'^*"] \arrow[d, "g^*"] & \mathbb{C}[M'] \otimes \mathbb{C}[M'] \arrow[d, "g^* \otimes g^*"] \\ \mathbb{C}[M] \arrow[r, "\psi^*"] & \mathbb{C}[M] \otimes \mathbb{C}[M]. \end{tikzcd}$$

Sia $u' \in M'$, allora $g^*(\chi^{u'}) = \sum_{u \in M} a_u \chi^u$. Quindi segue dalla commutatività che

$$\sum_{u \in M} a_u \chi^u \otimes \chi^u = \psi^*(g^*(\chi^{u'})) = g^* \otimes g^*(\psi'^*(\chi^{u'})) = (\sum_{u \in M} a_u \chi^u) \otimes (\sum_{u \in M} a_u \chi^u).$$

Supponiamo per assurdo che ci siano $u_1, u_2 \in M$ tali che $a_{u_1}, a_{u_2} \neq 0$. Allora $\chi^{u_1} \otimes \chi^{u_2}$ dovrà comparire nell'ultimo termine della catena di uguaglianze sopra, il chè contraddice la prima delle scritture. Pertanto $g^*(\chi^{u'}) = a_u \chi^u$ e per lo stesso ragionamento $a_u = 1$.

Quello che abbiamo osservato garantisce che g^* sia indotto da un'unico

$\widehat{g} : M' \to M$ definito da $\widehat{g}(u') = u$. Inoltre $\widehat{g}$ è effettivamente un morfismo di semigruppi infatti

$$g^*(\chi^{u_1'+u_2'}) = g^*(\chi^{u_1'} \cdot \chi^{u_2'}) = g^*(\chi^{u_1'}) \cdot g^*(\chi^{u_2'}) = \chi^{u_1+u_2}.$$

Nel caso più generale si estende il diagramma costruito prima per i tori, ottenendo un diagramma analogo, e poi si usa il primo caso. □

1.5 Coni poliedrali e politopi convessi

In questa sezione introduciamo alcuni oggetti di studio della geometria convessa, come i coni razionali poliedrali ed i politopi convessi. Vedremo anche come ai primi si può associare un semigruppo affine e dunque una varietà torica.

Innanzitutto fissiamo una coppia di reticoli duali M e N, e i loro corrispondenti $\mathbb{R}$-spazi vettoriali $M_{\mathbb{R}} := M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ e $N_{\mathbb{R}} := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$.
Sia S un sottoinsieme finito di punti in $N_{\mathbb{R}}$, il **cono convesso poliedrale generato da** S è definito come

$$\sigma = \mathrm{Cono}(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{s} \lambda_i m_i \middle| m_i \in S,\ \lambda_i \geqslant 0 \right\} \subseteq N_{\mathbb{R}}.$$

Osserviamo che σ è effettivamente un cono, cioè se $x \in \sigma$, allora $\lambda x \in \sigma\, \forall \lambda \geq 0$. Inoltre è anche un insieme convesso ovvero $x, y \in \sigma$ implica che

$$(1-\lambda)x + \lambda y \in \sigma \quad \forall \lambda \in [0,1].$$

Il termine poliedrale è dovuto al fatto che stiamo considerando solo un numero finito di generatori. In seguito i coni convessi poliedrali verranno chiamati semplicemente *coni*.
La **dimensione di un cono**, $\dim(\sigma)$, è la dimensione del più piccolo sottospazio vettoriale contenente σ.

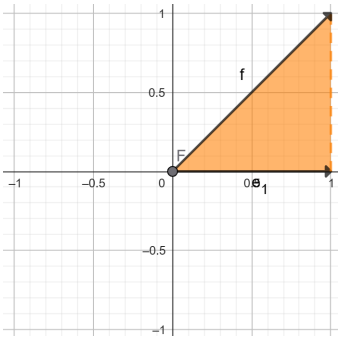

Figura 1.1: Cono convesso generato dai raggi e_1 ed $f = e_1 + e_2$

Definiamo il **politopo convesso di** $S \subset M_{\mathbb{R}}$,

$$\mathrm{Conv}(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{s} \lambda_i m_i \middle| m_i \in S,\ \lambda_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{s} \lambda_i = 1 \right\} \subseteq M_{\mathbb{R}}.$$

Un politopo convesso $P \subseteq M_{\mathbb{R}}$ è l'*inviluppo convesso* di un numero finito di punti, cioè il più piccolo insieme convesso che li contiene. La **dimensione di un politopo**, dim P, si definisce come la dimensione del più piccolo sottospazio affine contenente P.

Un cono $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ generato da punti di $N_{\mathbb{Q}} := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ viene detto **razionale**. Si osservi che un cono razionale può anche essere generato da punti in N. Diverso è il caso di un politopo $P = \mathrm{Conv}(S) \subseteq M_{\mathbb{R}}$, che verrà detto **razionale** o **intero** se i punti di S giacciono rispettivamente in $M_{\mathbb{Q}}$ o in M.

Definizione 1.5.1 (Cono duale)**.** Sia $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ un cono, il suo duale è

$$\sigma^{\vee} := \{u \in M_{\mathbb{R}} | \langle u, m \rangle \geq 0\ \forall m \in \sigma\}.$$

Si verifica che il duale di un cono convesso poliedrale è ancora un cono convesso poliedrale e inoltre che $(\sigma^{\vee})^{\vee} = \sigma$. Siano $m_1, ..., m_s$ i generatori di σ; possiamo anche vedere il duale $\sigma^{\vee}$ come intersezione dei *semispazi di supporto* $H^+_{m_1} \cap \cdots \cap H^+_{m_s}$, dove $H^+_m := \{u \in M_{\mathbb{R}} | \langle u, m \rangle \geq 0\}$.

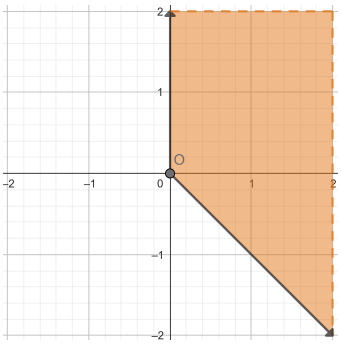

Figura 1.2: Cono duale di quello in figura 1.1, generato da $e_1 - e_2, e_2$

Definizione 1.5.2. Sia $H_m := \{u \in M_{\mathbb{R}} | \langle u, m\rangle = 0\}$ l'*iperpiano di supporto* di m. Definiamo τ una **faccia del cono** $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ se $\tau = H_m \cap \sigma$ per un $m \in M_{\mathbb{R}}$.

Notare che il cono stesso è una faccia, anche se impropria, infatti è ottenuto come $\sigma = H_0 \cap \sigma$. La faccia di una faccia di σ è ancora una faccia di σ. Possiamo dotare le facce di un cono di una relazione d'ordine parziale che indicheremo con $\tau \preceq \sigma$. Chiameremo inoltre *faccetta* una faccia propria di dimensione massimale, ovvero di codim $\tau = 1$.

Inoltre ogni faccia di un cono σ è un cono;

Vale la seguente proposizione che caratterizza le facce di un cono:

Proposizione 1.5.1. *Sia $\tau \preceq \sigma$ e $m_1, m_2 \in \sigma$. Allora, per ogni $m_1 + m_2 \in \tau$, vale che $m_1, m_2 \in \tau$.*

Dimostrazione. Siano $m_1, m_2 \in \sigma$ tali che $m_1 + m_2 \in \tau$, dunque $m_1 + m_2 \in \sigma \cap H_m$. Allora $\langle m_1 + m_2, u\rangle = \langle m_1, u\rangle + \langle m_2, u\rangle = 0$. Ma $u \in \sigma^\vee$ e $m_1, m_2 \in \sigma$, pertanto i prodotti sono non negativi e in particolare abbiamo che $\langle m_1, u\rangle = 0$ e $\langle m_2, u\rangle = 0$, da cui la tesi. □

Data una faccia $\tau \preceq \sigma \preceq N_{\mathbb{R}}$, definiamo anche

$$\tau^\perp := \{m \in M_{\mathbb{R}} \,|\, \langle m\,,\, u\rangle = 0 \quad \forall u \in \tau\} \qquad \text{e}$$
$$\tau^* = \{m \in \sigma^\vee | \langle m\,,\, u\rangle = 0 \quad \forall u \in \tau\} = \sigma^\vee \cap \tau^\perp.$$

Chiameremo quest'ultima la **faccia duale** di τ.

Un'altra proprietà dei coni che ci interessa studiare è la *convessità forte*.

Definizione 1.5.3. Diciamo che un cono è **fortemente convesso** se vale una delle seguenti condizioni equivalenti:

- $\sigma \cap -\sigma = 0$
- σ **non** contiene sottospazi vettoriali di dimensione > 0
- dim($\sigma^\vee$)=n

Si noti anche qui che il duale di un cono fortemente convesso è ancora fortemente convesso. D'ora in poi i coni che compariranno saranno sempre razionali e fortemente convessi, se non specificato diversamente.

Consideriamo ora un cono $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$; i punti del cono a coordinate nel reticolo, $\sigma \cap N$, formano un semigruppo contenente lo 0. Il seguente lemma ci permette di stabilire che ogni semigruppo dato da un cono è sempre affine.

Lemma 1.5.1 (Lemma di Gordan)**.** *Sia $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$. Il semigruppo S_σ è finitamente generato.*

Dimostrazione. Sia $S \subseteq M$ un sottoinsieme finito tale che $\sigma^\vee = \mathrm{Cono}(S)$. Definiamo $K := \{\sum_{m\in S} \delta_m m | 0 \leq \delta_m < 1\}$; questa è una regione limitata del cono, dunque $K \cap M$ è un insieme finito.

Mostriamo che $S \cup (K \cap M)$ genera il semigruppo S_σ. Sia $w \in S_\sigma$, possiamo scriverlo come $w = \sum_{m\in S} \lambda_m m$ con $\lambda_m \geq 0$. Vale che $\lambda_m = \lfloor \lambda_m \rfloor + \delta_m$ per un certo $0 \leq \delta_m < 1$. Allora

$$w = \sum_{m\in S} \lfloor \lambda_m \rfloor m + \sum_{m\in S} \delta_m m.$$

Ma la prima sommatoria è combinazione non-negativa di elementi di T mentre la seconda appartiene a $K \cap M$, da cui la tesi. □

Partendo da un cono σ arbitrario possiamo costruire la varietà torica affine U_σ attraverso il semigruppo S_σ corrispondente, in maniera analoga a quanto visto nella sezione precedente per semigruppi qualunque.

Nella geometria torica è di solito più conveniente utilizzare la varietà associata al cono duale di σ, ovvero definiamo

$$U_\sigma := \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M]).$$

Questa scelta ci permette di mantenere una corrispondenza biunivoca fra le inclusioni di facce del cono σ e quelle dei rispettivi aperti affini di U_σ.

Lemma 1.5.2. *Sia $\tau \preceq \sigma$ una faccia. Allora il morfismo $U_\tau \to U_\sigma$ immerge U_τ come aperto affine principale di U_σ.*

Dimostrazione. Sia $\tau = \sigma \cap H_u$ per un $u \in \sigma^\vee \cap M$. Possiamo scrivere S_τ come $S_\sigma + \mathbb{N}(-u)$. Allora un elemento nella base di $\mathbb{C}[S_\tau]$ è del tipo $\chi^{s-nu} = \chi^s/(\chi^u)^n$ per un $s \in S_\sigma$ e un $n \in \mathbb{N}$. Dunque $\mathbb{C}[S_\tau] = \mathbb{C}[S_\sigma]_{\chi^u}$, da cui segue la tesi. □

1.6 Varietà toriche normali e lisce

In questa sezione illustriamo alcune proprietà particolarmente rilevanti per le varietà toriche oltre che per le varietà algebriche più in generale: la *normalità* e *la liscezza o regolarità*.

Ricordiamo che una varietà algebrica affine è *normale* se il suo anello delle coordinate è integralmente chiuso nel campo delle frazioni.

Vedremo come, unicamente nel contesto torico, possiamo caratterizzare tale proprietà algebrica in termini della *saturazione* del semigruppo associato.

Definizione 1.6.1. Un semigruppo affine S si dice **saturato** se, ogni volta che $ms \in S$ per un certo $m \in \mathbb{N}$ ed $s \in S^{gr}$, allora $s \in S$.

Esempio 1.6.1. Sia $\sigma \in N_\mathbb{R}$ un cono. Il semigruppo affine $\sigma \cap N$ è saturato.

Ciò si traduce nel linguaggio della geometria algebrica con la normalità della varietà torica corrispondente come vedremo nella proposizione che segue.

Proposizione 1.6.1. *La varietà torica affine $V = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[S])$ è normale se e solo se S è saturato.*

Dimostrazione. Si osservi che $\mathbb{C}[S]$ è normale se e solo se è integralmente chiuso in $\mathbb{C}[S^{gr}]$. Questo vale poichè $\mathbb{C}[S^{gr}]$ è l'anello delle coordinate di un toro, che è liscio, e $\mathrm{Frac}(\mathbb{C}[S^{gr}]) = \mathrm{Frac}(\mathbb{C}[S])$.

Supponiamo che $\mathbb{C}[S]$ sia normale. Sia $s \in S^{gr}$ tale che $ms \in S$, allora $(\chi^s)^m \in \mathbb{C}[S]$. Ma per la normalità $\chi^s \in \mathbb{C}[S]$ e quindi $s \in S$.

Per l'altra implicazione supponiamo che S sia saturato ed R sia la chiusura integrale di $\mathbb{C}[S]$ in $\mathbb{C}[S^{gr}]$. Si osservi che R è invariante rispetto all'azione del toro T: se $\alpha \in R$ e $P \in \mathbb{C}[S][z]$ tale che $P(\alpha) = 0$, allora anche $t \cdot \alpha$, definito da $t \cdot \alpha(p) := \alpha(t^{-1} \cdot p)$ per ogni $p \in V$, sarà integrale su $\mathbb{C}[S]$ con la relazione di dipendenza $(t \cdot P)(t \cdot \alpha) = 0$. Dunque possiamo scrivere $R = \bigoplus_{s \in S'} \mathbb{C}\chi^s$ per un qualche $S' \subseteq S^{gr}$. Sia $\chi^s \in \mathbb{C}[S]$; c'è almeno un polinomio in $\mathbb{C}[S][z]$ che abbia χ^s come radice, del tipo

$$z^m + a_1\chi^{u_1}z^{m-1} + \cdots + a_n\chi^{u_n}.$$

Affinchè l'equazione associata abbia come soluzione χ^s, si dovranno cancellare tutti i termini, ovvero

$$(\chi^s)^m + a_1\chi^{u_1}(\chi^s)^{m-1} + \cdots + a_n\chi^{u_n} = 0$$

deve essere un'equazione omogenea nelle χ con gli $u_i \in S$ e gli $a_i \in \mathbb{C}$. Per omogeneità troviamo $ms = u_1 + (m-1)s$, cioè $u_1 = s$, da cui $s \in S$ e $\chi^s \in \mathbb{C}[S]$. □

Combinando l'esempio precedente con la proposizione 1.6.1, deduciamo che ogni varietà torica affine prodotta da un cono (fortemente convesso) è normale.

Nel secondo capitolo affronteremo anche la normalità proiettiva che è una proprietà più "forte" della normalità. La normalità proiettiva dipende infatti dalla normalità del cono affine di una varietà proiettiva.

Osservazione 1.6.1. La normalità di una varietà algebrica V implica anche la *liscezza/regolarità in codimensione 1*, condizione necessaria per definire i divisori di Weil che utilizzeremo nei capitoli successivi.

Discutiamo ora della proprietà di regolarità delle varietà toriche affini, che anche in questo caso possiamo caratterizzare efficacemente in termini dei coni poliedrali ad esse associati. Introduciamo dunque la classe dei coni lisci.

Definizione 1.6.2. Un cono $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ si dice **liscio** se i suoi generatori minimali formano parte di una base su $\mathbb{Z}$ del reticolo N.

