

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI GENOVA

SCUOLA POLITECNICA

DIME

**Dipartimento di Ingegneria Meccanica, Energetica,
Gestionale e dei Trasporti**



**TESI DI LAUREA MAGISTRALE
IN
INGEGNERIA MECCANICA
PROGETTAZIONE E PRODUZIONE**

**Ottimizzazione di modelli ARMA per la stima dello
spettro di stati di mare**

Relatore:

Chiar.^{ma} Prof. Ing. Marta Berardengo

Chiar.^{mo} Prof. Ing. Giovanni Battista Rossi

Allievo:

Gregory Ferrari

Dicembre 2022

Ottimizzazione di modelli ARMA per la stima dello spettro di stati di mare

Sommario

L'argomento trattato all'interno di questa tesi è stato scelto sulla base di interessi personali, con l'intenzione di approfondire le conoscenze riguardanti l'analisi spettrale di processi aleatori e serie temporali, sistemi di estrazione di energia dalle onde, analisi di segnali digitali e oceanografia. All'interno dell'elaborato si proporranno due metodi utilizzati per ottimizzare un modello ARMA finalizzato all'analisi spettrale dello stato del mare. Si passeranno in rassegna le principali tecniche utilizzate in questo ambito, per poi descrivere il modello in questione evidenziando le criticità su cui si è lavorato, dei quali la dipendenza dei risultati dai parametri del modello costituisce l'aspetto più problematico. Si descriverà la tecnica dell'overlap analysis, che ha permesso di ottenere un aumento della frequenza di aggiornamento della ricostruzione spettrale, e un metodo per determinare il valore di overlap più opportuno da assegnare in tempo reale. Si descriverà l'impiego della finestrazione, grazie alla quale si è ottenuta la stabilizzazione dei risultati al variare di un parametro critico del modello. Infine, si proporranno degli spunti per analisi da effettuare in futuro.

Arma model optimization for sea spectral estimation

Abstract

The topic covered in this thesis was chosen because of personal interests, with the intention of deepening the knowledge concerning the spectral analysis of random processes and time series, energy extraction systems from waves, digital signal analysis and oceanography. Two methods used to optimize an ARMA model aimed at the spectral analysis of the state of the sea will be proposed within the thesis. The main techniques used in this area will be reviewed, to then describe the model by highlighting the critical issues on which we have worked, of which the dependence of the results on the model parameters constitutes the most problematic aspect. We will describe the overlap analysis technique, which allowed us to obtain an increase in the update frequency of the spectral reconstruction, and a method to determine the most appropriate overlap value to assign in real time. We will describe the use of exponential window, thanks to which the stabilization of the results was obtained when a critical parameter of the model varies. Finally, suggestions for future analyzes will be proposed.

Indice

1. Introduzione.....	1
1.1. Perché determinare lo stato del mare?	1
2. Determinazione di uno stato di mare.....	2
2.1. Stato dell'arte	2
2.1.1. Metodi non parametrici.....	2
2.1.1.1. Il periodogramma	2
2.1.1.2. Il periodogramma mediato e modificato: il metodo di Welch	3
2.1.1.3. Finestratura multipla: il metodo di Thomson.....	5
2.1.2. Metodi parametrici.....	5
2.1.2.1. Modello ARMA	6
3. Utilizzo di modelli arma per la ricostruzione dello spettro	9
3.1. Modellazione ARMA della serie temporale dell'altezza d'onda.....	9
3.1.1. Creazione del modello	10
3.1.2. Stima dei parametri	10
3.1.2.1. Parte AR	10
3.1.2.2. Parte MA	12
3.1.3. Selezione dei parametri liberi	13
3.1.3.1. Ordine della parte AR	13
3.1.3.2. Numero di equazioni del problema ai minimi quadrati	15
4. Validazione del modello e analisi statistica dei risultati al variare dei parametri	16
4.1. Generazione di una serie temporale di altezza d'onda tramite spettro JONSWAP 16	
4.2. Ricostruzione dello spettro e determinazione dell'errore	21
4.2.1. Effetto del numero di punti di autocorrelazione usati.....	22
4.2.2. Effetto dell'ordine iniziale p della parte AR	25
4.2.3. Effetto della lunghezza della serie temporale di altezza d'onda.....	28
4.2.4. Effetto dell'ordine iniziale p della parte AR e della frequenza di campionamento f_{samp} su serie di altezza d'onda da 10 minuti.....	30
4.2.5. Risultati ottenuti per stati di mare differenti	33
5. Ottimizzazione della frequenza d'aggiornamento della ricostruzione dello spettro	36

5.1.	Relazione tra operazione di media dello spettro su sotto-intervalli, overlap e tempo di refresh.....	36
5.2.	Variazione dello stato del mare: come scegliere la base temporale?	39
5.3.	Applicazione della media su sotto-intervalli e overlap al modello ARMA in studio 41	
5.3.1.	Analisi svolte e risultati ottenuti utilizzando una base temporale di 60 minuti 42	
5.3.1.1.	Analisi della deviazione standard di $r_{Mx}(k)$ su una popolazione di 500 serie di altezza d'onda differenti.	42
5.3.1.2.	Calcolo dell'overlap ottimo.....	45
5.3.2.	Risultati ottenuti utilizzando basi temporali più brevi.....	50
5.3.2.1.	Risultati ottenuti su base temporale di 30 minuti.....	50
5.3.2.2.	Risultati ottenuti su base temporale di 10 minuti.....	52
6.	Stabilizzazione e riduzione dell'errore tramite utilizzo di finestre esponenziali	54
6.1.	Il numero di punti di autocorrelazione da usare: un aspetto critico	54
6.2.	Finestratura esponenziale	57
6.2.1.	Funzione finestra esponenziale	58
6.2.2.	Compensazione dello smorzamento aggiunto	60
6.3.	Risultati delle analisi effettuate con finestratura esponenziale	61
6.3.1.	Risultati ottenuti su base 60 minuti.....	61
6.3.2.	Risultati ottenuti su base 30 minuti.....	63
6.3.3.	Risultati ottenuti su base 10 minuti.....	65
7.	Sviluppi futuri.....	68
7.1.	Modifica della correzione dei poli dopo l'applicazione della finestra.....	68
7.2.	Altri possibili sviluppi futuri.....	69
8.	Conclusioni.....	70
	Bibliografia	72
	Simbologia.....	75

1. Introduzione

Quando si osserva il mare, si nota sempre del movimento sulla superficie. Talvolta sembra che sia una tavola piatta, ma avvicinandosi si riesce sempre a percepire la presenza di oscillazioni. Sia che sulla superficie ci siano onde molto alte e ben definite, sia che il mare sia in uno stato di agitazione “disordinato”, sia che l’unico movimento sia dovuto a piccolissime oscillazioni della superficie, questi fenomeni sono dovuti alla presenza di energia che percorre la superficie dell’acqua e si manifesta in modi anche molto diversi tra loro. Ciò che del fenomeno si può osservare e misurare, come per esempio l’altezza delle onde, è la somma dei contributi di diversi tipi di oscillazioni, ognuna avente frequenza, altezza e fase diversa, e quindi talvolta anche quantità di energia diversa. Identificare lo stato del mare in un determinato istante non significa semplicemente quantificare l’energia posseduta in totale dal mare in quell’istante, oppure misurare l’altezza della superficie del mare, ma significa determinare quanta energia posseggono i diversi tipi di onde che percorrono la superficie e che, sommandosi l’un l’altra, danno vita alle onde che si possono osservare anche visivamente.

1.1. Perché determinare lo stato del mare?

I motivi per cui è importante determinare lo stato del mare sono molteplici e, oltre al semplice monitoraggio in tempo reale volto ad aumentare la sicurezza alla navigazione, riguardano applicazioni scientifiche e tecniche. Dal punto di vista scientifico, i dati raccolti hanno lo scopo di validare e ottimizzare modelli previsionali. Dal punto di vista delle applicazioni tecniche, sono importanti aspetti differenti a seconda delle applicazioni: per il dimensionamento delle opere di sbarramento che proteggono i porti e i litorali è più importante conoscere l’altezza dell’onda e la quantità di moto [1], mentre per il dimensionamento e progettazione delle navi delle strutture off-shore [2] e dei sistemi oscillanti atti a estrarre energia dalle onde, è molto importante conoscere anche la frequenza delle onde per evitare o favorire condizioni di risonanza. Le navi e le strutture offshore sono infatti continuamente sottoposte a sollecitazioni cicliche, la cui frequenza è importante conoscere per garantire la loro integrità, sia dal punto di vista delle condizioni di risonanza, sia dal punto di vista del dimensionamento a fatica. I dispositivi che generano energia dalle onde sono tipicamente costituiti da sistemi oscillanti; dunque, per ottenere un’estrazione dell’energia il più efficiente possibile, è necessario che essi operino in condizioni di risonanza. In alcuni casi, è necessario che il sistema di controllo si configuri in tempo reale a seconda della frequenza delle onde alla quale corrisponde il maggior contenuto energetico. [3]

2. Determinazione di uno stato di mare

In questo capitolo si descriveranno alcuni dei i metodi più comuni utilizzati nell'analisi spettrale di uno stato di mare, facendo riferimento a due principali classi di metodi utilizzati in generale per l'analisi spettrale di serie temporali: metodi non-parametrici e metodi parametrici.

2.1. Stato dell'arte

La tecnica attraverso la quale viene determinato uno stato di mare si chiama analisi spettrale, il cui obiettivo è l'ottenimento della Power Spectral Density (PSD), denotata all'interno di questo testo con $S_{xx}(\omega)$ e a cui ci si riferirà anche con il termine "spettro di potenza" o più brevemente "spettro". Questa funzione della frequenza quantifica la distribuzione della potenza del processo sulle diverse componenti frequenziali che lo compongono. Matematicamente, uno stato di mare è modellato come un processo aleatorio stazionario a media nulla, che verrà denotato con $X(n)$. La funzione che descrive l'altezza d'onda è ottenuta tramite una misurazione e analizzata sotto forma di segnale digitale; quindi, è una serie numerica a valori reali, chiamata all'interno del testo "serie di altezza d'onda" e denotata con $x(n)$. L'oggetto dell'analisi spettrale è $x(n)$, la quale è una singola realizzazione del processo $X(n)$ di cui si vuole ricostruire lo spettro. Siccome $x(n)$ è una funzione discreta, verranno utilizzati i metodi dell'analisi spettrale di segnali digitali, divisi principalmente in due classi: i metodi non parametrici e i metodi parametrici. I metodi non parametrici vengono anche identificati come metodi di analisi nel dominio delle frequenze, quelli parametrici nel dominio del tempo.

2.1.1. Metodi non parametrici

Verranno ora descritti alcuni metodi di analisi non parametrica utilizzati nell'ambito dell'identificazione degli stati di mare. Questi metodi hanno in comune che si pongono come obiettivo la stima diretta dello spettro di potenza, utilizzando algoritmi che calcolino la Trasformata di Fourier direttamente sui dati disponibili.

2.1.1.1. Il periodogramma

Uno dei primi metodi utilizzati per scovare le "periodicità nascoste" all'interno di serie temporali fu introdotto da Shuster nel 1898 [4], che utilizza il periodogramma. Per il teorema di Wiener–Chinč'in, è possibile ottenere lo spettro di potenza S_{xx} di un segnale facendo la

Trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione. Nel caso di processi aleatori non si conosce la funzione di autocorrelazione del processo, ma è possibile farne una stima a partire da una singola realizzazione [5]. In generale, la stima dell'autocorrelazione non sarà uguale alla funzione di autocorrelazione perché viene calcolata su un numero finito di campioni. Si consideri dunque la sequenza di N campioni $x(n)$: a partire dalla stima polarizzata dell'autocorrelazione nella forma:

$$\hat{r}_{xx}(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-k-1} x_i x_{i+k} \quad (2.1)$$

Calcolando la stima dello spettro utilizzando il teorema di Wiener–Chinčîn si ottiene:

$$\hat{S}_{xx}(f) = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \hat{r}_{xx}(k) e^{-j2\pi f k} \quad (2.2)$$

Sostituendo la (2.1) nella (2.2) dopo alcuni passaggi si ottiene il periodogramma nella forma:

$$\hat{S}_{xx}(f) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi f n} \right|^2 \quad (2.3)$$

Si dimostra [5] che il valore atteso di $\hat{S}_{xx}(f)$ è la Trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione finestrata con la finestra di Barlett (finestra triangolare), quindi non coincide con la trasformata della sola funzione di autocorrelazione. Questo significa che la stima è polarizzata e presenta problemi legati al leakage. Seppur il periodogramma sia asintoticamente non polarizzato, la varianza tende ad un valore costante all'aumentare della lunghezza della sequenza, pari al quadrato dello spettro di potenza effettivo, il che rende il periodogramma una stima non consistente, oltre ovviamente ad essere un valore eccessivamente alto. I risultati non cambiano se si utilizza una stima non polarizzata dell'autocorrelazione, se non che il risultato è un periodogramma con valore atteso pari alla Trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione finestrata con finestra rettangolare. Anche in questo ultimo caso il periodogramma risulta essere una stima non consistente.

2.1.1.2. Il periodogramma mediato e modificato: il metodo di Welch

La stima dello spettro con il periodogramma è il punto di partenza delle tecniche di analisi spettrale non parametriche. Grazie all'invenzione della Fast Fourier Transform e della convoluzione veloce, la facilità e la velocità con cui è possibile calcolare la trasformata di Fourier e la convoluzione di sequenze discrete ha consentito ad alcuni studiosi di dedicarsi all'ottimizzazione del metodo. Prendendo spunto da una modifica di Barlett (1948) [6], che propose di spezzare la serie, calcolare i periodogrammi per le sotto-sequenze e calcolare il

periodogramma facendo la media di quelli così ottenuti, Welch (1967) [7] aggiunse alcune modifiche: introdusse l'overlap delle sotto-sequenze e il pretrattamento di queste con una funzione finestra opportuna. La sequenza principale $x(n)$ viene suddivisa in L sotto-sequenze e la i -esima sotto-sequenza può essere rappresentata come

$$x_i(n) = x(n + (i - 1)D) \quad \begin{array}{l} n = 0, 1, \dots, M - 1 \\ i = 1, 2, \dots, L \end{array} \quad (2.4)$$

Dove D è il numero di campioni non sovrapposti tra due sotto-sequenze contigue, quindi la differenza tra l'overlap e la lunghezza M delle sotto-sequenze. L è il numero di sotto-sequenze ottenute dalla divisione della sequenza principale. La stima dello spettro della singola sotto-sequenza è [8]

$$\hat{S}_{xx}^{(i)}(f) = \frac{1}{MU} \left| \sum_{n=0}^{M-1} x_i(n)w(n)e^{-j2\pi fkn} \right|^2 \quad (2.5)$$

dove $w(n)$ è la sequenza della finestra e U è un fattore di normalizzazione della potenza della finestra $w(n)$:

$$U = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} w^2(n) \quad (2.6)$$

Mediando le L sotto-sequenze si ottiene quindi la stima dello spettro della sequenza $x(n)$:

$$\hat{S}_{xx}(f) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \hat{S}_{xx}^{(i)}(f) \quad (2.7)$$

Sia Barlett che Welch ottennero una importante riduzione della varianza dovuta al calcolo della media di più periodogrammi. Di contro, spezzare la serie in un numero elevato di sotto-sequenze significa calcolare i periodogrammi con un numero di campioni inferiore, diminuendo quindi risoluzione in frequenza. Aver introdotto la sovrapposizione delle sotto-sequenze consente di ottenerne un numero più elevato e dunque, di nuovo, diminuire la deviazione standard. La percentuale di overlap utilizzabile è tipicamente compresa tra 20% e 50% ed è influenzata dal tipo di finestra utilizzata: una finestra che schiacci rapidamente la sequenza a zero consente una percentuale di overlap più elevata, ma di contro, avendo una larghezza di banda equivalente più elevata, fa perdere risoluzione in frequenza [9]. È quindi chiaro che la scelta dei parametri dovrà avvenire cercando un compromesso che si adatti alle ipotesi sul processo da studiare. Il metodo di Welch è stato confrontato con il metodo di Thomson e con l'utilizzo di modelli ARMA per stati di mare monomodali [10] e bimodali [11] con buoni risultati.

2.1.1.3. Finestratura multipla: il metodo di Thomson

Nel 1982, David J. Thomson pubblicò un metodo che si proponeva di trattare l'intera sequenza $x(n)$ con K finestre ortogonali tra loro, cosicché ogni finestra consideri una parte di sequenza che le altre non considerano. La stima dello spettro si ottiene facendo la media di tutte le stime effettuate, una per ogni finestra utilizzata:

$$\hat{S}_{xx}^{(i)}(f) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} h_i(n)x(n)e^{-j2\pi fkn} \right|^2 \quad i=1,\dots,K \quad (2.8)$$

Dove le $h_i(n)$ sono finestre di Slepian, sequenze sferoidali prolate discrete. Queste sequenze usate come finestre, come già detto sono ortogonali tra loro e vengono definite tramite la loro larghezza di banda, motivo per il quale permettono di concentrarsi sulle frequenze di interesse a seconda del caso. Facendo la media per ogni i esima stima dello spettro, si ottiene:

$$\hat{S}_{xx}(f) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \hat{S}_{xx}^{(i)}(f) \quad (2.9)$$

che rappresenta la stima dello spettro cercata. Essendo $2W$ la banda normalizzata delle finestre e N il numero di campioni di $x(n)$, tipicamente il numero K di sequenze da utilizzare è uguale a $2NW-1$. Anche per questo metodo, alcuni risultati nell'ambito dell'analisi spettrale di stati di mare monomodali e bimodali sono esposti negli studi già citati [10] e [11].

A questo punto risulta chiaro il concetto di "analisi nel dominio delle frequenze", poiché si è visto che i metodi descritti finora ruotano attorno al calcolo dello spettro con la tradizionale trasformata di Fourier discreta. Questo fatto però si porta dietro alcuni problemi: l'utilizzo ottimale della DFT richiede un grande numero di campioni e l'utilizzo di un numero insufficiente porta inevitabilmente ad una perdita di risoluzione in frequenza. Inoltre, come abbiamo visto, in ogni caso la DFT di una sequenza di lunghezza finita, quale è la stima dell'autocorrelazione, porta con sé inevitabilmente la presenza di leakage.

2.1.2. Metodi parametrici

Un metodo alternativo alla classica analisi spettrale non parametrica è quello di assumere che lo spettro del processo $X(n)$ dipenda in generale da K parametri:

$$S_{xx}(f) = S_{xx}(f, c_1, c_2, \dots, c_i, \dots, c_K) \quad (2.10)$$

Se, utilizzando una realizzazione del processo, si può ottenere una stima ragionevole dei k parametri, allora

$$\hat{S}_{xx}(f) = \hat{S}_{xx}(f, \hat{c}_1, \hat{c}_2, \dots, \hat{c}_i, \dots, \hat{c}_K) \quad (2.11)$$

è una stima ragionevole di $S_{xx}(f)$. I generici c_i costituiscono i k parametri che definiscono un determinato modello che si propone di descrivere il processo oggetto di studio. L'utilizzo di un modello parametrico ha il vantaggio di permettere di formulare delle assunzioni a priori su come i dati in uscita dal modello sono generati.

2.1.2.1. Modello ARMA

Per modellare un segnale in modo che lo si possa ottenere a partire da un determinato numero di parametri, si può utilizzare un filtro SLS (sistema lineare stazionario) causale. In generale, tutti i sistemi sono descritti da un'equazione che lega un input $x(n)$ e un output $y(n)$ della forma:

$$y(n) = T[x(n)]$$

Per definire un sistema SLS causale è utile ricordare i seguenti teoremi:

Teorema 1.

Un sistema è lineare se e solo se:

$$T[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = a_1T[x_1(n)] + a_2T[x_2(n)]$$

Teorema 2.

Un sistema è stazionario se e solo se:

$$y(n) = T[x(n)] \quad \text{implica} \quad y(n - k) = T[x(n - k)]$$

Teorema 3.

Un sistema è causale se l'output del sistema in ogni istante n dipende solo dagli input presenti e passati ma non dipende dagli input futuri. Matematicamente, un sistema causale soddisfa un'equazione della forma:

$$y(n) = F[x(n), x(n - 1), x(n - 2), \dots]$$

L'assunzione alla base della modellazione parametrica con modelli ARMA corrisponde al fatto che la singola realizzazione $x(n)$ è ottenuta come output da un modello costituito da un filtro causale SLS che riceve in input un rumore bianco $w(n)$ il cui comportamento, in generale, è descritto dall'equazione alle differenze in forma normale:

$$x(n) = - \sum_{i=1}^p a_i x(n-i) + \sum_{i=0}^q b_i w(n-i) \quad (2.12)$$

dove a_i e b_i sono i coefficienti da stimare, $x(n)$ costituisce l'output e $w(n)$ l'input. L'utilizzo di questo tipo di filtro è una delle tecniche utilizzate nella "Linear Prediction", ossia la disciplina che impiega per l'appunto filtri causali eccitati da rumore bianco per lo studio dal punto di vista statistico di serie temporali in diversi ambiti. Calcolando la trasformata-z di entrambi i membri della (2.12), dopo alcuni semplici passaggi si ottiene la funzione di trasferimento del filtro:

$$H(z) = \frac{B_q(z)}{A_p(z)} = \frac{\sum_{i=0}^q b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^p a_i z^{-i}} \quad (2.13)$$

Se $q = 0$ allora il modello è chiamato autoregressivo di ordine p e si denota AR(p), se $A_p(z)=1$ il modello è chiamato a media mobile di ordine q e si denota MA(q), se invece sono presenti le potenze di z sia a numeratore che a denominatore allora il modello è autoregressivo a media mobile e si denota ARMA(p,q). Il modello prevede che $x(n)$ sia ottenuto come convoluzione del rumore bianco $w(n)$ con la funzione di risposta del filtro:

$$x(n) = w(n) * h(n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(i)w(n-i) \quad (2.14)$$

dove $*$ è l'operatore di convoluzione. Essendo che l'autocorrelazione di $w(n)$ è la varianza di $w(n)$ moltiplicata per l'impulso unitario, si dimostra [12] che:

$$r_x(k) = \sigma_w^2 r_h(k) \quad (2.15)$$

dove $r_x(k)$ è l'autocorrelazione di $x(n)$ e $r_h(k)$ è l'autocorrelazione della risposta a impulso $h(n)$. Facendo la trasformata z a destra e a sinistra della (2.15), si ottiene lo spettro di potenza $S_{xx}(z)$

$$S_{xx}(z) = \sigma_w^2 H(z)H(z^{-1}) = \sigma_w^2 \frac{B_q(z)B_q(z^{-1})}{A_p(z)A_p(z^{-1})} \quad (2.16)$$

Questa formula permette di ottenere lo spettro di potenza da $A(z)$ e $B(z)$ e quindi, a partire da una stima dei coefficienti a_i e b_i , consente di calcolare la stima \hat{S}_{xx} . Il risultato dipenderà principalmente da quale metodo si utilizza per stimare i coefficienti dei polinomi al numeratore e al denominatore, nonché dal loro ordine, cioè dal valore di p e q . Nel prossimo capitolo si entrerà nel merito dei metodi utilizzati per creare il modello in studio.

3. Utilizzo di modelli arma per la ricostruzione dello spettro

In questo capitolo si tratterà affronterà il problema della stima dello spettro di uno stato di mare tramite modelli ARMA e si illustreranno i metodi utilizzati nell'ambito dello studio [12] per stimarne i parametri.

3.1. Modellazione ARMA della serie temporale dell'altezza d'onda

La possibilità di utilizzare i modelli ARMA nella ricostruzione dello spettro di uno stato di mare è già stata considerata in passato. In due studi Pol D. Spanos propose l'impiego di un filtro LSI per modellare uno stato di mare, prima con un filtro AR nel 1981 [13] e poi con il confronto tra filtri AR, MA e ARMA nel 1983 [14], contestualmente all'ottimizzazione di metodi per effettuare analisi dinamiche di strutture offshore con approccio probabilistico. Spanos calcolò i coefficienti dei filtri utilizzando nei suoi studi il metodo dei minimi quadrati. Successivamente sono state impiegate altre tecniche, per esempio le Modified Youle Walker Equations per il calcolo dei coefficienti e l'Akaike Information Criterion (AIC) per la riduzione dell'ordine dei filtri, da S. Mandal, J.A. Witz e G.J. Lyons nel 1992 [15], sempre nel contesto della progettazione e monitoraggio di strutture Offshore. Più recentemente l'identificazione dello stato del mare è stata considerata anche relativamente alla possibilità di estrarre energia dal moto ondoso, dunque per effettuare una previsione del moto ondoso e un controllo in tempo reale. Ming Ge e Eric C. Kerrigan, nel 2016 [16] hanno pubblicato uno studio che si proponeva di superare alcuni aspetti critici dell'utilizzo di modelli AR introducendo l'impiego di altri algoritmi di minimizzazione (LLS e ALS, linear e autocovariance least square) insieme a AIC e filtri di Kalman, da applicare a modelli AR e ARMA. Ming Ge e Eric C. Kerrigan hanno concluso che, con le loro modifiche, il modello ARMA è risultato più affidabile e più veloce del modello AR. Lo studio su cui si è lavorato in questa tesi [12], svolto da Marta Berardengo, Giovanni Battista Rossi e Francesco Crenna, si è proposto di effettuare un'analisi statistica sui parametri liberi del modello, sulla cui selezione non ci sono indicazioni chiare negli studi precedenti. Questi parametri sono l'ordine della parte AR e MA, il numero di punti di autocorrelazione da prendere in considerazione il numero di equazioni da usare nell'algoritmo di minimizzazione. La stima dei parametri del modello è stata effettuata con il metodo di Prony congiuntamente ai minimi quadrati e il metodo di Shank's per la parte AR e MA rispettivamente, ed è stato utilizzato l'AIC e il criterio energetico per la selezione dell'ordine della parte AR.

