Università di Genova

Scuola di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

# Supervised learning con regolarizzazione di Dirichlet: problema degenere e comportamento asintotico di una sua perturbazione

**Relatore**
Prof. Simone Di Marino
**Correlatore**
Prof. Andrea Bruno Carbonaro

**Candidato**
Davide Lucifora

Anno Accademico 2023/24
Genova, 12 dicembre 2024

# Indice

# Introduzione

Nella tesi vogliamo cercare di comprendere un modello continuo del classico problema di machine learning supervisionato con zero loss function (interpolazione) scegliendo l'energia di Dirichlet come regolarizzatore. Un problema di machine learning supervisionato è strutturato nel seguente modo [10]: dato uno spazio degli input $X$ e uno spazio degli output $Y$, si consideri un insieme di $N$ punti $(x_i, y_i)_{i=1,\dots,N} \in X \times Y$, campionate in modo indipendente e identicamente distribuito rispetto a una distribuzione di probabilità $\mathbb{P}$ sconosciuta. L'obiettivo è determinare una funzione $u : X \to Y$ che approssimi in modo ottimale, secondo un criterio prestabilito, il corrispettivo output $y$ dato un nuovo input $x$.

In generale, nell'ambito del machine learning supervisionato, si vuole risolvere il seguente problema di minimizzazione: data una funzione $\ell : Y \times Y \to \mathbb{R}$ misurabile, detta *loss function*, si vuole trovare la funzione che minimizza l'errore atteso ovvero

$$\underset{u \in \mathcal{F}}{\operatorname{argmin}} \int_{X \times Y} \ell(u(x), y) \, dP(x, y),$$

dove $\mathcal{F}$ rappresenta uno spazio di funzioni in cui cercare la soluzione. Poiché la distribuzione $\mathbb{P}$ è sconosciuta, si opera una riduzione al caso discreto sui punti campionati $(x_i, y_i)$, cambiando il problema di ottimizzazione nel problema di minimo per l'errore empirico :

$$\underset{u \in \mathcal{F}}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \ell(u(x_i), y_i).$$

Tuttavia può succedere che la funzione $u$, pur adattandosi perfettamente ai dati di training, risulti eccessivamente complessa o oscillante, causando errori su nuovi dati (problema di overfitting). Per mitigare questo rischio, è comune introdurre un termine di regolarizzazione che imponga un vincolo sulla complessità del modello, ovvero:

$$\underset{u \in \mathcal{F}}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \ell(u(x_i), y_i) + \lambda R(u),$$

dove $R(u)$ rappresenta il termine di regolarizzazione e $\lambda > 0$ è un parametro che bilancia la fidelity e la regolarizzazione.

Nel caso specifico che considereremo, si ha $X = \mathbb{R}^d$, $Y = \mathbb{R}$, e $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\} \subset \Omega$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto, connesso e limitato. Si vuole determinare una funzione $u$ che interpoli i punti $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ utilizzando una *zero-loss function*, ovvero che soddisfi $u(x_i) = y_i$ per ogni $i$. Il problema in questo caso diventa

$$\underset{u\in\mathcal{F};\ u(x_i)=y_i}{\operatorname{argmin}} \quad R(u)$$

dove il regolarizzatore scelto è l'energia di Dirichlet, definita come:

$$R(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2.$$

In questa formulazione, minimizzare il termine di regolarizzazione implica cercare una funzione $u$ sufficientemente regolare e con una complessità controllata, migliorando così la generalizzazione del modello sui dati non osservati. L'utilizzo di un'energia di tipo Dirichlet come regolarizzazione è stato effettuato già in [2], poi studiato più approfonditamente in [4] e generalizzato in [5]. Tuttavia in questi casi lo studio viene effettuato per discretizzazioni su grafi dell'energia di Dirichlet: in questo elaborato invece si affronterà il caso continuo nel quale riusciremo a trovare uno studio asintotico della soluzione. Studieremo quindi soluzioni al problema di Dirichlet degenere, descritto dalle equazioni di Eulero-Lagrange associate. Prima di andare a studiare il problema di cui sopra, nella tesi sono stati studiati alcuni risultati preliminari.

Nel primo capitolo sono stati riportati enunciati su spazi di Sobolev e funzioni armoniche ([6],[9],[3]), in particolare nel caso delle funzioni armoniche si è studiato il **Teorema di Bôcher**[1], che permette di caratterizzare il comportamento di una funzione armonica in una singolarità isolata; e mediante tale teorema si dimostra che una funzione armonica in $\Omega \setminus \{x_1, ..., x_N\}$ e continua e limitata in tutto $\Omega$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto connesso e limitato allora si ha che $u$ è armonica in tutto $\Omega$.

Nel secondo capitolo della tesi verrà trattata la costruzione delle funzioni di Green-Neumann, segunedo le note di Robert [8], relative al problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{in } \partial\Omega \end{cases}$$

In particolare si vedrà che per ogni $x \in \Omega$ esiste un'unica funzione di Green-Neumann $G_x$ al problema ( a meno di costante) e tale funzione ha le seguenti proprietà

(i) $G_x \in L^1(\Omega)$,

(ii) $\int_\Omega G_x(y)\ dy = 0$,

(iii) per ogni $\varphi \in C^2(\Omega)$ tale che $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ su $\partial\Omega$, si ha che:

$$\varphi(x) - \overline{\varphi} = \int_\Omega G_x(y)\Delta\varphi \, dy.$$

Inoltre verrà dimostrato che $G_x \in L^p(\Omega)$ per ogni $p \in [1, \frac{d}{d-2}]$, e per ogni $y \in \Omega \setminus \{x\}$ si ha che esiste $C(\Omega) > 0$ tale che

$$G_x(y) \leq C(\Omega)|x-y|^{d-2}$$

Nel capitolo 3 si affronterà il problema di minimizzazione. Dato un insieme aperto, connesso e limitato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $N \in \mathbb{N}$, $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\} \subset \Omega$ e $\{y_1, y_2, \ldots, y_N\} \subset \mathbb{R}$, cerchiamo una soluzione $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ del seguente problema:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \setminus \{x_1, x_2, ..., x_d\} \\ u(x_i) = y_i & \text{per ogni } i = 1, ...N \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{in } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

Si dimostra che la soluzione esiste se e solo se $y_i = y_j$ $\forall i, j$ e in particolar modo la soluzione al problema è la soluzione costante. Tuttavia questa soluzione non è soddisfacente in quanto dobbiamo richiedere che le $y_i$ siano uguali tra loro. Proviamo a generalizzare il problema cercando una soluzione al problema variazionale associato a (3). In particolare si dimostra che esiste l'estremo inferiore al problema ed è uguale a 0. Proviamo dunque a rilassare il problema, modificando le le condizioni di Dirichlet: sia $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(x_i) \subset\subset \Omega$ per ogni $i$ e $B_\varepsilon(x_i) \cap B_\varepsilon(x_j) = \emptyset$ se $i \neq j$ e cerchiamo una soluzione al problema

$$\min\left\{ \int_{\Omega \setminus \bigcup_i B_\varepsilon(x_i)} |\nabla u|^2 \text{ s.t } u \in H^1(\Omega) \text{ and } u(x) = y_i \text{ if } x \in B_\varepsilon(x_i)\ \forall i \right\}. \tag{2}$$

Si dimostra che il minimo esiste ed è soluzione del problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^N B_d(x_i, \varepsilon) \\ u(x) = y_i & \text{in } B_d(x_i, \varepsilon) \text{ per ogni } i \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{in } \partial\Omega \end{cases} \tag{3}$$

Chiameremo tale soluzione $u_\varepsilon$. In particolare dimostreremo che esiste $C > 0$ $||\nabla u_\varepsilon||_{L^2(\Omega)} < C_N(\varepsilon^{d-2} + \varepsilon^d)^{\frac{1}{2}}$ e $u_\varepsilon \to \bar{y}$ in $L^p(\Omega)$ per ogni $p \in [1, \infty)$, dove $\bar{y}$ è la media delle $y_i$. Più precisamente vedremo che $u_\varepsilon(x) = \bar{y} + \varepsilon^{d-2}w(x) + o(\varepsilon^{d-2})$ dove $w$ è somma di funzioni di Green e soddisfa il seguente problema di Neumann.

$$\begin{cases} -\Delta w = \sum_{i=0}^N (y_i - \bar{y})\delta_{x_i} & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial w}{\partial n} = 0 & \text{in } \partial\Omega \end{cases} \tag{4}$$

# Notazioni

Se non diversamente specificato:

- sia $\mathbb{K}$ uguale a $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, inoltre in un enunciato o definizione dove compare più volte $\mathbb{K}$, se non diversamente specificato, si intende lo stesso insieme
- $|\ |_d$ indica la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^d$
- $\mathcal{H}^s(\Omega)$ indica la misura $s$ -dimensionale di Hausdorff di $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$
- $\omega_d = \mathcal{H}^{d-1}(\partial B_d(0,1))$
- data $u \in L^p(\Omega)$, con $\Omega \in \mathbb{R}^d$ aperto, verrà indicata con $||u||_p$ la norma di $u$ in $L^p(\Omega)$. Analogamente se $u \in L(\Omega, \mathbb{R}^d)$ verrà indica la sua norma sempre con $||u||_p$
- $\mathbb{R}^d_+ = \{(x_1, x_2, ..., x_d) \quad t.c \quad x_d > 0\}$

# Capitolo 1

# Preliminari

In questo capitolo si affronteranno argomenti preliminari per la tesi. Verranno fatte le dimostrazioni solo degli enunciatati non visti a lezione.

## 1.1 Funzioni Armoniche

Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto e $f \in C^0(\Omega)$ si chiama equazione di *Poisson* l'equazione

$$-\Delta u = f. \tag{1.1}$$

Siano $u \in C^2(\Omega)$ soluzione di (1.1) con $f = 0$, allora $u$ si dice armonica in $\Omega$.

**Teorema 1.1.1.** *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un dominio limitato regolare. Allora esiste al più una funzione di classe $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ soluzione di*

$$\Delta u = f \quad \textit{in } \Omega$$

*e tale che, su $\partial\Omega$,*

$$u = g \quad \textit{oppure} \quad \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = h$$

*oppure ancora*

$$u = g \quad \textit{su } \Gamma_D \subset \partial\Omega \quad \textit{e} \quad \frac{\partial u}{\partial n} = h \quad \textit{su } \Gamma_N \quad \textit{e} \quad \Gamma_N \cup \Gamma_D = \partial\Omega$$

*dove $f$, $g$, $h$ sono funzioni continue assegnate. Nel caso del problema di Neumann, cioé*

$$\frac{\partial u}{\partial n} = h \quad \textit{su } \partial\Omega,$$

*due soluzioni differiscono per una costante.*

**Esempio 1.1.2.** Sia $B_d(0,1)$ la sfera centrata nell'origine e raggio 1 in $\mathbb{R}^d$. Allora si ha che la funzione $u(x) = \log(\frac{1}{|x|})$ è armonica in $B_2(0,1) \setminus \{0\}$; se $d \geq 3$ allora la funzione $u(x) = \frac{1}{|x|^{d-2}}$ è armonica in $B_d(0,1) \setminus \{0\}$.

### 1.1.1 Teorema di Bôcher

Si può caratterizzare il comportamento di una funzione armonica in una singolarità isolata grazie al Teorema di Bôcher. Per fare ciò, sono necessari i seguenti risultati.

*Notazione* 1.1.3. Per una funzione $u$ definita su $B_d(0,1) \setminus \{0\}$ e per $r \in (0,1)$, la dilatazione $u_r$ è la funzione definita su $B_d(0, \frac{1}{r}) \setminus \{0\}$ da

$$u_r(x) = u(rx).$$

**Definizione 1.1.4.** Sia $u$ funzione continua definita in $B_d(0,1)$, si definisce la media di $u$ in una sfera di raggio $|x|$ nel seguente modo

$$A[u](x) = \frac{1}{\omega_d} \int_{\partial B_d(0,1)} u(|x|\xi)\ d\mathcal{H}^{d-1}(\xi) \quad x \in B_d(0,1) \tag{1.2}$$

**Lemma 1.1.5.** *Sia $u$ armonica in $B_d(0,1) \setminus \{0\}$, con $d \geq 3$, allora esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tale che*

$$A[u](x) = a|x|^{2-d} + b \tag{1.3}$$

*per ogni $x \in B_d(0,1)$, in particolare $A[u]$ è armonica in $B_d(0,1) \setminus \{0\}$.*

*Dimostrazione.* Sia $f$ funzione continua su $(0,1)$ definita da

$$f(r) = \frac{1}{\omega_d} \int_{\partial B_d(0,1)} u(r\xi)\ d\mathcal{H}^{d-1}(\xi)$$

ovvero $A[u](x) = f(|x|)$. Poiché $u \in C^2(B_d(0,1) \setminus \{0\})$, si può calcolare la derivata prima di $f$ :

$$\begin{aligned} f'(r) &= \frac{1}{\omega_d} \int_{\partial B_d(0,1)} \xi \cdot (\nabla u)(r\xi)\ d\mathcal{H}^{d-1}(\xi) = \\ &= \frac{r^{-d}}{\omega_d} \int_{\partial B_d(0,R)} \tau \cdot (\nabla u)(\tau)\ d\mathcal{H}^{d-1}(\tau). \end{aligned}$$

Sia $0 < r_0 < r_1 < 1$ e sia $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d \ t.c.\ r_0 < |x| < r_1\}$. Applicando il Teorema della divergenza a $\nabla u$ si ottiene che

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot (\nabla u)(r\xi)\ d\mathcal{H}^{d-1}(\xi) = \int_{\Omega} \Delta u(x)\ dx.$$

Visto che $u$ è armonica in $\Omega$, si ha che

$$\frac{1}{r_0} \int_{\partial B_d(0,r_0)} \tau \cdot (\nabla u)(\tau)\ d\mathcal{H}^{d-1}(\tau) = \frac{1}{r_1} \int_{\partial B_d(0,r_1)} \tau \cdot (\nabla u)(\tau)\ d\mathcal{H}^{d-1}(\tau)$$

per ogni $1 < r_0 < r_1 < 1$. Questo significa che $f'(r)$ è un multiplo di $r^{1-d}$ per ogni $r \in (0,1)$ e quindi esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $f(r) = a|x|^{2-d} + b$ $\square$

*Osservazione* 1.1.6. Se $d = 2$ si ha una dimostrazione analoga e si ottiene che esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tale che $A[u](x) = a \log(\frac{1}{|x|}) + b$

**Lemma 1.1.7.** *Sia $d \geq 2$ allora esiste una costante positiva $a$ tale che, per ogni funzione armonica positiva $u$ in $B_d(0,1) \setminus \{0\}$,*

$$au(y) \leq u(x)$$

*ogni volta che $0 < |x| = |y| < \frac{1}{2}$.*

*Dimostrazione.* La disuguaglianza di Harnack afferma che se $\Omega$ è un sottoinsieme aperto connesso di $\mathbb{R}^d$ e $K$ è un sottoinsieme compatto di $\Omega$ allora esiste una costante positiva $a$ tale che

$$au(y) < u(x)$$

per ogni funzione armonica positiva $u$ in $\Omega$ e per tutti $x, y \in K$. Pertanto, esiste $a > 0$ tale che per ogni funzione armonica positiva $u$ in $B_d(0,1) \setminus \{0\}$ $au(y) < u(x)$ ogni volta che $|x| = |y| = 1/2$. Applicando questo risultato alle dilatazioni $u_r$, $0 < r < 1$ si ottiene la tesi. □

**Lemma 1.1.8.** *Sia $u$ funzione armonica, positiva e continua in $B_d(0,1) \setminus \{0\}$ tale che $|u(x)| \to 0$ se $|x| \to 1$, allora esiste una costante $a > 0$ tale che*

$$u(x) = a(|x|^{2-d} - 1)$$

*per ogni $x \in B_d(0,1) \setminus \{1\}$.*

*Dimostrazione.* Per il Lemma 1.1.5, bisogna solo mostrare che $u = A[u]$ in $B_d(0,1) \setminus \{0\}$. Si supponga di poter mostrare che $u \geq A[u]$ in $B_d(0,1) \setminus \{0\}$. Quindi, se ci fosse un punto $x \in B_d(0,1) \setminus \{0\}$ tale che $u(x) > A[u](x)$, si avrebbe

$$A[u](x) > A[A[u]](x) = A[u](x),$$

una contraddizione. Pertanto, basta dimostrare che $u \geq A[u]$ in $B_d(0,1) \setminus \{0\}$.