Nel caso in cui la dimensione del cono liscio σ coincida con quella di $N_{\mathbb{R}}$ tali generatori formeranno proprio una base di N e inoltre il cono duale sarà ancora liscio.
Il cono in figura 1.1 è un esempio di cono liscio, infatti i suoi generatori $e_1, e_1 + e_2$ sono una $\mathbb{Z}-$base di N.

Esempio 1.6.2. Sia $0 \leq r \leq n$ e $\sigma = \mathrm{Cono}(e_1, ...e_r) \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora

$$U_\sigma = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M]) = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x_1, ..., x_r, x_{r+1}^{\pm 1}, ..., x_n^{\pm 1}]) \cong \mathbb{C}^r \times (\mathbb{C}^*)^{n-r}.$$

Allora dato un cono liscio $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^n$, abbiamo che la varietà affine $U_\sigma \cong \mathbb{C}^r \times (\mathbb{C}^*)^{n-r}$ è liscia.

Ricordiamo che possiamo caratterizzare la *liscezza* di una varietà affine V nel seguente modo: V è liscia in $p \in V$ esattamente quando $\dim_{\mathbb{C}} m_p/m_p^2 = \dim V$, dove m_p/m_p^2 indica lo spazio cotangente di Zariski dato dalle funzioni regolari in p che si annullano in tale punto con ordine 1.

Riprendiamo inoltre dalle sezioni precedenti la bigezione tra i punti di una varietà torica affine $U_\sigma = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[S_\sigma])$ e i morfismi di semigruppi $\gamma : S_\sigma \to \mathbb{C}$, dove
$S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$. Per ogni cono σ troviamo un punto in U_σ dato dall'omomorfismo di semigruppi

$$m \in S_\sigma \mapsto \begin{cases} 1 & m \in S_\sigma \cap \sigma^\perp = \sigma^\perp \cap M \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Sarà chiamato il **punto distinto di** σ e verrà indicato con γ_σ. Si dimostra che tale punto è l'unico fissato dall'azione del toro T_N se e solo se il cono σ è di dimensione massima in $N_{\mathbb{R}}$.

Proposizione 1.6.2. *Sia $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^n$ un cono di dimensione massima. Allora U_σ è liscia se e solo se il cono σ è liscio.*

Dimostrazione. L'implicazione verso sinistra segue dall'esempio 1.6.2, quindi ci resta da provare quella inversa.

Viceversa, consideriamo il punto distinto $\gamma_\sigma \in U_\sigma$. Poichè σ genera tutto $N_{\mathbb{R}}$, $\sigma^\perp = \{0\}$. L'ideale massimale $m_{\gamma_\sigma} := m$ di $\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M]$ corrispondente al punto distinto è generato da tutti i caratteri χ^u per degli $u \in S_\sigma$ non nulli. Il suo quadrato m^2 sarà invece generato da quei χ^u con u che è somma di due elementi in $S_\sigma \setminus \{0\}$, dunque m/m^2 sono le immagini dei caratteri associati a degli u che non sono somma di due vettori in $S_\sigma \setminus \{0\}$. Assumiamo che U_σ sia liscia, in particolare in γ_σ, allora $\dim_{\mathbb{C}} m/m^2 = \dim \mathrm{U}_\sigma = \dim \mathrm{T_N} = \mathrm{n}$. Quindi $\sigma^\vee$ non potrà avere più di n raggi che lo generano e i generatori minimali di $\sigma^\vee$ tra questi devono generare anche S_σ. Ma S_σ genera M come gruppo, pertanto i generatori minimali di S_σ devono formare una base per M. Per dualità i generatori minimali di σ dovranno formare una base di N, da cui la tesi. $\square$

Capitolo 2

Varietà toriche proiettive e politopi convessi

Fino ad ora abbiamo incontrato solo varietà affini ma chiaramente queste non sono le uniche varietà ad essere toriche. In questo capitolo vedremo ad esempio come possiamo costruire varietà toriche che vivono nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^n$, a partire da punti nel reticolo e politopi convessi. Inoltre introdurremo i *ventagli di coni* e vedremo come queste strutture combinatoriche si relazionano ai politopi. I ventagli di coni permettono inoltre di costruire direttamente varietà toriche astratte "incollando" i pezzi torici affini provenienti da ciascun cono.

Innanzitutto osserviamo che lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^s$ è torico con toro

$$T_{\mathbb{P}^s} = \mathbb{P}^n \backslash V(x_0 \cdots x_s) \cong (\mathbb{C}^*)^s.$$

Abbiamo una successione esatta corta di tori algebrici

$$1 \to \mathbb{C}^* \to (\mathbb{C}^*)^{s+1} \to T_{\mathbb{P}^s} \to 1 \tag{2.1}$$

dalla quale segue che il reticolo dei caratteri di $T_{\mathbb{P}^n}$ è

$$M_s := \{(a_0, ..., a_s) \in \mathbb{Z}^{s+1} \Big| \sum_{i=0}^{s} a_i = 0\} \subseteq \mathbb{Z}^{s+1}. \tag{2.2}$$

Il reticolo dei sottogruppi ad un parametro sarà invece $N_s := \mathbb{Z}^{s+1}/\mathbb{Z}(1, ..., 1)$.

2.1 Punti del reticolo

Consideriamo nuovamente un insieme finito di punti $F = \{m_1, ..., m_s\}$ nel reticolo M con duale N. Ricordiamo che la mappa dei caratteri Φ_F era definita tramite $t \mapsto (\chi^{m_1}(t), ..., \chi^{m_s}(t))$. Abbiamo visto che $\Phi_F(T_N) \subseteq (\mathbb{C}^*)^s$, pertanto possiamo comporre Φ_F con la mappa $\pi : (\mathbb{C}^*)^s \to T_{\mathbb{P}^{s-1}} \subset \mathbb{P}^{s-1}$ data dalla successione esatta corta (2.1).

Definizione 2.1.1. Definiamo X_F la **varietà torica proiettiva** ottenuta dalla chiusura di Zariski di $\pi \circ \Phi_F(T_N) \subseteq \mathbb{P}^{s-1}$.

Analogamente a quanto visto nel capitolo 1, si dimostra che X_F è in effetti una varietà torica. Inoltre più avanti proveremo che la sua dimensione è pari a quella del più piccolo sottospazio affine di $M_{\mathbb{R}}$ contenente F.

Definiamo il *cono affine di una varietà proiettiva* $X \subseteq \mathbb{P}^s$ come

$$\widehat{X} := \{0\} \cup \pi^{-1}(X) \subseteq \mathbb{C}^{s+1}$$

dove π è la proiezione al quoziente naturale.
Inoltre ricordiamo dal capitolo precedente la successione esatta a sinistra di reticoli

$$0 \to L \to \mathbb{Z}^s \to M.$$

La seguente proposizione ci fornisce diverse condizioni equivalenti che mettono in relazione la costruzione torica proiettiva appena vista con quella affine.

Proposizione 2.1.1. *Siano Y_F, X_F come sopra, con $F = \{m_1, ..., m_{s+1}\}$ e*

$$I_L = \langle x^\alpha - x^\beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{N}^s,\ \alpha - \beta \in L \rangle,$$

allora sono equivalenti i seguenti fatti:

(1) $Y_F \subseteq \mathbb{C}^{s+1}$ è il cono affine di X_F;

(2) $I_L = I(X_F)$;

(3) I_L è un ideale omogeneo;

(4) esistono un $u \in N$ ed un $k > 0$ naturale tali che $\langle m_i, u \rangle = k$ per ogni $i = 1, ..., s$.

Dimostrazione. L' equivalenza (1)⇔(2) segue dal fatto che $I(X_F) = I(\widehat{X}_F)$ e $I(Y_F) = I_L$. Inoltre il fatto (2) implica (3), perchè l'ideale di una varietà proiettiva è omogeneo.

Per l'implicazione (3)⇒(4), osserviamo che preso un elemento $x^\alpha - x^\beta \in I_L$ con $\alpha - \beta \in L$, questo deve essere omogeneo. Infatti se non lo fosse, x^α e $x^\beta \in I_L = I(Y_F)$, cioè si annullano su tutti i punti di Y_F ma $(1, ..., 1) \in Y_F$. Se α e β hanno lo stesso grado, segue che $(\alpha - \beta) \cdot (1, ..., 1) = 0$ per ogni $\alpha - \beta \in L$.

Dalla successione

$$0 \to L \to \mathbb{Z}^{s+1} \to M$$

si ottiene, tensorizzando con $\mathbb{Q}$ e poi dualizzando, la successione esatta a destra:

$$N_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}^{s+1} \to \mathrm{Hom}(L_{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}) \to 0.$$

Dall'esattezza in $\mathbb{Q}^{s+1}$ segue che $(1, ..., 1) \in \mathbb{Q}^{s+1}$ deve essere l'immagine di un elemento $u' \in N_{\mathbb{Q}}$. Quindi $\langle m_i, u' \rangle = 1$ per ogni $i = 1, ..., s+1$. Dunque eliminando i denominatori si ottiene la relazione cercata con $u \in N$ e un $k \in \mathbb{N}$.

Per quanto riguarda (4) $\Rightarrow$ (1), sappiamo già che $Y_F \subseteq \widehat{X}_F$ e $\widehat{X}_F$ è irriducibile, quindi resta da provare che il toro $\widehat{X}_F \cap (\mathbb{C}^*)^{s+1} \subseteq Y_F$. Sia $p \in \widehat{X}_F \cap (\mathbb{C}^*)^{s+1}$, allora $p = \mu \cdot (\chi^{m_1}(t), ..., \chi^{m_{s+1}}(t))$ per un $\mu \in \mathbb{C}^*$ e un $t \in T_N$. Consideriamo il sottogruppo a un parametro $\tau \mapsto \lambda^u(\tau)$ con u fornito dal punto (4). Allora l'elemento $\lambda^u(\tau)t \in T_N$ viene spedito in un punto $q \in Y_F$ attraverso la mappa

$$q = (\chi^{m_1}(\lambda^u(\tau)t), ..., \chi^{m_{s+1}}(\lambda^u(\tau)t) = (\tau^{\langle m_1,u\rangle}\chi^{m_1}(t), ..., \tau^{\langle m_{s+1},u\rangle}\chi^{m_{s+1}}(t)).$$

Sfruttando l'ipotesi del punto (4), c'è un $k > 0$ naturale per cui $\langle m_i, u\rangle = k$ per ogni $i = 1, ..., s+1$. Questo ci permette di riscrivere q come

$$q = \tau^k(\chi^{m_1}(t), ..., \chi^{m_{s+1}}(t)).$$

Allora possiamo scegliere un $\tau \in \mathbb{C}^*$ per cui $p = q$. $\square$

Definiamo ora il reticolo $\mathbb{Z}'F := \{\sum_{i=1}^s a_i m_i | a_i \in \mathbb{Z}, \sum_{i=1}^s a_i = 0\}$, in analogia con il reticolo dei caratteri (2.2) di $T_{\mathbb{P}^s}$.

Proposizione 2.1.2. *Sia X_F la varietà torica proiettiva definita in precedenza, allora*

(1) $\mathbb{Z}'F$ è il reticolo dei caratteri del toro di X_F

(2) la dimensione di X_F è pari a quella del più piccolo sottospazio affine di $M_\mathbb{R}$ che contiene F. Inoltre

$$\dim X_F = \begin{cases} \operatorname{rank} \mathbb{Z}F - 1 & \textit{se vale una delle condizioni della proposizione 2.1.1} \\ \operatorname{rank} \mathbb{Z}F & \textit{altrimenti.} \end{cases} \tag{2.3}$$

Dimostrazione. Per la parte (1), abbiamo il diagramma commutativo di tori seguente

$$\begin{tikzcd} T_N \arrow[r] \arrow[dr, two heads] & T_{\mathbb{P}^{s-1}} \\ & T_{X_F} \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

da cui otteniamo il diagramma di caratteri

$$\begin{tikzcd} M & M_{s-1} \arrow[l] \arrow[d, two heads] \\ & M' \arrow[ul, hook] \end{tikzcd}$$

dove M' è il reticolo di T_{X_F}. Osserviamo che la mappa $M_{s-1} \to M$ è indotta dalla mappa $\mathbb{Z}^s \to M$ che manda gli elementi della base canonica e_i negli m_i. Dunque l'immagine di tale mappa è $\mathbb{Z}'F$ che coincide con M' per commutatività del diagramma.

Per quanto riguarda la prima asserzione della parte (2), sappiamo già che

$$\dim X_F = \dim T_{X_F} = \operatorname{rank} \mathbb{Z}'F,$$

dove la seconda uguaglianza è data dalla parte (1). La tesi segue perchè rank $\mathbb{Z}'F$ è proprio uguale alla dimensione del più piccolo sottospazio affine di $M_{\mathbb{R}}$ contenente F.

Possiamo dunque riscrivere l'uguaglianza (2.3) come

$$\operatorname{rank}\mathbb{Z}'F = \begin{cases} \operatorname{rank}\mathbb{Z}F - 1 & \text{se vale una delle condizioni della proposizione 2.1.1} \\ \operatorname{rank}\mathbb{Z}F & \textit{altrimenti.} \end{cases} \tag{2.4}$$

Consideriamo prima il caso in cui Y_F coincide con il cono affine $\widehat{X}_F$; dalla proposizione 2.1.1 segue che esistono un $k > 0$ naturale ed $u \in N$ per il quale $\langle m_i, u\rangle = k$ per tutti gli $i = 1, ..., s$. Allora abbiamo una successione esatta corta di moduli liberi che spezza:

$$0 \to \mathbb{Z}'F \to \mathbb{Z}F \to k\mathbb{Z} \to 0,$$

dove la mappa $\mathbb{Z}F \to k\mathbb{Z}$ è data dal prodotto $\langle\ \ , u\rangle$. Da tale spezzamento otteniamo che

$$\text{rank } \mathbb{Z}F = \text{rank } \mathbb{Z}'F + \text{rank } k\mathbb{Z} = \text{rank } \mathbb{Z}'F + 1,$$

da cui segue la tesi.

Rimane ancora il caso in cui $Y_F \neq \widehat{X}_F$; sempre per la proposizione 2.1.1, l'ideale I_L non sarà omogeneo, cioè ci sarà almeno un generatore $x^\alpha - x^\beta$ che non sarà omogeneo. Dunque

$$(\alpha - \beta) \cdot (1, ...1) \neq 0.$$

Ma $\alpha - \beta \in L$, il che implica che nella successione esatta corta

$$0 \to M_{s-1} \to \mathbb{Z}^s \to \mathbb{Z} \to 0$$

l'immagine di $L \subseteq \mathbb{Z}^s$ è $\ell\mathbb{Z}$ per un certo $\ell > 0$. Quindi otteniamo il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & L \cap M_{s-1} \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[r] \arrow[d] & \ell\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}^s \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}'F \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}F \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

da cui segue per l'esattezza in tutte le righe e le colonne che rank $\mathbb{Z}'F$ = rank $\mathbb{Z}F$. $\square$

Concludiamo la sezione con un esempio di varietà torica proiettiva costruita con punti del reticolo. In questo caso, sfruttando i risultati delle proposizioni precedenti, si scopre che il cono affine della varietà proiettiva risulterà non coincidere con la varietà torica affine data dagli stessi punti.

Esempio 2.1.1. Sia $F = \{e_1, e_2, e_1 + 2e_2, 2e_1 + e_2\} \subset \mathbb{Z}^2$. Chiaramente il reticolo generato $\mathbb{Z}F = \mathbb{Z}^2$ ma si verifica che

$$\mathbb{Z}'F = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a + b \equiv 0 \, (mod\ 2)\}.$$

Si osservi anche che il reticolo $\mathbb{Z}'F$ ha indice 2 in $\mathbb{Z}$, ovvero $\#\mathbb{Z}F/\mathbb{Z}'F = 2$. Se per assurdo valesse che $Y_F = \widehat{X}_F$, si avrebbe la catena di uguaglianze $2 = \text{rank } \mathbb{Z}F = \dim Y_F = \dim \widehat{X}_F = \dim X_F + 1 = \text{rank } \mathbb{Z}'F + 1 = 3$. Pertanto abbiamo che $Y_F \neq \widehat{X}_F$ e la corrispondente mappa di tori

$$T_{Y_F} \to T_{X_F}$$

è una corrispondenza 2 a 1.