3.1.1. Creazione del modello

Nello studio oggetto della tesi, si è assunto che la serie di altezza d'onda fosse la realizzazione di un processo stazionario in senso lato, ottenuto come output di un filtro causale lineare tempo invariante autoregressivo e a media mobile. Nel seguente semplice schema a blocchi, $h(n)$ costituisce l'equazione di risposta a impulso unitario del filtro, $w(n)$ è il rumore bianco in ingresso, $x(n)$ è la serie temporale di altezza d'onda, che costituisce una singola realizzazione del processo $X(n)$.

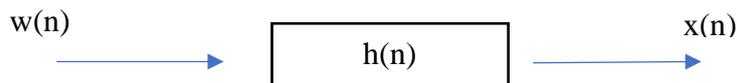


Fig. 3. 1 – Modello ARMA della serie di altezza d'onda $x(n)$

Nel capitolo 2.2.2 si è data una spiegazione di come lo studio della funzione di trasferta del filtro permetta di ottenere una stima dello spettro di potenza del processo. Si ipotizza quindi che il processo $X(n)$ sia ergodico, così da poter stimare i parametri del filtro, e quindi lo spettro, a partire da una singola realizzazione $x(n)$.

3.1.2. Stima dei parametri

La stima dei parametri può essere effettuata con diversi metodi a seconda di quali ipotesi si facciano sul segnale da analizzare. In taluni casi già si conosce indicativamente il range di frequenze nelle quali sarà concentrata la potenza e allora si può utilizzare un metodo piuttosto che un altro. Per esempio, nell'ambito dello studio delle onde del mare, si sa a priori che le componenti di interesse hanno la loro potenza concentrata sulle basse frequenze, per cui si possono ottenere buoni risultati con il metodo di Prony, usato per trovare i poli del sistema e quindi i coefficienti della parte AR. Per la parte MA è stato utilizzato il metodo di Shanks.

3.1.2.1. Parte AR

Volendo descrivere il processo $X(n)$ con un modello ARMA, ne consegue che la funzione di trasferimento del filtro ha la forma dell'eq. (2.13). Tale equazione si può anche esprimere nel modo seguente:

$$H(z) = \frac{B_q(z)}{A_p(z)} = \frac{\sum_{i=0}^q b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^p a_i z^{-i}} = \frac{\sum_{i=0}^q b_i z^{-i}}{\prod_{i=1}^p (1 - \lambda_i z^{-i})} \quad (3.1)$$

dove i λ_i sono i poli del sistema. Dalla (2.15), si è visto che l'autocorrelazione di $x(n)$ è una versione scalata dell'autocorrelazione di $h(n)$, quindi i poli del sistema sono gli stessi dell'autocorrelazione. Nello studio si è scelto di stimare i coefficienti della parte AR, cioè i a_i , passando per una stima dei poli λ_i , utilizzando il metodo di Prony. L'autocorrelazione r_x può essere espressa come somma di componenti costituita da funzioni esponenziali con esponenti complessi (poli), che quindi costituiscono ognuna un'oscillazione a frequenza costante e ampiezza decrescente:

$$r_x(k) = \sum_{i=1}^p \alpha_i e^{\lambda_i k} \quad (3.2)$$

Per trovare i poli, si è utilizzato il metodo di Prony applicato alla stima non polarizzata dell'autocorrelazione per evitare che con l'incremento di k si perdessero informazioni a causa della diminuzione del numero di campioni di $x(n)$ sovrapposti:

$$r_x(k) = \frac{1}{N-k} \sum_{i=k+1}^N x_i x_{i-k} \quad (3.3)$$

dove N è il numero di campioni di $x(n)$. Utilizzare una stima non polarizzata permette di diminuire il valore al denominatore della stima via via che il numero di campioni moltiplicati diminuisce, evitando l'effetto finestra triangolare. Questo, tuttavia, porta ad altri problemi, come si vedrà in dettaglio nel capitolo 4.2.1. L'autocorrelazione nella forma (3.2) è uguale all'equazione di esempio a cui viene applicato il metodo di Prony in [17], cosicché è possibile risolvere con l'approccio dei minimi quadrati il problema:

$$[R_x] \boldsymbol{\beta} = -\tilde{\mathbf{R}}_x \quad (3.4)$$

Dove:

$$[R_x] = \begin{bmatrix} r_x(1) & r_x(2) & \cdots & r_x(p) \\ r_x(2) & r_x(3) & \cdots & r_x(p+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_x(k_0) & r_x(k_0+1) & \cdots & r_x(p+k_0) \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_x = \begin{bmatrix} r_x(p+1) \\ \vdots \\ r_x(p+k_0+1) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_{p-1} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

I valori di $\boldsymbol{\beta}$ sono i coefficienti dell'equazione:

$$\beta_0 + \beta_1\lambda + \beta_2\lambda^2 + \dots + \beta_p\lambda^p = 0, \text{ con } \beta_p = 1 \quad (3.7)$$

Scelto il numero di punti φ di autocorrelazione da utilizzare, le matrici in (3.5) e (3.6) descrivono un sistema di k_0 equazioni, ognuna scritta utilizzando un set di $p+1$ punti di autocorrelazione. In generale si vorrebbe avere il più alto numero k_0 di equazioni possibile, allora la sovrapposizione dei set consente di alzare questo valore. In ogni caso deve essere $k_0 \geq p$, altrimenti non sarebbe possibile risolvere in alcun modo il sistema, e tale condizione si esprime in termini di punti di autocorrelazione:

$$\varphi = p + k_0 + 1 \geq 2p + 1 \quad (3.8)$$

La selezione dell'ordine p è un aspetto critico che verrà trattata in dettaglio nel paragrafo 3.1.3.1. Risolto il sistema (3.4) ai minimi quadrati e trovati i λ_i con la (3.7), i parametri a_i vengono trovati con la (3.1).

3.1.2.2. Parte MA

I coefficienti della parte MA sono ottenuti tramite il metodo proposto da Shanks [18], ossia con la minimizzazione della differenza tra l'autocorrelazione calcolata a partire dai dati con la (3.3) e una sua stima $\hat{r}_x(k)$ ottenuta descrivendo l'autocorrelazione come risposta a impulso unitario di un sistema lineare $H_r(z)$ della forma:

$$H_r(z) = \frac{N_q(z)}{A_p(z)} = N_q(z) \frac{1}{A_p(z)} = N_q(z)H_{ra}(z) \quad (3.9)$$

$$N_q(z) = n_1z^{-1} + n_2z^{-2} + \dots + n_qz^{-q} \quad (3.10)$$

La risposta a impulso unitario h_r , e quindi $\hat{r}_x(k)$, può quindi essere descritta come la convoluzione della sequenza $n(k)$ dei coefficienti di $N_q(z)$ con la risposta a impulso unitario h_{ra} , risposta a impulso unitario del sistema $1/A_p(z)$, che è noto. L'errore da minimizzare con i minimi quadrati sarà quindi:

$$e(k) = r_x(k) - \hat{r}_x(k) = r_x(k) - \sum_{i=1}^q n(i)h_{ra}(k-i), \quad n(i) = n_i \quad (3.11)$$

Il problema ai minimi quadrati si risolve trovando il vettore dei coefficienti n_i risolvendo il sistema:

$$[h_r]\mathbf{n} = \mathbf{n}_0$$

$$\begin{bmatrix} h_{ra}(0) & 0 & \dots & 0 \\ h_{ra}(1) & h_{ra}(0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{ra}(\varphi-1) & h_{ra}(\varphi-2) & \dots & h_{ra}(\varphi-q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_x(1) \\ r_x(2) \\ \vdots \\ r_x(\varphi) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Trovato $N_q(z)$, si può direttamente trovare lo spettro $S_x(z)$ a partire dalla formula (3.9):

$$S_x(z) = \frac{N_q(z)}{A_p(z)} + r_x(0) + \frac{N_q(z^{-1})}{A_p(z^{-1})} =$$

$$= \frac{N_q(z)A_p(z^{-1}) + r_x(0)A_p(z)A_p(z^{-1}) + N_q(z^{-1})A_p(z)}{A_p(z)A_p(z^{-1})} \quad (3.12)$$

Infine, è possibile trovare i coefficienti b_i della parte MA con l'eq. (3.12) e (2.16).

3.1.3. Selezione dei parametri liberi

Al fine di ricostruire al meglio lo spettro di potenza di uno stato di mare si è visto che nella creazione del modello ARMA è necessario assegnare alcuni parametri liberi sui quali, in letteratura, non ci sono indicazioni precise. Sebbene numerosi studi abbiano enfatizzato l'importanza di usare il più alto numero di equazioni nel problema ai minimi quadrati, nel lavoro di Friedlander e Porat [19] sulla stima dei parametri del modello con le Modified Yule Walker Equations, viene ampiamente spiegato che l'ordine p della parte AR è altrettanto importante. Nei 2 paragrafi seguenti si descriverà sono stati assegnati questi parametri.

3.1.3.1. Ordine della parte AR

L'ordine p della parte AR è il grado del polinomio al numeratore nell'equazione della funzione di trasferimento (3.1) del filtro nonché il numero di poli, e quindi il numero di esponenziali smorzati che compongono l'autocorrelazione nella forma (3.2). In letteratura si

trovano numerosi riscontri sulla necessità di mantenere alto p . Per trovare il valore da assegnare a p si è utilizzato l' Akaike Information Criterion (AIC), il quale prevede che venga trovato il valore di \hat{p} tale che minimizzi la seguente espressione:

$$AIC = 2p + \varphi \ln \frac{e_r}{\varphi - p} \quad (3.13)$$

Dove:

$$e_r = \sum_{k=1}^{\varphi} \left[r_x(k) - \sum_{i=1}^p \alpha_i e^{\lambda_i k} \right]^2 \quad (3.14)$$

tuttavia, Friedlander e Porat [19] hanno mostrato che utilizzando l'AIC a partire dalla stima non polarizzata dell'autocorrelazione, si ottiene un numero di poli del sistema che è superiore ai poli effettivi e che il numero di poli è anche influenzato dalla posizione degli zeri di $B_q(z)$. Alla luce di queste considerazioni, si è ritenuto opportuno creare il modello con un numero di poli \hat{p} stabilito piuttosto grossolanamente con l' Akaike Information Criterion (AIC), e successivamente operare una riduzione dei poli in base al loro contenuto energetico per eliminare quelli che approssimano il rumore contenuto in $x(n)$. Il procedimento, descritto molto dettagliatamente nel già citato lavoro di Friedlander e Porat [19], prevede che la trasformata zeta dell'autocorrelazione nella forma espressa dalla (3.2) venga fattorizzata in contributi del primo e del secondo ordine:

$$L_i = \frac{F_{1,i} z^{-1}}{1 + f_{1,i} z^{-1}}, M_i = \frac{S_{1,i} z^{-1} + S_{2,i} z^{-2}}{1 + s_{1,i} z^{-1} + s_{2,i} z^{-2}} \quad (3.15)$$

Qualora si trovasse che qualcuno di questi fattori fosse instabile, si effettua il ribaltamento dei poli di quel fattore all'interno del cerchio di raggio unitario nel piano di Gauss. Questo rende stabile quel fattore preservandone lo spettro. Dopodiché viene calcolata l'energia associata ad ogni fattore:

$$e_{f_i} = \frac{1}{2\pi j} \oint z^{-1} \left| \frac{F_{1,i} z^{-1}}{1 + f_{1,i} z^{-1}} \right|^2 dz, \quad e_{s_i} = \frac{1}{2\pi j} \oint z^{-1} \left| \frac{S_{1,i} z^{-1} + S_{2,i} z^{-2}}{1 + s_{1,i} z^{-1} + s_{2,i} z^{-2}} \right|^2 dz \quad (3.16)$$

Fissato un certo valore di riferimento t_r , se l'energia di un fattore è inferiore a t_r , allora questo fattore viene eliminato, e quindi anche il polo. Il valore iniziale \hat{p} , ordine della parte AR prima della riduzione dell'ordine con il criterio energetico, è uno dei parametri su cui è stata effettuata un'analisi statistica, come si vedrà nel paragrafo 5.2.2.

3.1.3.2. Numero di equazioni del problema ai minimi quadrati

Il numero di equazioni k_0 utilizzabili nel problema di minimizzazione relativo alla parte AR è strettamente influenzato dall'ordine p e dal numero di punti di autocorrelazione φ usati. Come si è visto nell'equazione (3.8), $\varphi = p + k_0$, e quindi $k_0 = \varphi - p$. Fissato l'ordine p della parte AR, sarebbe auspicabile usare il più alto numero di punti di autocorrelazione possibile. Come si è già spiegato in precedenza, la stima dell'autocorrelazione non polarizzata non consente di utilizzare tutti i punti perché per via della diminuzione del denominatore, l'autocorrelazione tende ad assumere valori elevati anche in assenza di reali periodicità. Tuttavia, anche l'autocorrelazione nella forma polarizzata presenta dei problemi: perché avendo il denominatore costante e via via diminuendo il numero di campioni di $x(n)$ sovrapposti, presenta un andamento che tende zero a prescindere dalla presenza di periodicità per lag elevati. Il numero di punti di autocorrelazione è un aspetto critico su cui è stata effettuata un'analisi statistica nello studio oggetto della tesi, come si vedrà nel paragrafo 5.2.1, e sulla cui influenza si è agito anche in fase sperimentale nell'ambito della finestra esponenziale (Capitolo 7).

4. Validazione del modello e analisi statistica dei risultati al variare dei parametri

In questo capitolo verrà spiegato il metodo utilizzato per la validazione del modello e verranno illustrati i risultati dell'analisi statistica sui diversi parametri che influiscono sulla bontà della ricostruzione dello spettro. Si entrerà quindi nella parte centrale del lavoro svolto dai professori M. Berardengo, G. B. Rossi e F. Crenna, poiché l'analisi statistica sui parametri è ciò che in assoluto più manca nella letteratura riguardante l'utilizzo dei modelli ARMA per la ricostruzione dello spettro di uno stato di mare. Per validare il modello ARMA definito nel capitolo 3, viene creata una sequenza $x(n)$ di spettro noto $S(\omega_i)$, viene data in pasto al modello che ne calcola lo spettro $S_x(\omega_i)$ secondo la procedura descritta nel capitolo 3, e infine viene calcolato l'errore confrontando $S(\omega_i)$ con $S_x(\omega_i)$. Questa procedura permette la validazione al calcolatore, consentendo di generare serie di altezze d'onda rappresentative di stati di mare anche molto differenti tra loro.

4.1. Generazione di una serie temporale di altezza d'onda tramite spettro JONSWAP

Il moto ondoso che interessa una zona di mare può essere diviso in due categorie: mare vivo e mare morto. Il mare vivo, al quale ci si riferirà con il termine "wind sea" usato in letteratura, è una condizione di mare in cui le onde sono create e sostenute la vento.



Fig. 4. 1 – Esempio di condizione di wind sea.

Cessato il vento, le onde continuano a propagarsi sulla superficie raggiungendo zone anche molto lontane dal luogo in cui sono state generate. Queste onde, ormai sconnesse dal sistema di venti che le ha generate, sono caratteristiche del cosiddetto mare morto, chiamato in letteratura e da qui in avanti “swell”.



Fig. 4. 2 – Esempio di condizione di swell.

In una zona di mare può avvenire che siano contemporaneamente presenti entrambe le condizioni, o anche più swell con spettro di potenza differente. Queste condizioni miste sono più frequenti negli oceani, dove le onde possono viaggiare senza ostacoli per migliaia di chilometri e arrivare in un luogo nello stesso momento provenendo anche da direzioni diverse. Uno stato di mare si può quindi descrivere con una densità spettrale di potenza (PSD) che è la somma delle PSD di una swell e di un wind sea, come per esempio lo spettro dello stato di mare bimodale rappresentato in Fig. 4.3.

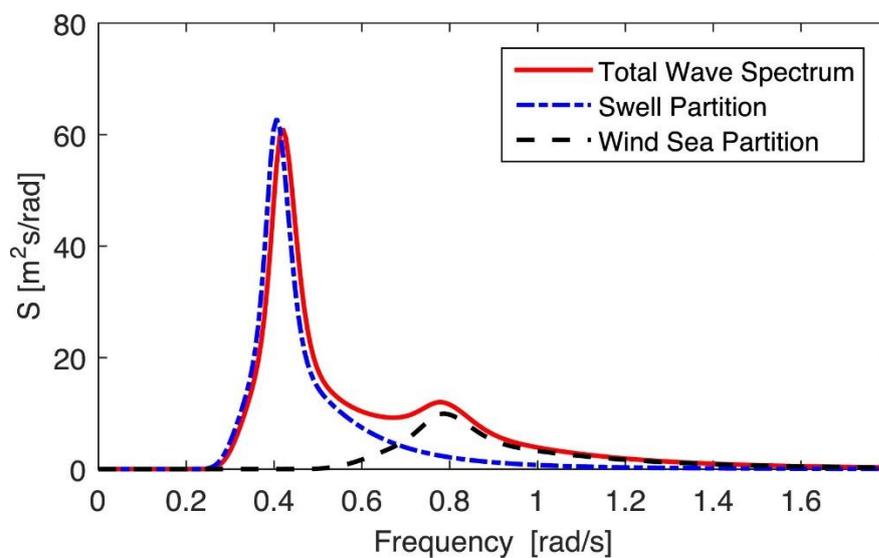


Fig. 4. 3 – PSD di uno stato di mare bimodale Wind Sea + Swell

Quindi, in generale, per uno stato di mare si può scrivere:

$$S(\omega) = S_{wind}(\omega) + S_{swell}(\omega) \quad (4.1)$$

Dove ω è la pulsazione delle onde. Per creare una serie di altezza d'onda da usare nella validazione del modello, è stata utilizzata l'espressione analitica dello spettro JONSWAP $S_J(\omega)$:

$$S_J(\omega) = A_\gamma S_{PM}(\omega) \gamma \exp\left(-0.5\left(\frac{\omega - \omega_p}{\sigma \omega_p}\right)^2\right) \quad (4.2)$$

Dove:

- σ è un parametro associato alla larghezza dello spettro
- ω_p è la pulsazione di picco, cioè la pulsazione delle onde che hanno più energia nonché la frequenza alla quale la PSD ha un picco
- $A_\gamma = 1 - 0.287 \ln(\gamma)$ è il fattore di normalizzazione
- γ è il fattore di picco, introdotto per generare uno spettro con un picco più marcato rispetto allo spettro di Pierson-Moskowitz $S_{PM}(\omega)$, come si può vedere dalla seguente immagine:

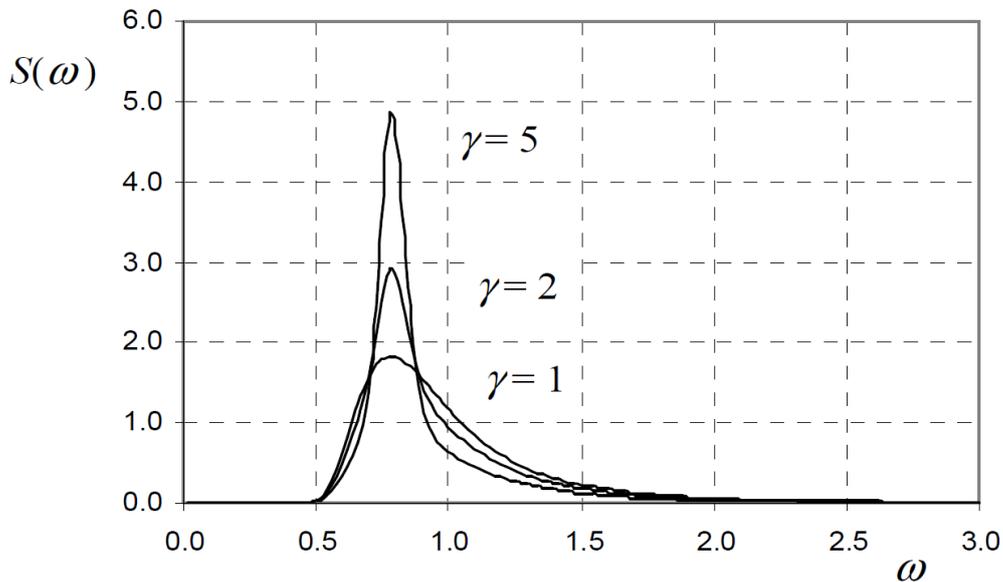


Fig. 4. 4 – Influenza di γ sullo spettro JONSWAP.

– $S_{PM}(\omega)$ è l'espressione dello spettro Pierson-Moskowitz:

$$S_{PM}(\omega) = \frac{5}{16} H_s^2 \omega_p^4 \omega^{-5} \exp\left(-\frac{5}{4} \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{-4}\right) \quad (4.3)$$

- Prese in considerazione un gruppo di onde, H_s , chiamata altezza significativa, è l'altezza media del sottogruppo costituito dalla terza parte di onde più alte del gruppo.

Qualora non si possedessero informazioni relative alla pulsazione di picco ω_p , ma si conoscesse invece la pulsazione media ω_m di tutte le armoniche che compongono lo stato di mare, è possibile ricavare la pulsazione di picco dalla relazione che lega il rapporto tra il periodo medio e il periodo di picco con il fattore di picco, dove $C=0.7303$, $D=0.04936$, $c=-0.006556$, $d=0.000361$:

$$\frac{T_m}{T_p} = C + D\gamma + c\gamma^2 + d\gamma^3 \quad (4.4)$$

Calcolata la PSD con la (4.2), la serie di altezza d'onda $x(n)$ si ottiene come sovrapposizione di M armoniche ognuna di frequenza $\omega_i = i\Delta\omega$, dove $\Delta\omega=2\pi/\Delta t$ e $\Delta t=1/f_{samp}$.

$$x(n) = \sum_{i=1}^M \sqrt{2S(\omega_i)\Delta\omega_i} \cos(\omega_i n \Delta t + \varphi_i) \quad (4.5)$$

L'aleatorietà di $x(n)$ è data dalla fase φ_i , variabile aleatoria uniforme nell'intervallo $[-\pi, \pi]$. Nella seguente tabella sono raccolti i parametri utilizzati nella generazione delle serie di altezza d'onda rappresentative dei tre stati di mare usati nella validazione del modello e nell'analisi statistica:

Tipo di segnale	Wind Sea				Swell			
	H_s	T_m	T_p	γ	H_s	T_m	T_p	γ
	[m]	[s]	[s]	[–]	[m]	[s]	[s]	[–]
1	3.00	12.00	15.51	1.00	-	-	-	-
2	1.00	4.00	4.82	3.00	-	-	-	-
3	2.00	5.00	6.11	2.50	2.00	16.00	18.32	6.50

Tab. 4. 1 – Parametri usati per simulare le serie di altezze d'onda

La maggior parte dello studio statistico si è concentrato su stati di mare monomodale, anche se la validazione è avvenuta anche per lo stato 3, che è invece bimodale, come si vedrà nel paragrafo 4.2.5. L'ottimizzazione del modello svolta nell'attività di tesi è stata effettuata sullo stato di mare di tipo 1.

4.2. Ricostruzione dello spettro e determinazione dell'errore

Dopo aver creato il segnale di altezza d'onda $x(n)$ a partire dallo spettro $S(\omega)$ secondo la procedura descritta nel paragrafo 4.1, la validazione avviene creando il modello ARMA a partire da $x(n)$ e calcolando quindi lo spettro $S_x(\omega)$ nelle modalità descritte nel capitolo 3. Se la modellazione del processo $X(n)$ è avvenuta correttamente, ci si aspetta che lo spettro calcolato sia simile allo spettro di partenza. Per quantificare la bontà della ricostruzione spettrale confrontando $S(\omega)$ e $S_x(\omega)$, si definisce l'indice Y , che da una misura dell'errore:

$$Y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^M (S_x(\omega_i) - S(\omega_i))^2}{\sum_{i=1}^M (S(\omega_i))^2}} \quad (4.6)$$

Y viene utilizzato quindi per quantificare la correttezza della ricostruzione spettrale al variare dei parametri del modello, così da poter effettuare un'analisi statistica. In Fig. 4.5 sono state rappresentate a titolo di esempio più ricostruzioni spettrali di uno stato di mare di tipo 1 alle quali è associato il relativo Y espresso in termini percentuali. Le ricostruzioni di Fig. 4.5 sono state fatte a puro scopo illustrativo per dare una visualizzazione indicativa dell'entità dell'errore in relazione alla bontà della ricostruzione.