Sia $a$ la costante del Lemma 1.1.7. Allora, per il Lemma 1.1.5, $u - aA[u]$ è armonica in $B_d(0,1) \setminus \{0\}$ e per il Lemma 1.1.7, $u(x) - aA[u](x) \geq 0$ se $0 < |x| < \frac{1}{2}$, e chiaramente $u(x) - aA[u](x) \to 0$ quando $|x| \to 1$ perché $u(x) \to 0$ per ipotesi quando $|x| \to 1$. Il principio del minimo per le funzioni armoniche mostra quindi che $u - aA[u] > 0$ in $B_d(0,1) \setminus \{0\}$ oppure $u \equiv 0$. Si desidera iterare questo risultato. A tale scopo, si definisce

$$f(t) = a + t(1 - a), \quad t \in [0, 1].$$

Si supponga che

$$w = u - tA[u] > 0 \text{ in } B_d(0,1) \setminus \{0\} \tag{1.4}$$

per qualche $t \in [0,1]$. Poiché $w(x) \to 0$ quando $|x| \to 1$, l'argomento sopra può essere applicato a $w$, ottenendo

$$w - aA[w] = u - f(t)A[u] > 0 \text{ in } B_d(0,1) \setminus \{0\}.$$

Questo processo può essere continuato. Lasciando che $f^{(m)}$ denoti la $m$ -esima iterazione di $f$, si vede che (1.4) implica

$$u - f^{(m)}(t)A[u] > 0 \text{ in } B_d(0,1) \setminus \{0\}.$$

Per $m = 1, 2, \ldots$. Ma $f^{(m)}(t) \to 1$ quando $m \to \infty$, per ogni $t \in [0,1]$, quindi il fatto che 1.4 valga per qualche $t \in [0,1]$ implica che $u - A[u] > 0$ in $B_d(0,1) \setminus \{0\}$. Poiché (1.4) vale ovviamente quando $t = 0$, si ha che $u - A[u] > 0$ in $B_d(0,1) \setminus \{0\}$, come desiderato. □

**Teorema 1.1.9** (Di Bôcher)**.** *Si supponga che $u$ sia positiva e armonica in $B_d(0,1)\setminus\{0\}$. Allora esiste una funzione $v$ armonica in $B_d(0,1)$ e una costante $a > 0$ tali che:*

*(i) $u(x) = a\log(\frac{1}{|x|}) + v(x)$ per ogni $x \in B_2(0,1) \setminus \{0\}$ (se $d = 2$ );*

*(ii) $u(x) = a|x|^{2-d} + v(x)$ per ogni $x \in B_d(0,1) \setminus \{0\}$ (se $d > 2$ ).*

*Dimostrazione.* Si assume inizialmente che $u$ sia positiva e armonica in $B_d(0,R) \setminus \{0\}$ per qualche $R > 1$. Per $x \in B_d(0,1) \setminus \{0\}$, si definisce

$$w(x) = u(x) - P[u|_{\partial B_d(0,1)}](x) + |x|^{2-d} - 1,$$

dove $P[u|_{\partial B_d(0,1)}]$ denota l'integrale di Poisson di $u|_{\partial B_d(0,1)}$ (la funzione armonica unica in $B_d(0,1)$ che si estende continuamente a $B_d(0,1)$ con valori al contorno $u|_{B_d(0,1}$ ). Poiché $|x| \to 1$, si ha $w(x) \to 0$, e per $|x| \to 0$, si ha $w(x) \to +\infty$. Per il principio del minimo, $w$ è positiva e armonica in $B_d(0,1) \setminus \{0\}$. Il Lemma 1.1.8, applicato a $w$, mostra che

$$u(x) = a|x|^{2-d} + v(x)$$

in $B_d(0,1)\setminus\{0\}$ per qualche $v$ armonica in $B_d(0,1)$ e qualche costante $a$.Si noti che $a$ deve essere non negativo, poiché altrimenti $u(x) \to -\infty$ quando $x \to 0$, il che contraddice la positività di $u$.

Per il caso generale di $u$ positiva e armonica in $B_d(0,1) \setminus \{0\}$, si può applicare il risultato sopra a $u_{1/2}$, così che

$$u(x/2) = a|x|^{2-d} + v(x)$$

in $B_d(0,1) \setminus \{0\}$ per qualche $v$ armonica in $B_d(0,1)$ e qualche costante $a > 0$. Questo implica che

$$u(x) = a2^{2-d}|x|^{2-d} + v(2x)$$

in $B_d(0,1) \setminus \{0\}$, il che dimostra che $u(x) - a2^{2-d}|x|^{2-d}$ si estende armonicamente a $B_d(0, \frac{1}{2})$, e quindi a $B_d(0,1)$. □

Vediamo adesso tre coralli del Teorema di Bôcher.

**Corollario 1.1.10.** *Siano $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $R > 0$ e $u$ positiva e armonica in $B_d(x_0, R) \setminus \{x_0\}$. Allora esiste una cosante $a > 0$ tale che:*

*(i)* $u(x) = a \log(\frac{R}{|x-x_0|}) + v(x)$ *per ogni* $x \in B_2(x_0, R) \setminus \{x_0\}$ *(se $d = 2$ );*

*(ii)* $u(x) = a|x - x_0|^{2-d} + v(x)$ *per ogni* $x \in B_d(x_0, R) \setminus \{x_0\}$ *(se $d > 2$ ).*

*Dimostrazione.* Si consideri $\tilde{u} = u(\frac{x-x_0}{R})$. Si ha che $\tilde{u} \geq 0$ e armonica in $B_d(0, 1) \setminus \{0\}$ allora per il Teorema di Bôcher (1.1.9) esiste $a' > 0$ e $\tilde{v}$ armonica tale che

(i) $\tilde{u}(x) = a \log(\frac{1}{|x|}) + \tilde{v}$ per ogni $x \in B_2(0, 1) \setminus \{0\}$ (se $d = 2$ );

(ii) $\tilde{u}(x) = a|x|^{2-d} + \tilde{v}$ per ogni $x \in B_d(0, 1) \setminus \{0\}$ (se $d > 2$ ).

Usando il cambio di variabile $y = \frac{x-x_0}{R}$ e $v(y) = v(Ry + x_0)$ si ottiene la tesi. □

**Corollario 1.1.11.** *Siano $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $R > 0$ e $u$ limitata e continua in $B(x_0, R)$ e armonica in $B(x_0, R) \setminus \{x_0\}$. Allora $u$ è armonica $B(x_0, R)$.*

*Dimostrazione.* Caso $d > 2$. Senza perdità di generalità si può supporre $x_0 = 0$, $R = 1$ e $u \geq 0$. Per il Teorema di Bôcher (1.1.9) esiste $a > 0$ e $v$ armonica tale che $u(x) = a \log(\frac{1}{|x|}) + v(x)$; ma $u$ è limitata e continua in $B_d(0, 1)$ quindi esiste $M > 0$ tale che $u(x) \leq M$ per ogni $x \in B_d(0, 1)$. In particolare

$$\lim_{x \to 0} u(x) \leq M \leq +\infty \Rightarrow \lim_{x \to 0} a \log(\frac{1}{|x|}) + v(x) \leq M \Rightarrow a = 0$$

quindi $u(x) = v(x)$ per ogni $x$, quindi $u$ è armonica ovunque. Il caso $d = 2$ è analogo. □

**Corollario 1.1.12.** *Siano $B_d(0, 1)$, $R > 0$ e $u$ positiva e armonica in $B_d(0, 1) \setminus \{x_0\}$. Allora esiste una costante $a > 0$ tale che:*

*(i)* $u(x) = a \log(\frac{1}{|x-x_0|}) + v(x)$ *per ogni* $x \in B_2(0, 1) \setminus \{x_0\}$ *(se $d = 2$ );*

*(ii)* $u(x) = a|x - x_0|^{2-d} + v(x)$ *per ogni* $x \in B_d(0, 1) \setminus \{x_0\}$ *(se $d > 2$ ).*

*Dimostrazione.* Caso $d > 2$. Sia $r > 0$ tale che $B_d(x_0, r) \subset\subset B_d(0, 1)$. Per il Corollario 1.1.10 del Teorema di Bôcher esiste $a > 0$ e $v$ armonica in $B_d(x_0, r)$ tale che

$$u(x) = a|x - x_0|^{2-d} + v(x) \quad \textit{per ogni } x \textit{ in } B_d(x_0, r) \setminus \{x_0\}.$$

Si estande $v$ armonicamenge al di fuori di $B_d(x_0, r)$, ovvero

$$v(x) = u(x) - a|x - x_0|^{2-d} \quad \textit{per ogni } x \textit{ in } B_d(1, 0) \setminus B_d(x_0, r),$$

da cui segue la tesi. Il caso d=2 è analogo. □

## 1.2 Spazi di Sobolev

### 1.2.1 Spazio $W^{1,p}$

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto e sia $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p < +\infty$ oppure $p = \infty$.

**Definizione 1.2.1.** (Spazio di Sobolev) Sia $u \in L^p(\Omega)$, allora $u \in W^{1,p}$ se esistono $g_1, ..., g_N \in L^p(\Omega)$ tale che per ogni $i = 1, ..., N$ valga:

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_\Omega g_i \varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \tag{1.5}$$

Per $u \in W^{1,p}$ si definisce la derivata debole rispetto $x_i$ come $\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$ e si denota il gradiente debole

$$\nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_d} \right)$$

Si munisce lo spazio $W^{1,p}$ della seguente norma

$$||u||_{W^{1,p}} = ||u||_p + ||\nabla u||_p$$

o della norma equivalente $||u||_{W^{1,p}} = (||u||_p^p + ||\nabla u||_p^p)^{\frac{1}{p}}$

**Proposizione 1.2.2.** *Lo spazio $W^{1,p}$ è uno spazio di Banach per ogni $1 \leq p \leq +\infty$, ed è separabile $1 \leq p < +\infty$*

Si denota con $H^1(\Omega)$ lo spazio $W^{1,2}$ che è munito del prodotto scalare:

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + \sum_{i=1}^{N} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2}$$

*Osservazione* 1.2.3. $H^1(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert

**Definizione 1.2.4.** Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto. Un aperto $\omega \subset \mathbb{R}^d$ si dirà compattamente contenuto in $\Omega$, e si denoterà con $\omega \subset\subset \Omega$, se $\overline{\omega}$ è compatto e contenuto in $\Omega$.

**Teorema 1.2.5** (Friedrichs)**.** *Sia $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con $1 \leq p < \infty$. Allora esiste una successione $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C_c^\infty(\Omega)$ tale che*

$$u_{n_{|\Omega}} \xrightarrow{L^p(\Omega)} u, \tag{1.6}$$

$$\nabla u_n|_\omega \xrightarrow{L^p(\omega, \mathbb{R}^d)} \nabla u|_\omega \textit{ per ogni } \omega \subset\subset \Omega \tag{1.7}$$

*Nel caso $\Omega = \mathbb{R}^d$ e $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con $1 \leq p < \infty$ esisterà una successione $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ tale che*

$$u_n \xrightarrow{L^p(\mathbb{R}^d)} u$$

*e*

$$\nabla u_n \xrightarrow{L^p(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)} \nabla u$$

*Osservazione* 1.2.6. Dal Teorema di Friedrichs si osserva che $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ è denso in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$

Seguono ora caratterizzazioni equivalenti per le funzioni $W^{1,p}$ con $1 \leq p < \infty$

**Proposizione 1.2.7.** *Siano $u \in L^p(\Omega)$ con $1 < p \leq \infty$ e $p'$ tale che $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, allora sono fatti equivalenti:*

- $u \in W^{1,p}(\Omega)$
- *esiste una costante $C > 0$ tale che*

$$\left| \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| \leq C||\varphi||_{p'} \ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \ \forall i = 1, 2, ..., N$$

- *esiste una costante $C > 0$ tale che per ogni $\omega \subset\subset \Omega$ e per ogni $h \in \mathbb{R}^d$, con $|h| < dist(\omega, \partial\Omega)$, si ha che*

$$||\tau_h u - u||_{L^p(\omega)} \leq C|h|$$

*se $\Omega = \mathbb{R}^d$ allora*

$$||\tau_h u - u||_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq C|h|$$

**Proposizione 1.2.8** (Derivata del prodotto)**.** *Siano $u, v \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ con $1 \leq p \leq +\infty$. Allora $uv \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ e vale la regola di Leibniz per ogni componente.*

**Proposizione 1.2.9** (Derivata della composizione)**.** *Sia $G \in C^1(\mathbb{R})$ tale che $G(0) = 0$ e $|G'(s)| \leq M$ per ogni $s \in \mathbb{R}$ e per qualche costante $M$. Sia $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con $1 \leq p \leq +\infty$. Allora $G \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$ e*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(G \circ u) = (G' \circ u)\frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad \forall i = 1, 2, ..., N$$

7

### 1.2.2 Disuguaglianze di Sobolev

In questa sezione si andranno a costuire delle inizeione continue tra gli spazi di Sobolev e determinati spazi $L^p$. In particolare per $1 \leq p \leq d$ si ha che $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}$ per qualche $p^* \in (p, +\infty)$.

**Teorema 1.2.10** (Gagliardo,Sobolev,Nirenberg)**.** *Siano $1 \leq p < d$ e $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ allora*

$$||u||_{p^*} \leq C_{p,d}||\nabla u||_p \tag{1.8}$$

*dove $p^*$ è data da $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} + \frac{1}{d}$*

In particolare si ha che $W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^d)$

**Corollario 1.2.11.** *Sia $1 \leq p < d$ allora:*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \subset L^q(\mathbb{R}^d) \qquad \forall q \in [p, p^*]$$

*con iniezione continua.*

Si consideri $\Omega$ aperto limitato di $\mathbb{R}^d$.

**Teorema 1.2.12** (Disuguaglianza di Poincaré I)**.** *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ aperto con bordo $C^1$, $1 \leq p < +\infty$ e $u \in W^{1,p}(\Omega)$ allora esiste $C_{d,p} > 0$ tale che*

$$||u - \bar{u}||_{L^p(\Omega)} \leq C_{d,p}\|\nabla u\|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^d)} \tag{1.9}$$

*dove $\bar{u} = \frac{1}{|\Omega|_d}\int_\Omega u(x)dx$*

### 1.2.3 Spazio $W_0^{1,p}(\Omega)$

**Definizione 1.2.13.** Sia $1 \leq p < +\infty$, lo spazio $W_0^{1,p}(\Omega)$ denota la chiusura di $C_c^\infty(\Omega)$ in $W^{1,p}(\Omega)$

Se $p = 2$ si denoterà con $H_0^1(\Omega)$ lo spazio $W_0^{1,2}(\Omega)$

*Osservazione* 1.2.14. Lo spazio $W_0^{1,p}(\Omega)$ è uno spazio di Banach.