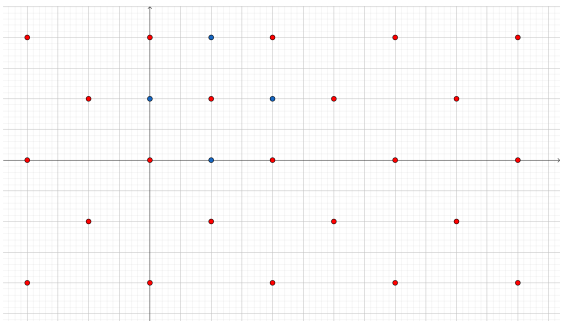

Figura 2.1: In blu i punti di F, in rosso quelli di $\mathbb{Z}'F$

Osservazione 2.1.1. Consideriamo ora una componente affine di X_F, del tipo $X_F \cap U_i$ data dai punti con l'i-esima coordinata non nulla. Abbiamo le inclusioni di aperti affini seguenti:

$$X_F \cap U_i \supseteq X_F \cap U_i \cap U_j \subseteq X_F \cap U_j$$

per $i \neq j$.

L'aperto $U_i \cap U_j$ è dato dai punti con la coordinata $x_j/x_i \neq 0$. In termini di caratteri questo significa che $\chi^{m_j - m_i} \neq 0$ dove m_i ed m_j sono i punti di F corrispondenti alle coordinate i-esima e j-esima. Dunque possiamo scrivere l'intersezione come

$$X_F \cap U_i \cap U_j = (X_F \cap U_i)_{\chi^{m_j - m_i}} = (X_F \cap U_j)_{\chi^{m_i - m_j}}.$$

2.2 Varietà proiettive e politopi

Abbiamo già introdotto i politopi convessi; ora li useremo per costruire varietà toriche proiettive individuando i punti del reticolo in essi presenti. Possiamo rappresentare sinteticamente il processo per ottenere da un politopo *intero* una varietà proiettiva così:

$$P \mapsto P \cap M \mapsto X_{P \cap M}.$$

Un'altra costruzione possibile sfrutta i ventagli di coni Σ_P associati ad un politopo:

$$P \mapsto \Sigma_P \mapsto X_{\Sigma_P}.$$

Quest'ultima risulterà particolarmente in vista del teorema di Bernstein. In questa e nelle prossime sezioni di questo capitolo alcune delle dimostrazioni che riguardano puramente la geometria dei politopi convessi verranno omesse; ad ogni modo sono reperibili in numerosi testi come ad esempio in [**M**].

Ricordiamo che gli **iperpiani affini** e i **semispazi chiusi affini** si definiscono rispettivamente come $H_{u,b} := \{m \in M_{\mathbb{R}} | \langle m, u \rangle = b\}$ e $H^+_{u,b} := \{m \in M_{\mathbb{R}} | \langle m, u \rangle \geq b\}$ per un $u \in N_{\mathbb{R}}$ e un $b \in \mathbb{R}$. Una **faccia di un politopo** P è un sottoinsieme $Q \subseteq P$ tale che

$$Q = P \cap H_{u,b} \text{ e } P \subseteq H^+_{u,b}$$

per qualche $u \in N_{\mathbb{R}}$ e $b \in \mathbb{R}$. La faccia di un politopo è ancora un politopo e indicheremo questa relazione con $Q \preceq P$ o $Q \prec P$ nel caso in cui Q sia una faccia *propria*. Casi particolari sono le *faccette*, facce proprie di dimensione maggiore ed i *vertici* che sono le facce di dimensione 0.

La proposizione seguente contiene alcuni fatti utili riguardo le facce dei politopi:

Proposizione 2.2.1. *Sia* $P = \mathrm{Conv}(S) \subseteq M_{\mathbb{R}}$. *Allora*

- $P = \mathrm{Conv}(v_1, ..., v_n)$ *dove* $v_1, ..., v_n$ *sono i suoi vertici*
- *ogni vertice di* P *appartiene ad* S
- *se* $Q \preceq P$, *le facce di* Q *sono esattamente le facce di* P
- *ogni faccia propria* $Q \prec P$ *è intersezione delle faccette che la contengono.*

Analogamente ai coni poliedrali, possiamo esprimere un politopo come intersezione di semispazi chiusi **affini**:

$$P = \bigcap_{i=1}^{s} H^+_{u_i, b_i}$$

per alcuni $u_i \in N_{\mathbb{R}}$ e $b_i \in \mathbb{R}$. Vale un parziale viceversa di questo fatto ovvero se una tale intersezione di semispazi è limitata, allora essa costituisce un politopo.

Nel caso di un politopo $P \subseteq M_{\mathbb{R}}$ con dim $P =$ dim $M_{\mathbb{R}}$, abbiamo una scrittura unica come intersezione di semispazi chiusi basata sulle faccette:

$$P = \bigcap_{F faccette} H_F^+$$

dove $H_F^+ := \{m \in M_{\mathbb{R}} | \langle m.u_F \rangle \geq -a_F\}$. La coppia $(u_F, a_F) \in N_{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}$ è chiaramente unica a meno di moltiplicazione per uno scalare. Il vettore u_F è detto il **normale alla faccetta** F che punta verso l'interno del politopo.
Questa descrizione ci permetterà di scrivere in maniera più esplicita il duale di un politopo, che definiamo di seguito.

Definizione 2.2.1. Si consideri $P \subseteq M_{\mathbb{R}}$ un politopo di dimensione massima con 0 fra i suoi punti interni. Allora definiamo il suo **duale** o **polare** come

$$P^\circ := \{u \in N_{\mathbb{R}} | \langle m, u \rangle \geq -1 \ \forall m \in P\} \subseteq N_{\mathbb{R}}.$$

Se $P = \{m \in M_{\mathbb{R}} | \langle m, u_F \rangle \geq -a_F, \ F faccette\}$, allora il suo polare P° è l'inviluppo convesso degli elementi u_F/a_F. Inoltre vale che $(P^\circ)^\circ = P$.
In generale il duale di un politopo *intero* non è necessariamente intero.

Esempio 2.2.1. Da questo caso è evidente come il ruolo dei vertici e dei vettori normali alle faccette viene scambiato passando da un politopo al suo polare e viceversa.

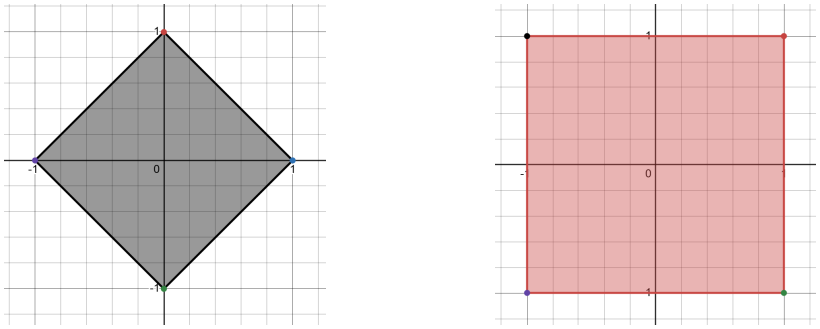

Figura 2.2: A sinistra un quadrato ruotato di 45° e a destra il suo poligono polare, sempre un quadrato ma con i lati paralleli agli assi

Oltre al duale è necessario introdurre per i nostri scopi altre operazioni con i politopi, ad esempio i multipli e le somme.

Siano $P = Conv(S)$ e $r > 0$; il suo multiplo $rP = r\text{Conv}(S) = \text{Conv}(rS)$ è ancora un politopo convesso.

Consideriamo la somma di Minkowski definita tra insiemi

$$A_1 + A_2 := \{a_1 + a_2 | a_1 \in A_1, a_2 \in A_2\}.$$

Siano $P_1 = \mathrm{Conv}(S_1)$ e $P_2 = \mathrm{Conv}(S_2)$. Osserviamo che

$$P_1 + P_2 = \mathrm{Conv}(S_1) + \mathrm{Conv}(S_2) = \mathrm{Conv}(S_1 + S_2),$$

quindi sommare due politopi restituisce sempre un politopo.
Inoltre vale la proprietà distributiva fra multipli e somme di politopi:

$$rP + sP = (r + s)P$$

per $r, s \geq 0$.

Come anticipato, possiamo associare ad un politopo *intero* una varietà torica in diversi modi. Nel primo di questi che affronteremo si riprende la costruzione di una varietà torica *proiettiva* per punti di un reticolo.

2.2.1 Politopi normali

Consideriamo un politopo *intero* $P \subset M_{\mathbb{R}}$; l'intersezione $P \cap M$ ci fornisce un numero *finito* di punti del reticolo (grazie alla compattezza di P), tra i quali saranno compresi sicuramente i vertici. Possiamo quindi generare la varietà proiettiva associata a tali punti, proprio come nella sezione precedente. In generale però può accadere che i punti nel reticolo così ottenuti siano "troppo pochi" per rispecchiare le proprietà del politopo nella varietà corrispondente. Per questo motivo siamo interessati a trattare solo quei politopi che abbiano un numero sufficiente di punti nel reticolo.

Ci sono due diverse definizioni da introdurre:

Definizione 2.2.2. Un politopo intero $P \subseteq M_{\mathbb{R}}$ si dice **normale** se

$$(rP) \cap M + (sP) \cap M = (r + s)P \cap M$$

per ogni $r, s \in \mathbb{N}$.

Poichè l'inclusione da sinistra a destra è sempre verificata, la normalità significa che i punti di $(r + s)P$ nel reticolo M provengono tutti dai politopi rP e sP.

Inoltre si dimostra che questa proprietà si può riscrivere equivalentemente come

$$\underbrace{P \cap M + \cdots + P \cap M}_{\text{r volte}} = (rP) \cap M$$

per ogni $r \geq 1$ intero.

Il teorema seguente ci fornisce un criterio per ottenere un numero illimitato di politopi normali.

Teorema 2.2.1. *Sia $P \subseteq M_{\mathbb{R}}$ un politopo intero di dimensione massima, pari a $n \geq 2$. Allora rP è normale per ogni $r \geq n - 1$.*

Osservazione 2.2.1. Un corollario immediato del teorema è il fatto che ogni poligono intero $P \subseteq \mathbb{R}^2$ sia normale. Infatti se $n = 2$, rP è normale per ogni $r \geq 1$, quindi in particolare lo è P.

Esempio 2.2.2. Un caso meno banale di politopo normale è il cubo $Q \subset \mathbb{R}^3$ con vertici $(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (1,1,0), (0,0,1),\ (1,0,1), (0,1,1), (1,1,1) \in \mathbb{Z}^3$.

È chiaro che

$$\underbrace{Q \cap \mathbb{Z}^3 + \cdots + Q \cap \mathbb{Z}^3}_{\text{r volte}} \subseteq (rQ) \cap \mathbb{Z}^3.$$

D'altra parte, se $m \in (kQ) \cap \mathbb{Z}^3 \subseteq (rQ) \cap \mathbb{Z}^3$ per un $k \leq r$ intero, possiamo scriverlo come

$$m = m_1 + \cdots + m_k + \underbrace{0 + \cdots + 0}_{\text{r-k volte}},$$

dove ogni $m_i \in Q \cap \mathbb{Z}^3$ per $i = 1, ..., k$.

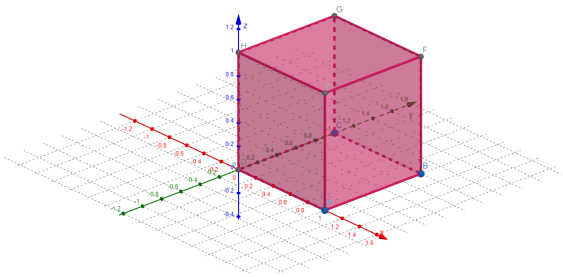

Figura 2.3: Cubo Q con vertici interi

Dall'osservazione precedente segue che gli esempi di politopi **non normali** sono da ricercare necessariamente in dimensione 3 o superiore. Per esempio consideriamo l'inviluppo convesso

$$P = \mathrm{Conv}((0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,2)) \subseteq \mathbb{R}^3.$$

I vertici di questo politopo sono anche gli unici punti a coordinate intere in P.

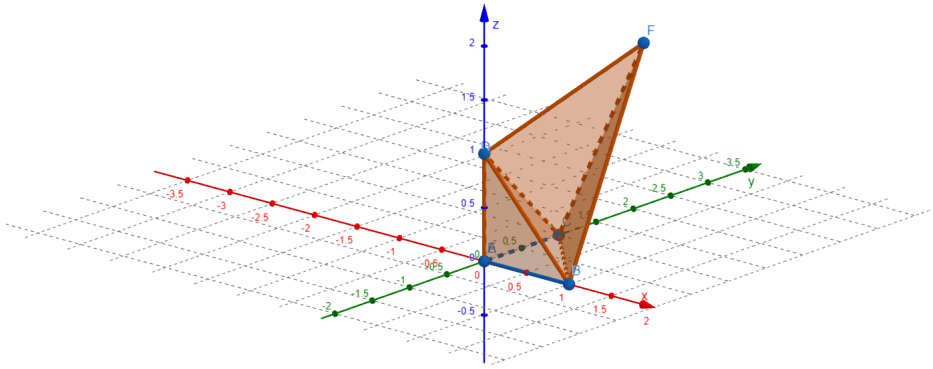

Figura 2.4: Poliedro P formato da due tetraedri incollati per una faccia

In questo caso per provare la non-normalità di P basta osservare che il punto $(1,1,1)$ sta in $(2P) \cap \mathbb{Z}^3$ ma non si può scrivere come somma di due punti interi nel poliedro originario.

2.2.2 Politopi molto ampi

Introduciamo ora una seconda caratterizzazione per i politopi con un numero "sufficientemente grande" di punti nel reticolo M.

Definizione 2.2.3. Un politopo $P \subseteq M_{\mathbb{R}}$ si dice **molto ampio** se per ogni vertice $v \in P$, il semigruppo $S_{P,v} := \mathbb{N}((P \cap M) - v)$ è saturato in M. Ricordiamo che $(P \cap M) - v$ si definisce come l'insieme $\{m - v \,|\, m \in P \cap M\}$.

Essere *molto ampio* è esattamente la proprietà che richiederemo più avanti per poter associare ad un politopo una varietà torica.

Le due nozioni di politopi molto ampi e normali sono strettamente collegate, come si evince dalla proposizione che segue:

Proposizione 2.2.2. *Ogni politopo intero normale P è molto ampio.*

Dimostrazione. Fissiamo un vertice v di P. Per la saturazione del semigruppo $S_{P,v}$, dobbiamo mostrare che se $km' \in S_{P,v}$ per un certo $k \geq 1$, allora $m' \in S_{P,v}$.
Riscriviamolo come

$$km' = \sum_{m \in P \cap M} a_m (m - v)$$

per degli $a_m \in \mathbb{N}$. Poi prendiamo un $r \in \mathbb{N}$ tale che $kr \geq \sum_{m \in P \cap M} a_m$. Allora

$$km' + krv = \sum_{m \in P \cap M} a_m m + (kr - \sum_{m \in P \cap M} a_m) v \in krP.$$

Se dividiamo per k otteniamo che $m' + rv \in rP$. A questo punto sfruttiamo la normalità di P che implica

$$m' + rv = \sum_{i=1}^{r} m_i$$

dove $m_i \in P \cap M$ per ogni i. Segue che $m' = \sum_{i=1}^{r}(m_i - v) \in S_{P,v}$. □

Un corollario diretto di questo fatto, unito al teorema 2.2.1, asserisce che, dato un politopo $P \subseteq M_{\mathbb{R}}$ di dimensione massima pari a n, allora rP è molto ampio per ogni $r \geq n - 1$.
Il viceversa della proposizione 2.2.2 invece non vale, dunque le due proprietà non sono equivalenti.