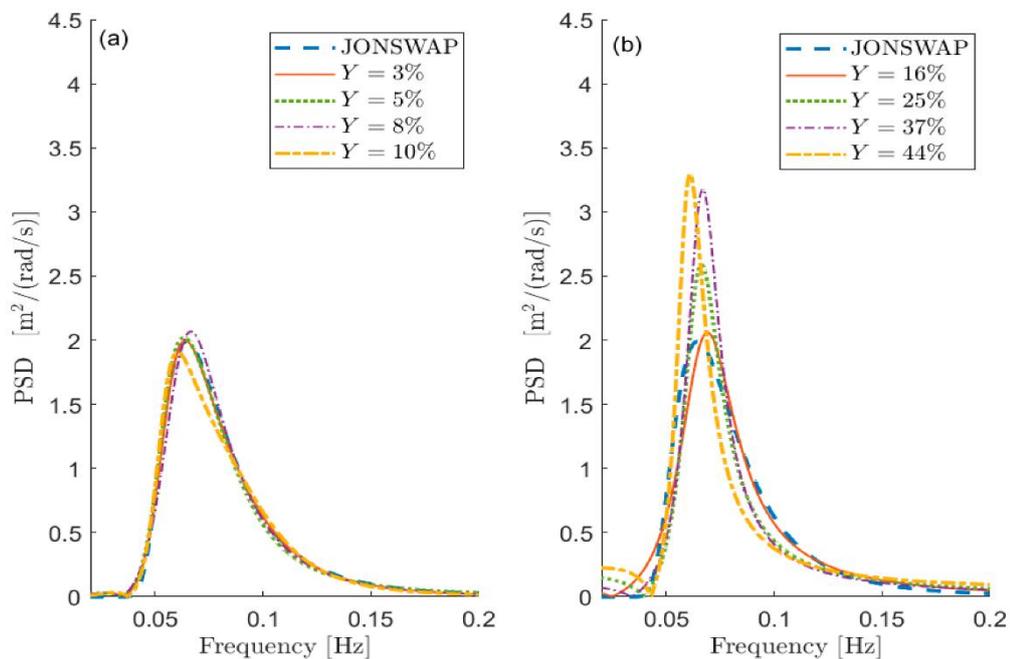


Fig. 4.5 – Confronto tra spettro usato per costruire la serie di altezza d'onda e diversi spettri ricostruiti con il metodo del capitolo 3 per uno stato di mare di tipo 1 (Tab 4.1).

Quale valore massimo di Y sia accettabile va stabilito a seconda delle applicazioni. La ricostruzione dello spettro e il calcolo di Y non è oneroso dal punto di vista computazionale,

impiega all'incirca le stesse risorse richieste dai tradizionali metodi non parametrici come il metodo di Welch e il metodo di Thomson. Questo consente, fissati i parametri del modello, di calcolare l'errore su una numerosa popolazione di serie di altezza d'onda, così da poter visualizzare i risultati in termini di box plot, come si vedrà nei prossimi paragrafi. Le indicazioni sulla scelta dei parametri sono ciò che più manca in letteratura perché nei numerosi studi sull'impiego di metodi parametrici si pone l'accento sui risultati al variare del tipo di metodo piuttosto che sulla scelta dei parametri, che può portare a risultati molto differenti tra loro per uno stesso algoritmo utilizzato. Nel seguito si illustreranno i risultati dell'analisi statistica e si forniranno le indicazioni per la scelta dei parametri quali:

- il numero φ di punti di autocorrelazione da usare nel sistema (3.4)
- l'ordine \hat{p} maggiorato della parte AR, che è superiore all'ordine p ottenuto dopo la rimozione dei poli energeticamente insignificanti
- la lunghezza della serie temporale $x(n)$, cioè il numero di campioni da usare per calcolare la stima dell'autocorrelazione con la (3.3)
- la frequenza di campionamento f_{samp} di $x(n)$

4.2.1. Effetto del numero di punti di autocorrelazione usati

Nel paragrafo 3.1.3.1 si è visto che il numero di poli del sistema è fondamentale per approssimare al meglio l'autocorrelazione, come si vede dalla sua espressione sotto forma di sommatoria di esponenziali:

$$r_x(k) = \sum_{i=1}^p \alpha_i e^{\lambda_i k} \quad (4.7)$$

Se si vuole utilizzare un elevato numero di esponenziali, è necessario disporre di più informazioni possibile sull'autocorrelazione che si vuole approssimare, e quindi un grande numero φ dei suoi punti. Inoltre, si ricorda che:

$$\varphi = p + k_0 \quad (4.8)$$

quindi

$$k_0 = \varphi - p \quad (4.9)$$

Dunque, più alto è φ , più è alto il numero k_0 di equazioni del problema ai minimi quadrati per la parte AR (3.4), ma anche il numero di equazioni nel problema ai minimi quadrati per trovare i coefficienti della parte MA (3.12). Tuttavia, bisogna ricordare che l'autocorrelazione calcolata con i campioni di $x(n)$

$$r_x(k) = \frac{1}{N-k} \sum_{i=k+1}^N x_i x_{i-k} \quad (4.10)$$

è una stima non polarizzata e consistente dell'autocorrelazione, quindi la sua varianza è nulla solo per $N \rightarrow \infty$. Questo significa che per ottenere l'autocorrelazione esatta del processo $X(n)$, in teoria bisognerebbe utilizzare una sequenza $x(n)$ composta da molti campioni, quindi molto lunga, ma questo collide con l'obiettivo di creare un modello che operi in tempo reale: sarebbe inaccettabile dover aspettare ore e ore per conoscere lo spettro di uno stato di mare, considerando che nel frattempo potrebbero variare le condizioni del mare e quindi potrebbe cadere l'ipotesi di processo stazionario, il che non permetterebbe neanche di utilizzare un filtro SLS per modellare il processo. Inoltre, bisogna aspettarsi che $x(n)$ contenga al suo interno un certo grado di rumore, essendo operativamente ottenuto come output di uno strumento di misura elettronico. Per questi due motivi $r_x(k)$ calcolata con delle serie di altezze d'onda con una lunghezza dell'ordine delle decine minuti ha una varianza tale da renderla diversa dall'autocorrelazione esatta. Al fine di mostrare gli effetti della varianza dell'autocorrelazione, si è effettuato il confronto tra le autocorrelazioni di tre serie di altezza d'onda diverse lunghe 1h e l'autocorrelazione di una serie lunga 24h, quindi con un numero di punti molto elevato. Le serie usate come base temporale sono generate utilizzando uno stato di mare di tipo 1, con frequenza di campionamento 1Hz. Le autocorrelazioni sono state normalizzate con il loro valore per $k=0$, a cui corrispondono i valori massimi, cosicché:

$$\rho_x(k) = \frac{r_x(k)}{r_x(0)} \quad (4.11)$$

Prendendo come riferimento $\rho_x(k)$ calcolata su una base di 24 ore, si può vedere in Fig. 4.6 che dopo un certo numero di punti tende ad annullarsi, mentre le serie di altezza d'onda di 60 minuti danno luogo ad autocorrelazioni che dopo un appiattimento iniziale presentano delle oscillazioni di ampiezza crescente e diverse per ogni autocorrelazione. Per questo motivo oltre un certo valore, che verrà denotato con $\hat{\varphi}$, l'autocorrelazione non è più rappresentativa dello stato di mare ma le sue oscillazioni sono dovute al numero di punti insufficiente e alla presenza di rumore. Per determinare il valore di $\hat{\varphi}$, si può considerare come riferimento il valore atteso dell'autocorrelazione normalizzata di un processo aleatorio costituito da un rumore bianco con deviazione standard $\sigma_w = 1$, calcolata per un numero N di campioni:

$$E[\rho_w] = \frac{1}{\sqrt{N}} \quad (4.12)$$

Facendo quindi l'assunzione che le oscillazioni dopo $\hat{\varphi}$ siano dovute a rumore bianco, allora la loro ampiezza massima sarà contenuta con una probabilità del 99% all'interno di un range di $\pm 3/\sqrt{N}$. Una volta che un picco dell'autocorrelazione resta all'interno di questo range, si assume che sia dovuto al rumore o all'insufficienza di campioni. Come si può vedere in Fig.

4.6, con questo criterio risulta che dopo all'incirca tra $\hat{\varphi}$ tra 34 e 36 si hanno gli ultimi picchi validi, mentre quelli immediatamente successivi non toccano le linee rosse quindi per serie di altezza d'onda di 60 minuti si è ipotizzato che i risultati migliori si ottengano utilizzando un numero di campioni φ compreso tra 34 e 36.

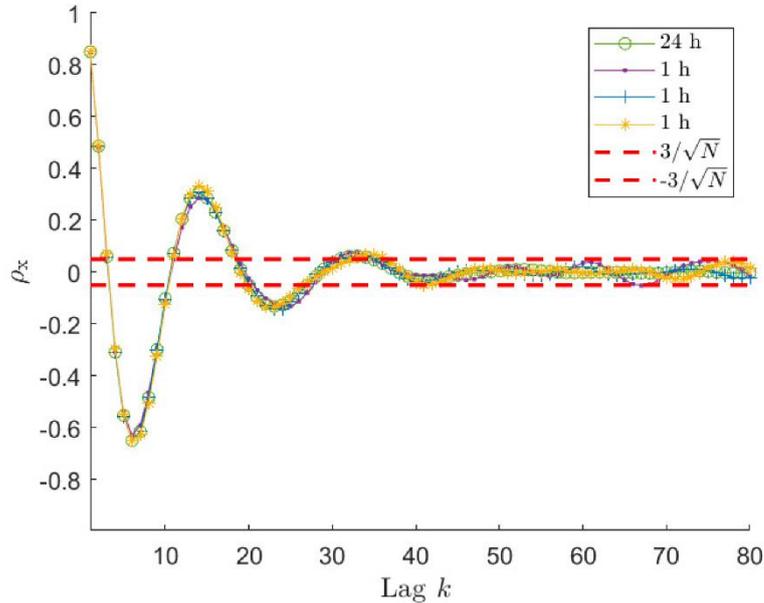


Fig. 4. 6 – Confronto tra le autocorrelazioni di tre differenti serie di altezza d'onda di 60 minuti e l'autocorrelazione di una serie di 24h, ritenuta essere sovrapponibile con l'autocorrelazione del processo.

Per studiare l'influenza di φ e verificare il criterio utilizzato per identificare la parte significativa dell'autocorrelazione, si è effettuata un'analisi statistica effettuando un grande numero di ricostruzioni dello spettro. Prendendo in considerazione valori di φ compresi tra 21 e 100, per ogni valore di φ sono state generate 500 serie di altezza d'onda da 60 minuti con le quali si è calcolata la rispettiva autocorrelazione, ricostruito lo spettro e calcolato l'indice Y definito dall'equazione 4.6. Per svolgere queste simulazioni, si è assegnato l'ordine iniziale della parte AR $\hat{p} = 10$, l'ordine q della parte MA è stato imposto essere uguale all'ordine p della parte AR ottenuto dopo la selezione dei poli con il criterio energetico, la frequenza di campionamento usata è $f_{samp} = 1Hz$. L'estremo inferiore dell'intervallo dei valori di φ considerati, ossia $\varphi = 21$, è il numero minimo affinché sia possibile risolvere l'equazione il sistema 3.4 nel rispetto dell'equazione 3.8 ($\varphi = 2\hat{p} + 1$), nell'ipotesi che tutti i poli iniziali portino componenti significative dal punto di vista energetico. I risultati ottenuti sono mostrati in Fig. 4.7 in termini di box-plot, dove per ogni valore compare il valore medio di Y , il 25esimo e 75esimo percentile e il numero di outliers.

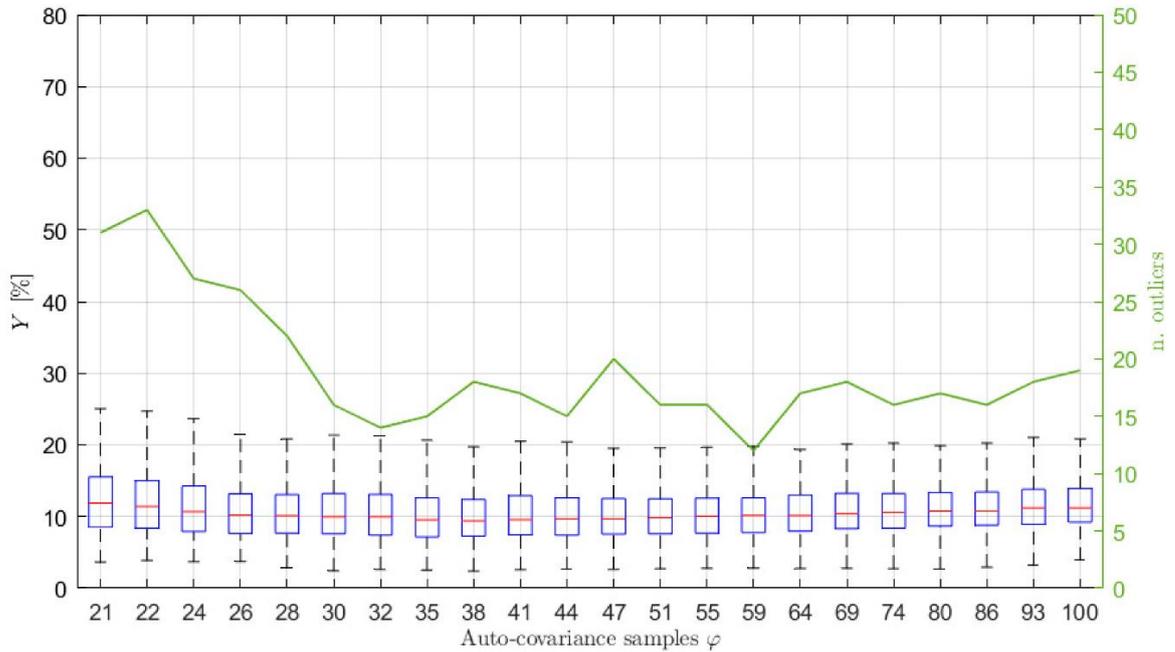


Fig. 4. 7 – Box-plot dell’analisi statistica per serie di lunghezza d’onda di 60 minuti, effettuata ricostruendo lo spettro utilizzando un numero di campioni φ compreso tra 21 e 100, per ognuno dei quali sono state effettuate 500 simulazioni. È stato assegnato $\hat{p} = 10$ e $f_{s\text{amp}} = 1\text{Hz}$.

I risultati migliori si hanno per φ compreso tra 34 e 36, per un numero di punti superiore l’errore aumenta anche se piuttosto lentamente. Diminuendo φ si ottiene lo stesso effetto sulla media ma si registra anche una maggior dispersione, evidenziata da una maggiore differenza tra valore massimo e minimo di Y e un incremento del numero di outliers. Quanto mostrato conferma che utilizzando un numero di punti diverso da $\hat{\varphi}$ si ha o una perdita di informazioni o un utilizzo di informazioni non significative, evidenziando come la selezione di φ sia un aspetto critico di cui si parlerà ancora nei prossimi paragrafi, contestualmente all’influenza degli altri parametri del modello.

4.2.2. Effetto dell’ordine iniziale \hat{p} della parte AR

Nel paragrafo 3.1.3.1 si è spiegata la procedura attraverso cui assegnare l’ordine p della parte AR: inizialmente si trova un valore grossolano \hat{p} con l’Akaike Information Criterion (AIC), e successivamente si scartano i poli con un livello di energia inferiore ad un determinato valore t_r denominato “energy treshold”. Considerando il sistema come un insieme di sottosistemi ognuno avente un singolo polo, durante le simulazioni il valore di t_r è stato

assegnato come il 10% dell'energia del sottosistema con l'energia più alta. Ricordando che l'AIC prevede di calcolare \hat{p} tale che sia minima la funzione

$$AIC = 2\hat{p} + \varphi \ln \frac{e_r}{\varphi - \hat{p}} \quad (4.13)$$

lo svolgimento di questa operazione in maniera esatta porta in alcuni casi ad ottenere un valore di \hat{p} troppo elevato. L'AIC index normalizzato con $\hat{\varphi}$ è stato graficato per $\hat{\varphi} = 34$ e $\hat{\varphi}=52$, considerando ancora serie di altezza d'onda di 60 minuti di uno stato di mare di tipo 1 (tab. 4.1) con $f_{samp}= 1$ Hz per coerenza con l'analisi del precedente paragrafo. Come si può vedere in Fig. 4.8, dopo un'iniziale marcata diminuzione l'indice AIC tende a decrescere sempre meno, andando verso una stabilizzazione che precede il raggiungimento del minimo vero e proprio.

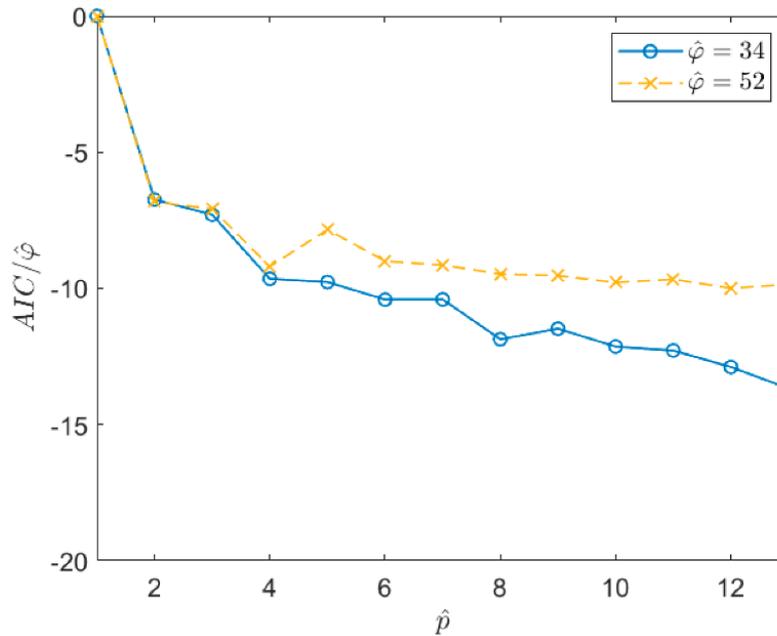


Fig. 4. 8 - AIC index normalizzato nei casi in cui $\hat{\varphi} = 34$ e $\hat{\varphi}=52$ per serie di altezza d'onda di 60 minuti, $f_{samp} = 1$ Hz.

Si consideri il caso in cui $\hat{\varphi}=34$: se dal punto di vista della minimizzazione dell'AIC index, prendere $\hat{p} = 8$ oppure $\hat{p} = 12$ non cambia molto, dal punto del numero k_0 di equazioni utilizzabili invece sì, perché se dopo la rimozione dei poli energeticamente insignificanti ne rimanesse comunque molti, si andrebbe incontro ad una diminuzione di $k_0 = \varphi - p$. In generale, avere \hat{p} troppo alto porta a dover alzare φ per avere $\varphi > 2\hat{p} + 1$, cioè per avere un sistema per il calcolo dei coefficienti AR sovradeterminato, e quindi poterlo risolvere ai minimi quadrati. Però alzare φ , come visto nel paragrafo precedente, conduce ad un peggioramento in termini di errore percentuale Y nella ricostruzione dello spettro. D'altro canto, avere \hat{p} arbitrariamente basso porterebbe alla cancellazione di alcuni picchi dalla ricostruzione dello spettro. Per studiare l'influenza del valore di \hat{p} sull'errore Y sono stati fatti i grafici della media di Y e del suo 75esimo percentile per diversi valori di \hat{p} , quali $\hat{p} =$

10, $\hat{p} = 20$, $\hat{p} = 40$. I grafici sono stati fatti al variare di φ in un intervallo compreso tra 25 e 450, effettuando 500 simulazioni per ogni valore di φ , utilizzando serie di altezza d'onda da 60 minuti di uno stato di mare di tipo 1 (tab. 4.1) e $f_{samp} = 1Hz$.

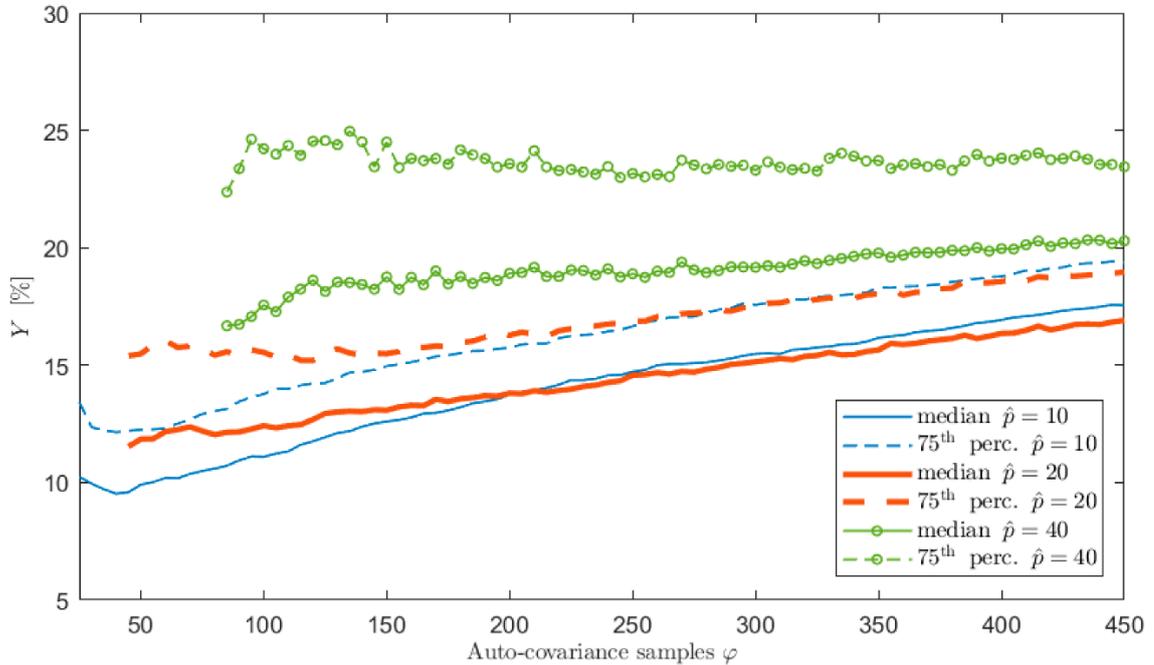


Fig. 4. 9 – Errore percentuale Y in funzione del numero di punti di autocorrelazione utilizzati φ , per numero iniziale di poli $\hat{p} = 10$, $\hat{p} = 20$, $\hat{p} = 40$.

La Fig. 4.9 mostra che, fissato φ , i risultati in termini di errore percentuale, sia nella media che nel 75esimo percentile, migliorano al diminuire di \hat{p} . Quanto appena affermato non è vero nei casi in cui $\hat{p} = 10$ e $\hat{p} = 20$, ma solo per valori di φ molto elevati, per i quali si è visto nel precedente paragrafo che i risultati sono inferiori e quindi si cercherà comunque di non operare in questa zona. I risultati ottenuti confermano quanto affermato riguardo alla cautela necessaria nell'utilizzare un numero troppo elevato di \hat{p} , per quanto riguarda l'utilizzo di poche equazioni o, per evitare questa evenienza, dell'utilizzo di un numero di campioni φ troppo elevato. In linea generale, non è necessario calcolare il valore di \hat{p} per cui l'AIC index è minimo, ma basta prendere quel valore successivo alla stabilizzazione dell'indice, come nel caso in studio in cui si è visto che i risultati migliori si hanno per $\hat{p} = 10$, cioè dopo che, arrestata la discesa decisa dell'indice, si ha una prima stabilizzazione. Inoltre, sono stati confermati i risultati del paragrafo precedente, per cui all'aumentare di φ si ha un generale peggioramento dell'errore percentuale Y .

4.2.3. Effetto della lunghezza della serie temporale di altezza d'onda

I metodi utilizzati per selezionare φ e \hat{p} per serie di altezza d'onda da 60 minuti hanno portato a buoni risultati, attestando l'errore percentuale Y nella ricostruzione dello spettro ad un valore poco inferiore al 10%. In questo paragrafo si esporranno le analisi effettuate nello studio sull'estensione del modello e dei metodi di assegnazione dei parametri al caso in cui vengano utilizzate serie più brevi. Di seguito verranno esposti i risultati ottenuti su serie di altezza d'onda di 30 minuti e di 10 minuti, ancora ottenute da uno stato di mare di tipo 1 (tab. 4.1) con frequenza di campionamento $f_{samp} = 1\text{Hz}$. Osservando tre autocorrelazioni di tre diverse serie di altezza d'onda di 30 minuti (Fig. 4.10), si vede che l'utilizzo del range $\pm 3/\sqrt{N}$ non è immediato perché dopo che l'autocorrelazione entra nella banda delimitata dalle linee rosse, l'oscillazione tende ad aumentare e successivamente i picchi escono di nuovo.