**Lemma 1.2.15.** *Sia $u \in W^{1,p}(\Omega)$ 1 con $1 \leq p < +\infty$ e supponiamo che supp $u$ sia un compatto di $\Omega$. Allora $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$*

*Dimostrazione.* Sia $\omega$ insieme aperto tale che *supp* $u \subset \omega \subset\subset \Omega$ e sia $\alpha \in C_c^1(\Omega)$ tale che $\alpha = 1$ in *supp* $u$; quindi $\alpha u = u$. D'altra parte per il Teorema di Friedrichs (1.2.5) esiste un sucessione $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C_c^\infty(\Omega)$ tale che $u_n \to u$ in $L^p(\Omega)$ e $\nabla u_n \to u$ in $L^p(\omega, \mathbb{R}^d)$. quindi segue che $\alpha u_n \to \alpha u$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Quindi $\alpha u$ appartiene a $W_0^{1,p}(\Omega)$, e quindi anche $u$. $\square$

*Notazione* 1.2.16. Dato $x \in \mathbb{R}^d$, si denoterà $x = (x', x_d)$ con $x' \in \mathbb{R}^{d-1}$. Inoltre si definiscano i seguenti insiemi:

(i) $Q = \{(x', x_d) \in \mathbb{R}^d \;\; t.c. \quad |x'| < 1 \;\; |x_d| < 1\}$

(ii) $Q_+ = Q \cap \mathbb{R}^d_+$

(iii) $Q_0 = \{(x', 0) \in \mathbb{R}^d \;\; t.c. \quad |x'| < 1\}$

**Definizione 1.2.17.** Sia $\Omega$ insieme aperto di $\mathbb{R}^d$, allora $\Omega$ è detto di classe $C^1$ seper ogni $x \in \partial\Omega$ esiste un intorno aperto $U$ di $x$ e una mappa bigettiva $H : Q \to U$ tale che

(i) $H \in C^1(\bar{Q})$

(ii) $H^{-1} \in C^1(\bar{U})$

(iii) $H(Q_+) = U \cap Q$ e $H(Q_0) = U \cap \partial\Omega$

La mappa $H$ è chiamata carta locale.

**Teorema 1.2.18.** *Siano $\Omega$ di classe $C^1$ e $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ con $1 \leq p < +\infty$. Allora sono fatti equivalenti:*

*(i)* $u = 0$ *in* $\partial\Omega$

*(ii)* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$

*Dimostrazione.* $(i) \Rightarrow (ii)$. Si supponga che *supp* $u$ sia limitato. Sia $G \in C^1(\mathbb{R})$ tale che

$$|G(t)| \leq |t| \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad e \quad G(t) = \begin{cases} 0 \; se \; |t| \leq 1 \\ t \; se \; |t| \geq 2 \end{cases}$$

Allora $u_n = (\frac{1}{n})G(nu)$ paartiene a $W^{1,p}(\Omega)$ e, per il Teorema di convergenza dominata, si ha che $u_{\rightarrow}u$ in $W^{1,p}$. Dall'altra parte si che

$$supp \; u \subset \left\{ x \in \Omega \; t.c. \; |u(x)| \geq \frac{1}{n} \right\}$$

e in particolare si ha che *supp* $u$ è un compattto contenuto in $\Omega$. Per il Lemma 1.2.15 si ha che $u \in W_0^{1,p}$. Nel caso in cui *supp* $u$ non sia limtato basta considerare $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni di cut-off; allora come prima si avrà che $\xi_n u \in W_0^{1,p}$ e poiché $\xi_n u \to u$ in $W^{1,p}$, si conclude che $u \in W_0^{1,p}$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Poiché $\Omega$ è di classe $C^1$, si può usare una carta locale e ridursi al seguente problema. Sia $u \in W^{1,p}(Q_+) \cap C(\bar{Q_+})$ allora $u = 0$ in $Q_0$.

Sia $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $C^1_C(Q_+)$ tale che $u_n \to u$ in $W^{1,p}(Q_+)$. Allora per$(x',x) \in Q_+$ si ha che

$$|u_n(x',x)| \leq \int_0^{x_d} \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_d}(x',t)dt \right|,$$

e quindi per $0 < \varepsilon < 1$,

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{|x'|<1}\int_0^{\varepsilon} |u_n(x',x)|dx'dx_d \leq \int_{|x'|<1}\int_0^{\varepsilon} \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_d}(x',t)dt \right|.$$

Passando al limite per $n \to +\infty$ si ottiene

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{|x'|<1}\int_0^{\varepsilon} |u(x',x)|dx'dx_d \leq \int_{|x'|<1}\int_0^{\varepsilon} \left| \frac{\partial u}{\partial x_d}(x',t)dt \right|.$$

e infine per $\varepsilon \to 0$, si ottiene che

$$\int_0^{\varepsilon} |u(x',0)|dx' = 0$$

e quindi $u = 0$ in $Q_0$ □

Un'altra caratterizzazione dello spazio $W^{1,p}_0(\Omega)$ è data dalla seguente Proposizione.

**Proposizione 1.2.19.** *Siano $\Omega$ di classe $C^1$ e $u \in L^p(\Omega)$ con $1 \leq p < +\infty$. Allora sono fatti equivalenti:*

*(i)* $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$,

*(ii) esiste una costante $C > 0$ tale che*

$$\left| \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| \leq C||\varphi||_{L^{p'}} \quad \forall \varphi \in C^1_c(\mathbb{R}^d), \quad \forall i = 1,2,...,N.$$

*(iii) la funzione*

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x) & se\ x \in \Omega \\ 0 & se\ x \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega \end{cases}$$

*appartiene a $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$.*

*Dimostrazione.* $(i) \Rightarrow (ii)$. Sia $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni in $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ tale che $u_n \to u$ in $W^{1,p}$. Allora per ogni $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$ si ha che:

$$\left|\int_\Omega u_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right| = \left|\int_\Omega \varphi \frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right| \le \left|\left|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right|\right|_{L^p} \; ||\varphi||_{L^{p'}}.$$

passando al limite si ottiene (ii).

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Sia $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$; allora

$$\left|\int_{\mathbb{R}^d} \bar{u} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right| = \left|\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right| \le C||\varphi||_{L^{p'}(\Omega)} \le C||\varphi||_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)}.$$

Quindi $\bar{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ per la Proposizione 1.2.7.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Si può assumere che $\Omega$ sia limitato (se non lo fosse, consideriamo la successione $(\xi_n u)_{n\in\mathbb{N}}$, dove le $(\xi_n)$ sono cutt-off).

□

### 1.2.4 Spazio $W^{m,p}$

*Notazione* 1.2.20. Sia $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ e $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Si definisce la notazione seguente:

$$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1}, \partial x_2^{\alpha_2}, \dots, \partial x_d^{\alpha_d}}$$

dove $|\alpha|$ rappresenta la norma di $\alpha$.

**Definizione 1.2.21.** Siano $m \ge 2$ un intero, $1 \le p \le \infty$ un numero reale e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$. Si definisce lo spazio

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \; : \; \forall \alpha \text{ con } |\alpha| \le m, \; \exists g_\alpha \in L^p \text{ t.c. } \int_\Omega u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \varphi \; \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \right\}$$

Si definisce $D^\alpha u = g_\alpha$. Lo spazio $W^{m,p}(\Omega)$ è uno spazio di Banach con la norma

$$||u||_{W^{m,p}} = \sum_{0\le|\alpha|\le m} ||D^\alpha u||_p$$

Si definisce lo spazio $H^m := W^{m,2}$, che è uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare

$$\langle u, v\rangle_{H^m} = \sum_{0\le|\alpha|\le m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle_{L^2}$$

*Osservazione* 1.2.22. Se $m = 1$ si ottiene prorprio lo spazio di Sobolev $W^{1,p}$.+

## 1.3 Capacità

In queta sezione verrà definita la capacità che permette di studiare insiemi “piccoli” di $\mathbb{R}^d$.

**Definizione 1.3.1.** Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto e $A \in \mathbb{R}^d$. Si definisce il seguente insieme di funzioni

$$K(A,\Omega) = \left\{u \in H_0^1(\Omega) : 0 \leq u \leq 1 \textit{ in } \Omega \textit{ e } u = 1 \textit{ q.o. in un intorno di } A \cap \Omega\right\}$$

**Definizione 1.3.2.** Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto e $A \in \mathbb{R}^d$. Si definisce la capacità di $A$ rispetto a $\Omega$

$$Cap(A,\Omega) = \inf\left\{\int_\Omega |\nabla u|^2 \ : \ u \in H_0^1(\Omega) \textit{ e } u \geq 1 \textit{ in un intorno di } A \cap \Omega\right\} \tag{1.10}$$

*Osservazione* 1.3.3. In (1.10) non è restrittivo supporre $0 \leq u \leq 1$ in $\Omega$ e $u = 1$ in un intorno di $A \cap \Omega$, e quindi possiamo riscrivere (1.10) nel seguente modo

$$Cap(A,\Omega) = \inf\left\{\int_\Omega |\nabla u|^2 \ : \ u \in K(A,\Omega)\right\} \tag{1.11}$$

**Teorema 1.3.4** (Proprietà della capacità)**.** *Siano $A, B \subset \mathbb{R}^d$, allora*

*(i) Per ogni insieme $A \subset \Omega$ si ha $Cap(A,\Omega) = inf\{(Cap(U,\Omega) \ : U \ aperto, A \subset U\}$*

*(ii) $Cap(\lambda A, \lambda\Omega) = \lambda^{d-2} Cap(A,\Omega)$ con $\lambda > 0$*

*(iii) $Cap(L(A)), L(\Omega)) = Cap(A,\Omega)$ con $L : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ isometria affine*

*(iv) Esiste $C_d > 0$ tale che $|A \cap \Omega|_d \leq C_d Cap(A,\Omega)^{\frac{d}{d-2}}$*

*(v) $Cap(A \cup B,\Omega) + Cap(A \cap B,\Omega) \leq Cap(A,\Omega) + Cap(B,\Omega)$*

*(vi) Se $A_1 \supseteq A_2 \supseteq ...A_k \supseteq A_{k+1} \supseteq ...$ sono compatti, allora*

$$\lim_{k\to+\infty} Cap(A_k,\Omega) = Cap(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k, \Omega)$$

*Dimostrazione.* (i) Chiaramente $Cap(A,\Omega) \leq inf\{(Cap(U,\Omega) \ : U \ aperto, A \subset U\}$. Sia $\varepsilon > 0$, allora esiste $u \in H_0^1(\Omega)$, con $u \geq 1$ in $U$ intorno aperto di $A \cup \Omega$, tale che

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \leq Cap(A,\Omega) + \varepsilon$$

inoltre si ha che

$$Cap(U,\Omega) \leq \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$

Per arbitrarietà di $\varepsilon$ segue la tesi.

(ii) Sia $\varepsilon > 0$ e sia $u \in K(A,\Omega$ sia $g(x) = f(\frac{x}{\lambda}$, allora $g \in K(\lambda A, \lambda(\Omega)$, allora

$$\int_{\lambda\Omega} |\nabla g|^2 dx = \lambda^{d-2} \int_\Omega |\nabla f|^2 dx$$

e quindi $Cap(\lambda A, \lambda\Omega) \leq \lambda^{d-2} Cap(A,\Omega) + \varepsilon$, da cui segue per arbitrarietà di $\varepsilon$

$$Cap(\lambda A, \lambda\Omega) \leq \lambda^{d-2} Cap(A,\Omega)$$

L'altra disuguaglianza è analoga

(iii) Segue direttamente da (ii) con $\lambda = 1$

(iv) Sia $u \in K(A,\Omega)$, per la disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg-Sobolev si ha che

$$|A \cap \Omega|_d^{\frac{d-2}{N}} \leq \left( \int_{A\cap\Omega} u^{\frac{2N}{d-2}} \right)^{\frac{d-2}{N}} \leq \left( \int_\Omega u^{\frac{2N}{d-2}} \right)^{\frac{d-2}{N}} \leq C_d \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$

di conseguenza si ha che $|A \cap \Omega|_d^{\frac{d-2}{N}} \leq C_d Cap(A,\Omega)$ da cui segue la tesi

(v) Siano $\varepsilon > 0$, $f \in K(A,\Omega)$ e $g \in K(B,\Omega)$ tale che

$$\int_\Omega |\nabla f|^2 dx \leq Cap(A,\Omega) + \frac{\varepsilon}{2} \ e \ \int_\Omega |\nabla g|^2 dx \leq Cap(B,\Omega) + \frac{\varepsilon}{2}$$

inoltre si ha che $max\{f,g\} \in K(A \cup B, \Omega)$ e $min\{f,g\} \in K(A \cap B, \Omega)$ e inoltre

$$|\nabla max\{f,g\}|^2 + |\nabla min\{f,g\}|^2 \leq |\nabla f|^2 + |\nabla g|^2$$

Quindi

$$\begin{aligned} Cap(A \cup B, \Omega) + Cap(A \cap B, \Omega) &\leq \int_\Omega |\nabla max\{f,g\}|^2 + |\nabla min\{f,g\}|^2 \leq \\ &\leq \int_\Omega |\nabla f|^2 + |\nabla g|^2 \leq Cap(A,\Omega) + Cap(B,\Omega) + \varepsilon \end{aligned}$$

Per arbitrarietà di $\varepsilon$ segue (v).

(vi)Si osservi che

$$\lim_{k \to +\infty} Cap(A_k,\Omega) \geq Cap(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k, \Omega)$$

D'altra parte, sia $U$ aperto tale che $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \subseteq U$. Poiché $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ è compatto esiste $m \in \mathbb{Z}_+$ tale che $\forall k \geq m$ si ha che $A_k \subseteq U$. Quindi

$$\lim_{k \to +\infty} Cap(A_k, \Omega) \leq Cap(U, \Omega)$$

La tesi segue da (i). $\square$

**Esempio 1.3.5.** Siano $R > 0$ e $\Omega = B_d(0, 2R)$, allora la capacità di $B_d(0, R)$ in $B_d(0, 2R)$ è

$$Cap(B_d(0, R), B_d(0, 2R)) = CR^{d-2}$$

e inoltre

$$Cap(B_d(0, R), B_d(0, 2R)) = \int_{B_d(0,2R) \setminus B_d(0,R)} |\nabla h_R|^2 dx$$

dove $h_R$ è l'unica soluzione del problema variazionale

$$Cap(B_d(0, R), B_d(0, 2R)) = \min \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \ : \ u \in K(B_d(0, R), B_d(0, 2R)) \right\}$$

ovvero $h_R$ è la funzione armonica che risolve il seguente problema

$$\begin{cases} \Delta h_R = 0 & \text{in } B_d(0, 2R) \setminus B_d(0, R) \\ h_R \equiv 1 & \text{in } B_R(0) \\ h_R \equiv 0 & \text{in } \mathbb{R}^d \setminus B_d(0, 2R) \end{cases} \tag{1.12}$$

In particolare si per le proprietà della capacità che

$$Cap(B_d(0, R), B_d(0, 2R)) = R^{d-2} Cap(B_d(0, 1), B_d(0, 2))$$

Rimane solo da calcolare $Cap(B_d(0, 1), B_d(0, 2)$ e per far ciò dobbiamo trovare la soluzione del problema (1.12) con $R = 1$; tale soluzione esiste ed è

$$h_1(x) = \begin{cases} \frac{2}{|x|} - 1 & \text{in } B_d(0, 2) \setminus B_d(0, 1) \\ \equiv 1 & \text{in } B_d(0, 1) \\ \equiv 0 & \text{in } \mathbb{R}^d \setminus B_d(0, 2) \end{cases} \tag{1.13}$$

**Lemma 1.3.6.** *Sia $K$ un sottoinsieme compatto di $\Omega$ insieme aperto su $\mathbb{R}^d$ tale che $cap(K, \Omega) = 0$. Allora sono fatti equivalenti:*

*(i) esiste $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ successione di funzioni in $C_c^{\infty}(\Omega)$ tali che $\varphi_n = 1$ su $K$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\varphi_n \to 0$ in $H^1(\Omega)$,*

*(ii)* *per ogni* $f \in H^1_0(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *esiste una successione di funzioni* $(\varphi)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* $H^1_0(\Omega)$ *tali che* $\varphi_n = f$ *in un intorno di* $K$ *e* $\varphi_n \to 0$ *in* $H^1(\Omega)$

*Dimostrazione.* Si osservi che per le proprietà della capacità si ha che esiste $C_d > 0$ tale che

$$|K|_d \leq C_d Cap(K,\Omega)^{\frac{d}{d-2}} = 0$$

quindi si ha che $K$ è un insieme di misura nulla.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Sia $f \in H^1_0(\Omega)$. Per ipotesi sia $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione di funzioni in $C^\infty_c(\Omega)$ tali che $\varphi_n = 1$ su K per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\varphi_n \to 0$ in $W^{1,2}(\Omega)$. Allora si ha che $\varphi_n f \in H^1_0(\Omega)$ e $\varphi_n f \to 0$ in Ł$^2$ per Teorema di convergenza dominata di Lebesgue. Inoltre si ha che:

$$||\nabla(\varphi_n f)||_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^d} \leq ||\nabla f||_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^d}||\varphi_n||_{L^2(\Omega)} + ||\nabla\varphi_n||_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^d)}||f||_{L^\infty(\Omega)}.$$

passando al limite per $n \to +\infty$ si ottiene che $\nabla(\varphi_n f) \to 0$ in Ł$^2(\Omega,\mathbb{R}^d)$ e quindi $\varphi_n f \to 0$ in $H^1(\Omega)$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Basta prendere la funzione $f = 1$ in $K$ e 0 in $\Omega \setminus K$.