Finalmente possiamo definire la **varietà torica proiettiva di un politopo** nel modo seguente: sia $P \subseteq M_{\mathbb{R}}$ un politopo intero, si definisce

$$X_P := X_{(rP)\cap M}$$

per un r intero positivo per cui rP è molto ampio.

Osservazione 2.2.2. L'esistenza di un tale r è garantita da quanto osservato in precedenza. Tuttavia questa costruzione sembra dipendere dall'immersione scelta:
Se ad esempio prendiamo r e s due interi positivi distinti per cui i politopi rP e sP sono molto ampi, le varietà corrispondenti vivranno in spazi ambiente differenti. Ciò nonostante, le relazioni date dai punti "extra" saranno ridondanti, quindi otterremo varietà isomorfe e la definizione risulta essere ben posta.

In ogni caso, quando necessario, specificheremo l'immersione a cui ci stiamo riferendo onde evitare ambiguità.

Consideriamo ora un politopo molto ampio $P \subseteq M_{\mathbb{R}}$ di dimensione massima e la sua varietà associata, X_P. Ogni suo pezzo affine $X_P \cap U_i$, dato dai punti con l'i-esima coordinata $x_i \neq 0$, è isomorfo alla varietà torica affine $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[S_i])$ dove $S_i := \mathbb{N}(P \cap M - v_i)$, per un vertice v_i di P. Questo ci permette di scrivere X_P nella forma

$$X_P = \bigcup_{v_i \text{ vertici di } P} X_P \cap U_i.$$

La dimostrazione di questi fatti si può trovare ad esempio in [CLS]. Allora il seguente teorema afferma che ciascuno di questi aperti proviene da un particolare cono.

Teorema 2.2.2. *Sia $P \subseteq M_{\mathbb{R}}$ un politopo molto ampio di dimensione massima, pari a n, e X_P la sua varietà associata. Allora*

- *per ogni vertice v_i di $P \cap M$, l'i-esima componente affine di X_P è la varietà torica affine $X_P \cap U_i = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\sigma_i^\vee \cap M]) = U_{\sigma_i}$ dove σ_i è il cono fortemente convesso duale di $\mathrm{Cono}(P \cap M - v_i)$ e ha dimensione $\dim \sigma_i = n$*

- *il toro di X_P ha reticolo dei caratteri M e dunque è il toro T_N.*

Dimostrazione. Sia $C_i := \mathrm{Cono}(P \cap M - v_i)$, allora $C_i \cap M = S_i$ quindi $U_{\sigma_i} = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[C_i \cap M])$ per le considerazioni fatte prima del teorema. Inoltre v_i è un vertice di P, e in particolare una faccia, quindi c'è un iperpiano affine $H_{u,a}$ tale che $P \subseteq H^+_{u,a}$ e $\{v_i\} = P \cap H_{u,a}$. Allora $H_{u,0}$ è un'iperpiano di supporto per $0 \in C_i$, dunque C_i è un cono fortemente convesso. Segue che

$$\dim \sigma_i = \dim C_i = \dim H^+_{u,0} = \dim H^+_{u,a} = \dim P = n.$$

Vale che $S_i \subseteq C_i \cap M = \sigma_i^\vee \cap M$. Per l'inclusione opposta prendiamo $s \in C_i \cap M$, quindi troviamo un $m \in \mathbb{N}$ tale che $ms \in S_i$. Ma per ipotesi P è molto ampio, quindi il semigruppo S_i è saturato. Segue che $s \in S_i$, quindi $S_i = \sigma_i^\vee \cap M$.

Per il secondo punto, sappiamo già che T_N è il toro di U_{σ_i}. Allora visto che si ha $T_N \subseteq U_{\sigma_i} = X_P \cap U_i \subseteq X_P$, concludiamo che T_N è anche il toro di X_P. □

Per comprendere come si comporta la varietà X_P nell'intersezione di due pezzi affini, $X_P \cap U_i \cap U_j$, dovremo introdurre una nuova struttura combinatorica legata ad un politopo: il ventaglio normale.

2.3 Politopi e ventagli

Definiamo innanzitutto per ogni vertice v del politopo $P \subseteq M_\mathbb{R}$ il cono

$$\sigma_v := \mathrm{Cono}(u_F \,|\, v \preceq F \text{ faccette di } P) \subseteq N_\mathbb{R},$$

generato dai vettori *normali* alle faccette che contengono il vertice v.
Riprendendo le notazioni usate nel teorema 2.2.2, il duale di σ_v è il cono

$$C_v = \mathrm{Cono}(P \cap M - v).$$

Analogamente se $Q \preceq P$ è una faccia qualsiasi definiamo

$$\sigma_Q := \mathrm{Cono}(u_F \,|\, Q \preceq F \text{ faccette di } P) \subseteq N_\mathbb{R}.$$

Definizione 2.3.1. Sia P un politopo intero. Chiamiamo la collezione

$$\Sigma_P := \{\sigma_Q \,|\, Q \preceq P\}$$

il **ventaglio normale** del politopo P.

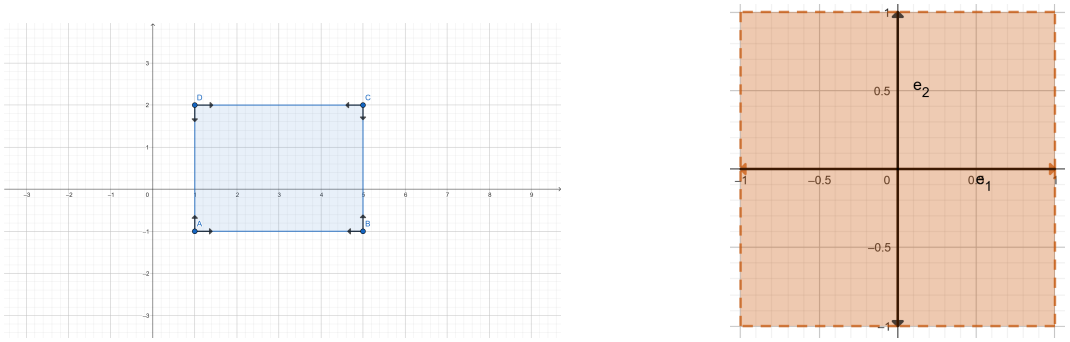

Figura 2.5: A sinistra un rettangolo con i suoi normali alle faccette; a destra il suo ventaglio normale

Esempio 2.3.1. Consideriamo il rettangolo in figura 2.5 ed il suo ventaglio associato. Osserviamo che in realtà ogni rettangolo intero in $\mathbb{R}^2$ con i lati paralleli agli assi fornisce come generatori dei raggi $\pm e_1, \pm e_2$ e dunque individua lo stesso ventaglio rappresentato nella figura 2.3.1.

Il teorema 2.3.1 giustifica il fatto che Σ_P abbia una buona struttura combinatorica. Nel capitolo 3 rivedremo queste proprietà nella definizione più generale di un ventaglio.

Teorema 2.3.1. *Sia $P \subseteq M_{\mathbb{R}}$ un politopo intero di dimensione massima. Allora, posto $\Sigma_P := \{\sigma_Q \,|\, Q \preceq P\}$,*

(1) ogni faccia di $\sigma_Q \in \Sigma_P$ è ancora un cono in Σ_P;

(2) l'intersezione di due coni σ_{Q_1},$\sigma_{Q_2} \in \Sigma_P$, $\sigma_{Q_1} \cap \sigma_{Q_2}$, è ancora un cono in Σ_P.

Avremo bisogno di alcuni risultati sulle facce di politopi e i relativi coni per dimostrare il teorema 2.3.1.

Lemma 2.3.1. *Sia $Q \preceq P$ una faccia del politopo e $H_{u,b}$ un iperpiano che supporta P. Allora*

$$u \in \sigma_Q \Leftrightarrow Q \subseteq H_{u,b} \cap P.$$

Corollario 2.3.1. *Se $Q \preceq P$ e $F \prec P$ sono rispettivamente una faccia e una faccetta di P, allora*

$$u_F \in \sigma_Q \Leftrightarrow Q \subseteq F.$$

Dimostrazione. Per la freccia sinistra dell'implicazione, usiamo direttamente la definizione di σ_Q. Se $Q \subseteq F$, u_F è tra i raggi che generano σ_Q e quindi appartiene a σ_Q.

Viceversa se $u_F \in \sigma_Q$, per il lemma 2.3.1 vale che $Q \subseteq H_F \cap P = F$, da cui segue la tesi. □

La seguente proposizione essenzialmente dimostra il teorema 2.3.1.

Proposizione 2.3.1. *Siano Q e Q' due facce di un politopo intero $P \subseteq M_{\mathbb{R}}$ di dimensione massima. Alloro valgono i seguenti fatti:*

(1) $Q \subseteq Q' \Leftrightarrow \sigma_{Q'} \subseteq \sigma_Q$

(2) se $Q \subseteq Q'$ allora $\sigma_{Q'}$ è una faccia di σ_Q e tutte le facce di σ_Q sono di questa forma

(3) l'intersezione $\sigma_Q \cap \sigma_{Q'} = \sigma_{Q''}$ dove Q'' è la più piccola faccia che contiene sia Q che Q'.

Dimostrazione. Per dimostrare la parte (1), se $Q \subseteq Q'$, allora ogni faccetta F che contiene Q' in particolare conterrà anche Q, da cui $\sigma_{Q'} \subseteq \sigma_Q$. Viceversa, $\sigma_{Q'} \subseteq \sigma_Q$ è equivalente all'implicazione $[Q' \subseteq F] \Rightarrow [Q \subseteq F]$ per il corollario 2.3.1. Ma per la proposizione 2.2.1, ogni faccia è data dall'intersezione delle faccette che la contengono, da cui otteniamo che $Q \subseteq Q'$.

Per quanto riguarda la parte (2) prendiamo un vertice $v \in Q$, il quale ci determina una faccia Q_v del cono $C_v := \sigma_v^\vee$. Per dualità otteniamo la faccia duale del cono σ_v

$$Q_v^* = C_v^\vee \cap Q_v^\perp = \sigma_v \cap Q_v^\perp.$$

Poichè $\sigma_v = \mathrm{Cono}(u_F \,|\, v \in F)$ e $Q_v \subseteq C_v = \sigma_v^\vee$, si ottiene che

$$Q_v^* = \mathrm{Cono}(u_F \,|\, v \in F,\, Q_v \subseteq H_{u_F,0}).$$

Ma $v \in Q$, quindi l'inclusione $Q_v \subseteq H_{u_F,0}$ equivale a $Q \subseteq H_{u_F,-a_F}$, che a sua volta è equivalente a $Q \subseteq F$. Segue allora che

$$Q_v^* = \mathrm{Cono}(u_F \,|\, Q \subseteq F) = \sigma_Q,$$

da cui σ_Q è faccia di σ_v e tutte le facce di σ_v sono di questo tipo.

In particolare $Q \subseteq Q'$ vuol dire che $\sigma_{Q'}$ è anche faccia di σ_v, e poichè $\sigma_{Q'} \subseteq \sigma_Q$ dalla parte (1), $\sigma_{Q'}$ è una faccia di σ_Q. Inoltre ogni faccia di σ_Q è una faccia di σ_v e quindi è del tipo $\sigma_{Q'}$ per qualche faccia Q'. Usando di nuovo la parte (1), si conclude la parte (2).

Infine per la parte (3), consideriamo Q'' la più piccola faccia di P che contenga Q e Q'. Sappiamo che esiste perchè una faccia è intersezione delle faccette che la contengono; in questo caso particolare Q'' è intersezione delle faccette che contengono Q e Q'. Per la parte (2), $\sigma_{Q''}$ è faccia sia di σ_Q che di $\sigma_{Q'}$, da cui $\sigma_{Q''} \subseteq \sigma_Q \cap \sigma_{Q'}$.

Per provare l'inclusione opposta, se $\sigma_Q \cap \sigma_{Q'} = \{0\} = \sigma_P$,, allora $Q'' = P$ e abbiamo concluso. Altrimenti, ogni $u \neq 0$ che sta nell'intersezione si trova sia in σ_Q che in $\sigma_{Q'}$. Si può dimostrare che esiste almeno un $b \in \mathbb{R}$ tale che $H_{u,b}$ è un iperpiano di supporto di P. Allora usando il lemma 2.3.1, $u \in \sigma_Q$ e $u \in \sigma'_Q$ implicano che Q e Q' sono contenuti in $H_{u,b} \cap P$. Quest'ultima è una faccia di P contenente Q e Q' quindi $Q'' \subseteq H_{u,b} \cap P$ visto che Q'' è la più piccola di queste facce. Utilizzando di nuovo il lemma 2.3.1 si conclude che $u \in \sigma_{Q''}$. $\square$

Sappiamo già come sono fatti gli aperti affini della varietà torica X_P:

$$X_P \cap U_v = U_{\sigma_v} = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\sigma_v^\vee \cap M])$$

dove U_v è l'aperto affine con coordinata associata al vertice v non nulla.
La struttura del ventaglio ci permetterà di comprendere meglio anche in che modo si intersecano tali aperti.

Proposizione 2.3.2. *Sia $P \subseteq M_\mathbb{R}$ un politopo molto ampio di dimensione massima. Siano $v \neq w$ due vertici di P e Q la più piccola faccia di P che contenga entrambi. Allora*

$$X_P \cap U_v \cap U_w = U_{\sigma_Q} = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\sigma_Q^\vee \cap M]).$$

Inoltre le inclusioni

$$X_P \cap U_v \supseteq X_P \cap U_v \cap U_w \subseteq X_P \cap U_w$$

si possono anche scrivere come

$$U_{\sigma_v} \supseteq (U_{\sigma_v})_{\chi^{w-v}} = U_{\sigma_Q} = (U_{\sigma_w})_{\chi^{v-w}} \subseteq U_{\sigma_w}.$$

Dimostrazione. Per l'osservazione 2.1.1, sappiamo già come si comportano gli aperti affini di una varietà torica proiettiva, che nella notazione attuale si traducono nelle uguaglianze

$$X_P \cap U_v \cap U_w = (U_{\sigma_v})_{\chi^{w-v}} = (U_{\sigma_w})_{\chi^{v-w}}.$$

Resta da provare che $(U_{\sigma_v})_{\chi^{w-v}} = U_{\sigma_Q}$. Intanto $w - v \in C_v = \sigma_v^\vee$ da cui segue che $\tau := H_{w-v} \cap \sigma_v$ è una faccia del cono σ_v. Per la proposizione 1.5.2, abbiamo che $(U_{\sigma_v})_{\chi^{w-v}} = U_\tau$ dunque se proviamo che $\tau = \sigma_Q$ abbiamo concluso.
Poichè $\sigma_v \cap \sigma_w = \sigma_Q$ dalla proposizione 2.3.1, basta mostrare che

$$H_{w-v} \cap \sigma_v = \sigma_v \cap \sigma_w.$$

Sia $u \in H_{w-v} \cap \sigma_v$, se $u \neq 0$ c'è un $b \in \mathbb{R}$ per cui l'iperpiano affine $H_{u,b}$ supporta P. Per il lemma 2.3.1, $u \in \sigma_v$ implica che $v \in H_{u,b}$ e quindi $w \in H_{u,b}$ visto che $u \in H_{w-v}$. Usando nuovamente il lemma, otteniamo che $u \in \sigma_w$.
D'altra parte sia $u \in \sigma_v \cap \sigma_w$; se $u \neq 0$ come prima troviamo un iperpiano supportante $H_{u,b}$. Sempre per lo stesso lemma si ottiene che $v, w \in H_{u,b}$, da cui segue che $u \in H_{w-v}$. □

Osserviamo che grazie ai risultati della proposizione 2.3.2 e del teorema 2.2.2, la varietà X_P è completamente determinata da Σ_P. Pertanto è possibile recuperare l'intera struttura del ventaglio studiando le inclusioni fra aperti affini di X_P.