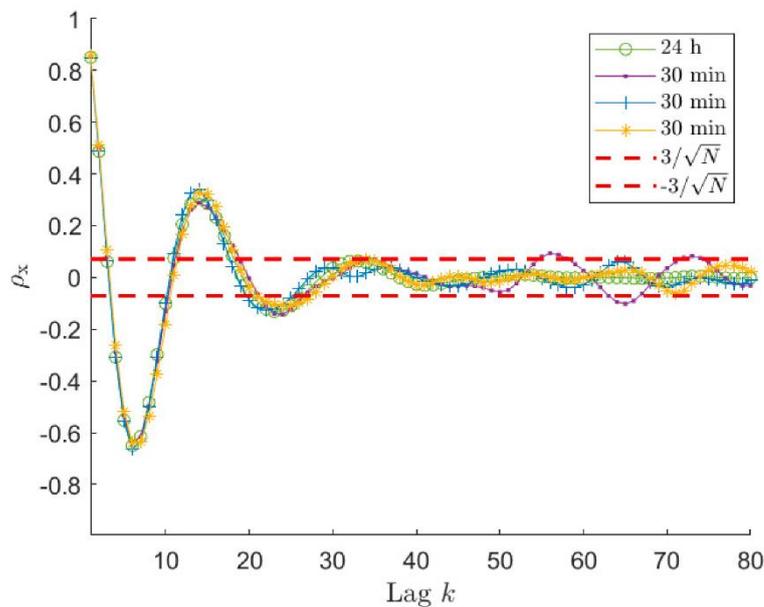


Fig. 4. 10 - Confronto tra le autocorrelazioni di tre differenti serie di altezza d'onda di 30 minuti e l'autocorrelazione di una serie di 24h, ritenuta essere sovrapponibile con l'autocorrelazione del processo.

Questo comportamento si ha anche per serie di 60 minuti ma per valori di k più alti. Per serie di 30 minuti l'autocorrelazione esce dal range prima anche se il valore di $\pm 3/\sqrt{N}$ è più alto, essendo N più piccolo: questo accade perché essendoci un numero di campioni inferiori, la dispersione dovuta al denominatore decrescente dell'autocorrelazione non polarizzata si manifesta prima, essendo la coda dell'autocorrelazione più vicina all'origine rispetto al caso con segnali di 60 minuti. Bisogna però tenere in considerazione che l'importante è ottenere un numero di campioni sufficiente a risolvere il problema di Prony ai minimi quadrati e da Fig. 4.10 si vede che all'incirca si può assumere per segnali di 30 minuti $\hat{\varphi} = 25 - 27$. Così facendo, si riesce ad utilizzare un numero soddisfacente di equazioni, infatti, mantenendo

$\hat{p} = 10$, si ha $\varphi = 25 > 2\hat{p} + 1 = 21$, quindi il sistema di equazioni è sovradeterminato. I risultati per serie di altezza d'onda di 30 minuti sono mostrati in termini di box-plot e outliers in Fig. 4.12b, dove anche in questo caso i risultati migliori sono ottenuti per $\varphi \cong \hat{\varphi}$. Anche se l'errore medio percentuale Y è aumentato portandosi intorno al 19%, comunque i risultati sono soddisfacenti. Se si utilizzano serie di altezza d'onda di 10 minuti i problemi aumentano perché identificare la zona in cui l'autocorrelazione rimane all'interno del range $\pm 3/\sqrt{N}$ diventa più difficile, come si può vedere da Fig. 4.11.

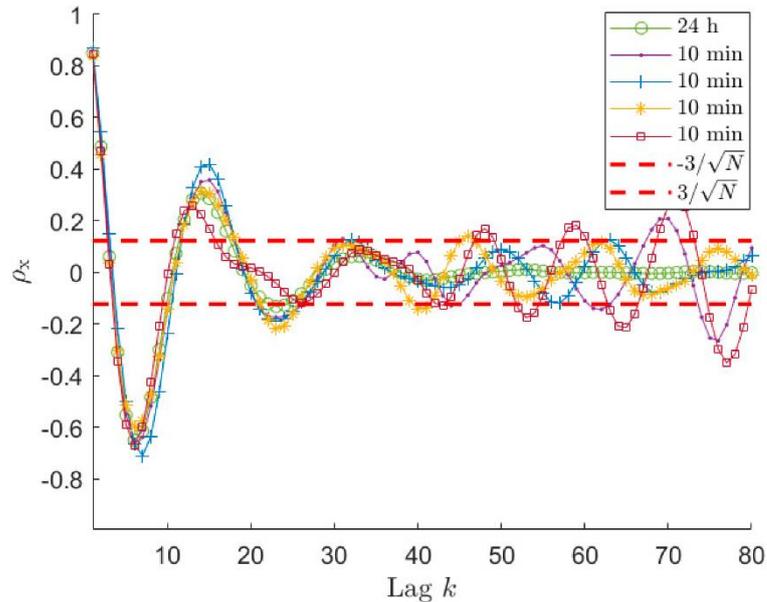


Fig. 4.11 - Confronto tra le autocorrelazioni di quattro differenti serie di altezza d'onda di 10 minuti e l'autocorrelazione di una serie di 24h, ritenuta essere sovrapponibile con l'autocorrelazione del processo.

Inoltre, anche per valori bassi di k , dove si ha il picco più alto, le quattro autocorrelazioni assumono valori sensibilmente differenti e non sono sovrapponibili. Tale andamento fortemente dispersivo dell'autocorrelazione fa sì che il numero di punti utilizzabili sia molto basso; infatti, a seconda di quale delle autocorrelazioni di Fig. 4.11 si consideri, si ha $\hat{\varphi} = 17 - 24$. Ricordando che deve essere almeno $\varphi = 2\hat{p} + 1 = 21$, se si vuole mantenere $\hat{p} = 10$ è necessario avere almeno $\varphi = 21$, che è il valore minimo utilizzato nelle analisi effettuate per realizzare il box-plot di Fig. 4.12a, effettuate con $\hat{p} = 10$ per realizzare un confronto coerente con i casi precedenti, e perché comunque la serie di altezza d'onda è realizzata a partire dallo stesso stato di mare di tipo 1 (tab. 4.1).

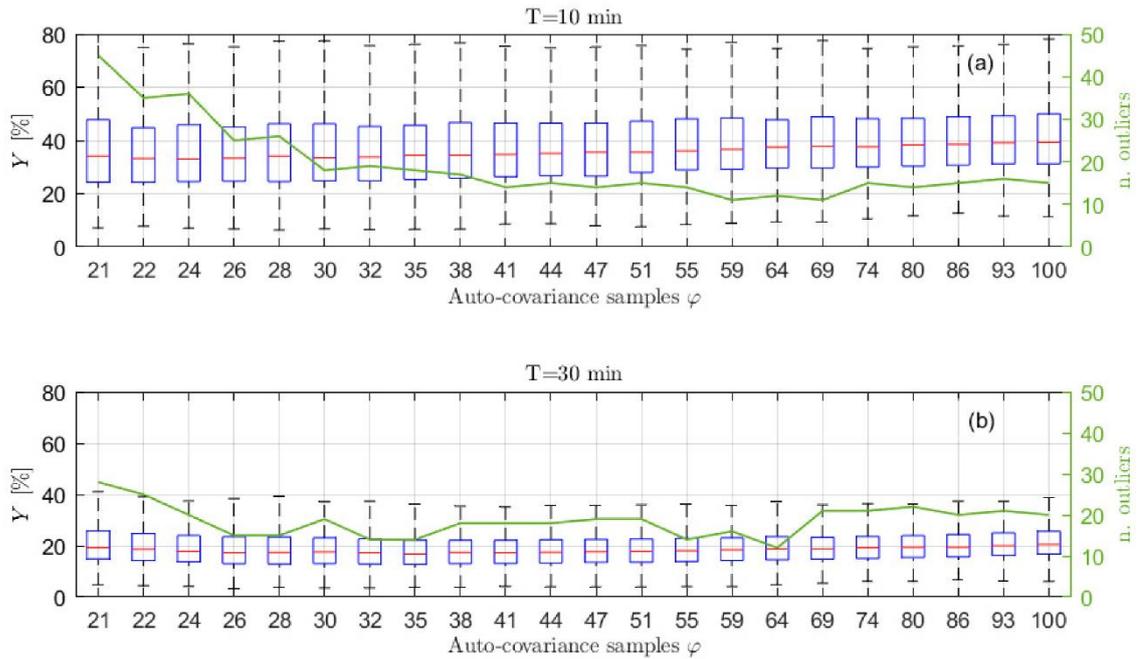


Fig. 4. 12– Confronto tra i risultati ottenuti per serie di lunghezza d’onda di 10 minuti (a) e 30 minuti (b) con $\hat{p} = 10$ e $f_{samp} = 1\text{Hz}$ al variare di φ .

I risultati mostrati in Fig. 4.12b mostrano che si ha un lieve miglioramento di Y spostandosi da $\varphi=21$ a $\varphi=26$ ma aumentando ulteriormente Y peggiora seppur in maniera poco marcata. Ciò che conta di più è che i valori di Y sono superiori al 30% per qualsiasi valore di φ , valore nettamente peggiore rispetto al caso in cui si utilizzino serie di altezza d’onda da 60 minuti o 30min. Per provare a migliorare i risultati ottenuti utilizzando segnali da 10 minuti è possibile rimettere in discussione il parametro \hat{p} e provare a cambiare la frequenza di campionamento, come si vedrà nel prossimo paragrafo.

4.2.4. Effetto dell’ordine iniziale \hat{p} della parte AR e della frequenza di campionamento f_{samp} su serie di altezza d’onda da 10 minuti

Nel precedente paragrafo si è visto come l’utilizzo di serie di altezza d’onda brevi porti con sé gli stessi problemi legati alla dispersione dell’autocorrelazione di serie di 60 minuti e di 30 minuti ma molto amplificati. In particolare, ci si trova a poter utilizzare uno scarso numero di punti di autocorrelazione, cosicché si fatica a tenere alto il numero di equazioni utilizzate per risolvere il sistema 3.4 ai minimi quadrati, essendo che a tale fine deve risultare $\varphi > 2\hat{p} + 1$. In questo paragrafo si esporranno i risultati ottenuti abbassando il numero iniziale di poli \hat{p} e aumentando il numero di punti di autocorrelazione φ utilizzando una frequenza di campionamento $f_{samp} = 2\text{Hz}$. In entrambi i casi è stato aggiunto del rumore perché nel caso in cui si aumenti la frequenza di campionamento, nelle applicazioni si ha un aumento della potenza del rumore elettrico legato alle componenti elettroniche e quindi ci si

aspetta un peggioramento dei risultati; quindi, il rumore è stato aggiunto anche nelle simulazioni in cui è stato modificato solo \hat{p} , per poter confrontare i due casi più coerentemente.

Utilizzare un ordine iniziale \hat{p} inferiore ha la conseguenza di diminuire la differenza tra \hat{p} e p , aumentando il rischio di avere conseguenze sulla selezione dei poli con il criterio energetico con la cancellazione di alcuni picchi dallo spettro, oppure di selezionare già all'origine un ordine troppo basso ($p < \hat{p}$). Per valutare quale valore assegnare a \hat{p} si è preso come riferimento l'AIC index normalizzato con $\hat{\varphi} = 24$ e $\hat{\varphi} = 17$ (fig. 4.13) e si è utilizzato il valore di \hat{p} immediatamente successivo alla prima diminuzione marcata dell'indice, cioè $\hat{p} = 5$, così da poter risolvere il sistema 3.4 ai minimi quadrati.

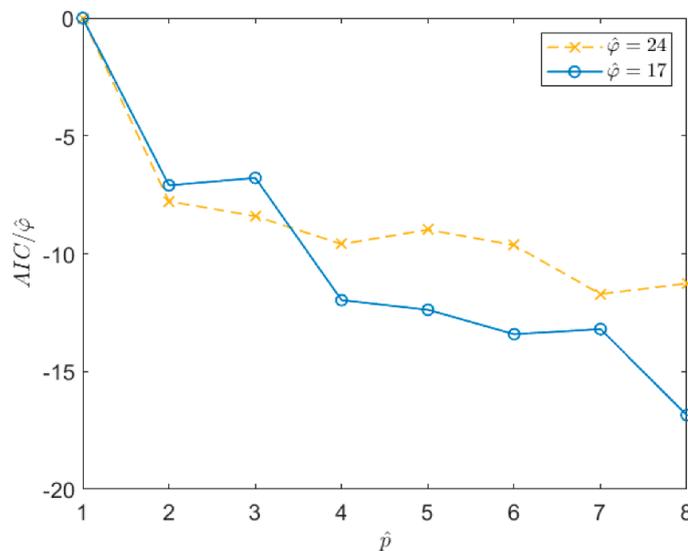


Fig. 4.13 - AIC index normalizzato nei casi in cui $\hat{\varphi} = 24$ e $\hat{\varphi} = 17$ per serie di altezza d'onda di 10 minuti, $f_{samp} = 1\text{Hz}$.

Prima di effettuare le simulazioni con $\hat{p} = 5$ è stato aggiunto una componente di rumore bianco, con un rapporto segnale / rumore pari a 30db per i motivi spiegati sopra, ma gli effetti sui risultati sono stati insignificanti grazie alla naturale tendenza dell'autocorrelazione ad eliminarne gli effetti a prescindere dalla lunghezza della serie temporale con la quale viene calcolata. I risultati delle analisi sono mostrati in termini di box-plot in Fig. 4.14: comparando il caso $\hat{p} = 5$ (4.13b) con il caso $\hat{p} = 10$ (4.13a) si vede che diminuire l'ordine iniziale a $\hat{p} = 5$ porta dei piccoli miglioramenti dell'errore percentuale Y , circa del 5%, diminuisce la dispersione e il numero di outliers, seppur si rimane distanti dai risultati ottenuti con serie di 30 minuti.

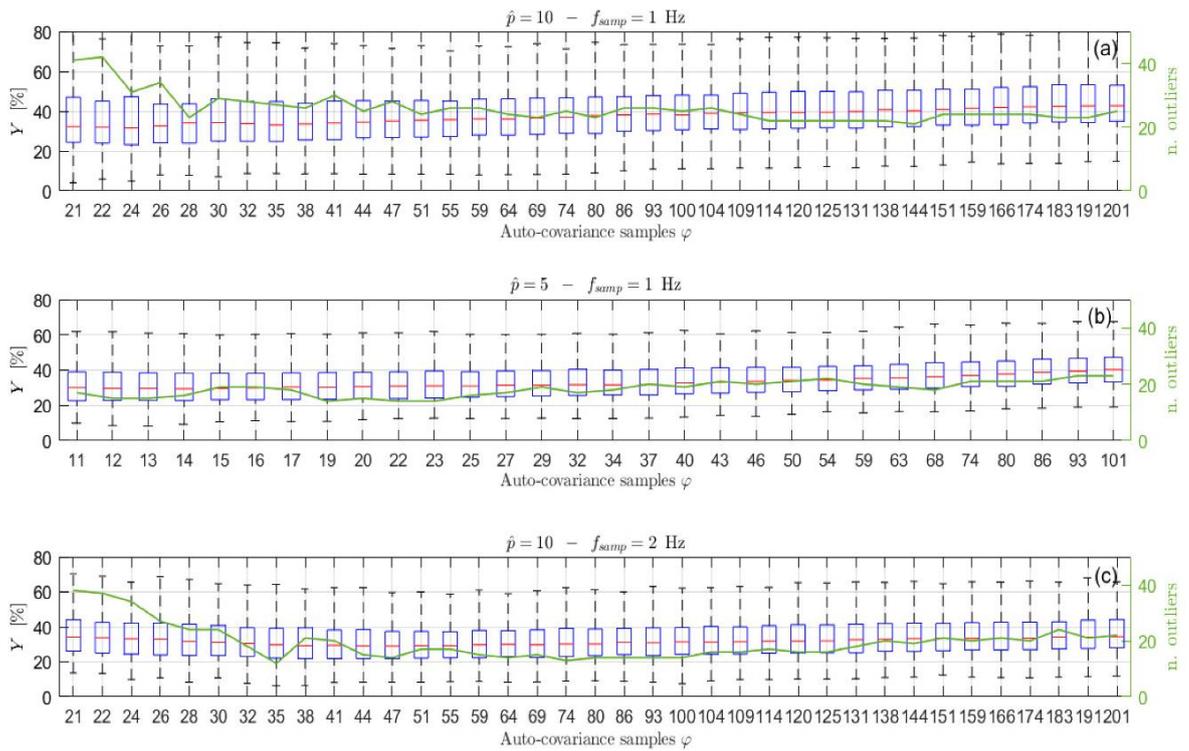


Fig. 4. 14 – Confronto tra i risultati ottenuti per serie di lunghezza d’onda di 60 minuti con $\hat{p} = 10$ e $f_{samp} = 1\text{Hz}$ (a) e i casi in cui si è assegnato invece $\hat{p} = 5$ (b) e $f_{samp} = 2\text{Hz}$ (c)

Per aumentare il numero di campioni φ è possibile aumentare la frequenza di campionamento; infatti, diminuire il periodo di campionamento Δt fa sì che avvenga un addensamento dei lag k , cosicché per esempio raddoppiare la frequenza di campionamento raddoppia il valore di \hat{p} senza che però ci si sia spostati né a destra né a sinistra nell’asse delle ascisse. Si sono allora effettuate le analisi utilizzando $f_{samp} = 2\text{Hz}$ e inserendo un rumore bianco con rapporto segnale rumore di circa 27 dB e sono state effettuate le simulazioni, i cui risultati sono riportati in Fig. 4.14c. Anche in questo caso l’aggiunta del rumore non comporta alcun peggioramento significativo. In termini di errore percentuale Y , si hanno dei leggeri miglioramenti ma, come per le analisi effettuate diminuendo \hat{p} , i miglioramenti non sono particolarmente rilevanti.

Si può quindi concludere che diminuire la lunghezza delle serie di altezza d’onda a 10 minuti porta sempre ad un peggioramento della ricostruzione dello spettro da parte del modello in studio. Seppur modificando f_{samp} e \hat{p} non ci sono stati miglioramenti, comunque l’impiego di questi due accorgimenti permette di mantenere il criterio del range $\pm 3/\sqrt{N}$ nella selezione di φ , consentendo di risolvere il sistema 3.4 di Prony ai minimi quadrati e quindi consentendo di scegliere \hat{p} senza un vincolo $\varphi > 2\hat{p} + 1$ troppo stringente.

4.2.5. Risultati ottenuti per stati di mare differenti

Per valutare il funzionamento del modello con altri stati di mare sono state fatte delle analisi utilizzando serie di altezza d'onda generate da stati di mare di tipo 2 e di tipo 3 (tab 4.1). Si è utilizzato per entrambi gli stati di mare serie da 60 minuti con frequenza di campionamento $f_{samp} = 1Hz$, avendo assegnato $\hat{p} = 10$ e utilizzando un numero di punti di autocorrelazione $\varphi = \hat{\varphi}$, con $\hat{\varphi}$ determinato con il metodo del range $\pm 3/\sqrt{N}$. Per quanto riguarda lo stato di mare di tipo 2, monomodale, i risultati sono raccolti in Fig. 4.15 in termini di boxplot e in Fig. 4.16 sono visualizzati gli spettri ricostruiti per la media, per il 25esimo e il 75esimo percentile.

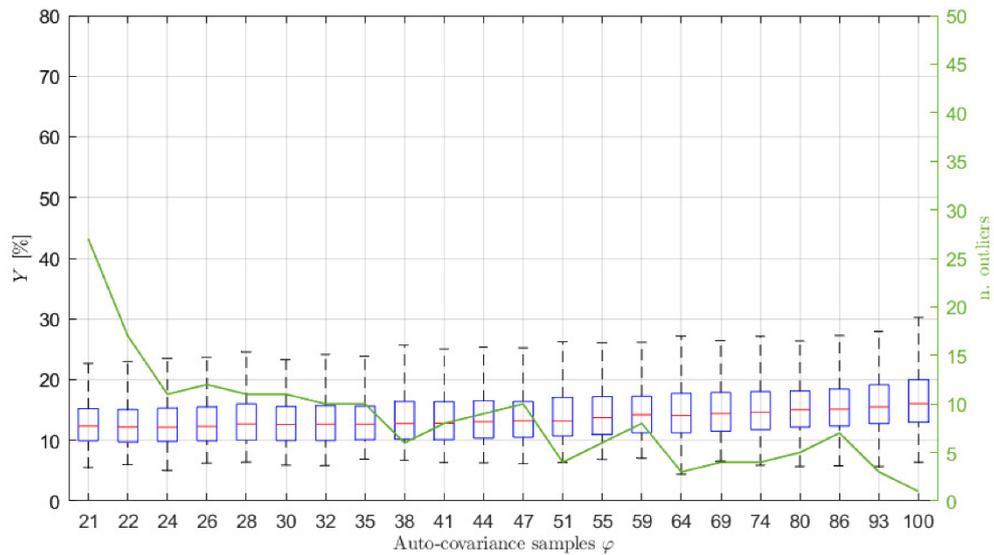


Fig. 4. 15 – Box-plot dei valori di Y ottenuto con segnali di altezza d'onda da 60 minuti per stati di mare di tipo 2 (tab. 4.1), con $\hat{p} = 10$, $f_{samp}=1Hz$.

Per lo stato di mare 2 si è ottenuto un valore di Y medio di 12.2% per valori di $\hat{\varphi}$ compresi tra 23 e 27, con il 25esimo percentile di 9.5% e il 75esimo percentile di 15.2%, di poco peggiori dei risultati ottenuti per lo stato di mare 1.

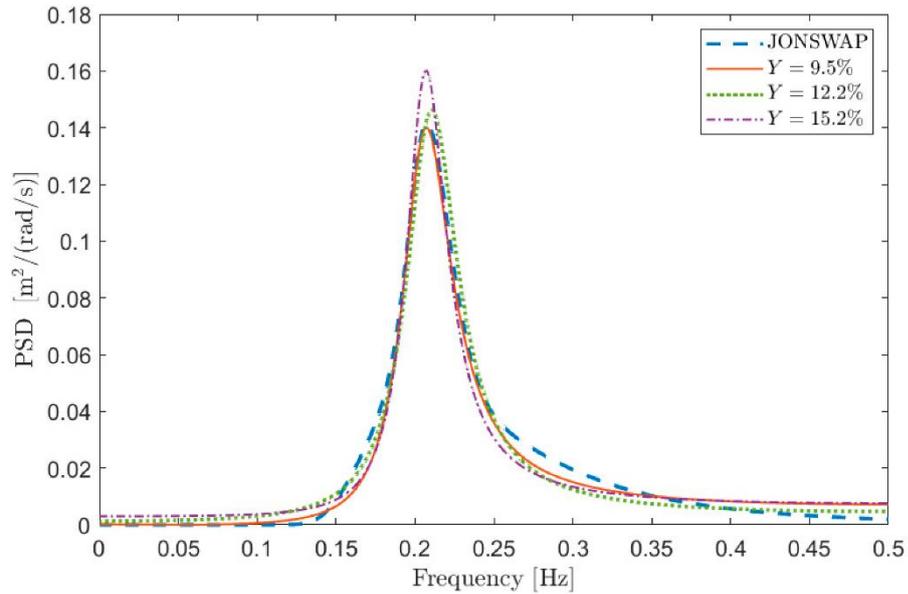


Fig. 4. 16 – Ricostruzioni spettrali rappresentative corrispondenti a Y mediano, al 25esimo e al 75esimo percentile per serie di altezza di 60 minuti di uno stato di mare di tipo 2 (tab. 4.1) con $\hat{p} = 10$, $f_{samp}=1Hz$.

Per lo stato 3, bimodale, sono state svolte alcune simulazioni che hanno portato a risultati comunque soddisfacenti, considerando che per gli stati di mare bimodale si hanno in genere più difficoltà a ricostruire lo spettro, con il valore di Y mediano pari a 13%, il 25esimo percentile pari a 10% e il 75esimo del valore di 17%. Alcune ricostruzioni spettrali rappresentative di questi valori sono rappresentate in Fig. 4.17. I risultati ottenuti per lo stato di mare sono positivi e confermano la bontà dei metodi utilizzati per assegnare i parametri del modello, il che giustifica lo svolgimento di ulteriori analisi in futuro.