□

# Capitolo 2

# Funzioni di Green-Neumann

Per la trattazione di questo capitolo sono state seguite le note di Roberts ([8]). Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, insieme aperto, limitato e regolare. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

dove $u \in C^2(\Omega)$ e $f \in C^0(\Omega)$. Il nostro obiettivo è costruire e caratterizzare le Funzioni di Green-Neumann associato a (2.1). Definiamo per una funzione $u \in L^1(\Omega)$ la media $\bar{u} := \frac{1}{|\Omega|_d} \int_\Omega u \, dx$.

**Definizione 2.0.1** (Funzione di Green-Neumann)**.** Una funzione $G : \Omega \times \Omega \setminus \{(x,x)/x \in \Omega\} \to \mathbb{R}$ è detta funzione di Green per (2.1) se, per ogni $x \in \Omega$ vale:

(i) $G_x \in L^1(\Omega)$,

(ii) $\int_\Omega G_x(y) \; dy = 0$,

(iii) per ogni $\varphi \in C^2(\Omega)$ tale che $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ su $\partial\Omega$, si ha che:

$$\varphi(x) - \overline{\varphi} = \int_\Omega G_x(y) \Delta\varphi \, dy.$$

*Osservazione* 2.0.2. La condizione (ii) è necessaria per garantire l'unicità, la simmetria e la regolarità della funzione di Green.

### 2.0.1 Esistenza e stime della soluzione del problema di Neumann

**Definizione 2.0.3.** Sia $\Omega$ un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$. Diciamo che $\Omega$ è *liscio* se per ogni $x \in \partial\Omega$, esistono $\delta_x > 0$, un intorno aperto $U_x$ di $x$ in $\mathbb{R}^d$ e una funzione $\varphi : B_d(0, \delta_x) \to U_x$ tali che:

i. $\varphi$ è un diffeomorfismo $C^\infty$,

ii. $\varphi(0) = x$,

iii. $\varphi(B_d(0, \delta_x) \cap \{x_1 < 0\}) = \varphi(B_d(0, \delta_x)) \cap \Omega$,

iv. $\varphi(B_d(0, \delta_x) \cap \{x_1 = 0\}) = \varphi(B_d(0, \delta_x)) \cap \partial\Omega$.

Il vettore normale esterno è quindi definito come segue:

**Definizione 2.0.4.** Sia $\Omega$ un dominio $C^\infty$ di $\mathbb{R}^d$. Per ogni $x \in \partial\Omega$, esiste un unico vettore $\nu(x) \in \mathbb{R}^d$ tale che $\nu(x) \in (T_x\partial\Omega)^\perp$, $\|\nu(x)\| = 1$, e $(\partial_1\varphi(0), \nu(x)) > 0$ per $\varphi$ come definita nella Definizione 2. Questa definizione è indipendente dalla scelta di tale $\varphi$, e la mappa $x \mapsto \nu(x)$ è in $C^\infty(\partial\Omega, \mathbb{R}^d)$.

è utile estendere le soluzioni di (2.1) a un intorno di $\Omega$. A tal fine, è richiesta una formulazione variazionale di (2.1): moltiplicando (2.1) per $\psi \in C^\infty(\bar{\Omega})$ e integrando per parti otteniamo la seguente definizione:

**Definizione 2.0.5.** Diciamo che $u \in H^1(\Omega)$ è una soluzione debole di (2.1) con $f \in L^1(\Omega)$ se

$$\int_\Omega (\nabla u, \nabla\psi)\, dx = \int_\Omega f\psi\, dx \quad \text{per ogni } \psi \in C^\infty(\Omega).$$

Nel caso in cui $u \in C^2(\Omega)$, come facilmente verificabile, $u$ è una soluzione debole di (2.1) se e solo se è una soluzione classica di (2.1).

**Lemma 2.0.6.** *Sia $x_0 \in \partial\Omega$. Esistono $\delta_{x_0} > 0$, $U_{x_0}$ e una carta $\varphi$ come in Definizione 2, tale che la metrica $\tilde{g} := (\varphi \circ \pi \circ \varphi^{-1})^*\xi$ sia in $C^{0,1}(U_{x_0})$ (cioè Lipschitziana), $\tilde{g}|_\Omega = \xi$, i simboli di Christoffel della metrica $\tilde{g}$ siano in $L^\infty(U_{x_0})$ e $d\varphi_0$ sia una trasformazione ortogonale. Inoltre, per $u \in H^1_1(\Omega \cap U_{x_0})$ e $f \in L^1(\Omega \cap U_{x_0})$ tali che*

$$\int_\Omega (\nabla u, \nabla\psi)\, dx = \int_\Omega f\psi\, dx \quad \text{per ogni } \psi \in C^\infty_c(\Omega \cap U_{x_0}), \tag{2.2}$$

*per ogni funzione $v : \Omega \cap U_{x_0} \to \mathbb{R}$, si definisce:*

$$\tilde{v} := v \circ \varphi \circ \pi \circ \varphi^{-1} \text{ in } U_{x_0}$$

*Quindi,* $\tilde{u} \in H_1^1(U_{x_0})$, $\tilde{u}|_\Omega = u$, $f \in L^1(U_{x_0})$ *e*

$$\Delta_{\tilde{g}} \tilde{u} = \tilde{f} \text{ nel senso delle distribuzioni,}$$

*dove* $\Delta_{\tilde{g}} := -\operatorname{div}_{\tilde{g}}(\nabla)$.
*Inoltre, nel senso delle distribuzioni si ha:*

$$\int_{U_{x_0}} (\nabla \tilde{u}, \nabla \psi)_{\tilde{g}} \, dv_{\tilde{g}} = \int_{U_{x_0}} \tilde{f} \psi \, dv_{\tilde{g}} \quad \text{per ogni } \psi \in C_c^\infty(U_{x_0}).$$

*Osservazione* 2.0.7. La notazione $\tilde{g} := (\varphi \circ \pi \circ \varphi^{-1})^* \xi$ è un lieve abuso di notazione. Infatti, la mappa non è un diffeomorfismo, e non è nemmeno $C^1$. Tuttavia, $\tilde{g}$ è ben definita e liscia al di fuori di $\partial\Omega$, e si dimostra che può essere estesa a una funzione Lipschitz.

*Dimostrazione.* Data una carta $\hat{\varphi}$ in $x_0$ definita su $B_{\tilde{\delta}_{x_0}}(0)$ come in Definizione 2, definiamo la mappa:

$$\varphi : B_d(0, \tilde{\delta}_{x_0}) \to \mathbb{R}^n \quad \text{con} \quad (x_1, x') \mapsto x_1 \nu(\hat{\varphi}(0, x')) + \hat{\varphi}(0, x').$$

Il Teorema della funzione inversa assicura l'esistenza di $\delta_{x_0} > 0$ e di un aperto $U_{x_0} \subset \mathbb{R}^n$ tali che $\varphi : B_{\delta_{x_0}}(0) \to U_{x_0}$ sia un diffeomorfismo $C^\infty$, come nella definizione 2.0.3. Inoltre, la metrica nel sistema di coordinate risultante soddisfa:

$$(\varphi^*\xi)_{11} = 1, \quad (\varphi^*\xi)_{1i} = 0 \quad \text{per ogni} \quad i \neq 1.$$

In particolare, si può assumere, con un'opportuna trasformazione lineare sull'iperpiano $\{x_1 = 0\}$, che $d\varphi_0$ sia una trasformazione ortogonale. È facile verificare che $((\varphi \circ \tilde{\pi})^*\xi)_{ij} = (\varphi^*\xi)_{ij} \circ \tilde{\pi}$ al di fuori di $\{x_1 = 0\}$ per ogni $i, j$, e quindi si può estendere $(\varphi \circ \tilde{\pi})^*\xi$ come funzione Lipschitziana su $U_{x_0}$, così come $\tilde{g} := (\varphi \circ \tilde{\pi} \circ \varphi^{-1})^*\xi$. Inoltre, se i simboli di Christoffel della metrica $g$ sono indicati con $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$, allora $\tilde{\Gamma}_{ij}^k \in L^\infty$. Di conseguenza, i coefficienti di $\Delta_g$ sono in $L^\infty$ e la parte principale è Lipschitz.

Sia $\psi \in C_c^\infty(U_{x_0})$. Per comodità, si definisce:

$$\pi : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_-^n \quad \text{con} \quad (x_1, x') \mapsto (-x_1, x').$$

Ovviamente, $\pi$ è un diffeomorfismo $C^\infty$. Con cambi di variabili, otteniamo:

$$\int_{U_{x_0}} (\nabla \tilde{u}, \nabla \psi)_g \, dv_g = \int_{\Omega \cap U_{x_0}} (\nabla u, \nabla(\psi + \psi \circ \varphi \circ \pi^{-1} \circ \varphi^{-1})) \, dx$$

e

$$\int_{U_{x_0}} \tilde{f}\psi \, dv_g = \int_{\Omega\cap U_{x_0}} f(\psi + \psi \circ \varphi \circ \pi^{-1} \circ \varphi^{-1})\, dx.$$

Da (2.2) segue quindi che $\Delta_g \tilde{u} = \tilde{f}$ in $U_{x_0}$ nel senso delle distribuzioni. $\square$

**Proposizione 2.0.8** (Regolarità). *Sia $x_0 \in \partial\Omega$ e sia $\delta > 0$ un numero reale. Sia $u \in W^{1,q}(\Omega \cap B_d(x_0,\delta))$ e $f \in L^p(\Omega \cap B_d(x_0,\delta))$, con $p, q > 1$, tali che*

$$\int_\Omega (\nabla u, \nabla\psi)\, dx = \int_\Omega f\,\psi\, dx \quad \textit{per ogni} \quad \psi \in C_c^\infty(\Omega \cap B_d(x_0,\delta)). \tag{2.3}$$

*Allora $u \in W^{2,p}(\Omega \cap B_d(x_0,\delta')$ per ogni $\delta' \in (0,\delta)$, e per ogni $r \in (1,p]$, esiste una costante $C = C(\Omega, p, q, r, \delta, \delta') > 0$ tale che*

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega\cap B_d(x_0,\delta')} \le C \left( \|f\|_{L^p(\Omega\cap B_d(x_0,\delta))} + \|u\|_{L^r(\Omega\cap B_d(x_0,\delta))} \right). \tag{2.4}$$

*Inoltre, se $u \in C^1(\Omega \cap B_d(x_0,\delta))$, allora $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ in $\partial\Omega \cap B_\delta(x_0)$. Se $f \in C^{0,\alpha}(\Omega \cap B_d(x_0,\delta))$ per qualche $\alpha \in (0,1)$, allora $u \in C^{2,\alpha}(\Omega \cap B_d(x_0,\delta')$ per ogni $\delta' \in (0,\delta)$ e per ogni $r > 1$, esiste una costante $C = C(\Omega, r, \alpha, \delta, \delta') > 0$ tale che*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega\cap B_d(x_0,\delta')} \le C \left( \|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega\cap B_d(x_0,\delta))} + \|u\|_{L^r(\Omega\cap B_d(x_0,\delta))} \right). \tag{2.5}$$

*Dimostrazione.* Dal Lemma 2.0.6, si deduce che, per $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo, le funzioni $u, f : \Omega \cap B_d(x_0, 2\varepsilon) \to \mathbb{R}$ possono essere estese a funzioni $\tilde{u}, \tilde{f} : B_d(x_0, 2\varepsilon) \to \mathbb{R}$ tali che:

$$\|\tilde{u}\|_{W^{1,q}(B_d(x_0,2\varepsilon))} \le \|u\|_{W^{1,q}(\Omega\cap B_d(x_0,2\varepsilon))}, \quad \|\tilde{f}\|_{L^p(B_d(x_0,2\varepsilon))} \le \|f\|_{L^p(\Omega\cap B_d(x_0,2\varepsilon))}.$$

Inoltre, $\tilde{u}$ e $\tilde{f}$ sono soluzioni deboli della seguente equazione:

$$\Delta_g \tilde{u} = \tilde{f} \quad \text{in } B_d(x_0, 2\varepsilon),$$

dove $\Delta_g$ rappresenta l'operatore Laplaciano associato alla metrica $g$ introdotta nel Lemma 2.0.6.

Applicando le stime interiori per equazioni ellittiche (cfr. 9.11 in [7]), si ottiene che $\tilde{u} \in W^{2,p}(B_d(x_0,\varepsilon))$ e che esiste una costante $C = C(\Omega, \varepsilon, p, r) > 0$ tale che:

$$\|\tilde{u}\|_{W^{2,p}(B_d(x_0,\varepsilon))} \le C \left( \|\tilde{f}\|_{L^p(B_d(x_0,2\varepsilon))} + \|\tilde{u}\|_{L^r(B_d(x_0,2\varepsilon))} \right).$$

Utilizzando le disuguaglianze sopra riportate e il fatto che $\tilde{u}|\Omega = u$, si deduce la disuguaglianza (2.4) della Proposizione con $\delta' = \varepsilon$. Applicando tale stima a tutti i punti di $\partial\Omega \cap B_d(x_0, \delta)$ e avvalendosi delle stime interiori e di un argomento di ricoprimento finito, si conclude che la disuguaglianza (2.4) vale per ogni $\delta' \in (0, \delta)$.

Nel caso in cui $u \in C^1(\Omega \cap B_d(x_0, \delta))$, si osserva che $u \in W^{2,p}(\Omega \cap B_d(x_0, \delta'))$ per ogni $\delta' \in (0, \delta)$. Integrando per parti l'equazione (2.3), si ottiene:

$$\int_\Omega (f - \Delta u)\psi dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \psi d\mathcal{H}^{n-1}$$

per ogni $\psi \in C_c^\infty(\Omega \cap B_d(x_0, \delta'))$. Considerando funzioni $\psi$ a supporto compatto in $B_d(x_0)$, segue che $\Delta u = f$ quasi ovunque in $B_d(x_0)$. Pertanto, si verifica che:

$$\int_{\partial B_d(x_0,\delta)} \frac{\partial u}{\partial n} d\mathcal{H}^{n-1} = 0$$

e dunque $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ su $\partial B_d(x_0, \delta)$.

