CESAR FERREIRA
TENENTE DE MARINHA

alla Biblioteca della

O planimetro em crescente

Regia Scuola Navale Superiore di Genova

Considerado como integrógrafo de equações diferenciais

of.

Pelo engenheiro
Angelo Scribanti

Cesar Ferreira.

24 -

Genova 1917

LISBOA
Typografia de J. F. Pinheiro
R. Jardim Regedor, 39 e 41

1917

O planimetro em crescente

Considerado como integrógrafo de equações diferenciais

Pelo engenheiro

Angelo Scribanti

Entre os varios estudos que o engenheiro Scribanti tem feito sobre o planimetro Prytz é interessante este sobre a sua aplicação como integrógrafo de equações diferenciais, pela generalidade que pode ter.

* * *

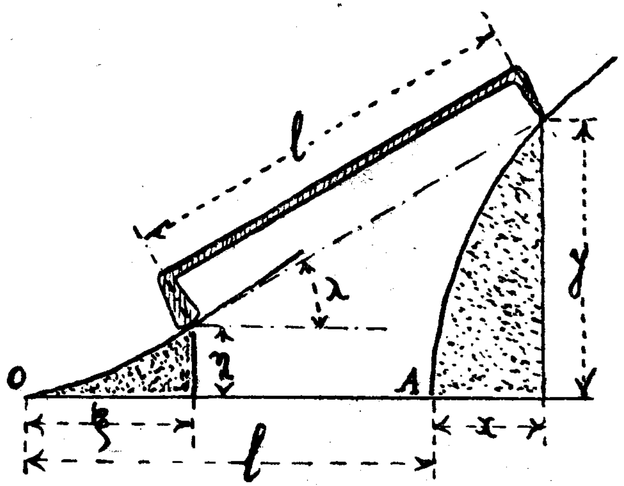
E' geralmente conhecida a aplicação que na avaliação aproximada da área e da posição do centro de gravidade (*baricentro*) de uma figura plana [1] pode ter como instru-

---

[1] Obr. cit. entre outras F. W. Hill no *Philosophical Magazine*, 1894; e G. B. Maffiotti na *Rivista di topografia e catasto*, 1896.

mento polar um aparelho de extrema simplicidade, que com o nome de *planimetro de machado* foi introduzido em 1885 pelo holandez Prytz e que a figura representa em esquema.

Em um outro meu trabalho [1] examino — diz o engenheiro Scribanti — as aplicações de que este mesmo aparelho é susceptivel, quando usado na quadratura de figuras planas em lugar de um ordinario integrador Amsler ou de um integrógrafo Abakanowicz.



Em outro trabalho encontra-se demonstrado [2] que este instrumento, ou mais precisamente um outro de que o planimetro de *machado* é uma esquematização, pode servir para a construção grafica dos valores dos transcendentes π e *e*, para a sub-divisão do arco e para a solução de ou-

---

[1] Scribanti, *Atti del Collegio degli ingegneri navali e meccanici in Italia*, 1912.

[2] Kleritj-Lubomirsky em *Dinglers Polytecknisches Journal*, 1897.

tros notaveis problemas; em um outro[1], mostra-se que ainda pode ser empregado como simples integrador, ou antes como integrometro, de equações diferenciais redutiveis aos conhecidos tipos de Riccati e de Abel. Nesta nota proponho-me mostrar, o que não me consta ainda ter sido feito por outrem, a maneira por que o instrumento é susceptivel de ser ainda aplicado como integrador contínuo, ou antes integrógrafo, das equações diferenciais de um certo tipo, assumindo assim as funções de um integrógrafo Pascal.