2.4 Proprietà delle varietà toriche proiettive

La normalità di un politopo intero $P \subseteq M_{\mathbb{R}}$ può anche essere caratterizzata attraverso il suo cono associato, che definiamo come

$$C(P) := \mathrm{Cono}(P \times \{1\}) \subseteq M_{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}.$$

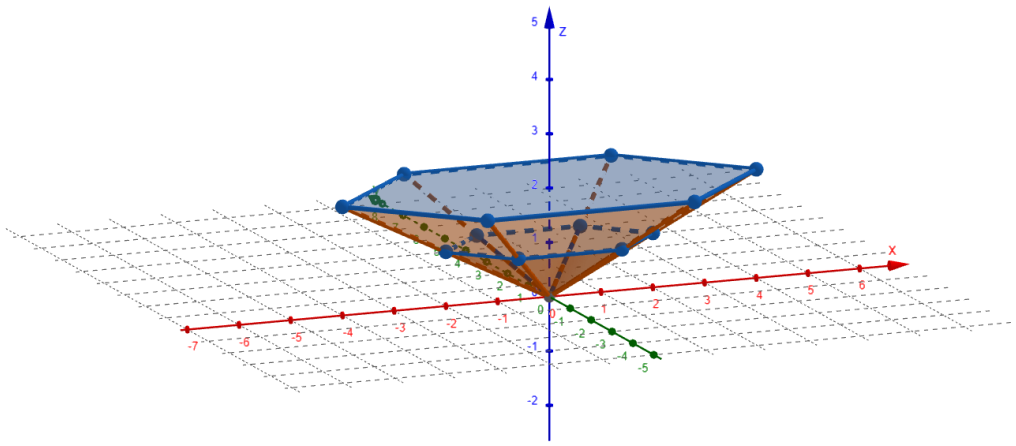

Figura 2.6: Sezione di un cono a base esagonale

Lemma 2.4.1. *Sia $P \subseteq M_{\mathbb{R}}$ un politopo intero. P è normale se e solo se $(P \cap M) \times \{1\}$ genera il semigruppo $C(P) \cap (M \times \mathbb{Z})$.*

Ora possediamo alcuni strumenti per mettere in relazione proprietà note provenienti dalla geometria algebrica con quelle appena esaminate della geometria convessa combinatorica.

Un primo esempio è il teorema che segue. Ricordiamo che una varietà proiettiva X si dice **proiettivamente normale** se il suo cono affine $\widehat{X}$ è normale.

Teorema 2.4.1. *Sia $P \subseteq M_{\mathbb{R}}$ un politopo intero di dimensione massima, allora*

(1) la varietà torica X_P è normale;

(2) X_P è proiettivamente normale, con l'immersione data da kP, se e solo se kP è normale.

Dimostrazione. Sappiamo che la normalità è una condizione locale, pertanto è sufficiente verificarla sulle componenti affini della varietà. Ma allora la prima affermazione segue dal fatto che la varietà X_P è localmente data dai pezzi affini U_{σ_v}, che sono normali per quanto visto nel capitolo 1.

Per quanto riguarda l'asserzione (2), $X_{kP\cap M}$ è proiettivamente normale se il suo cono affine $Y_{(kP\cap M)\times\{1\}}$ è normale. Per la proposizione 1.6.1 questo è equivalente al fatto che il $\mathbb{N}((kP\cap M)\times\{1\})$ sia saturato in $M\times\mathbb{Z}$. Poiché $C(P)$ è già generato da $(kP\cap M)\times\{1\}$, abbiamo la saturazione del semigruppo se e solo se $(kP\cap M)\times\{1\}$ genera $C(P)\cap(M\times\mathbb{Z})$. Infine si conclude che kP è normale per il lemma 2.4.1. □

La seconda proprietà su cui ci concentreremo è la regolarità/liscezza delle varietà e delle corrispondenti strutture convesse a cui sono associate.

Intanto definiamo cosa significa essere liscio per un politopo.

Definizione 2.4.1. 1. Sia $P \subseteq M_{\mathbb{R}}$ un politopo intero, $v \in P$ un vertice ed $E \subseteq P$ uno spigolo (una faccia di dimensione 1) contenente v. Denotiamo con w_E il primo punto del reticolo che si incontra dopo v percorrendo lo spigolo E.

2. P si dice **liscio** se, per ogni vertice v, i vettori $w_E - v$ formano un sottoinsieme di una base di M. Nel caso in cui P abbia dimensione massima questi vettori formano proprio una base di M.

Il teorema seguente ci permette di caratterizzare in due modi diversi la liscezza della varietà X_P, sfruttando la geometria convessa di coni e politopi.

Teorema 2.4.2. *Sia $P \subseteq M_{\mathbb{R}}$ un politopo intero di dimensione massima. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(1) la varietà proiettiva X_P è liscia;

(2) il politopo P è liscio;

*(3) il ventaglio Σ_P è **liscio**, nel senso che ogni cono che lo compone è liscio secondo la definizione 1.6.2.*

Dimostrazione. (1) $\Leftrightarrow$ (3) Innanzitutto, poichè la regolarità di una varietà algebrica è una proprietà locale, è sufficiente verificarla su ogni aperto affine U_σ di X_P. Tali aperti sono della forma $U_\sigma = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M])$ per dei coni poliedrali $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$. L'equivalenza fra la prima e l'ultima affermazione del teorema segue allora dalla proposizione 1.6.2.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) Osserviamo che σ_v è liscio se e solo se lo è il suo cono duale C_v. Dalla definizione 2.4.1, se P è liscio, per ogni vertice v di P i vettori $w_E - v$ devono formare una base di M. Questi vettori costituiscono proprio i raggi che generano il cono C_v. Poichè la condizione vale per ogni vertice, si ottiene che la liscezza del politopo P è equivalente a quella di ogni cono σ_v del ventaglio Σ_P. □

2.5 Prodotto di varietà toriche proiettive

Parliamo ora di come si possono costruire i prodotti di varietà toriche e di come questi si relazionino alle varietà associate a prodotti di politopi.

Per prima cosa consideriamo due reticoli M_1, M_2 e due politopi interi $P_1 \subseteq (M_1)_{\mathbb{R}}, P_2 \subseteq (M_2)_{\mathbb{R}}$ di dimensione rispettivamente n_1 ed n_2. Osserviamo allora che $P_1 \times P_2 \subseteq (M_1)_{\mathbb{R}} \times (M_2)_{\mathbb{R}} = (M_1 \times M_2)_{\mathbb{R}}$ è ancora un politopo intero ed ha dimensione $n_1 + n_2$.

Se i politopi P_1 e P_2 sono anche molto ampi possiamo associare ad essi, come già visto, le varietà X_{P_1} e X_{P_2}. Ciascuna di esse si immerge nel suo spazio proiettivo con la mappa $X_{P_i} \hookrightarrow \mathbb{P}^{s_i-1}$ dove $s_i := |P_i \cap M_i|$.
L'*immersione di Segre* $\mathbb{P}^{s_1-1} \times \mathbb{P}^{s_2-1} \hookrightarrow \mathbb{P}^{s_1 s_2-1}$ induce la mappa

$$X_{P_1} \times X_{P_2} \hookrightarrow \mathbb{P}^{s_1 s_2-1}.$$

Teorema 2.5.1. *Siano $P_1 \subseteq (M_1)_{\mathbb{R}}, P_2 \subseteq (M_2)_{\mathbb{R}}$ due politopi molto ampi. Allora vale che*

(1) $P_1 \times P_2 \subseteq (M_1 \times M_2)_{\mathbb{R}}$ è molto ampio ed inoltre

$$(P_1 \times P_2) \cap (M_1 \times M_2) = (P_1 \cap M_1) \times (P_2 \cap M_2);$$

in particolare se $|P_1 \cap M_1| = s_1$ e $|P_2 \cap M_2| = s_2$, allora

$$|(P_1 \times P_2) \cap (M_1 \times M_2)| = s_1 s_2$$

(2) le immagini delle immersioni $X_{P_1 \times P_2} \hookrightarrow \mathbb{P}^{s_1 s_2-1}$ e $X_{P_1} \times X_{P_2} \hookrightarrow \mathbb{P}^{s_1 s_2-1}$ coincidono

(3) $X_{P_1 \times P_2} \cong X_{P_1} \times X_{P_2}$.

Dimostrazione. Le affermazioni sui punti del reticolo sono chiare. Se (v_1, v_2) è una coppia di vertici di P_1 e P_2 rispettivamente, si osserva che

$$(P_1 \times P_2) \cap (M_1 \times M_2) - (v_1, v_2) = (P_1 \cap M_1 - v_1) \times (P_2 \cap M_2 - v_2).$$

Poichè per ipotesi P_i è molto ampio, il semigruppo $\mathbb{N}(P_i \cap M_i - v_i)$ è saturato in M_i, da cui segue che il prodotto $P_1 \times P_2$ è molto ampio.

Per quanto riguarda la parte (2), sappiamo che i tori T_{N_1} e T_{N_2} sono densi in X_{P_1} e X_{P_2}, dunque $T_{N_1} \times T_{N_2}$ è denso in $X_{P_1} \times X_{P_2}$. Componendo l'inclusione naturale con l'immersione di Segre si ottiene la mappa $T_{N_1} \times T_{N_2} \to \mathbb{P}^{s_1 s_2-1}$, data dai caratteri $\chi^m \chi^{m'}$ al variare di $m \in P_1 \cap M_1$ e di $m' \in P_2 \cap M_2$. La chiusura di Zariski dell'immagine di tale mappa è proprio $X_{P_1} \times X_{P_2}$. D'altra parte $T_{N_1} \times T_{N_2}$ coincide con il toro $T_{N_1 \times N_2}$ che a sua volta si immerge in $\mathbb{P}^{s_1 s_2-1}$ con la mappa dei caratteri $\chi^{(m,m')}$ provenienti dai punti interi di $P_1 \times P_2 \subseteq (M_1 \times M_2)_{\mathbb{R}}$. Le due mappe coincidono e dunque l'immagine della seconda, $X_{P_1 \times P_2}$, è uguale alla prima.

Il punto (3) segue direttamente dalla parte (2). □

In relazione al ventaglio normale di un politopo P nel caso di un prodotto...

Proposizione 2.5.1. *Siano $P_1 \subseteq (M_1)_{\mathbb{R}}, P_2 \subseteq (M_2)_{\mathbb{R}}$ due politopi interi e di dimensione massima. Allora*

$$\Sigma_{P_1 \times P_2} = \Sigma_{P_1} \times \Sigma_{P_2}.$$

Dimostrazione. Innanzitutto mostriamo l'uguaglianza tra i coni $C_{(v_1,v_2)}$ e $C_{v_1} \times C_{v_2}$, dove v_i è un vertice di P_i, con $i = 1, 2$. Per quanto visto nella parte (1) del teorema 2.5.1, abbiamo che

$$\begin{aligned} C_{(v_1,v_2)} &= \mathrm{Cono}((P_1 \times P_2) \cap (M_1 \times M_2) - (v_1, v_2)) = \\ &= \mathrm{Cono}((P_1 \cap M_1 - v_1) \times (P_2 \cap M_2 - v_2)) = \\ &= \mathrm{Cono}(P_1 \cap M_1 - v_1) \times \mathrm{Cono}(P_2 \cap M_2 - v_2) = C_{v_1} \times C_{v_2}. \end{aligned}$$

Dunque i coni massimali del ventaglio $\Sigma_{P_1 \times P_2}$ sono del tipo

$$\sigma_{(v_1,v_2)} = C^{\vee}_{(v_1,v_2)} = (C_{v_1} \times C_{v_2})^{\vee} = C^{\vee}_{v_1} \times C^{\vee}_{v_2} = \sigma_{v_1} \times \sigma_{v_2}.$$

Inoltre se $\sigma_i \subseteq (N_i)_{\mathbb{R}}$ sono dei coni e $\tau_i \subseteq \sigma_i$ sono delle facce, con $i = 1, 2$, allora $\tau_1 \times \tau_2$ è una faccia di $\sigma_1 \times \sigma_2$. Infatti se τ_i è una faccia di σ_i, c'è un iperpiano $H_i \subseteq (N_i)_{\mathbb{R}}$ tale che $\tau_i = \sigma \cap H_i$. Quindi $\tau_1 \times \tau_2 = (\sigma_1 \cap H_1) \times (\sigma_2 \cap H_2) = (\sigma_1 \times \sigma_2) \cap (H_1 \times H_2)$, cioè $\tau_1 \times \tau_2$ è una faccia di $\sigma_1 \times \sigma_2$. Viceversa, data una faccia τ di $\sigma_1 \times \sigma_2$, esiste un iperpiano H in $(N_1 \times N_2)_{\mathbb{R}}$ tale per cui $\tau = (\sigma_1 \times \sigma_2) \cap H$. Ma allora possiamo individuare due iperpiani $H_1 \subseteq (N_1)_{\mathbb{R}}, H_2 \subseteq (N_2)_{\mathbb{R}}$ per i quali $H = H_1 \times H_2$. Dunque $\tau = (\sigma_1 \cap H_1) \times (\sigma_2 \cap H_2)$.

Ora, osserviamo che gli elementi del ventaglio $\Sigma_{P_1 \times P_2}$ sono tutte e sole le facce dei coni massimali $\sigma_{(v_1,v_2)} = \sigma_{v_1} \times \sigma_{v_2}$ al variare dei vertici $v_1 \in P_1$ e $v_2 \in P_2$. Tali facce sono tutte della forma $\sigma_{Q_1} \times \sigma_{Q_2}$ per delle facce di P_1 e di P_2 che contengano rispettivamente v_1 e v_2.

Gli elementi di $\Sigma_{P_1} \times \Sigma_{P_2}$ sono invece prodotti cartesiani di facce dei coni σ_{v_1} con facce dei coni σ_{v_2}. Da quanto mostrato prima sulle facce dei prodotti di coni, otteniamo che i due ventagli coincidono. □

Questa proposizione ci permette di provare in modo alternativo e più diretto l'affermazione (3) del teorema 2.5.1. Consideriamo la varietà torica $X_{P_i} = \bigcup_{v_i} U_{\sigma_{v_i}}$ con σ_{v_i} i coni massimali del ventaglio Σ_{P_i}, per $i = 1, 2$.

Allora otteniamo che

$$\begin{aligned} X_{P_1} \times X_{P_2} &= \Big(\bigcup_{v_1} U_{\sigma_{v_1}} \times \bigcup_{v_2} U_{\sigma_{v_2}}\Big) = \bigcup_{(v_1,v_2)} (U_{\sigma_{v_1}} \times U_{\sigma_{v_2}}) = \\ &= \bigcup_{(v_1,v_2)} U_{\sigma_{v_1} \times \sigma_{v_2}} = \bigcup_{(v_1,v_2)} U_{\sigma_{(v_1,v_2)}} = X_{P_1 \times P_2}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

La prima uguaglianza nella formula 2.5 è motivata da quanto detto sopra; la terza dall'osservazione 2.5.1; la quarta dalla proposizione 2.5.1 e infine l'ultima dal fatto che le coppie di vertici (v_1, v_2) comprendono esattamente tutti i vertici del politopo $P_1 \times P_2$.

Osservazione 2.5.1. Consideriamo $\sigma_1 \subseteq (N_1)_{\mathbb{R}}, \sigma_2 \subseteq (N_2)_{\mathbb{R}}$ due coni e $\sigma_1 \times \sigma_2 \subseteq (N_1 \times N_2)_{\mathbb{R}}$. Allora c'è un isomorfismo tra il prodotto di aperti affini $U_{\sigma_1} \times U_{\sigma_2}$ e $U_{\sigma_1 \times \sigma_2}$ dato dalla catena di uguaglianze ed isomorfismi che segue:

$$\begin{aligned} U_{\sigma_1} \times U_{\sigma_2} &= \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[\sigma_1^\vee \cap M_1]) \times \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[\sigma_2^\vee \cap M_2]) \cong \\ &\cong \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[\sigma_1^\vee \cap M_1] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\sigma_2^\vee \cap M_2]) \cong \\ &\cong \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[(\sigma_1^\vee \cap M_1) \times (\sigma_2^\vee \cap M_2)]) = \\ &= \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[(\sigma_1^\vee \times \sigma_2^\vee) \cap (M_1 \times M_2)]) = \\ &= \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[(\sigma_1 \times \sigma_2)^\vee \cap (M_1 \times M_2)]) = U_{\sigma_1 \times \sigma_2}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Capitolo 3

Ventagli poliedrali e corrispondenza orbite-coni

Abbiamo già introdotto i ventagli all'interno del capitolo 2, ma ora li useremo in un contesto più generale per costruire varietà toriche astratte, non necessariamente immerse nello spazio proiettivo.