Considerando ora il caso in cui $f \in C^{0,\alpha}(\Omega \cap B_d(x_0, \delta))$, si ha che $f \in L^p(\Omega \cap B_d(x_0, \delta'))$ per ogni $p > 1$, da cui si deduce $u \in W^{2,p}(\Omega \cap B_d(x_0, \delta'))$ per ogni $\delta' \in (0, \delta)$. Per il Teorema di immersione di Sobolev, segue che $u \in C^{1,\theta}(\Omega \cap B_d(x_0, \delta'))$ per ogni $\theta \in (0, 1)$, con una norma controllata da $\|u\|_r$ e $\|f\|_{C^{0,\alpha}}$. Attraverso una carta locale che appiattisce la frontiera, si può assumere che $\Omega = \mathbb{R}^n_-$ e che $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sul bordo $\partial\mathbb{R}^n_-$. Riscrivendo l'equazione $\Delta_g u = f$ nella forma:

$$-\tilde{g}^{ij}\partial_{ij}u = f - \tilde{g}^{ij}\Gamma^k_{ij}\partial_k u =: \hat{f} \quad \text{in } B_d(x_0, 2\varepsilon)$$

con $\hat{f} \in C^{0,\alpha}$ al di fuori di $x_1 = 0$, si applicano il 9.19 e il Teorema 6.2 in [7]. Da ciò, si ottiene che $u \in C^{2,\alpha}(\Omega \cap B_d(x_0, \delta'))$, con la seguente stima:

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega\cap B_d(x_0,\delta'))} \leq C \left(\|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega\cap B_d(x_0,\delta))} + \|u\|_{L^r(\Omega\cap B_d(x_0,\delta))}\right).$$

□

**Teorema 2.0.9.** *Sia $\Omega$ un dominio regolare e limitato in $\mathbb{R}^n$, e sia $f \in L^p(\Omega)$, $p > 1$, tale che*

$$\int_\Omega f\, dx = 0.$$

*Allora esiste $u \in W^{2,p}(\Omega)$ che è una soluzione debole del problema*

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.6}$$

*La funzione $u$ è unica a meno di una costante. Inoltre, esiste una costante $C(p) > 0$ tale che*

$$\|u - \overline{u}\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C(p)\|f\|_p.$$

*Se* $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ *per qualche* $\alpha \in (0,1)$*, allora* $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ *è una soluzione forte e esiste* $C(\alpha) > 0$ *tale che*

$$\|u - \overline{u}\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leq C(\alpha)\|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)}.$$

*Dimostrazione.* Sia $f \in L^2(\Omega)$. Per ogni $u \in H^1(\Omega)$, definiamo il funzionale

$$J(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \int_\Omega f u \, dx,$$

e consideriamo $F := \left\{u \in H^1(\Omega) \mid \int_\Omega u \, dx = 0\right\}$. Dalla disuguaglianza di Poincaré, esiste una costante $C > 0$ tale che $\|u\|_{L^2} \leq C\|\nabla u\|_{L^2}$ per ogni $u \in F$. Di conseguenza, esiste $C(\|f\|_{L^2}) > 0$ tale che

$$J(u) \geq \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2}^2 - \|f\|_{L^2}\|u\|_{L^2} \geq \|\nabla u\|_{L^2}\left(\frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2} - C\|f\|_{L^2}\right) \geq -C(\|f\|_{L^2})$$

per ogni $u \in F$. Quindi, esiste $m := \inf\{J(u) \mid u \in F\}$.

**Passo 1**: Dimostriamo che $m$ è un minimo. Sia $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$ una successione minimizzante, cioè $\lim\limits_{n\to+\infty} J(u_n) = m$. Dalle disuguaglianze sopra, si ha $\|u_n\|_{H^1} = O(1)$ e quindi esiste $u \in H^1(\Omega)$ tale che $u_n \rightharpoonup u$ debolmente in $H^1$ e fortemente in $L^2$ quando $n \to +\infty$ (a meno di considerare delle sottosuccessioni). Poiché il funzionale $J$ è convesso e continuo rispetto alla topologia forte di $H^1$, risulta essere semicontinuo inferiormente rispetto alla topologia debole di $H^1$. Otteniamo quindi

$$m \leq J(u) \leq \liminf_n J(u_n) = m,$$

quindi $m = J(u)$ è il minimo.

**Passo 2**: Dimostriamo che $u$ è una soluzione debole del problema. Sia $\psi \in H^1(\Omega)$. Poiché $\psi - \overline{\psi} \in F$, l'equazione di Eulero per $J$ in $u$ è

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \psi \, dx = \int_\Omega f(\psi - \overline{\psi}) \, dx.$$

Dato che $\int_\Omega f \, dx = 0$, si ottiene che $u$ è una soluzione debole di (2.6).

**Passo 3**: Supponiamo ora $f \in L^p(\Omega)$, $p > 1$. Dimostriamo che esiste una costante $C(p) > 0$ tale che

$$\|u - \overline{u}\|_{W^{2,p}} \leq C(p)\|f\|_{L^p}.$$

per ogni $u$ soluzione del problema. Dimostriamo per assurdo, supponendo che esistano successioni $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in W^{2,p}(\Omega)$ e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^p(\Omega)$ tali che $\|f_n\|_{L^p} = o(\|u_n - \overline{u}_n\|_{W^{2,p}})$ per $n \to +\infty$. Senza perdita di generalità, possiamo assumere che $\overline{u}_n = 0$ e $\|u_n\|_{W^{2,p}} = 1$ per ogni $in$. Quindi esiste $u \in W^{2,p}(\Omega)$ tale che $u_n \rightharpoonup u$ debolmente in $W^{2,p}$ e fortemente in $L^p$ quando $n \to +\infty$. Passando al limite nella definizione della soluzione debole, otteniamo

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \psi \, dx = 0 \quad \text{per ogni } \psi \in H^1(\Omega),$$

da cui, tramite la disuguaglianza di Poincaré, segue $u \equiv 0$. Utilizzando le stime interiori e le stime in (2.4) e una argomento di ricoprimento si ottiene che

$$1 = \|u_n\|_{W^{2,p}} \leq C(p)(\|f_n\|_{L^p} + \|u_n\|_{L^p})$$

per ogni $n$. Poiché $f_n \to 0$ e $u_n \to u \equiv 0$ in $L^p$ si ottiene una contraddizione.

**Passo 4**: Fissato $f \in L^p(\Omega)$, prendiamo una successione $(f_n)_n \in C_c^\infty(\Omega)$ tale che $f_n \to f$ in $L^p(\Omega)$ e senza perdita di generalità possiamo assumere che abbiano media nulla su $\Omega$. Poiché $f_n \in L^2(\Omega)$ per ogni $n$, segue dai passi precedenti che esiste una successione $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H^1(\Omega)$ di soluzioni debole del problema (2.6) per $f_n$. Dal passo 3 segue che

$$\|u_n - u_m\|_{W^{2,p}} \leq C(p)\|f_n - f_m\|_p$$

quindi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in $W^{2,p}$ e quindi esiste $u \in W^{2,p}$ tale che $u_n$ converga a $u$ in $W^{2,p}$. In particolare $u$ risolve (2.6) per $f$.

L'unicità è una conseguenza diretta della stima in del passo 3. La regolarità $C^{2,\alpha}$ si dimostra in modo analogo. □

### 2.0.2 Costruzione della funzione di Green-Neumann e stime asintotiche

Si definisce $c_d := \frac{1}{(d-2)\omega_{d-1}}$. Per $x \in \Omega$ si considera una funzione $u_x \in C^2(\Omega)$, che verrà specificata successivamente, e si pone

$$H_x := c_d|\cdot - x|^{2-d} + u_x.$$

In particolare, $H_x \in L^p(\Omega)$ per ogni $p \in \left[1, \frac{d}{d-2}\right)$.

Sia $u \in C^2(\Omega)$ una funzione arbitraria e si ottiene

$$\int_\Omega H_x \Delta u \, dy = u(x) + \int_\Omega u \Delta u_x \, dy + \int_{\partial\Omega} \left( -\frac{\partial u}{\partial n} H_x + u \frac{\partial}{\partial n} H_x \right) d\mathcal{H}^{d-1}.$$

Sia $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ tale che $\eta(t) = 0$ per $t \leq \frac{1}{3}$ e $\eta(t) = 1$ per $t \geq \frac{2}{3}$. Si definisce

$$v_x(y) := \eta\left(\frac{|x-y|}{d(x,\partial\Omega)}\right) c_d|x-y|^{2-d}$$

per ogni $y \in \Omega$. Si osserva che $v_x \in C^\infty(\Omega)$ e $v_x(y) = c_d|x-y|^{2-d}$ per ogni $y \in \Omega$ vicino a $\partial\Omega$.

Per il Teorema 2.0.9, esiste una funzione $u'_x \in C^{2,\alpha}(\Omega)$, con $\alpha \in (0,1)$, unica tale che

$$\begin{cases} \Delta u'_x = \Delta v_x - \overline{\Delta v_x} & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u'_x}{\partial n} = 0 & \text{su } \partial\Omega, \\ u'_x = 0. \end{cases}$$

Si pone quindi $u_x := u'_x - v_x \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ e $c_x := \overline{\Delta v_x}$, così che

$$\begin{cases} \Delta u_x = -c_x & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u_x}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial n}\left(c_d|\cdot - x|^{2-d}\right) & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

In questo modo, si ha $\frac{\partial}{\partial n} H_x = 0$ su $\partial\Omega$ e l'integrale diventa

$$\int_\Omega H_x \Delta u \, dy = u(x) - c_x \int_\Omega u \, dy - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} H_x \, d\mathcal{H}^{d-1}$$

per ogni $u \in C^2(\bar{\Omega})$. Ponendo $u \equiv 1$, si ottiene $c_x = \frac{1}{|\Omega|}$ e quindi

$$\int_\Omega H_x \Delta u \, dy = u(x) - \overline{u} - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} H_x \, d\mathcal{H}^{d-1}.$$

Infine, si definisce $G_x := H_x - \overline{H}_x$, e si ottiene:

$$\int_\Omega G_x \Delta u \, dy = u(x) - \overline{u} - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} G_x \, d\mathcal{H}^{d-1} \tag{2.7}$$

per ogni $u \in C^2(\Omega)$. Pertanto, $G$ è una funzione di Green per il problema (2.1). Inoltre, si ha che

$$G_x \in C^{2,\alpha}(\Omega \setminus \{x\}) \cap L^p(\Omega) \quad \text{per ogni } \alpha \in (0,1) \text{ e } p \in \left[1, \frac{d}{d-2}\right).$$

Usando che l'equazione (2.7) è vera per ogni $u \in C_c^\infty(\Omega \setminus \{x\})$ si trova che:

$$\begin{cases} \Delta G_x = -\frac{1}{|\Omega|} & \text{in } \Omega \setminus \{x\}, \\ \frac{\partial}{\partial n} G_x = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

**Stime $L^p$ e unicità**

**Lemma 2.0.10.** *Sia $x \in \bar{\Omega}$ e si assuma che esista una funzione $H_x \in L^1(\Omega)$ tale che valga*

$$\int_\Omega H_x \Delta u dy = u(x) - \bar{u}. \tag{2.8}$$

*per ogni $u \in C^2(\Omega)$ con $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ su $\partial\Omega$. Allora $H_x \in L^p(\Omega)$ per ogni $p \in \left[1, \frac{d}{d-2}\right)$ ed esiste una costante $C(p) > 0$ indipendente da $x$ tale che:*

$$\|H_x - \overline{H}_x\|_{L^p(\Omega)} \le C(p) \quad \textit{per ogni } x \in \Omega. \tag{2.9}$$

*Dimostrazione.* Dato $p$ come sopra, si definisce $q := \frac{p}{p-1} > \frac{d}{2}$. Si fissi $\psi \in C^\infty(\bar{\Omega})$ e si consideri $u \in C^2(\bar{\Omega})$ tale che

$$\begin{cases} \Delta u = \psi - \overline{\psi} & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{su } \partial\Omega, \\ \overline{u} = 0. \end{cases}$$

Dalle proprietà di $H_x$ si ha che

$$\int_\Omega (H_x - \overline{H_x})\psi \, dy = \int_\Omega H_x(\psi - \overline{\psi}) \, dy = u(x).$$

Grazie al Teorema di immersione di Sobolev, $W^{2,q}(\Omega)$ si immerge continuamente in $L^\infty(\Omega)$, e quindi, utilizzando il controllo della norma $W^{2,q}(\Omega)$ del Teorema 2.0.9, si ottiene:

$$\left| \int_\Omega (H_x - \overline{H_x})\psi \, dy \right| \le \|u\|_\infty \le C(q)\|u\|_{W^{2,q}(\Omega)} \le C'(q)\|\psi - \overline{\psi}\|_q \le C''(q)\|\psi\|_q,$$

per ogni $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$. Da ciò, segue per dualità che $H_x - \overline{H_x} \in L^p(\Omega)$ e che vale la disuguaglianza

$$\|H_x - \overline{H_x}\|_p \le C(p).$$

□

**Lemma 2.0.11** (Unicità)**.** *Sia $x \in \Omega$, si supponga che esistano $G_1, G_2 \in L^1(\Omega)$ tali che*

$$\int_\Omega G_i \Delta u \, dy = u(x) - \overline{u},$$

*per ogni $i \in \{1, 2\}$ e per ogni $u \in C^2(\Omega)$ tale che $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ su $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$. Allora esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che $G_1 - G_2 = c$ quasi ovunque su $\Omega$.*

*Dimostrazione.* Si definisca $g := G_1 - G_2$. Si ha che

$$\int_\Omega g\Delta u\, dy = 0,$$

per ogni $u \in C^2(\Omega)$ tale che $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ su $\partial\Omega$. Sia $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$. Dal Teorema 2.0.9, esiste $u \in C^2(\Omega)$ tale che

$$\Delta u = \psi - \overline{\psi} \text{ in } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ su } \partial\Omega, \quad \overline{u} = 0.$$

Pertanto, si ottiene:

$$\int_\Omega (g - \overline{g})\psi\, dy = \int_\Omega g(\psi - \overline{\psi})\, dy = \int_\Omega g\Delta u\, dy = 0.$$

Inoltre, dal Lemma 2.0.10, si ha che $g \in L^p(\Omega)$ per qualche $p > 1$. Ne segue che $g - \overline{g} = 0$ quasi ovunque, e quindi $G_1 = G_2 + \overline{g}$. □

**Lemma 2.0.12.** *Sia $G$ la funzione di Green per il problema* (2.1). *Allora esiste una costante $C(\Omega) > 0$ tale che*

$$|G(x, y)| \leq C(\Omega)|x - y|^{2-d} \tag{2.10}$$

*per ogni $x, y \in \Omega$ con $x \neq y$.*

*Dimostrazione.* La dimostrazione procede in sei passaggi.

**Passo 1.** Sia $K \subset \Omega$ un insieme compatto. Si dimostra che esiste una costante $C(K) > 0$ tale che

$$|G(x, y)| \leq C(K)|x - y|^{2-d} \tag{2.11}$$

per ogni $x \in K$ e ogni $y \in \Omega$ con $y \neq x$. Per dimostrare questo, si considerano le notazioni $u_x$, $u'_x$, e $v_x$ definite nella costruzione di $G$. Poiché $v_x \in C^2(\Omega)$ e $\|v_x\|_{C^2}$ è controllata da $d(x, \partial\Omega)^{-d}$, si ottiene $\|v_x\|_{C^2} \leq C(K)$. Da ciò, usando il Teorema 2.0.9, segue che $\|u'_x\|_\infty \leq C(K)$ e quindi $|H_x(y)| \leq C(K)|x - y|^{2-d}$ per ogni $y \in \Omega$ con $y \neq x$. Siccome $G_x = H_x - \overline{H}_x$, si conclude che $|G(x, y)| \leq C(K)|x - y|^{2-d}$.

**Passo 2.** Fissato $\delta > 0$, si dimostra che esiste una costante $C(\delta) > 0$ tale che

$$\|G_x\|_{C^2\left(\Omega\setminus\bar{B}_d(x,\delta)\right)} \leq C(\delta) \tag{2.12}$$

per tutti $x, y \in \Omega$ tali che $|x - y| \geq \delta$.