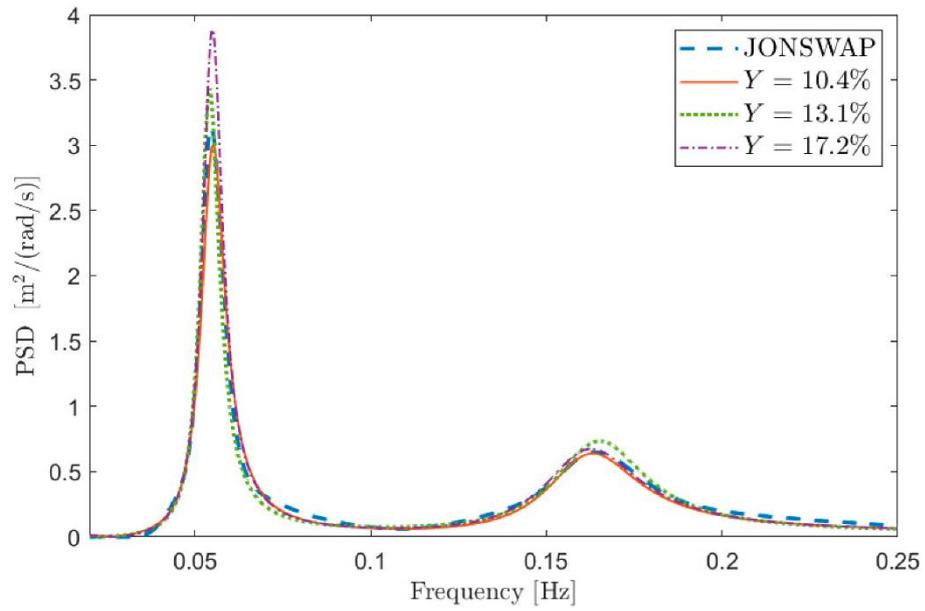


Fig. 4. 17 – Ricostruzioni spettrali rappresentative corrispondenti a Y mediano, al 25esimo e al 75esimo percentile per serie di altezza di 60 minuti di uno stato di mare di tipo 3 (tab. 4.1) con $\hat{p} = 10, f_{\text{samp}} = 1\text{Hz}$.

5. Ottimizzazione della frequenza d'aggiornamento della ricostruzione dello spettro

Nei precedenti capitoli si è visto che sotto determinate condizioni, i risultati ottenuti utilizzando un modello ARMA per l'analisi spettrale di uno stato di mare sono soddisfacenti. La corretta selezione dei parametri liberi del modello è fondamentale, come è stato dimostrato dallo studio compiuto dai professori M. Berardengo, G. B. Rossi e F. Crenna in cui si è entrati profondamente nel merito. In questo capitolo si descriverà la prima parte dell'attività sperimentale svolta durante la tesi per cercare di migliorare ulteriormente i risultati, utilizzando la tecnica dell'overlap analysis. L'attività è stata svolta nell'ottica di dover impiegare il modello per compiere l'analisi spettrale ai fini di monitoraggio, ottenendo quindi un aggiornamento dello spettro a intervalli di tempo regolari. Il tempo necessario ad effettuare l'aggiornamento del dato, chiamo tempo di refresh (ΔT_R), è l'oggetto dell'ottimizzazione descritta in questo capitolo.

5.1. Relazione tra operazione di media dello spettro su sotto-intervalli, overlap e tempo di refresh

I metodi parametrici e non-parametrici per l'analisi spettrale di processi aleatori stazionari di cui si è parlato finora, hanno la funzione di cogliere le periodicità all'interno dei dati analizzati passando attraverso la stima dell'autocorrelazione. Come si è visto, sia nel caso dell'utilizzo di metodi non-parametrici che parametrici, è auspicabile che tale stima sia effettuata con serie temporali più lunghe possibile. Tuttavia, come si è accennato per i metodi non-parametrici nel capitolo 2, talvolta sono stati rilevati dei vantaggi nel suddividere la base temporale in sotto-intervalli, calcolare lo spettro per ogni sotto-intervallo ed effettuare la media. Questo accorgimento ha la funzione di ridurre componenti spurie dovute alla presenza di rumore [20], ma ha anche l'effetto di permettere che l'aggiornamento del dato avvenga più frequentemente. Per evidenziare isolatamente quest'ultimo aspetto, si consideri il caso di una generica serie temporale di cui, invece di effettuare la stima dello spettro (indipendentemente dal metodo utilizzato) su una base temporale di 60 minuti, si effettui la stima separatamente su tre intervalli da 20 minuti e poi si faccia la media degli spettri ottenuti. Facendo riferimento a Fig. 5.1, così facendo si potrebbe ottenere il dato utilizzando i segmenti 1, 2 e 3, e dopo 20 minuti si potrebbe avere un altro dato aggiornato utilizzando i segmenti 2, 3 e 4. Così facendo, quindi, si otterrebbe un tempo di refresh Δt_R di 20 minuti.

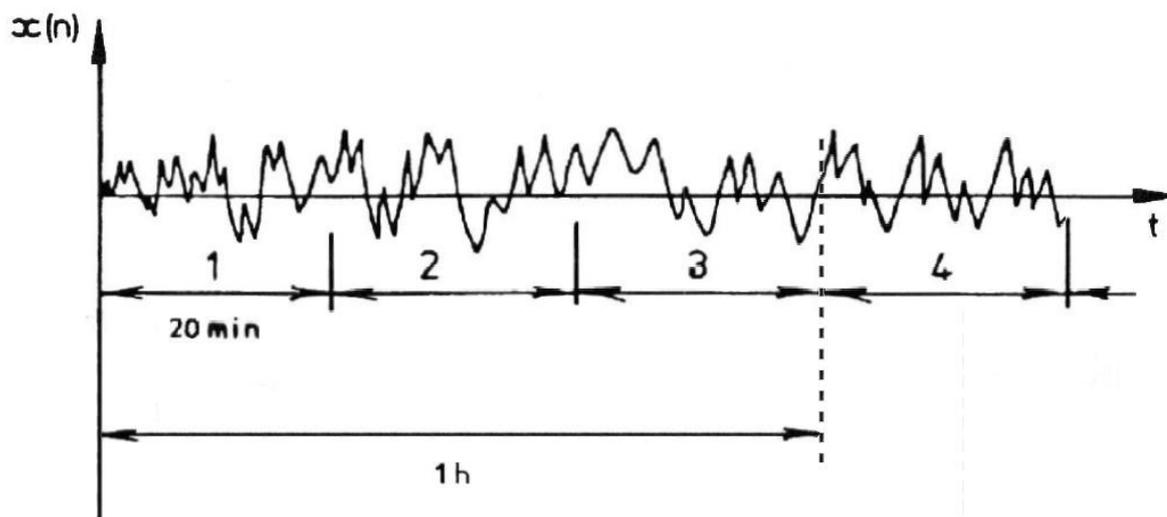


Figura 5. 1 – La divisione del segmento di serie temporale di 1h in tre sotto-intervalli da 20 minuti consente ogni 20 minuti di ricalcolare lo spettro escludendo il primo sotto-intervallo e aggiungendone un altro.

Per incrementare il numero di segmenti usati per calcolare la media, e quindi, per diminuire ulteriormente l'effetto del rumore, è possibile eventualmente effettuare la sovrapposizione dei sotto-intervalli (overlap) [20], ottenendo un valore di refresh ancora più basso. In Fig. 5.2, si vede come sia possibile calcolare lo spettro sui segmenti temporali da 1 a 6 ed effettuare la media, e dopo 8 minuti effettuare la stessa operazione sui segmenti da 2 a 7, quindi con un refresh di 8 minuti.

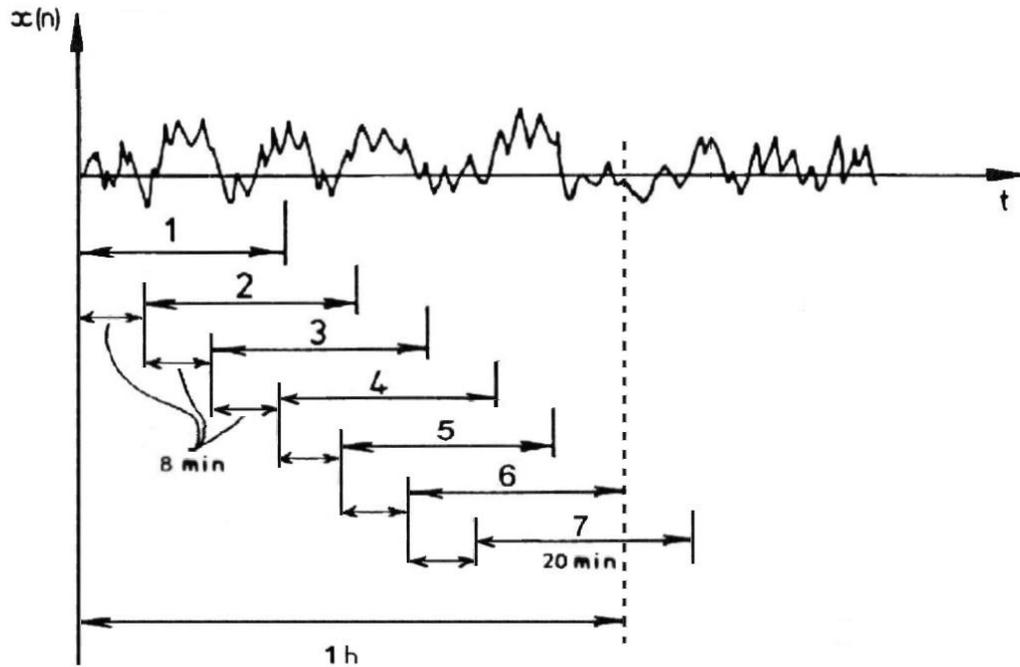


Figura 5. 2 – La sovrapposizione di sotto-intervalli consente di aggiornare la ricostruzione spettrale più frequentemente e di effettuare la media su una popolazione maggiore di segmenti.

La sovrapposizione non può essere assegnata arbitrariamente, perché i risultati non variano linearmente e in maniera monotona con l'overlap, inoltre bisogna prima di tutto considerare il tempo necessario per effettuare il calcolo, che rappresenta un limite inferiore per ΔT_R . Nel seguito, ci si riferirà a intervalli di tempo indicando Δt , mentre ci si riferirà ai corrispondenti intervalli in termini di numero di punti con ΔT . Si adotteranno le seguenti notazioni: la lunghezza della serie temporale oggetto della ricostruzione spettrale verrà chiamata "base temporale" e denotata T_B (in Fig. 5.1 e 5.2 si ha $t_B = T_B / f_{samp} = 1h$), la lunghezza dei sotto-intervalli verrà denotata con ΔT_s (in Fig. 5.1 e 5.2 si ha $\Delta t_s = \Delta T_s / f_{samp} = 20$ minuti), il numero di punti per cui due sotto-intervalli sono sovrapposti è detto overlap e sarà denotato con ΔT_o , il numero di punti a cui corrisponde il tempo di refresh verrà denotato con $\Delta T_R = \Delta t_R \cdot f_{samp}$. L'overlap viene frequentemente assegnato in termini percentuali rispetto alla lunghezza dei sotto-intervalli ($\Delta T_{o\%}$), cosicché:

$$\Delta T_o = \frac{\Delta T_{o\%} \Delta T_s}{100} \quad (5.1)$$

La relazione che lega ΔT_R , ΔT_O e ΔT_S è la seguente:

$$\Delta T_R = \Delta T_S - \Delta T_O \quad (5.2)$$

Per quanto detto nel paragrafo 4.2.4, alzare la frequenza di campionamento f_{samp} a più di 1 Hz non porta benefici rilevanti; quindi, tutte le analisi svolte all'interno di questo capitolo sono state svolte con $f_{samp} = 1 \text{ Hz}$. Per semplicità, d'ora in avanti ci si riferirà agli intervalli denotati con T (maiuscola) con il termine "tempo", e verrà data per scontata la corrispondenza tra secondi e numero di campioni. La scelta dei parametri appena introdotti, insieme alla lunghezza della base temporale, influisce sui risultati della ricostruzione e va effettuata prendendo in considerazione diversi fattori, come si vedrà nel prossimo paragrafo.

5.2. Variazione dello stato del mare: come scegliere la base temporale?

Nel paragrafo 4.2.3 si è visto che la bontà della ricostruzione spettrale è fortemente influenzata dalla lunghezza della serie di altezza d'onda utilizzata per calcolare la stima dell'autocorrelazione. In questo paragrafo si forniranno importanti elementi su quanto debba essere lunga la base temporale, in relazione all'ipotesi di stazionarietà delle condizioni del mare e alle applicazioni dell'analisi spettrale dello stato del mare.

In generale, nella letteratura classica viene assunto che uno stato di mare può essere considerato stazionario per un intervallo di tempo che può andare dai 30 minuti fino alle 10 ore a seconda delle condizioni [21], che possono cambiare più o meno rapidamente a seconda della dinamica del fenomeno che sostiene (mare vivo) o che ha generato (mare morto) la mareggiata. In diversi studi effettuati in zone di mare differenti (Mare del Nord [22] Nord Pacifico [23], Mare Orientale della Corea [24]) si è rilevata l'evoluzione dello spettro di diversi stati di mare, considerando separatamente le variazioni del periodo e dell'altezza d'onda. Da questi studi si comprende come sia complicato trarre conclusioni di carattere generale; tuttavia, emerge chiaramente che la variazione dell'altezza significativa è più repentina rispetto alla variazione dei parametri legati al periodo, come confermato da uno studio effettuato su segmenti temporali di 20 minuti ottenuti da misurazioni a bordo di navi nel Golfo di Aden, nell'Oceano Pacifico (a sud dell'India) e a largo di Hong Kong [25]. Queste evidenze rendono l'ipotesi di stazionarietà più restrittiva nel caso in cui si sia interessati all'altezza d'onda piuttosto che alla frequenza di picco. In letteratura, d'altronde,

si fa riferimento a intervalli minimi di stazionarietà differenti a seconda del contesto in cui si intende applicare l'analisi dello stato del mare, passando dal considerare lo spettro costante al massimo per 20 minuti fino ad "alcune ore".

Per quanto riguarda i WEC (Waves Energy Converter), i requisiti richiesti in termini di precisione dell'identificazione dei parametri di uno stato di mare variano a seconda del tipo di controllo che si adotta per massimizzare la potenza estratta: i metodi di controllo più complessi (Model Predictive Control) non utilizzano lo spettro dello stato del mare, ma necessitano la conoscenza precisa del profilo dell'altezza d'onda, per cui sono allo studio sistemi di previsione che forniscono in output direttamente l'altezza d'onda incidente prevista fino a 20s nel futuro([26], [27]). Altri tipi di controllo prevedono che al sistema siano fatte raggiungere le condizioni di risonanza senza la necessità di conoscere l'altezza dell'onda incidente. Questo può avvenire modificando lo smorzamento dell'unità che trasforma il moto del dispositivo in energia [28], oppure vincolando il moto del sistema tramite controllo che lo trattenga e rilasci operando un controllo di fase, in funzione della frequenza di risonanza del dispositivo e della frequenza di media dello stato di mare [29]. Proprio in questo ultimo studio, per esempio, si afferma che le grandezze statistiche ottenibili dallo spettro rimangono costanti per alcune ore. In un altro studio, in cui si analizza il controllo di un sistema di estrazione di energia basato sul principio della colonna d'acqua oscillante (WOC), viene utilizzato lo spettro per intero e dunque viene assunto che lo stato di mare può essere considerato costante per un intervallo di tempo che va dai 30 minuti a 60 minuti [30].

In ambito navale, la previsione dei parametri dello stato del mare riguarda aspetti più critici inerenti alla possibilità di prendere decisioni tempestive da parte degli operatori. Essendo che la sollecitazione agente su un natante in una mareggiata è proporzionale alla velocità relativa tra nave e onde [31], si ritiene che in alcuni casi la conoscenza precisa dello stato del mare in tempo reale da parte del capitano avrebbe potuto evitare l'affondamento, come nel caso della Arvin, affondata nel Mar Nero il 17.01.2021 [32]. Questa necessità ha fatto sì che venissero sviluppati metodi per l'analisi dello stato del mare cosiddetti "real-time", che prima stimano lo spettro e successivamente ottengono da esso i parametri in senso statistico, aspetto che li differenzia dai modelli real-time citati per il controllo MPC degli WEC. Per questi metodi di analisi spettrale, l'intervallo di tempo massimo di stazionarietà ammissibile è comunemente 20 minuti. Con questa assunzione, una prima chiara definizione di stima dello spettro real-time è formulata da R. Pascoal in uno studio del 2009 [33], dove si ritiene che una ricostruzione spettrale possa considerarsi real-time se avviene ogni 3-8 minuti. Tuttavia, Pascoal, con 3-8 minuti intende l'intervallo di tempo in cui viene aggiornato il dato, e non la base temporale su cui viene calcolato lo spettro. Una chiara spiegazione è data da Pascoal stesso in uno studio precedente effettuato nel 2007 [34], dove pur definendo anche qui una stima real-time come un dato aggiornato ogni circa 3 minuti, nel suo metodo utilizza una base temporale di 20 minuti divisa in 6 sotto-intervalli, eliminando il più vecchio e aggiungendone uno nuovo ogni 3.33 minuti. In entrambi gli studi, il minimo refresh utilizzato (3.33 minuti in [34] e 3 minuti in [33]) è dettato dal tempo necessario per effettuare i calcoli. In una recente review ancora in corso di stampa [35], è stata data la definizione "semi-real-time" ad uno dei modelli revisionati [36], che effettua la ricostruzione su una base

temporale di 15 minuti utilizzando un refresh di 8 minuti, mentre in un ulteriore studio [37] si è utilizzata una base temporale di 15 minuti con un refresh di 10 minuti.

Il modello studiato e ottimizzato in questa tesi nasce per essere applicato a dati acquisiti con una boa; dunque, uno dei possibili campi di applicazione è il monitoraggio dello stato del mare finalizzato al controllo di WEC. Come si è visto, nell'ambito della ricostruzione spettrale per il controllo di sistemi di estrazione di energia dalle onde è ragionevole assumere che l'intervallo di stazionarietà sia di almeno 30 minuti fino ad alcune ore a seconda del tipo di controllo implementato nel sistema. L'ottimizzazione del modello è stata quindi effettuata utilizzando come base temporale 60 minuti, 30 minuti e 10 minuti, effettuando la divisione della base temporale in sotto-intervalli sovrapposti (overlap).

5.3. Applicazione della media su sotto-intervalli e overlap al modello ARMA in studio

In questo paragrafo si esporrà l'applicazione del metodo della media e overlap di sotto-intervalli al modello ARMA studiato nella tesi. La differenza rispetto all'applicazione ai metodi non-parametrici discussi nel capitolo 2 sta nell'entità che viene mediata: nel metodo di Barlett, Welch e Thomson viene effettuata la media delle ricostruzioni spettrali, per il modello ARMA invece, durante l'attività di tesi, la media e l'overlap è stata fatta con le autocorrelazioni stimate sui singoli sotto-intervalli. In altre parole, facendo ancora riferimento al caso di Fig. 5.2, significa che in tal caso si calcolano 6 stime dell'autocorrelazione sui 6 sotto-intervalli e si effettua la loro media. L'autocorrelazione mediata così ottenuta viene data in pasto al modello che calcola lo spettro seguendo il procedimento del capitolo 3. Per ottenere l'autocorrelazione mediata si è voluto scrivere un codice che permettesse di assegnare qualsiasi valore della base temporale T_B , della lunghezza dei sotto-intervalli ΔT_S e della percentuale di overlap che si ritenesse opportuno. Tuttavia, fissati T_B e ΔT_S , non è possibile assegnare a piacimento il valore dell'overlap perché non è detto che la sequenza di intervalli sovrapposti stia precisamente all'interno della base temporale assegnata a priori. Si è quindi impostato il codice in maniera che si dovesse assegnare una lunghezza indicativa della base temporale T'_B , la lunghezza dei sotto-intervalli ΔT_S e l'overlap percentuale $\Delta T_{O\%}$, e che poi venisse calcolata la base temporale T_B eventualmente maggiorata rispetto a T'_B in modo da far stare dentro i sotto-intervalli precisamente. Per prima cosa, viene calcolato ΔT_O a partire da $\Delta T_{O\%}$ con la (5.1), poi viene calcolato il refresh ΔT_R con la (5.2). In seguito, viene calcolato il numero di sotto-intervalli N_S :

$$N_S = \text{ceil} \left[\left(\frac{T'_B - \Delta T_S}{\Delta T_R} \right) + 1 \right] \quad (5.3)$$

Dove $\text{ceil}(x)$, in ambiente Matlab, è una funzione che approssima il numero reale x al primo numero n intero tale che $n \geq x$. Successivamente, viene calcolata la base temporale effettiva:

$$T_B = \Delta T_R(N_S - 1) + \Delta T_S \quad (5.4)$$

Comunque, per poter confrontare i risultati ottenuti con quelli mostrati nel capitolo 4, si mostreranno i risultati per la combinazione di $\Delta T_S, \Delta T_{0\%}$ tali da avere $T_B = 1h - 30 \text{ min} - 10 \text{ min}$. L'autocorrelazione media $r_{Mx}(k)$ usata per ricostruire lo spettro è:

$$r_{Mx}(k) = \frac{1}{N_S} \sum_{i=1}^{N_S} r_x(k, i) \quad k = 1, 2, \dots, \Delta T_S \quad (5.5)$$

Dove $r_x(k, j)$ il k -esimo punto di autocorrelazione calcolato sul j -esimo sotto-intervallo. Nelle analisi statistiche effettuate nel presente capitolo, sono state utilizzate serie di altezza d'onda generate da uno stato di mare di tipo 1 da Tab. 4.1, campionate a $f_{\text{samp}} = 1\text{Hz}$, avendo assegnato l'ordine iniziale della parte AR $\hat{p} = 10$. Come nel capitolo precedente, è stato calcolato l'errore medio Y su 500 ricostruzioni spettrali per ogni valore del numero di punti φ di autocorrelazione usati, con $21 \leq \varphi \leq 100$. Per valutare la bontà della ricostruzione spettrale, si estrapolerà il valore di φ per cui Y medio è minimo, i relativi valori di Y medio (Y_{min}), del 75esimo percentile di Y e del numero di outliers.

5.3.1. Analisi svolte e risultati ottenuti utilizzando una base temporale di 60 minuti

Nel seguito verranno esposti i risultati ottenuti applicando la divisione della base temporale $T_B = 30$ minuti in sotto-intervalli di lunghezza $\Delta T_S = 20$ minuti. Una parte dell'attività di tesi è stata indirizzata alla ricerca di un metodo per determinare l'overlap ottimo passando attraverso due fasi: l'analisi della deviazione standard di 500 differenti autocorrelazioni calcolate con la (5.5) per diversi valori di overlap e la determinazione dell'overlap ottimo tramite un particolare tipo di correlazione. Di seguito verranno mostrate le analisi e i risultati ottenuti.

5.3.1.1. Analisi della deviazione standard di $r_{Mx}(k)$ su una popolazione di 500 serie di altezza d'onda differenti.

Al fine di valutare come la variabilità dell'autocorrelazione media sia influenzata dal valore dell'overlap, sono state calcolate $N_{rip} = 500$ autocorrelazioni con la (5.5) valutata su 500 basi temporali generate separatamente e ne è stata calcolata la deviazione standard:

$$\sigma(k) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_{rip}} (\bar{r}_{Mx}(k) - r_{Mx}(k, i))^2}{N_{rip} - 1}} \quad (5.6)$$

Con $r_{Mx}(k, i)$ k-esimo punto di autocorrelazione media calcolata con la (5.5) utilizzando l'i-esima base temporale e $\bar{r}_{Mx}(k)$ media del k-esimo punto delle autocorrelazioni $r_{Mx}(k, i)$:

$$= \frac{1}{N_{rip}} \sum_{i=1}^{N_{rip}} r_{Mx}(k, i) \quad (5.7)$$

Per confrontare le deviazioni standard calcolate al variare dell'overlap con un riferimento superiore e uno inferiore, si è preso come riferimento la deviazione standard calcolata ugualmente su una base temporale T_B di 20 minuti senza sotto-intervalli e su una base temporale $T_B = 1h$ senza sotto-intervalli. Per questi due casi limite, in Fig. 5.3 si è riportato il grafico delle medie di $N_{rip} = 500$ autocorrelazioni calcolate con la 5.7 e la relativa deviazione standard calcolata con la 5.6.