3.1 Varietà e ventagli

Definizione 3.1.1. Un **ventaglio di coni poliedrali** o **ventaglio** Σ in $N_{\mathbb{R}}$ è una collezione finita di coni $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ tali che

- ogni cono di Σ è poliedrale razionale e fortemente convesso
- ogni faccia di un cono in Σ è ancora un cono in Σ
- l'intersezione di due coni in Σ è una faccia di entrambi i coni (e quindi deve stare in Σ per il punto sopra).

Introduciamo inoltre due importanti oggetti legati ad un ventaglio Σ: il **supporto** del ventaglio,

$$|\Sigma| := \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \sigma \subseteq N_{\mathbb{R}},$$

e l'insieme dei coni n-dimensionali del ventaglio, $\Sigma(n)$. Un caso notevole è quello dei raggi del ventaglio, ovvero $\Sigma(1)$, che tornerà particolarmente utile per descrivere i divisori sulle varietà toriche.

Esempio 3.1.1. I ventagli normali associati ai politopi sono a tutti gli effetti dei ventagli secondo la definizione 3.1.1.

Definizione 3.1.2. Un ventaglio Σ' si dice **raffinamento** di un altro ventaglio Σ se ogni cono di Σ' è contenuto in un cono di Σ e $|\Sigma'| = |\Sigma|$.

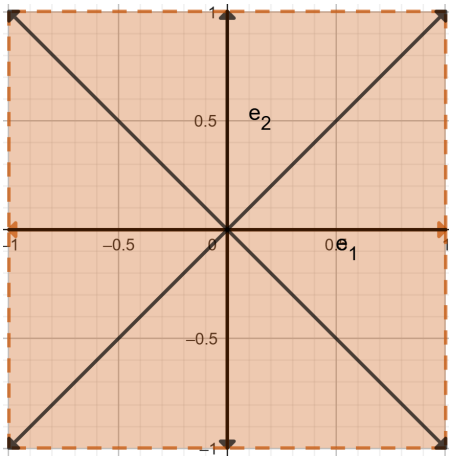

Figura 3.1: Raffinamento del ventaglio in figura **??**

Per quanto visto nel capitolo 1, ogni cono σ individua una varietà torica affine della forma

$$U_\sigma = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[S_\sigma]) = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M]).$$

Considerando tutti i coni del ventaglio Σ, le varietà affini prodotte da ciascun cono si incollano bene per formare un'unica varietà astratta, allo stesso modo in cui lo abbiamo dimostrato nella proposizione 2.3.2. La varietà ottenuta dal ventaglio Σ si indicherà con X_Σ.

Esempio 3.1.2. Sia Σ il ventaglio in $N_\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2$ contenente i coni $\sigma_0 = \{0\}, \sigma_1 = \mathrm{Cono}(e_1)$ e $\sigma_2 = \mathrm{Cono}(-e_1)$. I coni duali saranno $\sigma_0^\vee = \mathbb{R}^2, \sigma_1^\vee = \mathrm{Cono}(e_1, \pm e_2)$ e $\sigma_2^\vee = \mathrm{Cono}(-e_1, \pm e_2)$. Intanto osserviamo che N è il reticolo dei sottogruppi a un parametro di un toro bidimensionale $T_N \cong (\mathbb{C}^*)^2$.
Otteniamo i rispettivi aperti affini

$$\begin{aligned} U_{\sigma_0} &= \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\mathbb{R}^2 \cap \mathbb{Z}^2]) = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]) \cong (\mathbb{C}^*)^2, \\ U_{\sigma_1} &= \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x, y^{\pm 1}]) \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*, \\ U_{\sigma_2} &= \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x^{-1}, y^{\pm 1}]) \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*. \end{aligned}$$

Le prime componenti di questi aperti si incollano a formare un $\mathbb{P}^1$ e la varietà ottenuta dal ventaglio Σ pertanto sarà il prodotto $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}^*$.

Alcuni ventagli giocano un ruolo particolarmente importante per le

Definizione 3.1.3. Un ventaglio Σ in $N_\mathbb{R}$ si dice **completo** se il supporto $|\Sigma| = N_\mathbb{R}$.

Esempio 3.1.3. Ogni ventaglio proveniente da un politopo intero P è completo.

Se invece consideriamo il caso di un ventaglio in $N_\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^n$, con $n \geq 1$, costituito da un singolo cono massimale fortemente convesso, questo chiaramente non può generare tutto $N_\mathbb{R}$, quindi non sarà completo. In particolare non ci sarà alcun politopo che possa generare tale ventaglio.

Si può dimostrare che un ventaglio Σ è completo esattamente quando la varietà X_Σ è **completa**, cioè quando è compatta in topologia euclidea.

Osservazione 3.1.1. Ogni varietà torica proveniente da un ventaglio è normale, infatti come già detto la normalità è una proprietà locale ed ogni pezzo affine proviene da un cono σ, il cui semigruppo S_σ è saturato.

3.2 Corrispondenza orbite-coni

In questa sezione illustriamo la corrispondenza presente fra le orbite di una varietà torica X_Σ rispetto all'azione del toro e i coni del ventaglio Σ.
Gli strumenti chiave per mettere in relazione le orbite dell'azione con i coni di un ventaglio sono i sottogruppi ad un parametro e, in particolare, i loro punti limite. Essi ci permettono infatti di distinguere ogni regione del ventaglio e dunque associarvi un'opportuna orbita. Tali tecniche sono tipiche della G.I.T. (geometric invariant theory), teoria che si occupa di costruire quozienti di varietà algebriche per azioni di gruppo e spazi di moduli.

Iniziamo con un esempio che chiarisca da dove proviene questa corrispondenza.

Esempio 3.2.1. Sia Σ il ventaglio in $N_\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2$ rappresentato nella figura 3.2, generato dai raggi e_1, e_2 e $g = -e_1 - e_2$. La varietà associata è $X_\Sigma = \mathbb{P}^2_\mathbb{C}$, con toro $T_N = (\mathbb{C}^*)^2 \subseteq \mathbb{P}^2$. Sappiamo che ogni punto $u = (a, b) \in \mathbb{Z}^2$ individua un sottogruppo a un parametro $\lambda^u(t) = (1, t^a, t^b)$.

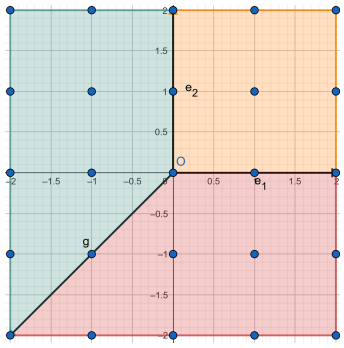

Figura 3.2: Il ventaglio di $\mathbb{P}^2$

Consideriamo i loro limiti in metrica euclidea $\lim_{t\to 0}\lambda^u(t) \in (\mathbb{C}^*)^2 \subseteq \mathbb{P}^2$ al variare degli $u \in \mathbb{Z}^2$. Se ad esempio ci troviamo nel primo quadrante, entrambi a e b sono positivi, quindi il limite è il punto in coordinate omogenee $[1 : 0 : 0]$. Analogamente nella regione verde e rossa del ventaglio i punti limiti saranno rispettivamente $[0 : 1 : 0]$ e $[0 : 0 : 1]$. Lungo i generatori dei raggi e_1, e_2 e $-e_1 - e_2$ avremo invece i punti limite $[1 : 0 : 1], [1 : 1 : 0]$ e $[0 : 1 : 1]$. Infine il cono $\{0\}$ corrisponde al punto limite $[1 : 1 : 1]$.
Possiamo osservare dunque che i coni del ventaglio Σ. o meglio le loro regioni interne

che tra poco definiremo più formalmente, sono in bigezione con i possibili punti limite del sottogruppo a un parametro.

Inoltre ciascuno di questi punti giace in un orbita distinta rispetto all'azione del toro su $\mathbb{P}^2$:

$$\begin{aligned}
O_1 &= \{[x_0 : x_1 : x_2] \,|\, x_i \neq 0 \,\text{per ogni}\, i\} \ni [1 : 1 : 1] \\
O_2 &= \{[x_0 : x_1 : x_2] \,|\, x_2 = 0,\, x_0, x_1 \neq 0\} \ni [1 : 1 : 0] \\
O_3 &= \{[x_0 : x_1 : x_2] \,|\, x_1 = 0,\, x_0, x_2 \neq 0\} \ni [1 : 0 : 1] \\
O_4 &= \{[x_0 : x_1 : x_2] \,|\, x_0 = 0,\, x_1, x_2 \neq 0\} \ni [0 : 1 : 1] \\
O_5 &= \{[x_0 : x_1 : x_2] \,|\, x_1 = x_2 = 0,\, x_0 \neq 0\} = \{[1 : 0 : 0]\} \\
O_6 &= \{[x_0 : x_1 : x_2] \,|\, x_0 = x_2 = 0,\, x_1 \neq 0\} = \{[0 : 1 : 0]\} \\
O_7 &= \{[x_0 : x_1 : x_2] \,|\, x_0 = x_1 = 0,\, x_2 \neq 0\} = \{[0 : 0 : 1]\}.
\end{aligned}$$

Definiamo l'**interno relativo del cono** σ come l'interno topologico di σ nel più piccolo sottospazio vettoriale di $N_{\mathbb{R}}$ che contenga σ; lo indicheremo con $\mathrm{Relint}(\sigma)$. Chiaramente quando tale sottospazio coincide con $N_{\mathbb{R}}$, $\mathrm{Relint}(\sigma)$ è semplicemente l'interno di σ, $\mathrm{Int}(\sigma)$.

Sfruttando la notazione appena introdotta possiamo enunciare la seguente corrispondenza tra orbite e coni suggerita dall'esempio 3.2.1, che poi dimostreremo:

$$\sigma \,\text{corrisponde all'orbita}\, O \iff \lim_{t\to 0}\lambda^u(t) \in O \,\text{per ogni}\, u \in \mathrm{Relint}(\sigma).$$

Una caratterizzazione utile per l'interno relativo di σ è data da:

$$u \in \mathrm{Relint}(\sigma) \iff \langle m, u\rangle > 0 \;\; \text{per ogni}\, m \in \sigma^\vee \setminus \sigma^\perp.$$

La seguente proposizione riguarda l'esistenza del limite di un sottogruppo a un parametro in un dato aperto affine e in particolare il caso in cui tale limite coincide col punto distinto dell'aperto.

Proposizione 3.2.1. *Sia $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ un cono e $u \in N$. Allora*

$$u \in \sigma \iff \lim_{t\to 0}\lambda^u(t) \,\text{esiste in}\, U_\sigma.$$

Inoltre, se $u \in \mathrm{Relint}(\sigma)$ allora $\lim_{t\to 0}\lambda^u(t) = \gamma_\sigma$, dove γ_σ è il punto distinto di U_σ.

Dimostrazione. Sia $u \in N$, allora

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\lambda^u(t) \,\text{esiste in}\, U_\sigma &\iff \lim_{t\to 0}\chi^m(\lambda^u(t)) \,\text{esiste in}\, \mathbb{C} \,\text{per ogni}\, m \in S_\sigma \\
&\iff \lim_{t\to 0} t^{\langle m,u\rangle} \,\text{esiste in}\, \mathbb{C} \,\text{per ogni}\, m \in S_\sigma \\
&\iff \langle m, u\rangle \geq 0 \,\text{per ogni}\, m \in \sigma^\vee \cap M \\
&\iff u \in (\sigma^\vee)^\vee = \sigma.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Per la seconda affermazione, se $u \in \sigma \cap N$, allora il punto $\lim_{t\to 0}\lambda^u(t)$ corrisponde al morfismo di semigruppi $S_\sigma \to \mathbb{C}$ definito da

$$m \in \sigma^\vee \cap M \mapsto \lim_{t\to 0} t^{\langle m,u\rangle}.$$

Se $u \in \mathrm{Relint}(\sigma)$, allora $\langle m.u\rangle > 0$ quando $m \in S_\sigma \backslash \sigma^\perp$ e $\langle m, u\rangle = 0$ quando $m \in S_\sigma \cap \sigma^\perp$. Si conclude che il punto limite è proprio il punto distinto. □

I due lemmi che seguono sono essenziali per dimostrare la corrispondenza che stiamo affrontando in questa sezione.

Successivamente indicheremo l'orbita del punto distinto γ_σ con $O(\sigma) = T_N \cdot \gamma_\sigma$.

Lemma 3.2.1. *Sia $\sigma \subseteq N_\mathbb{R}$ un cono. Definiamo N_σ il sottoreticolo di N generato da $\sigma \cap N$ e $N(\sigma) := N/N_\sigma$. Allora*

(1) il pairing di dualità

$$\langle\ ,\ \rangle : M \times N \to \mathbb{Z}$$

induce un pairing perfetto

$$\langle\ ,\ \rangle : \sigma^\perp \cap M \times N(\sigma) \to \mathbb{Z}$$

(2) tale pairing induce un isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(\sigma^\perp \cap M, \mathbb{C}^*) \cong T_{N(\sigma)},$$

dove $T_{N(\sigma)} = N(\sigma) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{C}^*$.

Dimostrazione. Per il punto (1), innanzitutto definiamo il pairing indotto $\langle\ ,\ \rangle : \sigma^\perp \cap M \times N(\sigma) \to \mathbb{Z}$ come la mappa che manda $(m, \bar{u}) \mapsto \langle m, u\rangle$ per ogni $(m, \bar{u}) \in \sigma^\perp \cap M \times N(\sigma)$. Verifichiamo che sia ben definito sul quoziente: siano $u_1, u_2 \in N$ tali che $\overline{u_1} = \overline{u_2} \in N(\sigma)$, allora $\langle m.\overline{u_1}\rangle - \langle m, \overline{u_2}\rangle = \langle m, u_1\rangle - \langle m, u_2\rangle = \langle m, u_1 - u_2\rangle := \langle m, \overline{u_1 - u_2}\rangle = \langle m, \bar{0}\rangle = 0$ per ogni $m \in \sigma^\perp \cap M$. Questa mappa è quindi ben definita ed eredita la bilinearità dal pairing originale.

Resta da provare la "perfettezza": con le attuali notazioni il pairing si dice *perfetto* se le mappe di valutazione

$$\Lambda_1 : \sigma^\perp \cap M \to \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(N(\sigma), \mathbb{Z}) \ \text{ e } \ \Lambda_2 : N(\sigma) \to \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(\sigma^\perp \cap M, \mathbb{Z})$$

sono isomorfismi.

Proviamolo per Λ_2; sia $\overline{u} \in N(\sigma)$, allora otteniamo la valutazione $\langle -, \overline{u}\rangle$ che sta in $\mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(\sigma^\perp \cap M, \mathbb{Z})$. D'altra parte consideriamo un omomorfismo di $\mathbb{Z}$-moduli $\gamma : \sigma^\perp \cap M \to \mathbb{Z}$. Poichè $\sigma^\perp \cap M$ è uno $\mathbb{Z}$-modulo libero la mappa γ è rappresentata da un certo $u_\gamma \in N$. Inoltre osserviamo che è rappresentato da ogni $v_\gamma \in N$ tale che $\overline{u_\gamma} = \overline{v_\gamma} \in N(\sigma)$, quindi ad ogni γ corrisponde in realtà la classe di equivalenza $\overline{u_\gamma} \in N(\sigma)$.

L'altra bigezione si verifica analogamente.

Per quanto riguarda il punto (2), segue dall'isomorfismo Λ_2 tensorizzando con $\mathbb{C}^*$ su $\mathbb{Z}$ che

$$T_{N(\sigma)} = N(\sigma) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\sigma^\perp \cap M, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\sigma^\perp \cap M, \mathbb{C}^*).$$

□

Il toro T_N agisce su un morfismo di semigruppi γ mandandolo in

$$t \cdot \gamma : m \mapsto \chi^m(t)\gamma(m).$$

Ecco il secondo lemma che utilizzeremo per dimostrare il teorema sulla corrispondenza orbite-coni.