Questa affermazione segue direttamente dalle disuguaglianze della Proposizione (2.0.8). In particolare, per ogni $p > 1$, esiste una costante $C(\delta, p) > 0$ tale che

$$\|G_x\|_{C^2\left(\Omega\setminus\bar{B}_d(x,\delta)\right)} \leq C(\delta) + C(\delta)\,\|G_x\|_{L^p(\Omega)}\,. \tag{2.13}$$

Il risultato segue quindi direttamente dal Lemma 2.0.10, che garantisce che $\|G_x\|_{L^p(\Omega)}$ è uniformemente limitata per ogni $p \in \left[1, \frac{d}{d-2}\right)$.

Si considera ora un intorno di $\partial\Omega$. Fissato $x_0 \in \partial\Omega$, si sceglie una carta $\varphi$ come nel Lemma 2.0.6. Senza perdita di generalità, si assume che $\varphi : B_d(0, \delta) \to \mathbb{R}^d$, che $\varphi(0) = x_0$, e si definisce $V := \varphi\left(B_d(0, \delta)\right)$. Sia $x \in V \cap \Omega$; si considera l'estensione $\tilde{G}_x$ definita come $\tilde{G}_x := G_x \circ \varphi \circ \tilde{\pi} \circ \varphi^{-1}$. Si ha quindi:

$$\tilde{G}_x : V \setminus \{x, x^\star\} \to \mathbb{R},$$

dove $x^\star := \varphi \circ \pi^{-1} \circ \varphi^{-1}(x) \in \bar{\Omega}^c$.

Poiché $G_x$ è $C^{2,\alpha}$ al di fuori di $x$ e $\tilde{\pi}$ è lipschitziana, segue che $\tilde{G}_x \in W^{1,p}_{loc}\left(V \setminus \{x, x^\star\}\right)$ per ogni $q > 1$. Inoltre, dalle disuguaglianze del Lemma 2.0.10 si ottiene che $\tilde{G}_x \in L^p(V)$ per ogni $p \in \left[1, \frac{d}{d-2}\right)$ e che esiste una costante $C(p) > 0$, indipendente da $x$, tale che:

$$\left\|\tilde{G}_x\right\|_p \leq C(p).$$

**Passo 3.** Si dimostra che

$$\Delta_{\tilde{g}} \tilde{G}_x = \delta_x + \delta_{x^\star} - \frac{1}{|\Omega|} \quad \text{in } \mathcal{D}'(V). \tag{14}$$

Per provare questa affermazione, si consideri una funzione liscia $\psi \in C_c^\infty(V)$. Separando le regioni $V \cap \Omega$ e $V \cap \Omega^c$ e utilizzando un cambio di variabili, si ottiene:

$$\int_V \tilde{G}_x \Delta_{\tilde{g}} \psi \, dv_{\tilde{g}} = \int_{V\cap\Omega} G_x \Delta\left(\psi + \psi \circ \varphi \circ \pi^{-1} \circ \varphi^{-1}\right) dy.$$

Notando che $\frac{\partial}{\partial n}\left(\psi + \psi \circ \varphi \circ \pi^{-1} \circ \varphi^{-1}\right) = 0$ su $\partial\Omega$ (utilizzando il fatto che $\nu\left(\varphi\left(0, x'\right)\right) = d\varphi_{(0,x')}\left(\vec{e}_1\right)\big)$ ) e sfruttando la definizione della funzione di Green $G_x$, si ottiene:

$$\begin{aligned}\int_V \tilde{G}_x \Delta_{\tilde{g}} \psi \, dv_{\tilde{g}} &= \psi(x) + \psi\left(\varphi \circ \pi^{-1} \circ \varphi^{-1}(x)\right) - \frac{1}{|\Omega|} \int_{V\cap\Omega} \left(\psi + \psi \circ \varphi \circ \pi^{-1} \circ \varphi^{-1}\right) dy \\ &= \psi(x) + \psi\left(x^\star\right) - \frac{1}{|\Omega|} \int_V \psi \, dv_{\tilde{g}}.\end{aligned}$$

Questo dimostra la (14) e conclude l'affermazione.

**Passo 4.** Fissato $z \in V$, si dimostra che esiste una funzione $\Gamma_z : V \setminus \{z\} \to \mathbb{R}$ tale che soddisfa le seguenti proprietà:

$$\begin{cases} \Delta_{\tilde{g}} \Gamma_z = \delta_z & \text{in } \mathcal{D}'(V), \\ |\Gamma_z(y)| \leq C|z - y|^{2-d} & \text{per ogni } y \in V \setminus \{z\}, \\ \Gamma_z \in C^1(V \setminus \{z\}). & \end{cases} \tag{2.14}$$

Per provare questa affermazione, si definisce $r(y) := \sqrt{\tilde{g}_{ij}(z)(y-z)^i(y-z)^j}$ per ogni $y \in V$. Si verifica facilmente che $r^{2-d} \in C^\infty(V \setminus \{z\})$. Si definisce quindi $f := \Delta_{\tilde{g}} r^{2-d}$ su $V \setminus \{z\}$. Dalle proprietà di $\tilde{g}$ segue che $f \in L^\infty_{loc}(V \setminus \{z\})$. Inoltre, semplici calcoli mostrano l'esistenza di una costante $C > 0$ tale che:

$$|f(y)| \leq C|z-y|^{1-d} \quad \text{per ogni } y \in V \setminus \{z\}. \tag{2.15}$$

Calcolando $\Delta_{\tilde{g}} r^{2-d}$ in senso distribuzionale, si ottiene:

$$\Delta_{\tilde{g}} r^{2-d} = f + K_z \delta_z \quad \text{in } \mathcal{D}'(V),$$

dove $K_z := (d-2) \int_{\partial B_d(0,1)} (\nu(y), y)_{\tilde{g}(z)} r(y)^{2-d} \, dv_{\tilde{g}(z)} > 0$. Inoltre, $\lim_{z \to x_0} K_z = K_{x_0} > 0$.

Si definisce $h$ tale che:

$$\begin{cases} \Delta_{\tilde{g}} h = f & \text{in } V, \\ h = 0 & \text{su } \partial V. \end{cases}$$

Dalla (2.15) e dalla teoria ellittica segue che $h$ è ben definita e che $h \in W^{2,p}(V) \cap W^{1,p}_0(V)$ per ogni $p \in \left(1, \frac{d}{d-1}\right)$ e $h \in C^{1,\theta}_{loc}(V \setminus \{z\})$. Inoltre, esiste una costante $C > 0$ tale che:

$$\|h\|_{W^{2,p}} \leq C(p) \quad \text{per ogni } p \in \left(1, \frac{d}{d-1}\right). \tag{2.16}$$

Si dimostra che per ogni $\alpha \in (d-3, d-2)$, esiste una costante $C(\alpha) > 0$ tale che:

$$|h(y)| \leq C(\alpha)|y-z|^{-\alpha} \quad \text{per ogni } y \in V \setminus \{z\}.$$

Per dimostrare ciò, si consideri un parametro $\varepsilon > 0$ piccolo e si definiscono:

$$h_\varepsilon(y) := \varepsilon^\alpha h(z + \varepsilon y), \quad f_\varepsilon(y) := \varepsilon^{2+\alpha} f(z + \varepsilon y)$$

per ogni $y \in B_d(0,2) \setminus \bar{B}_d(0, \frac{1}{2})$. Si ha quindi che:

$$\Delta_{\tilde{g}_\varepsilon} h_\varepsilon = f_\varepsilon \quad \text{in } B_2(0) \setminus \bar{B}_{1/2}(0), \tag{2.17}$$

dove $\tilde{g}_\varepsilon = \tilde{g}(\varepsilon \cdot)$. Poiché $\alpha > d-3$, dalla (2.15) segue che:

$$|f_\varepsilon(y)| \leq C\varepsilon^{\alpha-(d-3)}|y|^{1-d} \leq 2^{d-1}C \tag{2.18}$$

per ogni $y \in B_d(0,2) \setminus \bar{B}_d(0, \frac{1}{2})$. Sia $p := \frac{d}{\alpha+2} \in \left(1, \frac{d}{d-1}\right)$ e $q := \frac{d}{\alpha}$. Un cambio di variabili, il Teorema di immersione di Sobolev e la (2.16) implicano:

$$\|h_\varepsilon\|_{L^q\left(B_2(0) \setminus \bar{B}_{1/2}(0)\right)} \leq C\|h\|_q \leq C\|h\|_{H^p_2} \leq C, \tag{2.19}$$

per ogni $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo. Dalle (2.17), (2.18), (2.19)e dal Teorema 8.17 del Gilbarg ([7]) segue che esiste una costante $C > 0$ tale che:

$$|h_\varepsilon(y)| \leq C \quad \text{per ogni } y \in \mathbb{R}^d \text{ tale che } |y| = 1.$$

Pertanto, tornando a $h$, si ottiene che $|h(y)| \leq C|y-z|^{-\alpha}$ per ogni $|y-z| = \varepsilon$. Poiché $\varepsilon$ può essere scelto arbitrariamente piccolo e $h$ è limitata al di fuori di $z$, l'affermazione è provata.

Si definisce ora $\Gamma_z := \frac{1}{K_z}\left(r^{2-d} - h\right)$. Dalle stime precedenti segue che $\Gamma_z$ soddisfa le proprietà enunciate in (2.14).

Definendo $\mu_x := \tilde{G}_x - \Gamma_x - \Gamma_{x^\star}$, dai Passi 2 e 3 segue che:

$$\Delta_{\tilde{g}}\mu_x = -\frac{1}{|\Omega|} \quad \text{in } \mathcal{D}'(V). \tag{2.20}$$

Inoltre, si ha che $\mu_x \in W^{1,q}\left(V \setminus \{x, x^\star\}\right)$ per ogni $q > 1$ e che:

$$\|\mu_x\|_p \leq C(p) \quad \text{per ogni } p \in \left[1, \frac{d}{d-2}\right). \tag{2.21}$$

**Passo 5.** Si dimostra che per ogni $V' \subset\subset V$, esiste una costante $C\left(V'\right) > 0$ tale che

$$\|\mu_x\|_{L^\infty(V')} \leq C\left(V'\right), \tag{2.22}$$

dove $C\left(V'\right)$ è indipendente da $x$.

Per dimostrare questa affermazione, si nota che, poiché $x \in \Omega \cap V$, si ha $\tilde{g} = \xi$ in un intorno di $x$. La metrica $\tilde{g}$ risulta quindi ipoellittica attorno a $x$, e dalla (2.20) segue che $\mu_x$ è $C^\infty$ in un intorno di $x$. Analogamente, attorno a $x^\star \in V \cap \bar{\Omega}^c$, si ha $\tilde{g} = \left(\varphi \circ \tilde{\pi} \circ \varphi^{-1}\right)^\star \xi$, che è anch'essa ipoellittica, e quindi $\mu_x$ è $C^\infty$ in un intorno di $x^\star$.

Segue che $\mu_x \in W^{1,q}(V)$ per ogni $q > 1$, e la (2.20) può essere riscritta come:

$$\int_V \left(\nabla\mu_x, \nabla\psi\right)_{\tilde{g}}\, dv_{\tilde{g}} = -\frac{1}{|\Omega|}\int_V \psi\, dv_{\tilde{g}}, \quad \text{per ogni } \psi \in C_c^\infty(V). \tag{2.23}$$

Dal Teorema 8.17 del Gilbarg ([7]) segue che $\mu_x \in L^\infty_{loc}(V)$ e che esiste una costante $C\left(V, V', p\right) > 0$ tale che:

$$\|\mu_x\|_{L^\infty(V')} \leq C\left(V, V', p\right)\left(1 + \|\mu_x\|_{L^p(V)}\right),$$

per ogni $p > 1$.

Scegliendo $p \in \left[1, \frac{d}{d-2}\right)$ e utilizzando la (2.21), si ottiene la (2.22) e l'affermazione è dimostrata.

**Passo 6.** Dalla definizione di $\mu_x$, dalla (2.22) e dalla (2.14) segue che esiste una costante $C\left(V'\right) > 0$ tale che:

$$\left|\tilde{G}_x(y)\right| \leq C + C|x-y|^{2-d} + |x^\star - y|^{2-d}, \tag{2.24}$$

per ogni $x, y \in V'$ con $x \neq y$.

È facile verificare che $|x^\star - y| \geq c|x-y|$ per ogni $x, y \in V' \cap \Omega$. Pertanto:

$$|G_x(y)| \leq C|x-y|^{2-d}, \tag{2.25}$$

per ogni $x, y \in V' \cap \Omega$ con $x \neq y$.

Si ricorda che $V'$ è un piccolo intorno di $x_0 \in \partial\Omega$. Combinando la (2.25) con il Passo 1, si ottiene che esiste una costante $\delta(\Omega) > 0$ tale che la (2.25) vale per ogni $x, y \in \Omega$ distinti con $|x-y| \leq \delta(\Omega)$. Per punti $x, y$ tali che $|x-y| \geq \delta(\Omega)$, la stima è già stata dimostrata nel Passo 2.

$\square$

# Capitolo 3

# Minimi dell'energia di Dirichlet con vincoli

Nel contesto del *machine learning* supervisionato, uno dei problemi fondamentali è l'apprendimento di una funzione $u$ che approssimi un insieme di dati etichettati, ovvero una collezione di coppie $(x_i, y_i)$ dove $x_i$ è un vettore di input e $y_i$ è il valore o l'etichetta associata. In particolare, nel caso *zero loss function (interpolazione)* l'obiettivo è trovare una funzione che soddisfi le condizioni $u(x_i) = y_i$ per ogni punto di training $i$. Questo è possibile solo quando il modello ha capacità sufficienti per adattarsi esattamente ai dati di training, portando a una situazione di interpolazione perfetta.

In questo contesto, il rischio è che una funzione $u$ che si adatta perfettamente ai dati di training possa essere eccessivamente complessa o oscillante, producendo errori su nuovi dati mai visti prima. Per contrastare questo rischio di *overfitting*, è comune introdurre un termine di *regolarizzazione*, che aggiunge un vincolo sulla funzione appresa per limitare la complessità del modello. Qui viene scelto come regolarizzatore l'*energia di Dirichlet*, che è una misura della "liscezza" della funzione. L'energia di Dirichlet, per una funzione definita su un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, è data da:

$$E(u) = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx,$$

dove $E(u)$ è la norma $L^2$ del gradiente di $u$. L'energia di Dirichlet misura quanto rapidamente varia $u$ nello spazio, penalizzando oscillazioni eccessive: minimizzare questa quantità equivale a cercare una soluzione che sia il più possibile liscia, evitando cambiamenti bruschi.

### 3.0.1 Caso continuo: problema mal posto

Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, insieme aperto, limitato e regolare, $\{x_1, x_2, \dots x_N\} \subset \Omega$ con $N \geq 2$ e $\{y_1, y_2, \dots y_N\} \subset \mathbb{R}$, cerchiamo una soluzione al seguente problema:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \setminus \{x_1, x_2, ..., x_N\} \\ u(x_i) = y_i & \text{per ogni } i = 1, \dots, N \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{in } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

Per prima cosa ci chiediamo se esiste una soluzione $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ e, per rispondere a questa domanda, ci servirà il seguente risultato preliminare.

**Lemma 3.0.1.** *Sia $u$ una funzione limitata e continua in $\Omega$ e armonica in $\Omega \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, allora $u$ è armonica in $\Omega$.*

*Dimostrazione.* Senza perdita di generalità, si può assumere che $u \geq 0$ in $\Omega$ Si consideri un $r_1 > 0$ tale che $B_d(x_1, r_1) \subset\subset \Omega$ e che $x_i \notin B_d(x_1, r_1)$ per ogni $i \neq 1$. Per i corollari 1.1.11 e 1.1.12 del Teorema di Bôcher, si ha:

$$u(x) = v(x) \quad \text{con } v \text{ armonica in } B_d(x_1, r_1).$$

Si pone $v(x) = u(x)$ in $\Omega \setminus B_d(x_1, r_1)$; in tal caso, $v$ risulta essere armonica in $\Omega \setminus \{x_2, x_3, \dots, x_N\}$ ed è continua e limitata in $\Omega$. Ripetendo questo procedimento per tutti i punti $x_i$, si conclude che $u$ è armonica in $\Omega$. □

Si può enunciare il seguente Teorema.