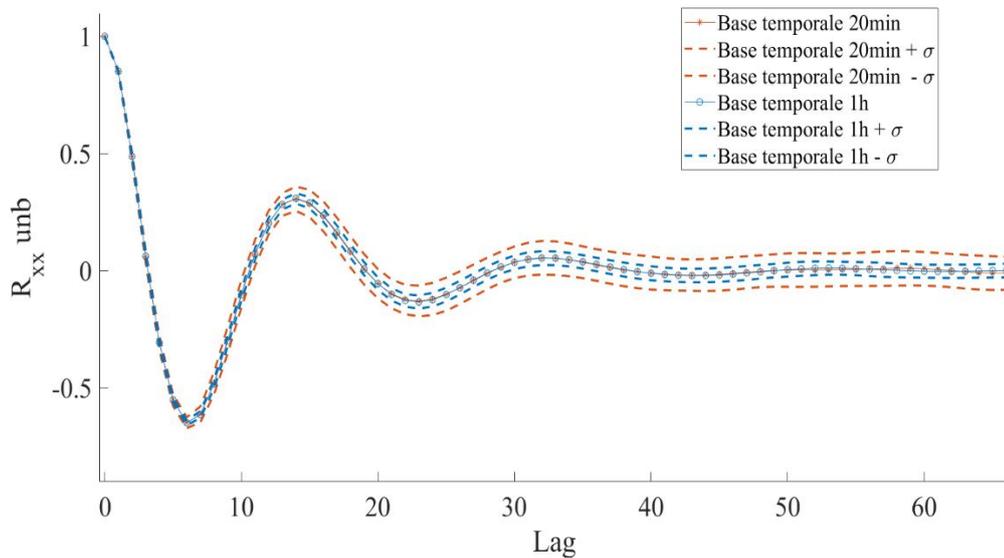


Figura 5. 3 - $\bar{r}_{Mx}(k)$ e relative $\sigma(k)$ calcolate impiegando 500 $r_{Mx}(k)$ calcolate su 500 con 500 storie di altezza d'onda differenti, nei casi con $T_B = 20$ minuti e $T_B = 1h$, senza sotto-intervalli.

Si può chiaramente vedere come la deviazione standard calcolata utilizzando l'autocorrelazione stimata su 20 minuti è circa il doppio di quella calcolata su una base temporale di 60 minuti, in accordo con quanto riscontrato sull'influenza della lunghezza della base temporale nel paragrafo 4.2.3. L'analisi della deviazione standard è stata effettuata utilizzando come base $T_B = 1h$ e come lunghezza dei sotto-intervalli $\Delta T_5 = 20$ minuti,

assegnando $\Delta T_{0\%} = 0\% - 33\% - 50\% - 60\% - 80\%$. In Fig. 5.4 è riportato l'andamento della deviazione standard in funzione del lag k per i diversi valori di overlap, insieme ai due riferimenti senza overlap con $T_B = 60$ minuti e $T_B = 20$ minuti.

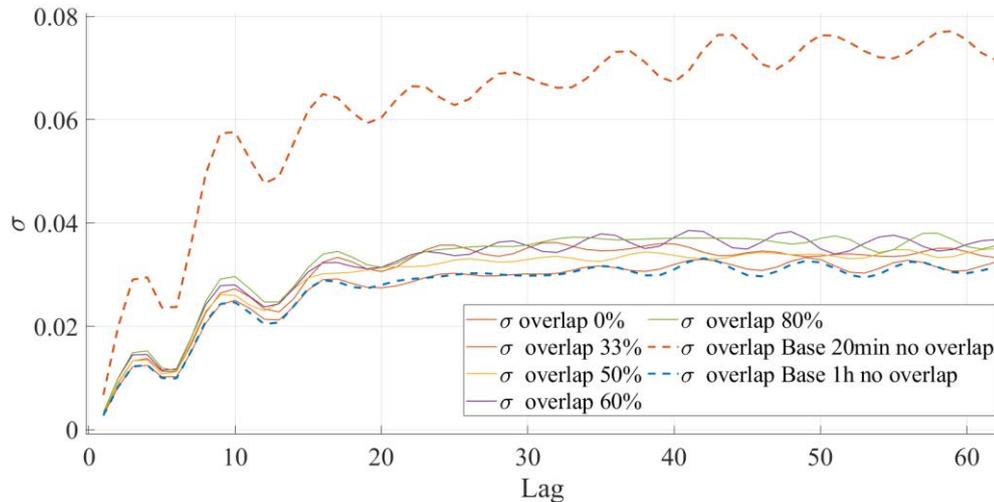


Figura 5.4 – Il grafico riporta, per un determinato valore di overlap percentuale, la deviazione standard di 500 autocorrelazioni calcolate su 500 serie di altezza d'onda differenti, utilizzando una base temporale $T_B = 1h$, lunghezza dei sotto-intervalli $\Delta T_S = 20$ minuti e $f_{samp} = 1$ Hz.

Dal confronto di Fig. 5.4 si può notare che l'aumento della deviazione standard con l'overlap è contenuto, talvolta questo aumento non è presente, come nel caso della deviazione standard per $\Delta T_{0\%} = 80\%$, che risulta molto simile al caso in cui $\Delta T_{0\%} = 60\%$, oppure si ha localmente addirittura una leggera diminuzione, come nel caso in cui si passasse da $\Delta T_{0\%} = 33\%$ a $\Delta T_{0\%} = 50\%$. In generale quindi si ha mediamente un aumento della deviazione standard con l'overlap, ma questo aumento non è lineare. Questo fatto si ripercuote sull'errore nella ricostruzione spettrale, come si può osservare dai dati estratti dai boxplot effettuati per i diversi valori di overlap raccolti in Tab. 5.1. Le 500 autocorrelazioni usate per le ricostruzioni sono le stesse usate per calcolare le deviazioni standard di Fig. 5.4. I boxplot non sono stati riportati perché graficamente risulta impossibile apprezzare la differenza del valore dell'errore Y .

Overlap	ϕ	Y_{min}	75th percentile	Outliers	refresh
No divisioni	41	9.26%	12.90%	11	3600s
0%	36	9.33%	12.72%	9	1200s
33%	42	10.20%	13.53%	27	804s
50%	35	9.93%	13.28%	22	600s
60%	38	10.69%	14.40%	12	480s
80%	36	10.70%	14.22%	15	240s

Tabella 5. 1 – A seconda del valore dell’overlap, in ogni riga è riportato il valore dell’errore minimo e del 75esimo percentile, il numero di punti di autocorrelazione usati relativi, il numero di outliers relativi e il refresh corrispondente al valore di overlap in caso di base temporale di 60 minuti e sotto-intervalli di 20 minuti.

Dai dati riportati in tabella si comprende che aumentare l’overlap in genere aumenta l’errore, ma in maniera non lineare e con eccezioni, come rilevato per il comportamento della deviazione standard. Le analisi appena presentate sono state effettuate utilizzando una base temporale di 60 minuti, ma i risultati ottenuti portano ad una conclusione di carattere generale: è necessario un metodo univoco per determinare quale sia l’overlap da adottare a prescindere dal valore di T_B , valutato contestualmente alla necessità di ottenere un refresh ΔT_R il più piccolo possibile.

5.3.1.2. Calcolo dell’overlap ottimo

In questo paragrafo si esporrà il metodo attraverso cui ci si è proposti di calcolare l’overlap ottimo $\Delta T_{0\%}^{opt}$ e si mostreranno i risultati ottenuti. Il metodo consiste nell’impiego di una serie di altezza d’onda $x(n)$ di lunghezza $2T_B$: calcola la correlazione della sequenza $x1(n)$ costituita dalla prima metà di $x(n)$ con la sequenza $x2(n)$ ottenuta a partire dalla prima metà, eliminando un punto all’inizio e aggiungendone uno alla fine, punto per punto, fino alla fine del segmento di lunghezza $2T_B$. La correlazione è stata calcolata al variare della traslazione dell’intervallo di definizione della seconda sequenza, quella “mobile”. Si consideri quindi una serie di altezza d’onda $x(n)$ di lunghezza $2T_B$, campionata con frequenza f_{samp} , e si calcoli la deviazione standard σ_{x1} della prima metà, la deviazione standard $\sigma_{x2}(k)$ della parte di sequenza mobile e la covarianza $\sigma_{x1x2}(k)$. Essendo $x(n)$ una realizzazione di un processo aleatorio stazionario a media nulla, la media delle due sotto-sequenze è nulla e dunque non compare nel calcolo di σ_{x1} , $\sigma_{x2}(k)$ e $\sigma_{x1x2}(k)$:

$$\sigma_{x1} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N x_i^2} \quad (5.8)$$

$$\sigma_{x2}(k) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N x_{i+k}^2} \quad k = 1, 2, \dots, T_B \quad (5.9)$$

$$\sigma_{x1x2}(k) = \sum_{i=1}^N x_i x_{i+k} \quad k = 1, 2, \dots, T_B \quad (5.10)$$

Nei calcoli effettuati con Matlab, la media delle sotto-sequenze non è assunta nulla a priori ma è stata calcolata, ed è ragionevole in virtù del fatto che anche se $x(n)$ è la realizzazione di un processo aleatorio, il numero di campioni è limitato quindi non è detto che la media sia esattamente nulla. Tuttavia, nella trattazione in questo paragrafo si è omessa perché oltre che essere teoricamente nulla, per $T_B=60$ minuti è risultata essere dell'ordine di 10^{-4} . La correlazione $\rho_{x1x2}(k)$, al variare della traslazione k della seconda sequenza, è

$$\rho_{x1x2}(k) = \frac{\sigma_{x1x2}(k)}{\sigma_{x1}\sigma_{x2}(k)} \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (5.11)$$

L'ipotesi alla base del metodo è che si possa risalire all'overlap ottimo tramite il valore di k tale che $\rho_{x1x2}(k)$ sia minimo. Trovato tale valore di k , denotato con \hat{k} , imponendolo uguale al refresh è possibile calcolare $\Delta T_{0\%}^{Opt}$, prima calcolando l'overlap ottimo in termini di numero di campioni sovrapposti ΔT_O^{Opt} utilizzando il refresh $\Delta T_R = \hat{k}$ e la lunghezza del sotto-intervallo ΔT_S :

$$\Delta T_O^{Opt} = \Delta T_S - \hat{k} \quad (5.12)$$

e successivamente calcolando il valore percentuale:

$$\Delta T_{0\%}^{Opt} = \frac{\Delta T_O^{Opt}}{\Delta T_S} \cdot 100 \quad (5.13)$$

Se per $k = \hat{k}$ $\rho_{x1x2}(k)$ è minimo allora significa che le due sotto-sequenze $x1(n)$ e $x2(n)$ non sono correlate, e quindi è ragionevole supporre che le informazioni contenute nei due segmenti siano differenti, il che giustifica l'utilizzo di questo metodo. Si potrebbe anche pensare di utilizzare direttamente l'autocorrelazione non polarizzata calcolata su 60 minuti, ma si è osservato che la deviazione standard di $\rho_{x1x2}(k)$ calcolata su 500 serie di altezza d'onda differenti è inferiore rispetto alla deviazione standard calcolata allo stesso modo con l'autocorrelazione non polarizzata, con o senza suddivisione in sotto-intervalli. Questo

potrebbe essere dovuto al fatto che $\rho_{x_1x_2}(k)$ è calcolata con una serie di altezza d'onda di 2h, ma per come è strutturata, consentirebbe di aggiornare il valore dell'overlap a intervalli regolari di un'ora, cioè con la stessa frequenza del caso in cui si calcolasse l'autocorrelazione non polarizzata su base 60 minuti. Al fine di quantificare la variabilità di $\rho_{x_1x_2}(k)$, sono stati simulate 500 sequenze $x(n)$ con le quali sono state calcolate 500 correlazioni con la (5.11) per diversi valori di T_B . Si è concluso che, intendendo calcolare l'overlap ottimo in tempo reale, la spiccata variabilità della correlazione non consente di stabilire univocamente il punto in cui $\rho_{x_1x_2}(k)$ è minimo se non utilizzando almeno $T_B = 60$ minuti. In Fig. 5.5 sono riportati 5 grafici di $\rho_{x_1x_2}(k)$ calcolati su 5 serie di altezza d'onda differenti generate da uno stato di mare di tipo 1 da tab 4.1, campionate a $f_{samp} = 1 \text{ Hz}$., utilizzando $T_B = 60$ minuti.

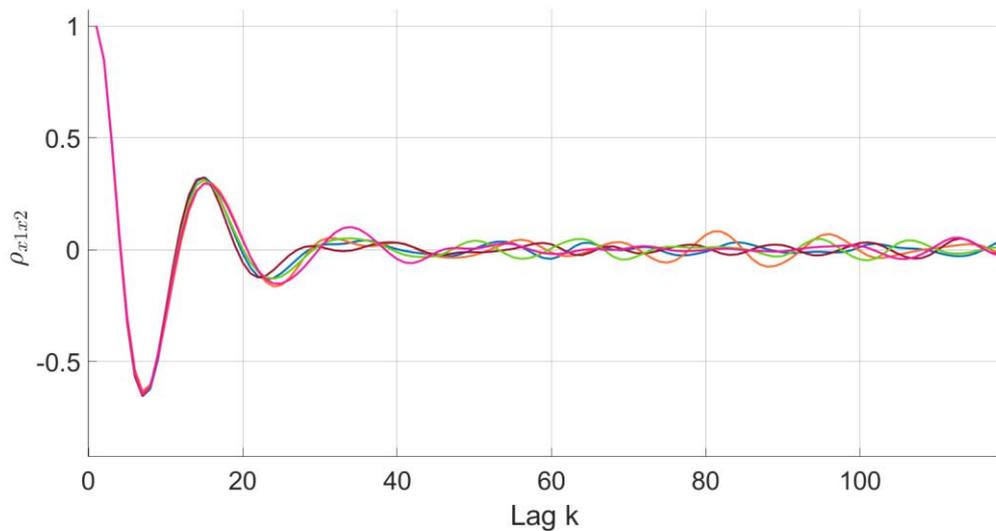


Figura 5. 5 – Correlazioni calcolate con la (5.5) utilizzando 5 serie di altezza d'onda lunghe $2T_B = 120$ minuti, campionate ad una frequenza di 1 Hz.

Purtroppo, si vede chiaramente che, utilizzando il metodo calcolando la correlazione con una singola serie di altezza d'onda, non si riesce a identificare chiaramente un valore preciso di \hat{k} comune alle diverse correlazioni. Sicuramente circa dopo $k=40$ le oscillazioni rimangono basse, ma alcune sono già basse per valori precedenti. Questo aspetto fa sì che sia difficile ottenere un valore da estrapolare in tempo reale, cioè con una sola serie di altezza d'onda disponibile, a meno di utilizzare un valore molto basso di k che sia caratteristico di tutte le correlazioni. Si sono quindi svolte alcune simulazioni per valori di overlap molto alti, i cui risultati sono raccolti nella Tab. 5.2

overlap	φ	Y_{\min}	75th percentile	out.	refresh
No divisioni	41	9.26%	12.90%	11	3600s
0%	36	9.33%	12.72%	9	1200s
33%	42	10.20%	13.53%	27	804s
50%	35	9.93%	13.28%	22	600s
60%	38	10.69%	14.40%	12	480s
80%	36	10.70%	14.22%	15	240s
93%	28	11.34%	14.80%	16	84s
94%	34	11.24%	15.10%	11	72s
95%	48	11.93%	15.91%	10	60s
96%	35	12.01%	15.03%	21	48s
97%	36	11.30%	15.12%	10	36s
98%	28	11.26%	15.03%	15	24s
99%	36	11.66%	15.35%	24	12s

Tabella 5. 2 - A seconda del valore dell'overlap, in ogni riga è riportato il valore dell'errore minimo e del 75esimo percentile, il numero di punti di autocorrelazione usati relativi, il numero di outliers relativi e il refresh corrispondente al valore di overlap in caso di base temporale di 60 minuti e sotto-intervalli di 20 minuti.

Per overlap elevati, i risultati migliori si hanno per $\Delta T_{0\%} = 98\%$ e $\Delta T_{0\%} = 94\%$, che hanno valori dell'errore praticamente uguali, con la leggera differenza dei valori di Y_{\min} compensata dalla differenza in senso opposto dei valori del 75esimo percentile. Tuttavia, basandosi sulla correlazione calcolata in tempo reale, assegnare $\hat{k} = \Delta T_R = 72s$ sarebbe del tutto arbitrario, come si può vedere dalla Fig. 5.5. Infatti, per tale valore di k le varie correlazione hanno valori diversi. Per quanto riguarda $\hat{k} = \Delta T_R = 24s$, invece, risulta essere identificabile all'incirca in tutte le correlazioni come il valore di k del secondo punto di minimo della di $\rho_{x_1x_2}(k)$. Per verificare quanto appena affermato, si è preso come riferimento la correlazione $\rho_{x_1x_2}(k)$ calcolata come media di 500 correlazioni calcolate su 500 serie di altezza d'onda differenti, graficata in Fig. 5.6:

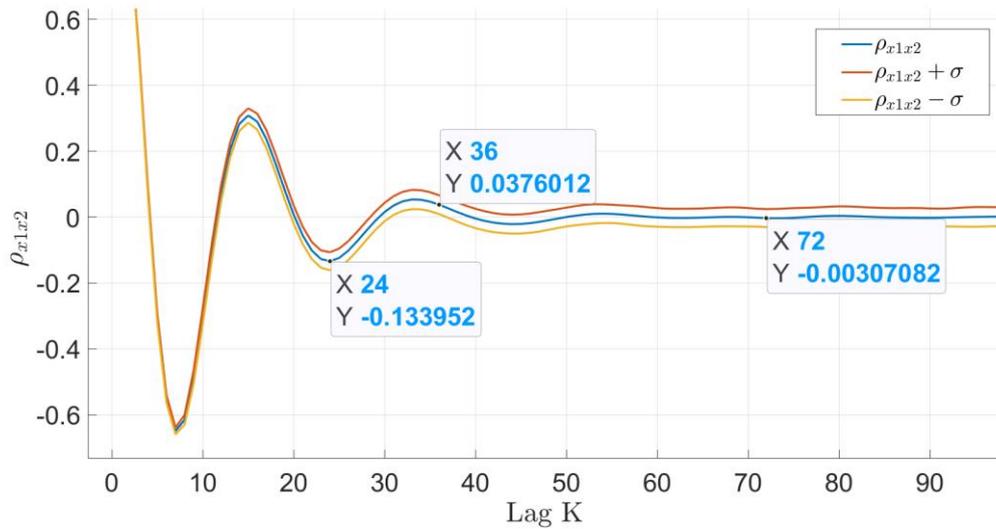


Figura 5. 6 -Media di 500 correlazioni calcolate con la (5.5), utilizzando 500 serie di altezza d'onda lunghe $2T_B = 120$ minuti campionate ad una frequenza di 1 Hz.

Nei data tips si sono evidenziati i valori $\hat{k} = \Delta T_R$ che hanno portato ai risultati migliori. È evidente che assegnare $\hat{k} = 36$ e $\hat{k} = 72$ sarebbe arbitrario anche disponendo della media di 500 serie di altezza d'onda, cosa per altro impossibile in tempo reale, mentre $\hat{k} = 24$ corrisponde esattamente al secondo minimo di $\rho_{x_1x_2}(k)$, dunque l'indicazione di assegnare tale valore a k è effettivamente estraibile dal grafico di $\rho_{x_1x_2}(k)$ calcolato in tempo reale.

Dalle analisi effettuate su base 60 minuti utilizzando l'overlap di sotto-intervalli, si conclude innanzi tutto che l'overlap migliore in termini di Y_{\min} risulta essere $\Delta T_{O\%} = 50\%$, valore tipico di overlap utilizzato nei metodi non-parametrici con autocorrelazioni non finestrate, come visto nel paragrafo 2.2.1.2, a cui corrisponde un valore di refresh $\Delta T_R = 600s = 10\text{min}$. Per una ricostruzione spettrale su una base temporale di 60 minuti è un refresh ragionevole. Per quanto riguarda valori di refresh più alti, si è ricavato un metodo per trovare l'overlap ottimo a partire da \hat{k} , infine identificato nel valore del lag k per cui si ha il secondo minimo della funzione di correlazione $\rho_{x_1x_2}(k)$ definita dalla (5.11). Il valore di $\Delta T_{O\%} = 98\%$, nel caso $T_B = 1h$, è il valore calcolato assegnando il refresh $\Delta T_R = \hat{k} = 24$. Per questo valore di overlap si ha effettivamente un minimo locale per Y_{\min} , inoltre passando da un overlap dell'80% a un overlap del 98% si ottiene una riduzione del tempo di refresh di un fattore 10, passando da $\Delta T_R = 240s$ a $\Delta T_R = 24s$, a fronte di un aumento di Y_{\min} di solamente il 0.56%. Un tempo di refresh di 24 secondi è molto breve se confrontato alla base temporale di lunghezza $T_B = 1h$: come si è visto nel paragrafo 5.1, in letteratura il refresh espresso in minuti è solitamente un ordine di grandezza inferiore rispetto alla base temporale, tuttavia, disponendo della potenza di calcolo necessaria, non ci sono evidenze che indichino l'inopportunità di un refresh così basso su una base di un'ora. Ad ogni modo, un tempo di aggiornamento così breve potrebbe essere utilizzato in maniera più appropriata su basi più ristrette, come si proverà a verificare nel prossimo paragrafo per $T_B=30$ min e $T_B=10$ min.

5.3.2. Risultati ottenuti utilizzando basi temporali più brevi

In questo paragrafo si mostreranno i risultati ottenuti utilizzando l'overlap dei sotto-intervalli per serie di altezza d'onda lunghe 30 minuti e 10 minuti, provando inoltre ad applicare il metodo studiato nel paragrafo precedente per assegnare il valore di overlap ottimo.

5.3.2.1. Risultati ottenuti su base temporale di 30 minuti

Per valutare l'effetto dell'overlap di sotto-intervalli su serie di altezza d'onda di lunghezza $T_B = 30$ minuti, si è effettuata la divisione della base temporale in sotto-intervalli di lunghezza $\Delta T_S = 10$ minuti e si sono effettuate, per diversi valori di overlap percentuale $\Delta T_{O\%}$, le analisi svolte per ottenere i boxplot dell'errore percentuale Y visti per i casi precedenti. L'analisi è stata svolta inizialmente assegnando come valori di overlap $\Delta T_{O\%} = 0\% - 33\% - 50\% - 60\% - 80\%$. Su considerazioni basate sui risultati ottenuti nel paragrafo precedente, si è provato a vedere se fosse possibile calcolare un valore di overlap ottimo utilizzando un valore di refresh $\Delta T_R = \hat{k}$ pari al valore di k in cui si ha il secondo minimo della correlazione $\rho_{x_1x_2}(k)$ calcolata per $T_B = 30$ minuti, quindi utilizzando una serie di altezza d'onda di lunghezza $2T_B = 60$ minuti, come descritto nel paragrafo 5.3.1.2. Come per il caso del paragrafo precedente, ossia per $T_B = 60$ minuti, si riesce a ricavare l'informazione sulla posizione del secondo minimo di $\rho_{x_1x_2}(k)$, come si vede dal grafico di 5 correlazioni calcolate su serie di altezza d'onda differente (Fig. 5.7), e anche in questo caso il grafico della media di 500 correlazioni diverse conferma la posizione del minimo in $\hat{k} = 24$ (Fig. 5.8).

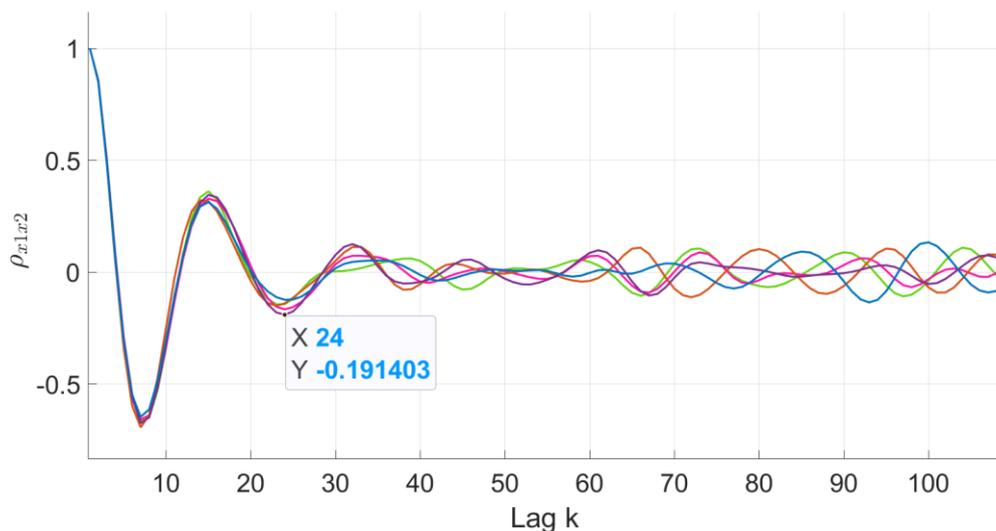


Figura 5. 7 - Correlazioni calcolate con la (5.5) utilizzando 5 serie di altezza d'onda lunghe $2T_B = 60$ minuti, campionate ad una frequenza di 1 Hz.