Lemma 3.2.2. *Sia $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ un cono. Allora*

$$O(\sigma) = \{\gamma : S_\sigma \to \mathbb{C} \,|\gamma(m) \neq 0 \Leftrightarrow m \in \sigma^\perp \cap M\} \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\sigma^\perp \cap M, \mathbb{C}^*).$$

Dimostrazione. Innanzitutto osserviamo che

$$\gamma_\sigma \in O' := \{\gamma : S_\sigma \to \mathbb{C} \,|\gamma(m) \neq 0 \Leftrightarrow m \in \sigma^\perp \cap M\}$$

e che O' è invariante per l'azione del toro.

Poi osserviamo che $\sigma^\perp$ è il più grande sottospazio vettoriale di $M_{\mathbb{R}}$ contenuto in $\sigma^\vee$, quindi $\sigma^\perp \cap M$ è un gruppo in $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$. Dato $\gamma \in O'$ possiamo restringerlo a $\sigma^\perp \cap M$ per ottenere un morfismo di gruppi $\widehat{\gamma} : \sigma^\perp \cap M \to \mathbb{C}^*$. Viceversa possiamo estendere un morfismo di gruppi $\widehat{\gamma} : \sigma^\perp \cap M \to \mathbb{C}^*$ ad un morfismo di semigruppi definito su tutto $\sigma^\vee \cap M$, ponendolo uguale a 0 al di fuori di $\sigma^\perp \cap M$. Dunque si ha

$$O' \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\sigma^\perp \cap \mathrm{M}, \mathbb{C}^*).$$

Consideriamo ora la successione esatta corta

$$0 \to N_\sigma \to N \to N(\sigma) \to 0. \tag{3.2}$$

Tensorizzando con $\mathbb{C}^*$ e sfruttando il lemma precedente si ottiene la surgezione

$$T_N = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* \to T_{N(\sigma)} = N(\sigma) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\sigma^\perp \cap M, \mathbb{C}^*).$$

Poichè le bigezioni

$$T_{N(\sigma)} \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\sigma^\perp \cap M, \mathbb{C}^*) \cong O'$$

sono compatibili con l'azione di T_N, allora se $\gamma_\sigma \in O'$ abbiamo $O' = T_N \cdot \gamma_\sigma = O(\sigma)$. □

Finalmente possiamo enunciare l'importante corrispondenza che trattiamo in questa sezione.

Teorema 3.2.1 (Corrispondenza orbite-coni)**.** *Sia X_Σ la varietà torica del ventaglio Σ in $N_\mathbb{R}$. Allora*

(1) c'è una corrispondenza bigettiva tra

$$\begin{aligned} \{\text{Coni}\,\sigma\,\text{in}\,\Sigma\} &\longleftrightarrow \{T_N - \text{orbite in X}_\Sigma\} \\ \sigma &\longleftrightarrow O(\sigma) \cong \text{Hom}_\mathbb{Z}(\sigma^\perp \cap M, \mathbb{C}^*) \end{aligned} \tag{3.3}$$

(2) se $n = \dim N_\mathbb{R}$, per ogni cono $\sigma \in \Sigma$, $\dim O(\sigma) = n - \dim \sigma$

(3) l'aperto affine U_σ si può scrivere come unione delle orbite

$$U_\sigma = \bigcup_{\tau \preceq \sigma} O(\tau)$$

(4) $\tau \preceq \sigma$ se e solo se $O(\sigma) \subseteq \overline{O(\tau)}$ e

$$\overline{O(\tau)} = \bigcup_{\tau \preceq \sigma} O(\sigma)$$

dove con $\overline{O(\tau)}$ indichiamo sia la chiusura nella topologia di Zariski che in quella euclidea.

Dimostrazione. Prendiamo un'orbita O in X_Σ; poichè X_Σ è ricoperto da aperti affini T_N-invarianti U_σ e vale che $U_{\sigma_1} \cap U_{\sigma_2} = U_{\sigma_1 \cap \sigma_2}$, allora c'è un unico cono minimale σ per cui $O \subseteq U_\sigma$. Se proviamo che $O = O(\sigma)$ abbiamo dimostrato la parte (1).
Sia $\gamma \in O$, osserviamo che i punti per cui $\gamma(m) \neq 0$ devono stare su una faccia di $\sigma^\vee$. Una tale faccia sarà della forma $\sigma^\vee \cap \tau^\perp$ per qualche faccia $\tau \preceq \sigma$, quindi otteniamo che

$$\{m \in S_\sigma | \, \gamma(m) \neq 0\} = \sigma^\vee \cap \tau^\perp \cap M.$$

Ma allora $\gamma \in U_\tau$, dunque $\tau = \sigma$ per la condizione di minimalità. Concludiamo che $\gamma \in O(\sigma)$ per il lemma 3.2.2 e poichè due orbite o sono uguali o sono disgiunte allora $O = O(\sigma)$.

La parte (2) segue di nuovo dal lemma 3.2.2 e dalla successione esatta corta 3.2, infatti

$$\dim O(\sigma) = \dim T_{N(\sigma)} = \text{rank}\, N(\sigma) = \text{rank}\, N - \text{rank}\, N_\sigma = n - \dim \sigma.$$

Per quanto concerne la parte (3) dell'enunciato, sappiamo che U_σ deve essere unione di orbite in quanto è invariante rispetto all'azione del toro. Sicuramente tutte le orbite $O(\tau)$ per una faccia $\tau \preceq \sigma$ sono contenute in U_σ; d'altra parte per quanto constatato nella parte (1) ogni orbita è associata ad un certo cono, quindi abbiamo che

$$U_\sigma = \bigcup_{\tau \preceq \sigma} O(\tau).$$

Infine passiamo all'ultima parte, dimostrandola nel caso della topologia euclidea. Supponiamo che $O(\sigma) \subseteq \overline{O(\tau)}$; poichè $\overline{O(\tau)}$ è T_N-invariante, deve essere un'unione di orbite. Allora $O(\tau) \subseteq U_\sigma$, altrimenti $O(\tau) \cap U_\sigma = \emptyset$ da cui seguirebbe che $\overline{O(\tau)} \cap U_\sigma = \emptyset$. Allora per la parte (3) otteniamo che $\tau \preceq \sigma$.

Viceversa assumiamo che $\tau \preceq \sigma$ e mostriamo che $\overline{O(\tau)} \cap O(\sigma) \neq \emptyset$ per avere l'altra freccia dell'equivalenza. Sia γ_τ il punto distinto di U_τ, cioè $\gamma_\tau(m) = 1$ se $m \in \tau^\perp \cap M$ e 0 altrimenti. Poi definiamo $\gamma(t) := \lambda^u(t) \cdot \gamma_\tau$ per un $u \in \mathrm{Relint}(\sigma)$ e $t \in \mathbb{C}^*$. Più esplicitamente è l'omomorfismo di semigruppi

$$m \mapsto \chi^m(\lambda^u(t))\gamma_\tau(m) = t^{\langle m,u \rangle}\gamma_\tau(m).$$

Osserviamo che $\gamma(t) \in O(\tau)$ per ogni $t \in \mathbb{C}^*$ visto che l'orbita di γ_τ è proprio $O(\tau)$. Poichè $u \in \mathrm{Relint}(\sigma)$, abbiamo che $\langle m, u \rangle > 0$ se $m \in \sigma^\vee \setminus \sigma^\perp$. Allora usando la proposizione 3.2.1 $\gamma(0) = \lim_{t \to 0} \gamma(t)$ esiste in U_σ ed è un punto in $O(\sigma)$. Ma per costruzione tale punto limite sta anche in $\overline{O(\tau)}$, quindi $O(\sigma) \cap \overline{O(\tau)} \neq \emptyset$. Segue inoltre usando anche la parte (3) che

$$\overline{O(\tau)} = \bigcup_{\tau \preceq \sigma} O(\sigma).$$

Ci resta da dimostrare che l'unione delle orbite coincide anche con la chiusura di Zariski di $O(\tau)$. Intersechiamo $\overline{O(\tau)}$ con un aperto affine $U_{\sigma'}$ e otteniamo dalle parti (3) e (4) che

$$\overline{O(\tau)} \cap U_{\sigma'} = \bigcup_{\tau \preceq \sigma} O(\sigma) \cap \bigcup_{\sigma \preceq \sigma'} O(\sigma) = \bigcup_{\tau \preceq \sigma \preceq \sigma'} O(\sigma).$$

Si dimostra che questa è la varietà $V(I) \subseteq U_{\sigma'}$ definita dall'ideale

$$I = \langle \chi^m | \, m \in (\sigma')^\vee \cap M \setminus \tau^\perp \rangle \subseteq \mathbb{C}[(\sigma')^\vee \cap M] = \mathbb{C}[S_{\sigma'}].$$

Si conclude che $\overline{O(\tau)}$ è una sottovarietà di X_Σ, chiusura di Zariski di $O(\tau)$. $\square$

Capitolo 4

Divisori su varietà toriche e teorema di Bernstein

In questo capitolo introduciamo i divisori sulle varietà toriche che poi useremo per dimostrare il teorema di Bernstein, nel caso particolare delle superfici. Sfrutteremo anche alcuni risultati noti su numeri di intersezione e fibrati di rette senza dimostrarli. Si può trovare una trattazione più approfondita di questi argomenti in testi come [**S**] e [**H**].

4.1 Divisori su varietà toriche

Ricordiamo che un *divisore di Weil* su una varietà algebrica X non-singolare in codimensione 1 è una somma formale, a coefficienti in $\mathbb{Z}$, di sottovarietà irriducibili di X di codimensione 1, dette *divisori primi*. L'insieme dei divisori su X forma un gruppo con l'addizione, che indichiamo con $\mathrm{Div}(X)$.

Nell'ambito della geometria torica però siamo interessati solo ad una famiglia particolare di divisori: quelli invarianti rispetto all'azione del toro.
Consideriamo ad esempio un ventaglio completo Σ in $N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^n$ con $u_1, ..., u_\ell$ i generatori dei raggi $\rho_i \in \Sigma(1)$, $i = 1, ..., \ell$. Per la corrispondenza orbite-coni del teorema 3.2.1, ciascun raggio ρ_i individua un orbita, la cui chiusura è un **divisore primo T_N-invariante** $Y_i \subseteq X_\Sigma$.

Le combinazioni a coefficienti interi di divisori primi T_N-invarianti su X_Σ formano un sottogruppo di $\mathrm{Div}(X_\Sigma)$ indicato con $\mathrm{Div}_{T_N}(X_\Sigma)$. A priori può sembrare che stiamo perdendo una grande quantità di informazioni andando a considerare solo questi divisori. In realtà dalla proposizione 4.1.1 seguirà che ogni divisore di Cartier, e dunque di Weil, è linearmente equivalente ad uno T_N-invariante. Indicheremo con $\mathrm{Pic}(X_\Sigma)$ i divisori di Cartier modulo quelli principali.

D'ora in poi lavoreremo in due dimensioni con un ventaglio Σ in $N^2_{\mathbb{R}}$. Nel caso di una superficie torica, i divisori primi che ci interessano saranno delle curve T_N-invarianti su

X_Σ. Inoltre ad ogni cono compreso fra due raggi consecutivi ρ_i e ρ_{i+1} è associato un punto T_N-invariante $P_i \in X_\Sigma$.

Proposizione 4.1.1. *Sia X_Σ una superficie torica liscia, allora abbiamo una successione esatta corta di gruppi abeliani*

$$0 \to M \xrightarrow{\text{div}} \text{Div}_{T_N}(X_\Sigma) \to \text{Pic}(X_\Sigma) \to 0$$

e inoltre $\text{div}(\chi^m) = \sum_{i=1}^{\ell} \langle m, u_i \rangle Y_i$.

Dimostrazione. Iniziamo provando la seconda asserzione. Il divisore di una funzione razionale su una varietà X, $\text{div}(f)$, è definito come la combinazione dei divisori primi su cui f ha uno zero o un polo, ciascuno con il coefficiente dato dall'ordine di annullamento di f.

Per ogni raggio ρ_i abbiamo l'aperto affine di X_Σ

$$U_{\rho_i} = \text{Spec}(\mathbb{C}[\rho_i^\vee \cap M]) = T_N \cup (Y_i \setminus \{P_{i-1}, P_i\}) \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$$

dove la seconda uguaglianza segue dal punto (3) del teorema 3.2.1. Segue che $X_\Sigma \setminus \bigcup_i U_{\rho_i}$ ha codimensione 2, mentre una funzione razionale si annulla esclusivamente in codimensione 1. Quindi basta mostrare che la formula vale su ogni aperto U_{ρ_i}.

Consideriamo $m_1, m_2 \in M$ due vettori primitivi, tali che $\langle m_1, u_i \rangle = 0$ e $\langle m_2, u_i \rangle = 1$. Un vettore $m \in M$ è primitivo se $\frac{1}{k} m \notin M$ per ogni $k > 1$. Verifichiamo che m_1, m_2 e 0 sono gli unici vettori interi nel triangolo generato da tali punti. Ogni vettore del reticolo in tale triangolo è del tipo $m = \alpha m_1 + \beta m_2 \in M$ per qualche $\alpha, \beta \geq 0$ con $0 \leq \alpha + \beta \leq 1$. Dunque otteniamo che

$$\langle m, u_i \rangle = \langle \alpha m_1 + \beta m_2, u_i \rangle = \beta$$

per costruzione dei vettori m_1, m_2. Di conseguenza $\beta = 1$, poichè $0 \leq \beta \leq 1$ e $\alpha = 0$, da cui $m = m_2$.

Allora $\{m_1, m_2\}$ generano il semigruppo $u_i^\vee \cap M$, quindi, se $m \in u_i^\vee \cap M$, ci sono $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+$ tali che $m = \alpha m_1 + \beta m_2$. Poichè il carattere χ^m non si annulla su T_N, verifichiamo come si comporta sulle curve T_N-invarianti. Poichè l'ideale di $Y_i = \langle \chi^{m_i} \rangle$, allora

$$\text{ord}_{Y_i}(\chi^m) = \text{ord}_{Y_i}(\chi^{\alpha m_1 + \beta m_2}) = \text{ord}_{Y_i}(\chi^{\beta m_2}) = \beta = \langle m, u_i \rangle.$$

Per quanto riguarda la prima, osserviamo che $\text{Coker}(\text{div}) \subseteq \text{Pic}(X_\Sigma)$ per la liscezza di X_Σ e poichè una funzione razionale su X_Σ lo è anche su T_N. Infatti $\text{Coker}(X_\Sigma)$ non sono altro che i divisori T_N-invarianti modulo equivalenza lineare.
Inoltre T_N è un aperto di X_Σ e $X_\Sigma \setminus T_N$ è un chiuso di codimensione 1, quindi abbiamo la successione esatta a destra

$$\text{Pic}(X_\Sigma \setminus T_N) \to \text{Pic}(X_\Sigma) \to \text{Pic}(T_N) \to 0.$$

Per ipotesi la varietà X_Σ è liscia e in particolare è *fattoriale*. Sappiamo che il gruppo di Picard su una varietà affine fattoriale è banale, quindi dal fatto che
$\text{Pic}(X_\Sigma \setminus T_N) = \bigoplus_i \mathbb{Z} Y_i$ otteniamo che $\text{Coker}(\text{div}) = \text{Pic}(\text{X}_\Sigma)$. □

Per l'equivalenza tra il $\mathrm{Pic}(\mathrm{X}_\Sigma)$ e il gruppo delle classi di divisori di X_Σ per equivalenza lineare, $\mathrm{Cl}(X_\Sigma)$ segue che ogni divisore è equivalente ad uno T_N-invariante.