**Teorema 3.0.2.** *Il problema* (3.1) *ammette una soluzione $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ se e solo se $y_i = y_j$ per ogni $i, j = 1, \dots, N$.*

*Dimostrazione.* $\Rightarrow$. Si supponga che esista una soluzione $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ per il problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_N\} \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

In particolare, la funzione $u$ è limitata, continua in $\Omega$ e armonica in $\Omega \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$. Per il Lemma 3.0.1, si conclude che $u$ è armonica in tutto $\Omega$. Si deve quindi cercare una soluzione al problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Per fare ciò, si consideri $\varphi \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ e si moltiplichi l'equazione $\Delta u = 0$ per $\varphi$ e si integri per parti:

$$0 = \int_\Omega \Delta u \varphi \, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \varphi \, d\mathcal{H}^{d-1} - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx.$$

Poiché si sa che $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$, si ottiene:

$$0 = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx \Rightarrow \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = 0.$$

Scegliendo $\varphi = u$ si conclude che

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx = 0 \Rightarrow |\nabla u|^2 = 0 \Rightarrow \nabla u = 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Ne segue che $u$ è costante in tutto $\Omega$, ovvero $u(x) = c$ per ogni $x \in \Omega$. Impostando le condizioni di Dirichlet del problema (3.1), si ottiene che $y_i$ sono uguali tra loro, e quindi la soluzione al problema è $u(x) = y$.

$\Leftarrow$. Sia $y \in \mathbb{R}$ tale che $y_i = y$ per ogni $i$. Allora la funzione $u(x) = y$ è una soluzione del problema (3.1), poiché soddisfa sia $\Delta u = 0$ in $\Omega$ che $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ su $\partial\Omega$. □

Tale risultato non è soddisfacente poiché è necessario imporre l'uguaglianza di tutte le condizioni di Dirichlet. Si prova a rilassare il problema e si cerca una soluzione al problema variazionale associato:

$$\inf \left\{ \int_{\Omega \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}} |\nabla u|^2 \quad \text{t.c. } u \in H^1(\Omega) \text{ e } u(x_i) = y_i \ \forall i \right\}. \tag{3.2}$$

**Teorema 3.0.3.** *L'estremo inferiore del problema* (3.2) *è uguale a* 0*. Inoltre per ogni successione minimizzante* $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *si ha che* $\varphi_n - \bar{\varphi}_n$ *converge a* 0 *in* $L^p(\Omega)$ *per ogni* $p \in [2, 2^*]$.

*Dimostrazione.* Sia $\varepsilon > 0$ tale che $B_d(x_i, 2\varepsilon) \subset\subset \Omega$ per ogni $i$ e $B_d(x_i, 2\varepsilon) \cap B_d(x_j, 2\varepsilon) = \emptyset$ se $i \neq j$. Si consideri $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ cut-off tale che

i) $\varphi = 1$ in $B_d(0, 1)$;

ii) $0 \leq \varphi \leq 1$ in $B_d(0, 2) \setminus B_d(0, 1)$;

iii) $\varphi = 0$ in $\mathbb{R}^d \setminus B_d(0, 2)$.

Si consideri quindi $\varphi_\varepsilon = \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$; di conseguenza, si ha $\nabla\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\nabla\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. Si ottiene:

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\varphi_\varepsilon(x)|^2 dx = \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\mathbb{R}^d} \left|\nabla\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|^2 dx = \varepsilon^{d-2}\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\varphi(y)|^2 dy \quad \text{con } y = \frac{x}{\varepsilon}.$$

Si consideri quindi $u_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^N y_i\varphi_\varepsilon(x - x_i)$; si ha:

i) $u_\varepsilon \in H^1(\Omega)$;

ii) $u_\varepsilon(x_i) = y_i$;

iii) $\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2}^2 \leq \varepsilon^{d-2}C\|\nabla\varphi\|_{L^2}^2$;

dove $C$ è uguale a $\sum_{i=1}^N y_i^2$. Pertanto, si ha:

$$\begin{aligned} 0 \leq \inf & \left\{\int_{\Omega\setminus\{x_1,x_2,\dots,x_N\}} |\nabla u|^2 \ \text{ t.c. } u \in H^1(\Omega) \text{ e } u(x_i) = y_i \ \forall i\right\} \\ & \leq \|\nabla u\|_{L^2}^2 \leq \varepsilon^{d-2}C\|\nabla\varphi\|_{L^2}^2. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon$, si conclude che l'estremo inferiore è uguale a 0.

Si considera ora $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione minimizzante per il problema (3.2). Allora, per la disuguaglianza di Poincaré, si ha che

$$\|\varphi_n - \bar{\varphi}_n\|_{L^{2^*}} \leq C\|\nabla\varphi_n\|_{L^2} \to 0,$$

dove $\bar{\varphi}_n = \frac{1}{|\Omega|_d}\int_\Omega \varphi_n dx$. Quindi, $(\varphi_n - \bar{\varphi}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 in $\in L^{2^*}(\Omega)$, e in particolare, per le inclusioni degli spazi $L^p$, si ha che $(\varphi_n - \bar{\varphi}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 in $\in L^p(\Omega)$ per ogni $p \in [2, 2^*]$. □

### 3.0.2 Problema rilassato sul dominio perforato

Sia $\varepsilon > 0$ tale che $B_d(x_i, 2\varepsilon) \subset\subset \Omega$ e $B_d(x_i, 2\varepsilon) \cap B_d(x_j, 2\varepsilon) = \emptyset$ se $i \neq j$ per ogni $i, j = 1, ..., N$, e si consideri il problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^N B_d(x_i, \varepsilon) \\ u(x) = y_i & \text{se } x \in B_d(x_i, \varepsilon) \text{ per ogni } i = 1, \dots, N \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{in } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.4}$$

*Notazione* 3.0.4. $\Omega_\varepsilon := \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^N B_d(x_i, \varepsilon)$

**Proposizione 3.0.5.** *Esiste una soluzione per il problema* (3.4) *se e solo se esiste il minimo del seguente problema:*

$$\min\left\{\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^2 \ : \ u \in H^1(\Omega),\ u(x) = y_i \text{ se } x \in B_d(x_i,\varepsilon)\ \forall i\right\}. \tag{3.5}$$

*Inoltre, tale soluzione è unica.*

*Dimostrazione.* Per ogni $u \in H^1(\Omega)$, si definisce il funzionale

$$J(u) = \|\nabla u\|^2_{H^1},$$

e si consideri l'insieme $F = \{u \in H^1 \ : \ u(x) = y_i \text{ se } x \in B_d(x_i,\varepsilon)\ \forall i\}$. Si osserva che $J(u) \geq 0$ per ogni $u \in H^1(\Omega)$. Quindi esiste $m = \inf_F J(u)$.

**Passo 1**. Si mostra che $m = \inf_F J(u)$ è un minimo. Sia $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$ una successione minimizzante, quindi esiste $u \in H^1$ tale che $u_n \overset{H^1}{\rightharpoonup} u$ e $u_n \overset{L^2}{\to} u$ (a meno di sottosuccessioni). Di conseguenza si ha che $u \in F$ perché, visto che che $u_n \overset{L^2}{\to} u$, esiste una sottosuccessione $(u_{n_k})$ che converge quasi ovunque a $u$, da cui segue che per ogni $i$

$$y_i = \lim_{k\to+\infty} u_{n_k}(x) = u(x) \quad \text{per quasi ogni } x \in B_d(x_i,\varepsilon),$$

e quindi $u \in F$. Quindi, per la semicontinuità inferiore di $J$ come nel teorema 2.0.9, si ha:

$$\lim_n J(u_n) = m \leq J(u) \leq \liminf_n J(u_n) = m$$

Questo implica che $m$ è un minimo.

**Passo 2**. Esiste un minimo per (3.5) se e solo se esiste una soluzione al problema per (3.4). Sia $u$ l'argmin di (3.5), $\varphi \in C_c^\infty(\Omega_\varepsilon)$, e si definisca $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ come $f(t) = \frac{1}{2}J(u + t\varphi)$. Si osservi che $u + t\varphi \in F$ e che $f$ sia continua e:

$$f'(t) = \int_{\Omega_\varepsilon} \langle \nabla u, \nabla\varphi\rangle_{\mathbb{R}^n}\, dx + t\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla\varphi|^2\, dx.$$

Poiché $u$ è l'argmin, si ha che $f'(0) = 0$, ovvero:

$$0 = \int_{\Omega_\varepsilon} \langle \nabla u, \nabla\varphi\rangle_{\mathbb{R}^n}\, dx.$$

Poiché questa relazione vale per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\Omega_\varepsilon)$, si conclude che $u$ è un minimo se e solo se $u$ è soluzione di (3.2).

**Passo 3**. La soluzione è unica. Per ogni $v \in F$, ponendo $\varphi = u - v$, si ottiene che :

$$J(v) = J(u) + \frac{1}{2}\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla(u - v)|^2\, dx.$$

Infatti $J(v) = F(1) = J(u + 1 \cdot \varphi)$. Siano $u_1, u_2$ due argmin di $F$. Si ha:

$$J(u_2) = J(u_1) + \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla(u_1 - u_2)|^2 \, dx.$$

Poiché $J(u_1) = J(u_2)$, segue che:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla(u_1 - u_2)|^2 \, dx = 0.$$

Per la disuguaglianza di Poincaré (1.2.12):

$$\|(u_1 - u_2) - \overline{(u_1 - u_2)}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla(u_1 - u_2)\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Quindi $u_1 = u_2 + c$, dove $c \in \mathbb{R}$. Poiché $u_1, u_2 \in F$, si ha che $u_1(x) = u_2(x) = y_i$ su $B_d(x_i, \varepsilon)$ per ogni $i = 1, \ldots, N$. Questo implica $c = 0$ e $u_1 = u_2$ quasi ovunque. $\square$

Per poter caratterizzare meglio la soluzione di questo problema variazionale enunciamo un Lemma tecnico che ci permette di avere stime a priori con dati al bordo Dirichlet qualunque, non necessariamente costanti.

**Lemma 3.0.6.** *Siano $\varepsilon > 0$ tale che $B_d(x_i, 2\varepsilon) \subset\subset \Omega$ e $B_d(x_i, 2\varepsilon) \cap B_d(x_j, 2\varepsilon) = \emptyset$ se $i \neq j$, $f \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ e $u_\varepsilon$ soluzione del seguente problema:*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega_\varepsilon \\ u(x) = f(x) & \text{se } x \in \partial B_d(x_i, \varepsilon) \text{ per ogni } i = 1, \ldots, N \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{in } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.6}$$

*con $u_\varepsilon = f$ in $B(x_i, \varepsilon)$ per ogni $i$. Allora si ha che esiste $C(f) > 0$ tale che*

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C(f)(\varepsilon^d + \varepsilon^{d-2})^{\frac{1}{2}} \tag{3.7}$$

*Inoltre sia*

$$w_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon^{d-2}}{c_d} \sum_{i=0}^{N} (f(x_i) - \bar{y})) G_{x_i}(x) + \bar{y} \tag{3.8}$$

*funzione $C^{2,\alpha}(\Omega_\varepsilon)$, dove $G_{x_i}$ è la funzione di Green-Neumann centrata in $x_i$ e $\bar{y} = \dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{i=0}^{N} f(x_i)$. Sia $v_\varepsilon = u_\varepsilon - w_\varepsilon$, allora si ha che*

*i.* $\|v_\varepsilon\|_\infty = O(\varepsilon)$

*ii.* $\bar{v} = O(\varepsilon)$

*iii.* $\bar{u}_\varepsilon = \bar{w}_\varepsilon + O(\varepsilon)$

*Dimostrazione.* **Passo 1**. Dimostriamo che vale (3.7). Come nella Proposizione (3.0.5) si ha $u_\varepsilon$ è soluzione del problema (3.6) se e solo se $u_\varepsilon = \text{argmin}\{\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^2 \ : \ u \in H^1(\Omega)$, $u(x) = f$ se $x \in B_d(x_i, \varepsilon)\ \forall i\}$ e quindi $u_\varepsilon$. Si consideri $\eta_\varepsilon \in C_c^\infty(\Omega)$ cut-off tale che

$$\eta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 \text{ in } B_d(0,\varepsilon) \\ 1 - \frac{|x|-\varepsilon}{\varepsilon} \text{ in } B_d(0,2\varepsilon) \setminus B_d(0,\varepsilon) \\ \eta_\varepsilon = 0 \text{ in } \mathbb{R}^d \setminus B_d(0,2) \end{cases}$$

e sia $\eta_i(x) = \eta_\varepsilon(x - x_i)$. Allora si ha che $\displaystyle\sum_{i=1}^N \eta_i f \in H^1(\Omega)$ e $\displaystyle\sum_{i=1}^N \eta_i f = f$ in $B_d(x_i, \varepsilon)$ per ogni $i$. Poiché $u_\varepsilon = \text{argmin}\{\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^2 \ : \ u \in H^1(\Omega),\ u(x) = f$ se $x \in B_d(x_i,\varepsilon)\ \forall i\}$ si ha che:

$$\|\nabla u_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \int_{\Omega_\varepsilon} |\sum_{i=1}^N \nabla(\eta_i f)|^2 \ dx \leq N \int_{\Omega_\varepsilon} \sum_{i=1}^N |\nabla(\eta_i f)|^2 \ dx$$

Dove nella seconda disuguaglianza si è usato che $(\sum_{i=0}^N a_i)^2 \leq N \sum_{i=0}^N a_i^2$. Per ogni $i$ si ha che:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla(\eta_i f)|^2 \ dx \leq \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla \eta_i|^2 |f|^2 + 2\nabla f \cdot \nabla \eta_i + \eta_i^2 |\nabla f|^2 dx$$

Si osservi che $|\nabla \eta_i| = \frac{1}{\varepsilon}$ e il supporto di $\eta_i, \nabla \eta_i \subseteq B_d(x_i, 2\varepsilon)$ quindi:

$$\begin{aligned} &\leq \int_{B_d(x_i,2\varepsilon)\setminus B_d(x_i,\varepsilon)} |\nabla \eta_i|^2 |f|^2 + 2|\nabla f|^2 |\nabla \eta_i|^2 + |\nabla f|^2 \ dx \\ &\leq \left(\frac{1}{\varepsilon^2}\|f\|^2_\infty + 2\|\nabla f\|^2_\infty \frac{1}{\varepsilon^2} + \|\nabla f\|^2_\infty\right) \int_{B_d(x_i,2\varepsilon)\setminus B_d(x_i,\varepsilon)} dx \\ &= \left(\frac{1}{\varepsilon^2}\|f\|^2_\infty + 2\|\nabla f\|^2_\infty \frac{1}{\varepsilon^2} + \|\nabla f\|^2_\infty\right) \omega_d \varepsilon^d = C'(f)(\varepsilon^d + e^{d-2}) \end{aligned}$$

dove $C'(f) = \omega_d \cdot \max\{\|f\|^2_\infty, \|\nabla f\|^2_\infty\}$. Quindi, tornando alla disuguaglianza iniziale, si ottiene che

$$\|\nabla u_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq NC'(f)(\varepsilon^d + \varepsilon^{d-2})$$

Inoltre, visto che $u_\varepsilon = f$ in $B_d(x_i, \varepsilon)$, si ha che

$$\begin{aligned} \|\nabla u_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} &= \sum_{i=0}^N ||\nabla u_\varepsilon||^2_{L^2(B_d(x_i,\varepsilon)=} = \sum_{i=0}^N ||f||^2_{L^2(B_d(x_i,\varepsilon)} \leq \sum_{i=0}^N ||f||^2_\infty \omega_d \varepsilon^d \\ &= N\|f\|^2_\infty \omega_d \varepsilon^d \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}\|\nabla u_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} &= \|\nabla u_\varepsilon\|^2_{L^2(\bigcup_{i=1}^N B_d(x_i,\varepsilon))} + \|\nabla u_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \\ &\leq NC'(f)(\varepsilon^d + \varepsilon^{d-2}) + N|f||^2_\infty \omega_d \varepsilon^d \leq C(f)(\varepsilon^d + \varepsilon^{d-2})\end{aligned}$$

da cui segue (3.7).