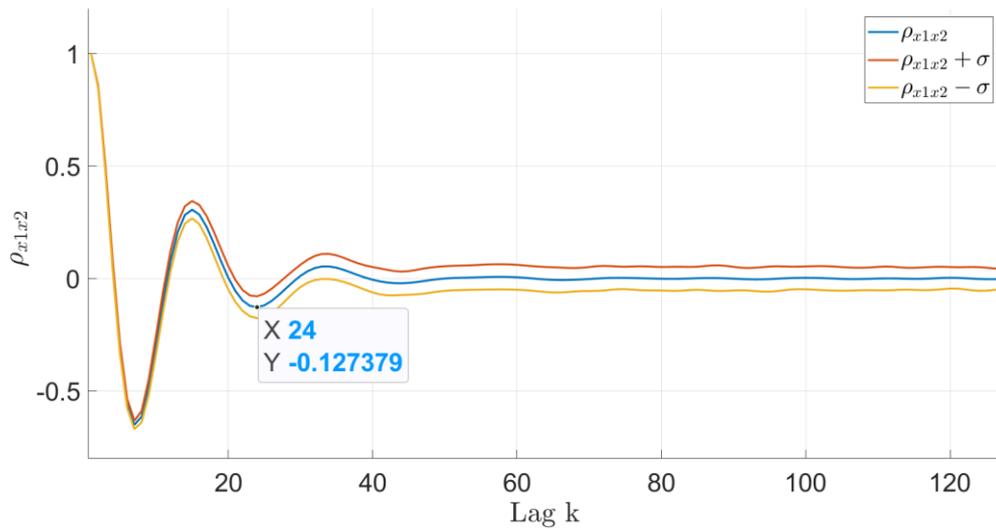


Figura 5. 8 - Media di 500 correlazioni calcolate con la (5.5), utilizzando 500 serie di altezza d'onda lunghe $2T_B = 60$ minuti campionate ad una frequenza di 1 Hz.

Sono quindi state fatte ulteriori analisi assegnando $\Delta T_{O\%} = 96\%$ a cui corrisponde $\Delta T_R = \hat{k} = 24$, inoltre è stato anche assegnato $\Delta T_R = \hat{k} = 36$ per valutare il comportamento di Y localmente. I risultati sono raccolti in Tab. 5.3:

Overlap	φ	Y_{\min}	75th percentile	Outliers	Refresh
No divisioni	33	17.01%	22.82%	17	1800s
0%	35	16.94%	22.66%	18	600s
33%	31	17.93%	24.38%	15	402s
50%	28	17.58%	24.70%	15	300s
60%	28	18.64%	25.26%	8	240s
80%	31	18.74%	25.71%	17	120s
94%	31	19.96%	27.11%	14	36s
96%	31	19.52%	25.71%	17	24s

Tabella 5. 3 - A seconda del valore dell'overlap, in ogni riga è riportato il valore dell'errore minimo e del 75esimo percentile, il numero di punti di autocorrelazione usati relativi, il numero di outliers relativi e il refresh corrispondente al valore di overlap in caso di base temporale di 30 minuti e sotto-intervalli di 10 minuti.

I dati riportati in tabella mostrano che la suddivisione in sotto-intervalli senza overlap apporta un lievissimo miglioramento alla ricostruzione spettrale rispetto all'utilizzo della base intera, il che è positivo perché associato alla riduzione del tempo di refresh di un terzo.

Inoltre, anche in questo caso, localmente si ha un minimo per $\Delta T_{O\%} = 50\%$, a cui corrisponde un tempo di refresh $\Delta T_R = 300s = 5$ minuti. L'analogia con il caso $T_B = 1h$ si manifesta anche per overlap elevati, dove aver imposto $\Delta T_R = \hat{k} = 24$, a cui corrisponde $\Delta T_{O\%} = 96\%$, porta ad una condizione di minimo locale di Y_{\min} , e passando da $\Delta T_{O\%} = 80\%$ a $\Delta T_{O\%} = 96\%$ si ottiene una grande diminuzione del tempo di refresh passando da 120s a 24s, a fronte di un aumento dell'errore minimo inferiore al punto percentuale.

5.3.2.2. Risultati ottenuti su base temporale di 10 minuti

Per il caso $T_B = 10$ minuti, la correlazione $\rho_{x_1x_2}(k)$, calcolata su una serie di altezza d'onda di lunghezza caso $2T_B = 20$ minuti con la (5.5), non fornisce alcun risultato utile, perché la posizione del secondo minimo non si riesce a determinare in tempo reale, come si vede dalla Fig. 5.9, in cui sono rappresentate cinque correlazioni calcolate su 5 serie di altezza d'onda differenti.

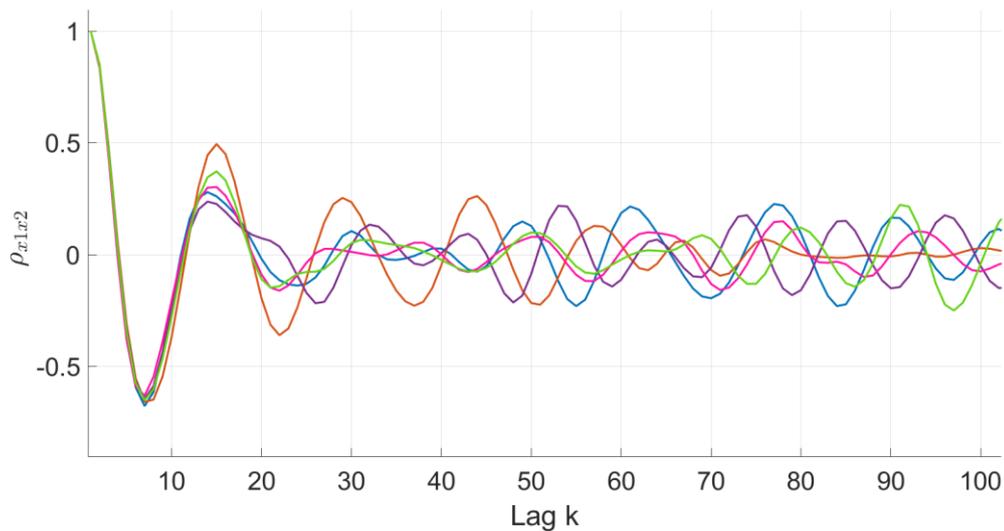


Figura 5. 9 - Correlazioni calcolate con la (5.5) utilizzando 5 serie di altezza d'onda lunghe $2T_B = 20$ minuti, campionate ad una frequenza di 1 Hz.

Si potrebbe pensare di utilizzare $\rho_{x_1x_2}(k)$ utilizzando una serie di altezza d'onda lunga 60 minuti come fatto nel caso con $T_B = 30$ minuti, ma come si può vedere dai risultati ottenuti raccolti in Tab. 5.4, per $T_B = 10$ minuti sembra che l'overlap ottimo si abbia per valori di $\hat{k} = \Delta T_R$ maggiori di $k = 24$, in una zona dove non si può evincere nulla dal grafico di $\rho_{x_1x_2}(k)$, neanche se calcolato su base più ampia.

Overlap	ϕ	Y_{\min}	75th percentile	Outliers	Refresh
No divisioni	27	31.76%	42.81%	20	600s
0%	21	33.61%	45.77%	36	120s
33%	24	32.92%	47.70%	39	80s
50%	25	32.88%	48.85%	35	60s
60%	27	32.60%	43.64%	19	48s
80%	21	33.30%	48.40%	40	24s

Tabella 5. 4 - A seconda del valore dell'overlap, in ogni riga è riportato il valore dell'errore minimo e del 75esimo percentile, il numero di punti di autocorrelazione usati relativi, il numero di outliers relativi e il refresh corrispondente al valore di overlap in caso di base temporale di 10 minuti e sotto-intervalli di 2 minuti.

Inoltre, diversamente dagli altri casi, i risultati migliorano passando da $\Delta T_{0\%} = 50\%$ a $\Delta T_{0\%} = 60\%$, soprattutto per quanto riguarda il numero di outliers. Comunque, anche in questo caso, se si intendesse utilizzare il metodo della suddivisione in sotto-intervalli sovrapposti, l'indicazione fornita dai risultati ottenuti è di utilizzare almeno un overlap del 50%. Per quanto riguarda il metodo per assegnare il valore di overlap ottimo, si è riscontrato che per $T_B = 10$ minuti non è applicabile.

6. Stabilizzazione e riduzione dell'errore tramite utilizzo di finestre esponenziali

Nel capitolo 4 si è descritto il modello ARMA proposto dai professori M. Berardengo, G. B. Rossi e F. Crenna [12], in cui si è posta l'attenzione sull'influenza dei parametri liberi del modello sulla ricostruzione spettrale, fornendo importanti elementi per assegnarne i valori. In questo capitolo si proverà ad affrontare il problema del numero di punti di autocorrelazione φ da usare, applicando un altro metodo classico dell'analisi spettrale: la finestrazione esponenziale (data tapering). Come effettuato nel capitolo 5, si descriverà il metodo in riferimento all'utilizzo in letteratura e nelle applicazioni, per poi estendere al modello in studio, nell'ottica dell'utilizzo del modello in tempo reale.

6.1. Il numero di punti di autocorrelazione da usare: un aspetto critico

Nel paragrafo 4.2.1 è stata ampiamente descritto il problema della determinazione di φ , dovuto alle oscillazioni dell'autocorrelazione anche per valori del lag k elevati, come si vede in Fig. 6.1 per diverse autocorrelazioni calcolate su una base temporale di 60 minuti.

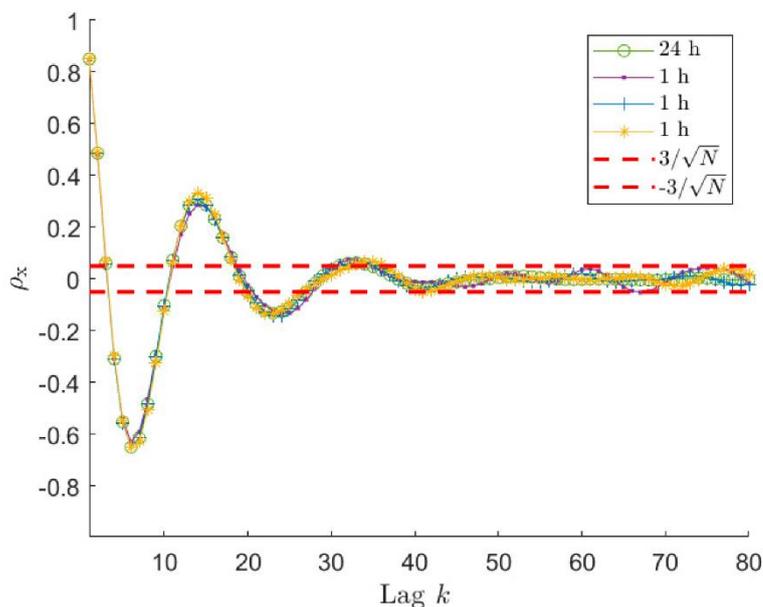


Figura 6. 1 - Confronto tra le autocorrelazioni di tre differenti serie di altezza d'onda di 60 minuti e l'autocorrelazione di una serie di 24h, ritenuta essere sovrapponibile con l'autocorrelazione del processo.

Tali oscillazioni diventano via via più marcate diminuendo la lunghezza della base temporale, come spiegato nel paragrafo 4.2.3 e come evidente dai grafici riproposti in Fig. 6.2 e 6.3.

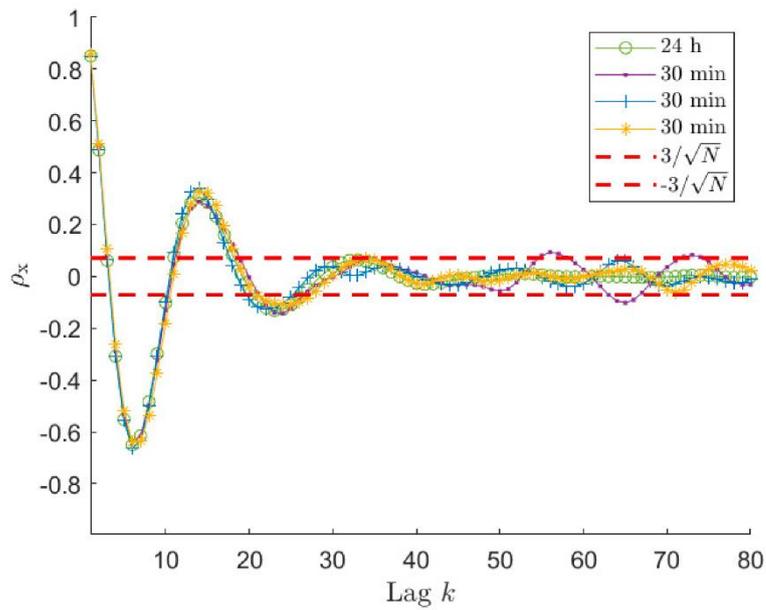


Figura 6. 2 - Confronto tra le autocorrelazioni di tre differenti serie di altezza d'onda di 30 minuti e l'autocorrelazione di una serie di 24h $\pm 3/\sqrt{N}$.

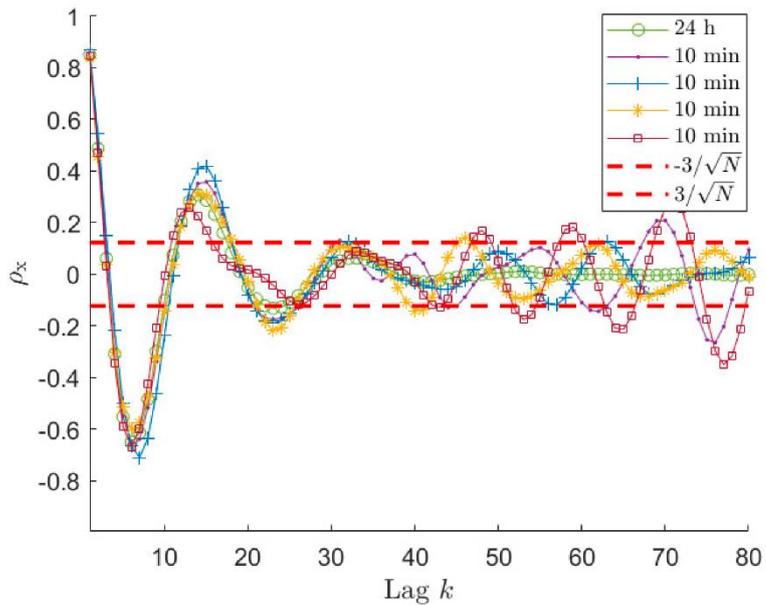


Figura 6. 3 - Confronto tra le autocorrelazioni di quattro differenti serie di altezza d'onda di 10 minuti e l'autocorrelazione di una serie di 24h con il range $\pm 3/\sqrt{N}$.

Il problema è rappresentato dal fatto che i picchi presenti da un certo valore di k in poi, rappresentano l'autocorrelazione di componenti spurie, dovute al rumore e quindi non rappresentative dello stato di mare oggetto di studio. Selezionare un valore eccessivo per φ significa ricostruire lo spettro "sporco" da queste componenti indesiderate; dunque, si è proposto un metodo per determinare il valore di $\varphi = \hat{\varphi}$ oltre il quale assumere l'autocorrelazione rappresentativa solo delle componenti spurie, basandosi sul valore atteso dell'autocorrelazione normalizzata di un processo aleatorio costituito da un rumore bianco con

deviazione standard $\sigma_w=1$. Così facendo, si è definito il range $\pm 3/\sqrt{N}$, identificato nelle figure sopra dalla linea tratteggiata, per cui una volta che l'autocorrelazione in tale range per poi non uscirne più, si è in corrispondenza del valore $\hat{\varphi}$ da assegnare a φ . Il metodo appena richiamato brevemente, ha portato buoni risultati ma presenta alcune criticità:

- Nell'utilizzo in tempo reale, φ deve essere assegnato a partire da una singola autocorrelazione, ma già su base 60 minuti, la banda della deviazione standard dell'autocorrelazione intorno a $\hat{\varphi} = 34 - 36$ (valore ottimo estrapolato dal grafico nel paragrafo 4.2.1) calcolata su 500 basi temporali diverse esce dal range $\pm 3/\sqrt{N}$ (Fig. 6.4), quindi c'è il rischio di assegnare $\hat{\varphi}$ in maniera non corretta. Questa considerazione vale ancor di più per basi temporali più corte, dove in alcuni casi (Fig. 6.3) la singola autocorrelazione ha tutti i picchi che escono fuori dal range $\pm 3/\sqrt{N}$.
- Dai dati riportati nelle tabelle 5.2, 5.3 e 5.4, si vede che utilizzando nel modello l'autocorrelazione mediata su sotto-intervalli sovrapposti, il valore di Y_{min} si ha per φ differenti e non si riesce a identificare regola per assegnarne un valore a priori, visto che la singola autocorrelazione ha deviazione standard più alta di quella in Fig. 6.4.

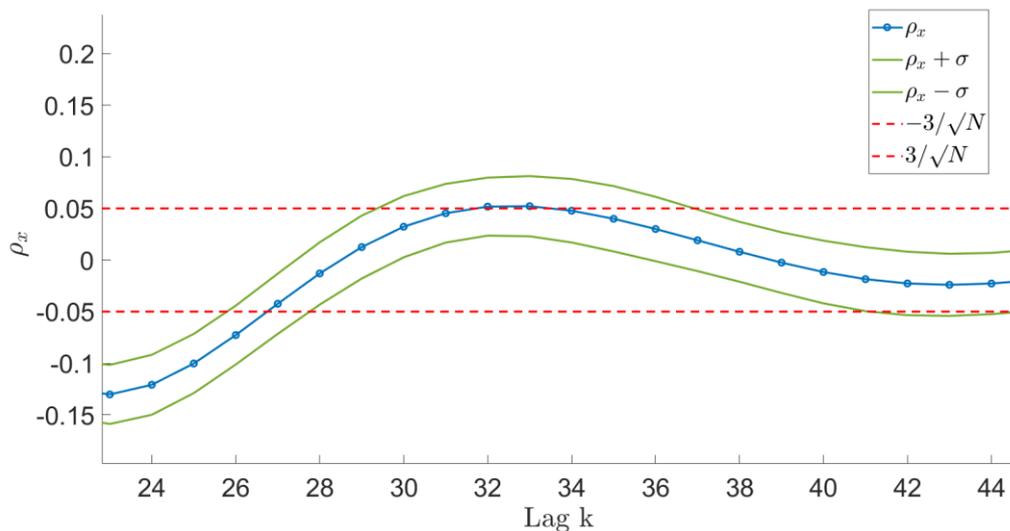


Figura 6. 4 – Particolare dell'autocorrelazione media e della sua deviazione standard 500 autocorrelazioni calcolate su 500 serie di altezza d'onda da 60 minuti, in un intorno di $\hat{\varphi} = 34 - 36$.

Nel seguito si descriverà un metodo utilizzato per provare ad eliminare la dipendenza da φ dei risultati, illustrando i risultati ottenuti con l'applicazione a ricostruzioni su base temporale di 60 minuti, 30 minuti e 10 minuti.

6.2. Finestratura esponenziale

La finestra esponenziale è una finestra matematica che viene applicata ad un segnale per ottenere un effetto di schiacciamento sull'asse delle ascisse. Questa operazione, a cui ci si riferirà anche con il termine “finestratura”, è effettuata in diversi ambiti. La finestra esponenziale viene applicata frequentemente sui segnali acquisiti durante l'analisi modale sperimentale [38], nel classico caso in cui il sistema da analizzare venisse eccitato da una successione di impatti con martello strumentato. Indipendentemente dal tipo di grandezza acquisita, spostamento velocità o accelerazione, talvolta il segnale impiega molto tempo ad estinguersi, perché lo smorzamento non è sufficientemente elevato da far cessare il moto vibratorio in un tempo operativamente accettabile. Per evitare di dover attendere la completa cessazione del moto, il segnale viene finestrato in maniera che vada a zero più velocemente, così da poter passare alla misura successiva in un tempo minore. Per chiarire il concetto, si supponga di acquisire tramite accelerometro il segnale di Fig. 6.5a: come si può vedere, alcune componenti dell'accelerazione sono ancora ben presenti dopo 1 sec e quelle a frequenza più bassa possono permanere per lungo tempo.

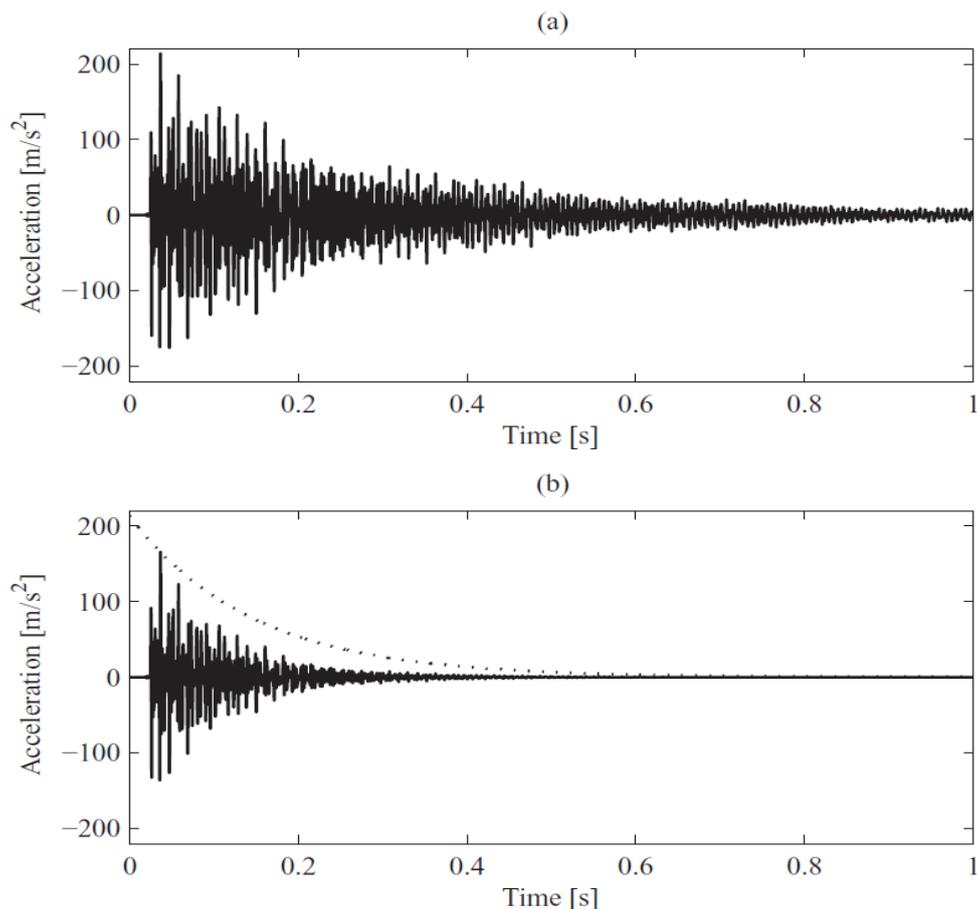


Figura 6.5 – Generico segnale acquisito mediante accelerometro (a) e stesso segnale a cui è stata applicata una finestra esponenziale (b).

L'effetto della finestrazione è mostrato in Fig. 6.5b, in cui si vede che all'incirca dopo 0.5 secondi è possibile interrompere l'acquisizione, perché la finestra (curva tratteggiata) ha già schiacciato il segnale fino ad un valore trascurabile, agendo così anche su qualsiasi rumore indesiderato. Di utilizzo di finestre matematiche si è discusso anche nel paragrafo 2.2.1.2, contestualmente all'analisi spettrale con metodi non-parametrici. Welch ha introdotto la finestrazione dei sotto-intervalli sovrapposti usati per calcolare l'autocorrelazione, per poi calcolare il cosiddetto periodogramma modificato per ogni sotto-intervallo e farne la media. Durante l'attività di tesi, invece, la finestra è stata applicata all'autocorrelazione al fine di diminuirne le oscillazioni indesiderate e provare a risolvere il problema dell'assegnazione del numero di punti di autocorrelazione φ . Come si vedrà in dettaglio nel prossimo paragrafo, applicare una finestra esponenziale a un segnale significa moltiplicarlo per una funzione esponenziale; quindi, in fase di analisi bisognerà in qualche modo rimediare a questa modifica per far sì che non abbia influenza sulla correttezza dei risultati ottenuti.

6.2.1. Funzione finestra esponenziale

In questo paragrafo si definirà la funzione finestra esponenziale in termini matematici, come una funzione definita a tratti che viene applicata a un segnale moltiplicandola per esso. Successivamente, si descriverà la procedura da implementare nell'analisi spettrale per eliminare lo smorzamento aggiunto introdotto dalla finestra.