Il fascio $\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D)$ per un divisore D è definito da

$$U \mapsto \{f \in \mathbb{C}(X)^* \,|\, (\mathrm{div}(f) + D)|_U \geq 0\} \cup \{0\}.$$

Proposizione 4.1.2. *Sia X_Σ una superficie torica liscia, allora ogni divisore D su X_Σ è linearmente equivalente a $\sum_{i=1}^{l} a_i Y_i$ per degli $a_i \in \mathbb{Z}$. Inoltre le sezioni globali*

$$H^0(X_\Sigma, \mathcal{O}_{X_\Sigma}(D)) = \bigoplus_{m \in P_D \cap M} \mathbb{C} \cdot \chi^m$$

dove $P_D = \{m \in M | \langle m, u_i \rangle \geq -a_i, \forall i = 1, ..., l\} \subseteq M_\mathbb{R}$. Sarà chiamato il ***poligono associato al divisore*** *D.*

Dimostrazione. La prima asserzione segue da quanto dimostrato nella proposizione 4.1.1.

Per la seconda abbiamo le seguenti uguaglianze

$$\begin{aligned} H^0(X_\Sigma, \mathcal{O}_{X_\Sigma}(D)) &= \{f \in \mathbb{C}(X_\Sigma) \,|\, \mathrm{div}(f) + D \geq 0\} = \\ &= \{\chi^m \,|\, \mathrm{div}(\chi^m) + D \geq 0, m \in M\} = \\ &= \{\chi^m \,|\, \langle m, u_i \rangle + a_i \geq 0, i = 1, ..., l\} \end{aligned} \tag{4.1}$$

dove la prima è per definizione del fascio $\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D)$ e le altre seguono dall'osservazione 4.1.1, dalla proposizione 4.1.1 e dalla prima asserzione. □

Osservazione 4.1.1. Il politopo P_D verifica alcune belle proprietà, in particolare

- $P_{rD} = rP_D$
- $P_{D+\mathrm{div}(\chi^{m'})} = P_D - m'$
- $P_D + P_E \subseteq P_{D+E}$

dove $D = \sum_{i=1}^{l} a_i Y_i, E = \sum_{i=1}^{l} b_i Y_i \in \mathrm{Div}_{T_N}(X_\Sigma)$, $r \geq 0$ e $m' \in M$.

Mostriamo innanzitutto la prima:

$$\begin{aligned} P_{rD} &= \{m \in M \,|\, \langle m, u_i \rangle \geq -ra_i, \forall i = 1, ..., l\} = \\ &= \{m \in M \,|\, \langle m/r, u_i \rangle \geq -a_i, \forall i = 1, ..., l\} = rP_D. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Per la seconda abbiamo che

$$\begin{aligned} P_{D+\mathrm{div}(\chi^{m'})} &= \{m \in M \,|\, \langle m, u_i \rangle \geq -(a_i - \langle m', u_i \rangle), \forall i = 1, ..., l\} = \\ &= \{m \in M \,|\, \langle m + m', u_i \rangle \geq -a_i, \forall i = 1, ..., l\} = P_D - m'. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Infine proviamo la terza:

$$\begin{aligned} P_D + P_E &= \{m_1 + m_2 \in M \,|\, \langle m_1, u_i \rangle \geq -a_i, \langle m_2, u_i \rangle \geq -b_i, \forall i = 1, ..., l\} \subseteq \\ &\subseteq \{m_1 + m_2 \in M \,|\, \langle m_1 + m_2, u_i \rangle \geq -(a_i + b_i), \forall i = 1, ..., l\} = P_{D+E}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

4.2 Il teorema di Bernstein

Diremo che un fascio $\mathscr{L}$ è **globalmente generato** se le sue spighe $\mathscr{L}_x$ sono tutte generate da un insieme di sezioni globali.

Un teorema di "vanishing" sulle superfici toriche ci dice che se $\mathscr{L}$ è un fascio globalmente generato su X_Σ, allora

$$H^i(X_\Sigma, \mathscr{L}) = 0 \text{ per ogni } i \geq .1$$

La dimostrazione di questo fatto sfrutta i complessi di Čech.

Proposizione 4.2.1. *Sia X_Σ una superficie torica liscia e Y_i, $i = 1, ..., l$, le sue curve T_N-invarianti. Se $D = \sum_i a_i Y_i$ è un divisore tale che il fascio invertibile $\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D)$ sia globalmente generato, allora*

$$\text{Area}(P_D) = (D^2)/2,$$

dove (D^2) è il numero di autointersezione del divisore D.

Dimostrazione. Per la proposizione 4.1.2, il fatto enunciato sopra e il teorema di Riemann-Roch su superfici toriche lisce e otteniamo che

$$\#(rP_D \cap \mathbb{Z}^2) = \dim H^0(X_\Sigma, \mathcal{O}_{X_\Sigma}(rD)) = \frac{(rD \cdot (rD - K_{X_\Sigma}))}{2} + 1.$$

Il divisore canonico nel caso delle varietà toriche si definisce $K_{X_\Sigma} = -\sum_{i=1}^{l} Y_i$. Dividendo tutto quanto per r^2 e considerando il limite di $r \to \infty$ ricaviamo che

$$\lim_{r\to\infty}(\#(rP_D \cap \mathbb{Z}^2)/r^2) = (D^2)/2.$$

Il membro a sinistra dell'equazione coincide con l'area del poligono P_D, che si può stimare sommando le aree di tanti quadratini che ricoprono il poligono, di lato sempre più piccolo al crescere di m. □

Definizione 4.2.1. Definiamo il **volume combinato** di due politopi P e Q come

$$\text{vol}(P; Q) = \text{vol}(P + Q) - \text{vol}(P) - \text{vol}(Q).$$

Nelle ipotesi del corollario 4.2.1 vale in realtà l'uguaglianza dei politopi $P_D + P_E = P_{D+E}$.

Corollario 4.2.1. *Siano D, E divisori T_N-invarianti i cui fasci invertibili associati sono globalmente generati, allora*

$$\text{Area}(P_D; P_E) = (D \cdot E).$$

Dimostrazione. Dalla proposizione 4.2.1 e dall'osservazione sopra otteniamo che

$$\begin{aligned}\mathrm{Area}(P_D; P_E) &= \mathrm{Area}(P_D + P_E) - \mathrm{Area}(P_D) - \mathrm{Area}(P_E) = \\ &= \mathrm{Area}(P_{D+E}) - \mathrm{Area}(\mathrm{P_D}) + \mathrm{Area}(P_E) = \\ &= (D+E)^2/2 - D^2/2 - E^2/2 = (D \cdot E).\end{aligned} \tag{4.5}$$

□

Ci serve introdurre ancora un ingrediente prima del teorema finale: il poligono di Newton. Sia $f = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j \in \mathbb{C}[x, y]$ un polinomio in due variabili. Definiamo il suo **poligono di Newton**

$$\Delta(f) := \mathrm{Conv}((i, j) \in \mathbb{Z}^2 \,|\, a_{ij} \neq 0) \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Chiaramente questa costruzione si può estendere prendendo come funzioni dei polinomi di Laurent in $\mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$.

Esempio 4.2.1. Sia $f = 3x^2y + xy^2 - 7 \in \mathbb{C}[x, y]$. Il suo poligono di Newton $\Delta(f)$ è rappresentato in figura 4.1.

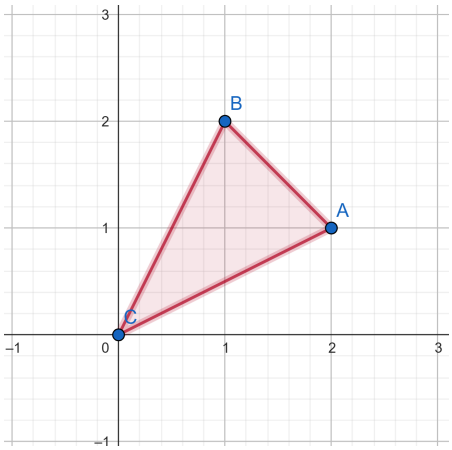

Figura 4.1: $\Delta(f)$

Se togliamo il termine noto a f, otteniamo il polinomio $f' = 3x^2y + xy^2$. In questo caso $\Delta(f') \subseteq \mathbb{R}^2$ sarà un poligono degenere, formato solo dal segmento $\overline{AB}$ in figura 4.1. Questo è la tipica situazione che vorremmo evitare nelle ipotesi del teorema di Bernstein, poichè l'area di un tale poligono sarebbe nulla.

Sia $f = \sum_{i,j} a_{i,j} x^i y^j \in \mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$; indichiamo con $f|_Q = \sum_{(i,j) \in Q} a_{i,j} x^i y^j$ la restrizione alle faccia $Q \preceq \Delta(f)$. Nel contesto dei poligoni di Newton, chiameremo f **non degenere** se per ogni $Q \preceq \Delta(f)$, il sistema

$$f|_Q = \frac{\partial f|_Q}{\partial x} = \frac{\partial f|_Q}{\partial y} = 0$$

non ha soluzioni in $(\mathbb{C}^*)^2$.

Lemma 4.2.1. *Sia $f \in \mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ non degenere e $\overline{C}$ la compattificazione della curva $C = V(f)$. Allora $\overline{C} \subseteq X_{\Sigma_{\Delta(f)}}$ non contiene punti T_N-invarianti e interseca in modo trasversale le curve T_N-invarianti di $X_{\Sigma_{\Delta(f)}}$. Inoltre $\overline{C}$ è liscia.*

La dimostrazione di questo lemma si può trovare ad esempio in [**L**].

Prima del teorema conclusivo, abbiamo ancora bisogno di un risultato che riguarda le risoluzioni di singolarità ed i raffinamenti di ventagli, introdotti nel capitolo 3.

Proposizione 4.2.2. *Sia Σ un ventaglio completo in $\mathbb{R}^2$ e X_Σ la sua varietà torica. Allora esiste un ventaglio completo Σ' che sia raffinamento di Σ e che definisca una mappa birazionale $\pi : X_{\Sigma'} \to X_\Sigma$. Inoltre $X_{\Sigma'}$ è liscia, π è un isomorfismo fuori dai punti T_N-invarianti e contrae quelle curve T_N-invarianti che non corrispondono a raggi in Σ.*

Dimostrazione. Siano $\sigma_1, ..., \sigma_d \in \Sigma$ i coni massimali. Se il cono σ_i è già liscio allora resta invariato e in tal caso l'aperto affine U_{σ_i} sarà liscio per la proposizione 1.6.2. Altrimenti si aggiungono altri raggi compresi fra i due che generano σ_i, fino ad ottenere solo coni lisci contenuti in σ_i. Ripetendo queste operazioni per ognuno dei coni si ottiene il raffinamento Σ' che sarà ancora un ventaglio completo ma liscio, pertanto X'_Σ sarà liscia come varietà.

Ora definiamo localmente il morfismo $\pi : X_{\Sigma'} \to X_\Sigma$: ogni $\sigma' \in \Sigma'$ è contenuto in un $\sigma_i \in \Sigma$. Per dualità otteniamo l'inclusione $\sigma_i^\vee \subseteq \sigma'^\vee$ e dunque quella di $\mathbb{C}$-algebre $\pi^* : \mathbb{C}[\sigma_i^\vee \cap M] \hookrightarrow \mathbb{C}[\sigma'^\vee \cap M]$. Quest'ultima definisce il morfismo surgettivo di varietà toriche affini

$$\pi|_{U_{\sigma'}} : U_{\sigma'} \to U_{\sigma_i}$$

che rispetta l'azione del toro T_N.
Consideriamo infine $u \in \sigma'$ il vettore generatore di un raggio di σ' ma che è invece interno a σ. Per la corrispondenza orbite-coni possiamo associare a tale raggio una curva T_N-invariante $C \subseteq U_{\sigma'}$. Vediamo come questa curva viene spedita nel punto T_N-invariante di U_σ, il punto distinto: sia $m' \in M$ tale che $m' \perp u$, allora $m' \in \sigma'^\vee \cap M$ ma $m' \notin \sigma^\vee \cap M$. Di conseguenza

$$\pi^*(I_C) = \pi^*(\langle \chi^m | \, m \in \sigma'^\vee \cap M, \, m \notin \mathrm{Cono}(m')\rangle) = \langle \chi^m | \, m \in \sigma_i^\vee \cap M, \, m \neq 0\rangle,$$

che conclude la prova perchè il membro a destra è proprio l'ideale del punto distinto. □

Ora possiamo finalmente enunciare il teorema di Bernstein, che lega il numero di zeri comuni di due polinomi di Laurent all'area combinata dei poligoni di Newton associati.

Teorema 4.2.1 (Teorema di Bernstein)**.** *Siano $f, g \in \mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ polinomi di Laurent non degeneri e $\Delta(f), \Delta(g) \subseteq \mathbb{R}^2$ i poligoni di Newton associati. Allora*

$$\#(f = g = 0 \,\mathrm{in}\, (\mathbb{C}^*)^2) \leq \mathrm{Area}(\Delta(f); \Delta(g)).$$

Inoltre vale l'uguaglianza se scegliamo i coefficienti di f e g generici, cioè se non soddisfano particolari relazioni algebriche.

Dimostrazione. Innanzitutto consideriamo i due ventagli $\Sigma := \Sigma_{\Delta(f)}$ e $\Sigma' := \Sigma_{\Delta(g)}$ come definiti nel capitolo 2.
Un raffinamento di entrambi i ventagli Σ'' ci fornisce due risoluzioni di singolarità π e π' rispettivamente per le superfici toriche X_Σ e X_Σ:

$$\begin{tikzcd} X_{\Sigma''} \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\pi'"'] & X_\Sigma \\ & X_{\Sigma'}. \end{tikzcd}$$

Le due funzioni f, g definiscono le curve algebriche $C := V(f)$ e $C' := V(g)$ in $(\mathbb{C}^*)^2$; consideriamo le loro compattificazioni $\overline{C}$ e $\overline{C'}$ in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ ottenute omogeneizzando i polinomi. Siano D in X_Σ ed E in $X_{\Sigma'}$ i divisori di Cartier associati a $\overline{C}$ e $\overline{C'}$; poichè le due funzioni sono per ipotesi non degeneri, le curve $\overline{C}$ e $\overline{C'}$ non conterranno punti T_N-invarianti. Inoltre D ed E sono isomorfi ai rispettivi pullback su $X_{\Sigma''}$ per proprietà delle risoluzioni π e π'. Inoltre tali pullback corrispondono a fibrati globalmente generati in quanto pullback di fibrati di rette molto ampi.

Allora otteniamo che

$$\begin{aligned} \#(f = g = 0 \,\mathrm{in}\, (\mathbb{C}^*)^2) \leq (\pi^*(D) \cdot (\pi')^*(E)) =& \mathrm{Area}(P_{\pi^*(D)}; P_{(\pi')^*(E)}) = \\ =& \mathrm{Area}((\Delta(f); \Delta(g)) \end{aligned}$$

dal Corollario 4.2.1.

Se inoltre aggiungiamo l'ipotesi che i coefficienti di f e g siano generici, questo equivale ad avere scelte generiche per le sezioni di $\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D)$ e $\mathcal{O}_{X_{\Sigma'}}(E)$, e dunque per i loro pullback su $X_{\Sigma''}$. Inoltre le condizioni di non degeneratezza e di genericità di f e g implicano per il Lemma 4.2.1 che $\pi^*(\overline{C})$ e $(\pi')^*(\overline{C'})$ non si intersecano lungo le curve T_N-invarianti di $X_{\Sigma''}$. Si conclude utlizzando il teorema di Bézout. $\square$

Bibliografia

[AM] M.F. Atiyah e I.G. Macdonald, *Introduzione all' algebra commutativa,* prima Edizione Italiana, Feltrinelli Editore Milano, 1981.

[CLS] David A. Cox, John B. Little e Henry K. Schenck *Toric varieties,* American Mathematical Society, 2011.

[F] William Fulton, *Introduction to Toric Varieties,* Princeton University Press, 1993.

[H] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry,* Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1977.

[L] Victor Lozovanu, *Corso di Geometria Superiore II,* 2023.

[M] Mircea Mustață, *Lecture notes on toric varieties,* 2004.

[S] Igor R. Shafarevic, *Basic Algebraic Geometry 1,* second Edition, Springer, 1994.