Suponhamos (vidè fig.) que um planimetro de *machado* de comprimento l se encontra inicialmente em $O\,A$, com a ponta em A e com o *crescente* em O e que, em seguida, com a ponta é obrigado a percorrer uma curva de determinada equação

$$y = f(x)$$

Correspondentemente o *crescente* deixará sobre o papel como traço da sua passagem uma curva de equação

$$\eta = \varphi(\xi)$$

cujos elementos geometricos, como se deduz da simples inspecção da figura, estão ligados aos da curva proposta pelas relações

$$l \operatorname{sen} \lambda = y - \eta \qquad\qquad x + l = \xi + l \cos \lambda$$

em que

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{d\,\eta}{d\,\xi} = \eta'$$

Reconhecer-se ha facilmente, mediante uma combinação conveniente das relações anteriores, que a equação se-

[1] L. Jacob, *Le calcul mécanique*, 1911.

guinte pode ser tomada como caracteristica do funcionamento do instrumento:

$$l \frac{\eta'}{\sqrt{1+\eta'^2}} + \eta = f\left(\xi + \frac{l}{\sqrt{1+\eta'^2}} - l\right)$$

vindo assim a constituir a equação diferencial da curva $\eta = \varphi(\xi)$ deixada sobre o papel como traço da passagem do *crescente* quando a ponta descreve a curva dada $y = f(x)$.

Este resultado pode ser tambem interpretado dizendo-se que o instrumento, enquanto descreve mecanicamente a curva $\eta = \varphi(\xi)$ realiza a integração da equação diferencial dada. O planimetro em *crescente* é pois susceptivel de ser considerado, e rigorosamente, como um integrógrafo contínuo para todas as equações diferenciais que sejam redutiveis ao tipo

$$l \frac{\eta'}{\sqrt{1+\eta'^2}} \pm \eta = f\left(\xi \pm \frac{l}{\sqrt{1+\eta'^2}} \mp l\right)$$

em que o sinal duplo considera a eventualidade do planimetro, colocado na posição inicial sobre o eixo das abcissas, ter o *crescente* situado á direita ou á esquerda da ponta.

Vê-se pois pela relação escrita que o planimetro em *crescente,* se bem que de um esquema cinematico muito mais simples que o de Pascal de regua rectilinea com rodela integradora orientada paralelamente á haste viajante, serve no entretanto para a integração de uma classe de equações diferenciais mais complexas que as da classe

$$l\,\eta' \pm \eta = f(\xi)$$

que define o campo de acção do integrógrafo Pascal. [1]

Contudo, quando o planimetro em *crescente* seja aplicado a diagramas fundamentais bastante baixos para que o percorrer da ponta viajante dê lugar a uma obliquidade da haste bastante pequena para se poderem desprezar as potencias superiores da tangente de obliquidade e se poder pôr

$$\eta'^2 = o$$

a equação caracteristica do funcionamento do instrumento reduzir-se ha identicamente áquela que indicámos como caracteristica do integrógrafo Pascal.

Segue-se que o planimetro em *crescente* pode, como primeira aproximação, substituir o *integrógrafo* para equações diferenciais do tipo normal Pascal nas suas varias aplicações e consequencias, precisamente como este pode numa primeira aproximação substituir o *integrógrafo* para quadratura de tipo Abakanowicz.

As precedentes deduções são suficientemente simples e não necessitam mais esclarecimentos, todavia poderá ser oportuno dar um exemplo relativo a um caso simples.

Assim, se a ponta viajante fôr obrigada a percorrer a recta

$$y = k\,x$$

obliqua ao eixo das abcissas, a ordenada da curva correspondentemente descrita pelo *crescente* será a função integral correspondente á equação diferencial

$$l\,\frac{\eta' - k}{\sqrt{1 + \eta'^2}} + \eta = k\,(\xi - l)$$

[1] Ernesto Pascal, *Giornale di Matematiche*, 1910 e 1911.

a que neste caso se reduz a equação caracteristica do funcionamento do aparelho, a respeito da qual é bom observar que uma tentativa de integração analitica conduziria a grandes complicações.

Mas se a oblíqua percorrida pela ponta fôr pouco inclinada sobre o eixo das abcissas dando lugar a uma obliquidade da haste do planimetro bastante pequena para que se possa sempre considerar

$$\eta'^2 = o$$

então a equação caracteristica do funcionamento do planimetro em *crescente* reduzir-se ha numa primeira aproximação a

$$l\,\eta' + \eta = k\,\xi$$

e a sua função integral que analiticamente poderia ser determinada na exponencial

$$\eta = k\,l\left(e^{-\frac{\xi}{l}} + \frac{\xi}{l} - 1\right)$$

terá uma imagem grafica na ordenada da correspondente curva, traço da passagem do *crescente*.

Genova, Dezembro 1916.

CESAR FERREIRA,

2.º tenente.