**Passo 2.** Sia $v_\varepsilon = u_\varepsilon - w_\varepsilon$; allora $v_\varepsilon$ è soluzione del problema

$$\begin{cases}\Delta v = 0 & \text{in } \Omega_\varepsilon \\ v(x) = f(x) - f(x_i) + \frac{\varepsilon^{d-2}}{c_d}(u_{x_i}(x) + \sum_{j\neq i}(f(x_j) - \bar{y})G_{x_j}(x)) & \text{se } x \in \partial B_d(x_i,\varepsilon) \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{in } \partial\Omega\end{cases}$$

. Si dimostra in modo analogo alla Proposizione (2.0.8) che $v_\varepsilon$ è $C^{2,\alpha}(\Omega)$ visto che il dato al bordo è $C^{2,\alpha}(\Omega)$ (basta estendere la funzione $v_\varepsilon(x) = f(x) - f(x_i) + \frac{\varepsilon^{d-2}}{c_d}(u_{x_i}(x) + \sum_{j\neq i}(f(x_j) - \bar{y})G_{x_j}(x))$ in $B(x_i,\varepsilon)$ per ogni $i$ ). Per semplicità si definisce $g_i(x) = \frac{1}{c_d}(u_{x_i}(x) + \sum_{j\neq i}(f(x_j) - \bar{y})G_{x_j}(x))$. Per il principio del massimo si ha che il massimo di $v_\varepsilon$ è raggiunto sul bordo di $\Omega_\varepsilon$,; e visto che su $\partial\Omega$ si ha condizione di Neumann omogenea per il Lemma di Hopf si ha che il massimo è raggiunto su $\bigcup_{i=1}^N \partial B_d(x_i,\varepsilon)$. In $B_d(x_i,\varepsilon)$ si ha che:

$$|v_\varepsilon(x)| \leq |f(x - f(x_i)| + \varepsilon^{d-2}|g_i(x)| \leq Lipf|x - x_i| + \varepsilon^{d-2}\|g_i\|_\infty \leq Lipf\ \varepsilon + \varepsilon^{d-2}\|g_i\|_\infty$$

Dove nella seconda disuguaglianza si è sfruttato che la derivata prima di $f$ è limitata e quindi $f$ è Lipschitz. Quindi

$$\|v_\varepsilon\|_\infty \leq \varepsilon(Lipf + \varepsilon^{d-3}C)$$

dove $C = \max\{\|g_i\|_\infty\}$. per $\varepsilon \to 0$ si ha che $\|v_\varepsilon\|_\infty = O(\varepsilon)$ e quindi anche $\bar{v}_\varepsilon = O(\varepsilon)$. Infine si conclude che $\bar{u}_\varepsilon = -\bar{v}_\varepsilon + \bar{w}_\varepsilon$; e visto che la funzione di Green-Neumann $G_{x_i}$ ha media nulla si ha che $\bar{w}_\varepsilon = \bar{y}$ e quindi $\bar{u}_\varepsilon = \bar{y} + O(\varepsilon)$

□

Grazie a questo Lemma tecnico si riuscirà a stimare il comportamento asintotico della soluzione del problema (3.4).

**Teorema 3.0.7.** *Sia $u_\varepsilon$ una soluzione del problema* (3.4)*, estesa in $B_d(x_i,\varepsilon)$ come $u_\varepsilon = y_i$ per ogni $i$. Esiste una costante $C > 0$ tale che:*

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C^{\frac{1}{2}}(\varepsilon^d + \varepsilon^{d-2})^{\frac{1}{2}}. \tag{3.9}$$

*Definendo $v_\varepsilon = u_\varepsilon - w_\varepsilon$ come nel Lemma 3.0.6, e ponendo $v = \frac{v_\varepsilon}{\varepsilon^{d-2}}$, valgono le seguenti proprietà:*

*i.* $\bar{v} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g_i(x_i) + O(\varepsilon)$, *dove $g_i$ sono definiti nella dimostrazione del Lemma 3.0.6;*

*ii.* $\|v - \bar{v}\|_{H^1(\Omega)} \overset{\varepsilon\to 0}{\to} 0$;

*iii.* $\|v - \bar{v}\|_{L^p(\Omega)} \overset{\varepsilon\to 0}{\to} 0$ *per ogni* $p \in [1, \infty)$;

*iv.* $\|v\|_\infty < +\infty$.

*Inoltre, $u_\varepsilon$ può essere rappresentata come:*

$$u_\varepsilon(x) = \bar{y} + \varepsilon^{d-2} w(x) + \varepsilon^{d-2} v(x), \tag{3.10}$$

*dove* $w(x) = \frac{w_\varepsilon}{\varepsilon^{d-2}} - \bar{y}$, *e si verificano le seguenti stime:*

*v.* $\|u_\varepsilon - \bar{y}\|_{L^p(\Omega)} \overset{\varepsilon\to 0}{\to} 0$ *per ogni* $p \in [1, \infty)$;

*vi.* $\frac{u_\varepsilon - \bar{y}}{\varepsilon^{d-2}} \overset{\varepsilon\to 0}{\to} w(x) + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g_i(x_i)$ *in* $L^p(\Omega)$ *per ogni* $p \in [1, \frac{d}{d-2})$;

*vii.* $\|u_\varepsilon - \bar{y}\|_{L^\infty(K)} \overset{\varepsilon\to 0}{\to} 0$ *per ogni* $K \subset \Omega \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ *compatto.*

*Dimostrazione.* Sia $\eta_i$ cut-off definita come nel Lemma 3.0.6 e si consideri $f(x) = \sum_{i=0}^{N} f(x)\eta_i(x)$. Allora possiamo riscrivere il problema (3.4) nel seguente modo

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega_\varepsilon) \\ u(x) = f(x) & \text{se } x \in \partial B_d(x_i, \varepsilon) \text{ per ogni } i = 1, \ldots, N \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{in } \partial\Omega \end{cases}$$

Quindi per il Lemma 3.0.6 esiste $C(f) > 0$ tale che

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C(f)^{\frac{1}{2}}(\varepsilon^d + e^{d-2})$$

e per Poincaré (1.2.12) si ha che

$$\|u_\varepsilon - \bar{u}_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C(f)^{\frac{1}{2}}(\varepsilon^d + e^{d-2}).$$

Sia $v_\varepsilon = u_\varepsilon - w_\varepsilon$, allora si ha che $v_\varepsilon$ è soluzione del problema

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{in } \Omega_\varepsilon \\ v(x) = \varepsilon^{d-2} g_i(x) & \text{se } x \in \partial B_d(x_i, \varepsilon) \text{ per ogni } i = 1, \ldots, N \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{in } \partial\Omega \end{cases}$$

dove $g_i$ sono definite come nella dimostrazione del Lemma 3.0.6 e, estendendo $v_\varepsilon$ in $B_d(x_i, \varepsilon)$ come $v_\varepsilon = g_i$, per il principio del massimo si ha che $\|v_\varepsilon\|_\infty = C\varepsilon^{d-2}$ con $C = \max\{\|g_i\|_\infty\}$. Applicando il Lemma 3.0.6 a $v_\varepsilon$, mettendo come condizione di Dirichlet $g(x) = \varepsilon^{d-2}\sum_{i=0}^N g_i(x)\eta_i(x)$ (che è una funzione $C^2(\Omega)$ ), si ottiene che

$$\|\nabla v_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C(g)(\varepsilon^d + \varepsilon^{d-2})^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{d-2}$$

e

$$\bar{v}_\varepsilon = \frac{\varepsilon^{d-2}}{N}\sum_{i=0}^N g(x_i) + O(\varepsilon^{d-1}).$$

Sia $v = \frac{v_\varepsilon}{\varepsilon^{d-2}}$ allora, per le disuguaglianze su $v_\varepsilon$, si ottiene che:

i. $\bar{v} = \frac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^N g_i(x) + O(\varepsilon)$;

ii. $\|v - \bar{v}\|_{H^1(\Omega)} \overset{\varepsilon\to 0}{\to} 0$;

iii. $\|v\|_\infty < +\infty$;

iv. $\|v - \bar{v}\|_{L^p(\Omega)} \overset{\varepsilon\to 0}{\to} 0$ con $p \in [1, 2^*]$ per le inclusioni degli spazi $L^p$.

Inoltre $v - \bar{v} \in L^\infty(\Omega)$ e per $p > 2^*$ si ha che

$$\begin{aligned}\|v - \bar{v}\|^p_{L^p(\Omega)} &= \int_\Omega |v(x) - \bar{v}|^p dx = \int_\Omega |v(x) - \bar{v}|^2 |v(x) - \bar{v}|^{p-2} dx \\ &\leq \|v - \bar{v}\|^{p-2}_\infty \|v - \bar{v}\|^2_{L^2(\Omega)} \overset{\varepsilon\to 0}{\to} 0.\end{aligned}$$

Si consideri ora l'espressione $u_\varepsilon(x) = \bar{y} + \varepsilon^{d-2}w(x) + \varepsilon^{d-2}v(x)$ in $\Omega_\varepsilon$ e $u_\varepsilon = y_i$ in $B_d(x_i, \varepsilon)$. Si vuole dimostrare che $\|u_\varepsilon - \bar{y}\||_{L^2(\Omega)} \to 0$. Osservando che $\|u_\varepsilon - \bar{y}\||^2_{L^2(\Omega)} = \|u_\varepsilon - \bar{y}\||^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|u_\varepsilon - \bar{y}\|^2_{L^2(\bigcup_{i=1}^N B_d(x_i,\varepsilon))}$, si ha che

$$\|u_\varepsilon - \bar{y}\|^2_{L^2(\bigcup_{i=1}^N B_d(x_i,\varepsilon))} = \sum_{i=0}^N |y_i - \bar{y}|^2 \omega_d \varepsilon^d \to 0$$

e

$$\begin{aligned}\|u_\varepsilon - \bar{y}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} &\leq \frac{\varepsilon^{d-2}}{c_d}\sum_{i=0}^N \|G_{x_i}(\cdot)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}|y_i - \bar{y}| + \|v_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon} \\ &\leq \frac{\varepsilon^{d-2}}{c_d}\sum_{i=0}^N \|G_{x_i}(\cdot)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}|y_i - \bar{y}| + \|v_\varepsilon\|_\infty |\Omega_\varepsilon|_d.\end{aligned}$$

Dal fatto che per ogni $i$ si ha:

$$\begin{aligned}(\varepsilon^{d-2})^2 \|G_{x_i}(\cdot)\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} &\leq \varepsilon^{2d-4} \int_{\Omega_\varepsilon} |G_{x_i}(x)|^2 \, dx \leq \varepsilon^{2d-4} C(\Omega) \int_{\Omega_\varepsilon} |x - x_i|^{4-2} dx \\ &\leq \varepsilon^{2d-4} C(\Omega) \int_{B_d(x_i, \mathrm{diam}\Omega) \setminus B_d(x_i, \varepsilon)} |x - x_i|^{4-2} dx,\end{aligned}$$

dove nella prima disuguaglianza si è usato la stima della funzione di Green-Neumann(2.10) e nella seconda si è ingrandito il dominio di integrazione, segue che:

$$\begin{aligned}\varepsilon^{2d-4} \|G_{x_i}(\cdot)\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} &\leq \varepsilon^{2d-4} C(\Omega) \int_{B_d(x_i, \mathrm{diam}\Omega) \setminus B_d(x_i, \varepsilon)} |x - x_i|^{4-2} dx \\ &\leq \varepsilon^{2d-4} C(\Omega) \int_{B_d(0,1)} \int_{\varepsilon}^{\mathrm{diam}\Omega} r^{4-2d} r^{d-1} \, dr \, d\mathcal{H}^{d-1} \\ &= \varepsilon^{2d-4} C(\Omega) \omega_d \int_{\varepsilon}^{\mathrm{diam}\Omega} r^{3-d} \, dr.\end{aligned}$$

Se $d = 4$ l'ultimo integrale è uguale a

$$\varepsilon^{2d-4} \log(\frac{\mathrm{diam}\Omega}{\varepsilon}) \overset{\varepsilon \to 0}{\to} 0;$$

mentre se $d \neq 4$ l'ultimo integrale è uguale a

$$\varepsilon^{2d-4} \omega_d \frac{1}{4-d} (\mathrm{diam}\Omega^{4-d} - \varepsilon^{4-d}) \overset{\varepsilon \to 0}{\to} 0.$$

Quindi da queste disuguaglianze si ottiene che

$$\|u_\varepsilon - \bar{y}\|\|_{L^2(\Omega)} \to 0; \tag{3.11}$$

e con calcoli analoghi si ottiene che per ogni $p \in [1, \infty)$ si ha

$$\|u_\varepsilon - \bar{y}\|\|_{L^p(\Omega)} \to 0. \tag{3.12}$$

Si dimostrano infine le ultime stime. Si ha

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\|u_\varepsilon - \bar{y} - \varepsilon^{d-2} w(x) - \varepsilon^{d-2} \bar{v}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}}{\varepsilon^{d-2}} &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\|\varepsilon^{d-2} v - \varepsilon^{d-2} \bar{v}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}}{\varepsilon^{d-2}} \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \|v - \bar{v}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} = 0.\end{aligned}$$

Quindi

$$\frac{u_\varepsilon - \bar{y}}{\varepsilon^{d-2}} \overset{\varepsilon \to 0}{\to} w(x) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} g_i(x_i) \text{ in } L^p(\Omega) \text{ per ogni } p \in \left[1, \frac{d}{d-2}\right). \tag{3.13}$$

Infine sia $K \subset \Omega \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ compatto allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B(x_i, 2\varepsilon) \cap B(x_j, 2\varepsilon)$ per ogni $i \neq j$, $B(x_i, \varepsilon) \subset\subset \Omega$ e $K \subset \Omega_\varepsilon$. Quindi si ha:

$$\|u_\varepsilon - \bar{y}\|_{L^\infty(K)} = \|\varepsilon^{d-2}(w - v)\|_{L^\infty(K)} \leq e^{d-2}(\|w\|_{L^\infty(K)} + \|v\|_{L^\infty(K)}) \to 0.$$

$\square$

# Bibliografia


[1] Sheldon Axler, Paul Bourdon e Wade Ramey. "Bôcher's theorem". In: *The American mathematical monthly* 99.1 (1992), pp. 51–55.

[2] Mikhail Belkin e Partha Niyogi. "Semi-supervised learning on Riemannian manifolds". In: *Machine learning* 56 (2004), pp. 209–239.

[3] Haïm Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Vol. 2. 3. Springer, 2011.

[4] Jeff Calder. "The game theoretic p-Laplacian and semi-supervised learning with few labels". In: *Nonlinearity* 32.1 (2018), p. 301.

[5] Jeff Calder et al. "Poisson learning: Graph based semi-supervised learning at very low label rates". In: *International Conference on Machine Learning*. PMLR. 2020, pp. 1306–1316.

[6] Lawrence C Evans. *Partial differential equations*. Vol. 19. American Mathematical Society, 2022.

[7] David Gilbarg et al. *Elliptic partial differential equations of second order*. Vol. 224. 2. Springer, 1977.

[8] Frédéric Robert. "Construction and asymptotics for the Green's function with Neumann boundary condition". In: *Informal Notes, Univ. Lorraine* (2010).

[9] Sandro Salsa. *Equazioni a derivate parziali: Metodi, modelli e applicazioni*. Vol. 98. Springer, 2016.

[10] Ingo Steinwart. *Support Vector Machines*. Springer, 2008.