Una finestra esponenziale $W_a(t)$ è una funzione della forma:

$$W_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < t < t_0 \\ e^{-\frac{(t-t_0)t}{\tau_e}} & \text{se } t_0 \leq t \leq T \end{cases} \quad (6.1)$$

La finestra viene definita mediante l'assegnazione dei seguenti parametri:

- t_0 è il punto iniziale della finestra, cioè il primo punto del segmento di segnale a cui si intende applicare la finestra.
- T è l'estremo superiore dell'intervallo di definizione della finestra.
- Assegnato un valore al parametro $P \in [0,1]$, τ_e è il valore tale che $W_a(T) = P$, assegnato come segue:

$$W_a(T) = e^{-\frac{(T-t_0)}{\tau_e}} = P \rightarrow \tau_e = -\frac{-T - t_0}{\log(P)} \quad (6.2)$$

In altre parole, il segnale finestrato, nel punto $t = T$ assume un valore pari al $(P \cdot 100)\%$ del segnale non finestrato. Nel caso in studio si è interessati ad applicare la finestra all'autocorrelazione $r_x(k)$ fin dal primo valore del lag k , quindi si è assegnato $t_0 = 0$. Le

analisi sono state svolte assegnando un diverso valore di T a seconda della lunghezza della base temporale su cui è stata calcolata $r_x(k)$, al fine di calcolare τ_e con la (6.2). Tuttavia, siccome si sono svolte le simulazioni valutando la ricostruzione spettrale per il numero di punti di autocorrelazione utilizzati $21 \leq \varphi \leq 100$, si è lasciata direttamente la finestra definita su tutto l'intervallo su cui è definita l'autocorrelazione. Così, la finestra utilizzata durante l'attività svolta è:

$$W_a(k) = e^{-\frac{1}{\tau_e}k} \quad (6.2)$$

In Fig. (6.6) è riportato un esempio di finestra esponenziale con $T = 50$ e $P = 0.01$, applicata all'autocorrelazione di una serie di altezza d'onda lunga 60 minuti e del suo effetto:

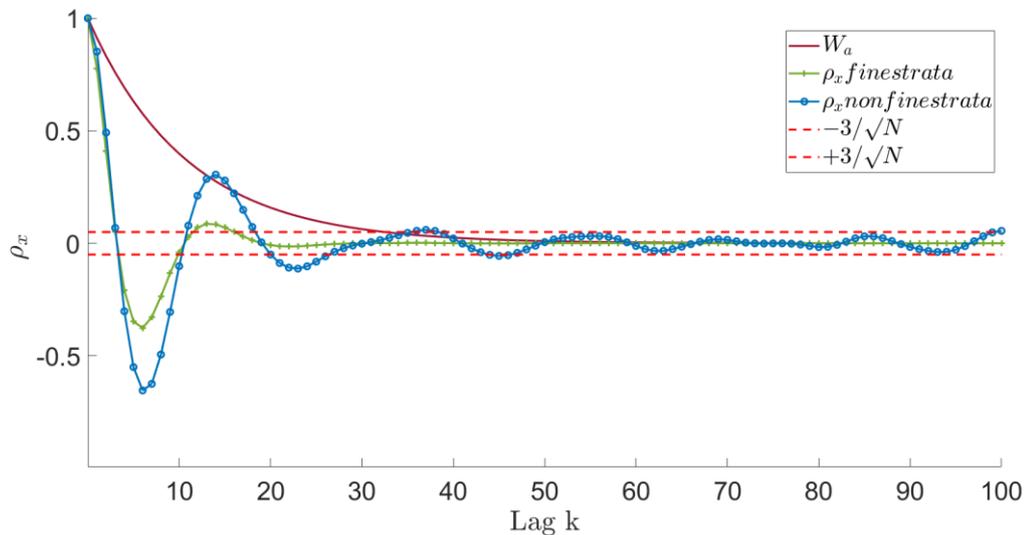


Figura 6. 6 – Esempio di effetto della finestatura dell'autocorrelazione di una serie di altezza d'onda di 60 minuti, calcolata per uno stato di mare di 1 da tabelle 4.1 e campionata a $f_{samp} = 1\text{Hz}$.

È evidente che la finestra esponenziale opera un forte schiacciamento sull'autocorrelazione, facendo scomparire i picchi indesiderati. L'effetto della finestatura è più o meno marcato a seconda dei parametri assegnati: nel prossimo paragrafo si mostrerà come compensare questo effetto per evitare la perdita di informazioni.

6.2.2. Compensazione dello smorzamento aggiunto

In questo paragrafo si mostrerà come compensare l'effetto della finestrata nel caso in studio. Nel paragrafo 2.2.2.1 si è definita la relazione che lega l'autocorrelazione della serie di altezza d'onda $x(n)$ con l'autocorrelazione della risposta a impulso del sistema $h(n)$:

$$r_x(k) = \sigma_w^2 r_h(k) \quad (6.3)$$

Nel 3.1.2.1 si è visto che siccome $h(n)$ può essere espressa come somma di esponenziali complessi decrescenti, allora la sua autocorrelazione $r_h(k)$ può essere espressa nello stesso modo, e per la (6.3) vale lo stesso per $r_x(k)$, cosicché:

$$r_x(k) = \sum_{i=1}^p \alpha_i e^{\lambda_i k} \quad (6.4)$$

Dove α_i sono coefficienti costanti e λ_i sono i poli della parte AR del modello. Siccome la finestra esponenziale $W_a(k)$ moltiplica interamente l'autocorrelazione nella forma della (6.4), per valutare l'effetto della finestrata conviene considerare un singolo esponenziale per poi estendere a tutte le p componenti di $r_x(k)$:

$$W_a(k) \cdot r_x^{(i)}(k) = e^{-\frac{1}{\tau_e} k} \cdot \alpha_i e^{\lambda_i k} = \alpha_i e^{k \left[\text{Re}(\lambda_i) - \frac{1}{\tau_e} + j \text{Im}(\lambda_i) \right]} = \alpha_i e^{\lambda'_i k} \quad (6.5)$$

Con:

$$\begin{aligned} \text{Re}(\lambda'_i) &= \text{Re}(\lambda_i) - \frac{1}{\tau_e} \\ \text{Im}(\lambda'_i) &= \text{Im}(\lambda_i) \end{aligned} \quad (6.6)$$

Questo significa che quando si trovano i poli dell'autocorrelazione finestrata con il metodo di Prony descritto nel paragrafo 3.1.2.1, si ottengono i λ'_i . Come si può vedere dalla (6.6), la parte immaginaria, che è l'argomento delle componenti sinusoidali, non subisce variazioni, mentre la parte reale cambia valore. Essendo gli esponenziali della (6.4) decrescenti, $\text{Re}(\lambda_i)$ è un numero negativo; quindi, sottrarre la quantità positiva $-\frac{1}{\tau_e}$ comporta un aumento in modulo, mantenendone il segno negativo. Per compensare questo effetto, dopo aver calcolato i poli λ'_i dell'autocorrelazione finestrata con Prony, i poli del sistema si ottengono dalla (6.7):

$$\lambda_i = \lambda'_i + \frac{1}{\tau_e} \quad (6.7)$$

Con i λ_i così calcolati si calcolano i coefficienti a_i della parte AR con la (3.1), mentre la parte MA viene calcolati con il metodo di Shanks descritto nel paragrafo 3.1.2.2 utilizzando l'autocorrelazione non finestrata. Nel prossimo paragrafo si illustreranno i risultati ottenuti applicando la finestra esponenziale e poi compensandone successivamente nelle modalità appena descritte.

6.3. Risultati delle analisi effettuate con finestrata esponenziale

Per valutare gli effetti della finestrata esponenziale sulla ricostruzione spettrale, e quindi sull'errore percentuale Y definito nel paragrafo 4.2, Sono state effettuate delle analisi statistiche su una popolazione di 500 ricostruzioni spettrali utilizzando 500 serie di altezza d'onda generate da uno stato di mare di tipo 1 da Tab. 4.1, campionate a $f_{samp} = 1Hz$, avendo assegnato l'ordine iniziale della parte AR $\hat{p} = 10$. Come nei capitoli precedenti, per ogni serie temporale è stata effettuata la ricostruzione spettrale per diversi valori di punti φ di auto correlazione usati, con $21 \leq \varphi \leq 100$. Nel problema di Prony sono state utilizzate autocorrelazioni finestrate con $P = 0.01 - 0.05 - 0.1$ e $T = 50$ per basi temporali di 60 minuti e di 30 minuti, mentre $T=30$ per 10 minuti. Dopo il calcolo dei poli, è stata effettuata la procedura di correzione degli stessi descritta nel paragrafo precedente, assegnando quelli corretti. Per quantificare il miglioramento/peggioramento dei risultati è stata utilizzato un metro di confronto differente rispetto Y_{min} : vista la stabilità dell'errore al variare di φ , si è preferito confrontare direttamente i boxplot, come si vedrà in dettaglio nel seguito.

6.3.1. Risultati ottenuti su base 60 minuti

I risultati ottenuti in termini di ricostruzione spettrale su base 60 minuti, si è ottenuta una discreta stabilizzazione del numero di outliers e dell'errore Y al variare di φ , considerando che per $T_B = 60$ minuti i risultati sono già molto stabili senza finestra. Assegnando i diversi valori di P i risultati cambiano in maniera quasi impercettibile, sintomo che la correzione dei poli avviene in maniera efficiente. Per mostrare la stabilizzazione dell'errore Y e del numero di outliers, in Fig. 6.7 è stato graficato il boxplot ottenuto assegnando $P=0.1$, per cui i risultati sono leggermente migliori che per gli altri valori di P .

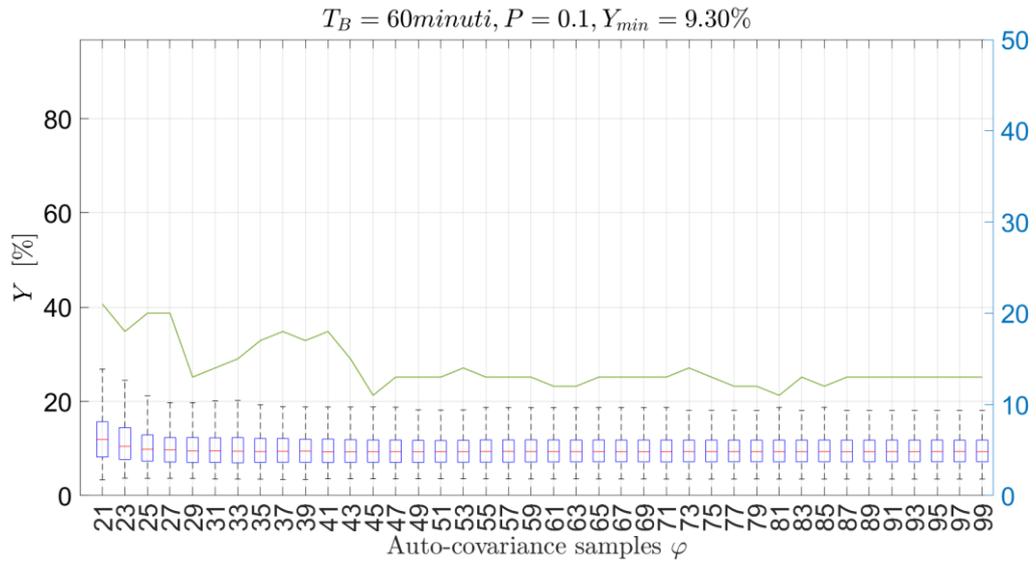


Figura 6. 7 - Box-plot dell'analisi statistica per serie di lunghezza d'onda di 60 minuti, effettuata ricostruendo lo spettro utilizzando un numero di campioni φ compreso tra 21 e 100, per ognuno dei quali sono state effettuate 500 simulazioni, applicando una finestra esponenziale alle autocorrelazioni con $T=50$ e $P=0.01$.

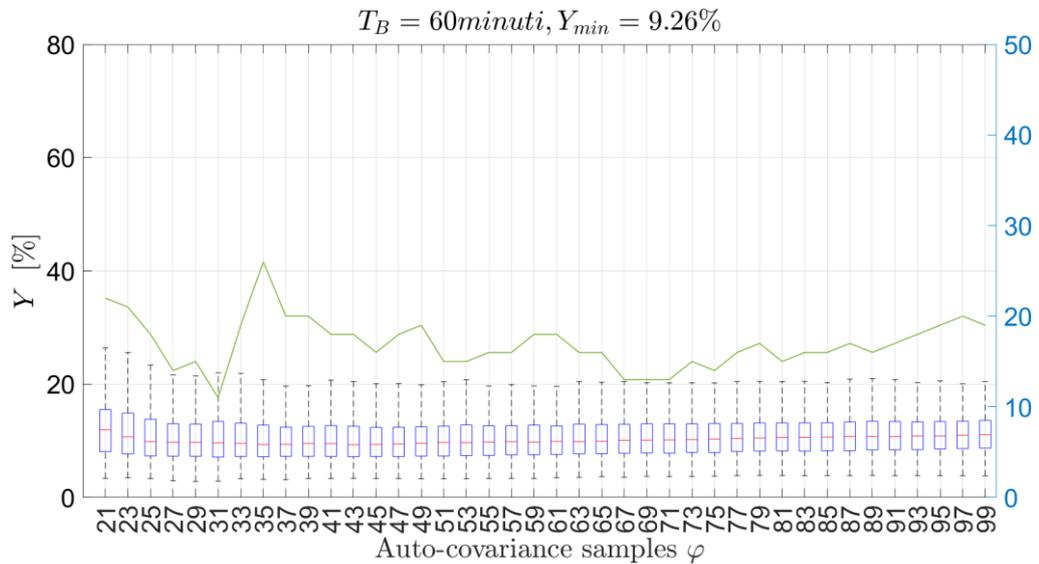


Figura 6. 8 - Box-plot dell'analisi statistica per serie di lunghezza d'onda di 60 minuti, effettuata ricostruendo lo spettro utilizzando un numero di campioni φ compreso tra 21 e 100, per ognuno dei quali sono state effettuate 500 simulazioni, senza applicare la finestra esponenziale all'autocorrelazione.

Dai boxplot si vede come la finestra abbia praticamente annullato la dipendenza da φ , mantenendo praticamente inalterato l'errore minimo Y_{min} . Per evidenziare al meglio i risultati ottenuti, in Fig. 6.9 è stato fatto il boxplot della differenza tra i valori di Y nel caso senza finestra e i valori di Y nel caso con finestra, e la stessa cosa per il numero di outliers.

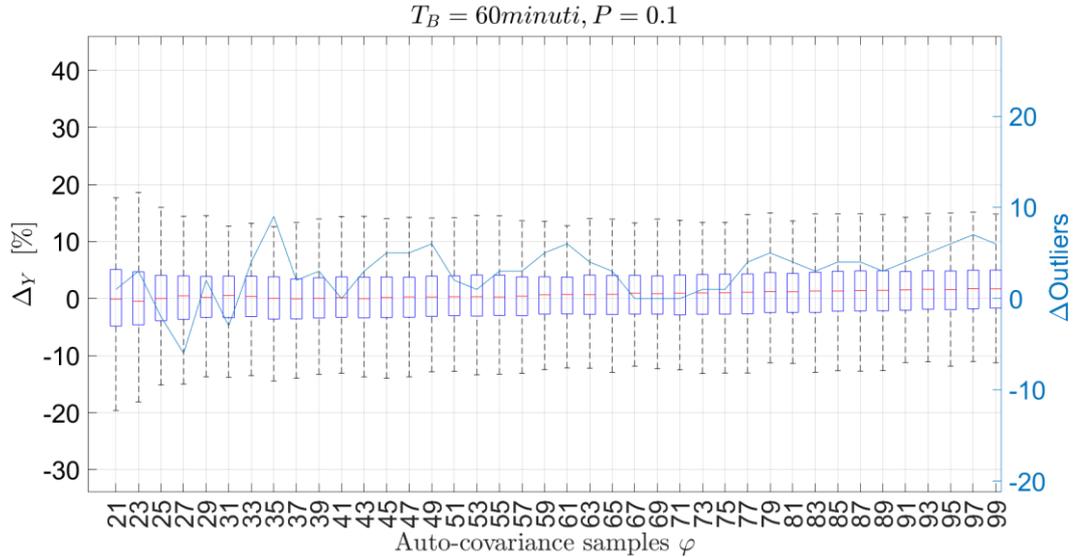


Figura 6. 9 – Per ogni valore di φ , nel boxplot in figura è rappresentata la differenza tra l'errore percentuale Y tra il caso senza finestra e il caso con finestra per ognuna delle 500 ricostruzioni, e la differenza tra il numero di outliers nei due casi.

Dal grafico si può constatare che

$$\Delta Y = Y_{\text{senza finestra}} - Y_{\text{con finestra}} \quad (6.8)$$

è una quantità positiva praticamente in tutto l'intervallo di φ , inoltre

$$\Delta \text{Outliers} = N_{\text{outliers senza finestra}} - N_{\text{outliers con finestra}} \quad (6.9)$$

È anche essa prevalentemente positiva, il che indica un miglioramento della stabilità anche da questo punto di vista.

6.3.2. Risultati ottenuti su base 30 minuti

In questo paragrafo si presenteranno i risultati ottenuti utilizzando una base temporale di lunghezza $T_B = 30$ minuti. Anche in questo caso verranno mostrati i boxplot relativi ai calcoli effettuati imponendo $P = 0.1$ e $T=50$, casi in cui si ha avuto un risultato leggermente migliore. Come nel paragrafo precedente, si parta dal considerare il confronto dei risultati

ottenuti con finestrazione dell'autocorrelazione con quelli ottenuti senza finestra, i cui boxplot sono rappresentati rispettivamente in Fig. 6.10 e 6.11.

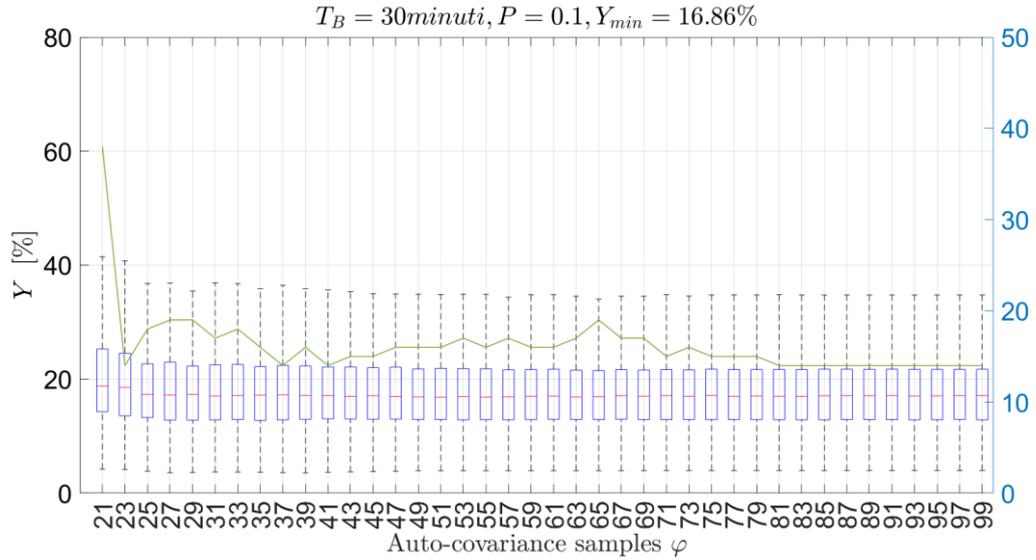


Figura 6. 10 - Box-plot dell'analisi statistica per serie di lunghezza d'onda di 30 minuti, effettuata ricostruendo lo spettro utilizzando un numero di campioni φ compreso tra 21 e 100, per ognuno dei quali sono state effettuate 500 simulazioni, applicando una finestra esponenziale alle autocorrelazioni con $T=50$ e $P=0.01$.

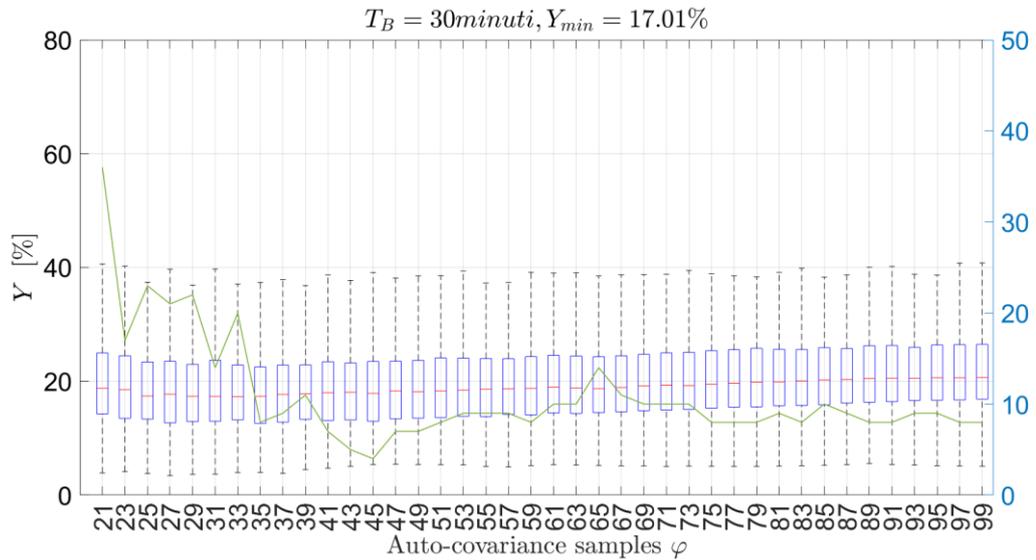


Figura 6. 11 - Box-plot dell'analisi statistica per serie di lunghezza d'onda di 30 minuti, effettuata ricostruendo lo spettro utilizzando un numero di campioni φ compreso tra 21 e 100, per ognuno dei quali sono state effettuate 500 simulazioni, senza applicare la finestra esponenziale all'autocorrelazione.

Confrontando Fig. 6.10 con Fig. 6.11 si può osservare che anche in questo caso è avvenuta la stabilizzazione dell'errore Y al variare di φ . Anche gli outliers risultano stabilizzati, seppur il caso senza finestra presenti un numero di outliers più basso. Il valore di Y_{min} è risultato più basso nel caso con finestra. In Fig. 6.12 è raffigurato il boxplot costruito con i valori di Δ_Y e $\Delta_{Outliers}$, definiti dalla (6.8) e dalla (6.9).

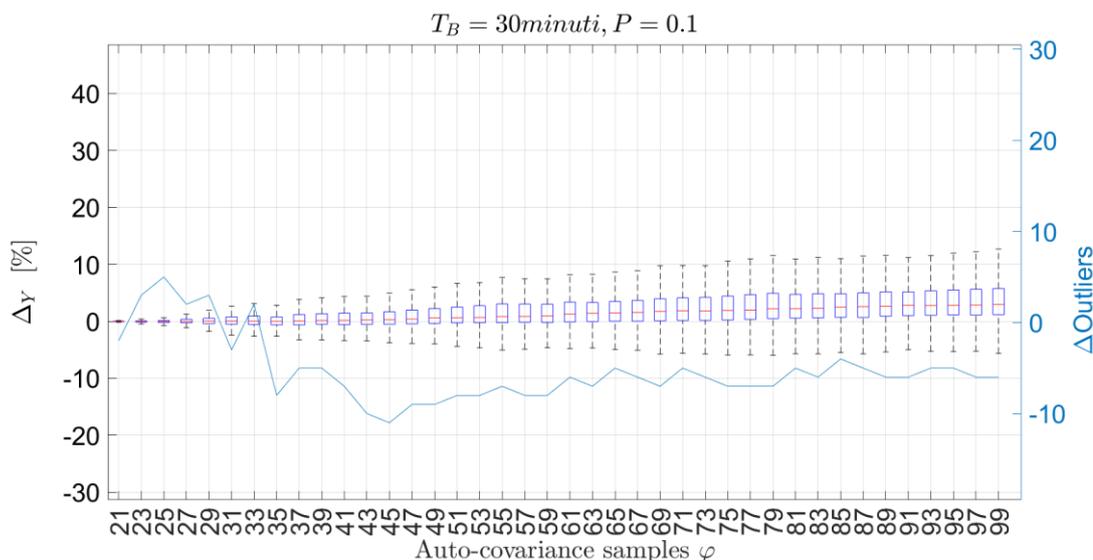


Figura 6.12 – Per ogni valore di φ , nel boxplot in figura è rappresentata la differenza tra l'errore percentuale Y tra il caso senza finestra e il caso con finestra per ognuna delle 500 ricostruzioni, e la differenza tra il numero di outliers nei due casi.

A parte il valore negativo di $\Delta_{Outliers}$, che segnala un aumento medio del numero di outliers, i risultati in termini di Δ_Y sono buoni, mediamente Δ_Y ha un valore di segno positivo, e a differenza del caso con $T_B = 60$ minuti, per alti valori di φ si ha che anche i 25esimi percentili di Δ_Y sono sopra lo zero, proprio nella zona in cui avviene la stabilizzazione degli outliers. La finestatura esponenziale su base di 30 minuti dunque apporta dei miglioramenti, facendo rimanere basso l'errore Y e consentendo di non preoccuparsi del numero di punti φ di autocorrelazione da usare.

6.3.3. Risultati ottenuti su base 10 minuti

Infine, si è provato ad applicare la finestra su base $T_B = 10$ minuti, ottenendo anche in questo caso dei buoni risultati, anche se la stabilizzazione si ha comunque intorno a valori di Y molto elevati, attorno al 32%-33%. Il miglioramento riguarda anche la stabilizzazione del numero di outliers, come si può vedere dal confronto della Fig. 6.13 con la 6.14 .

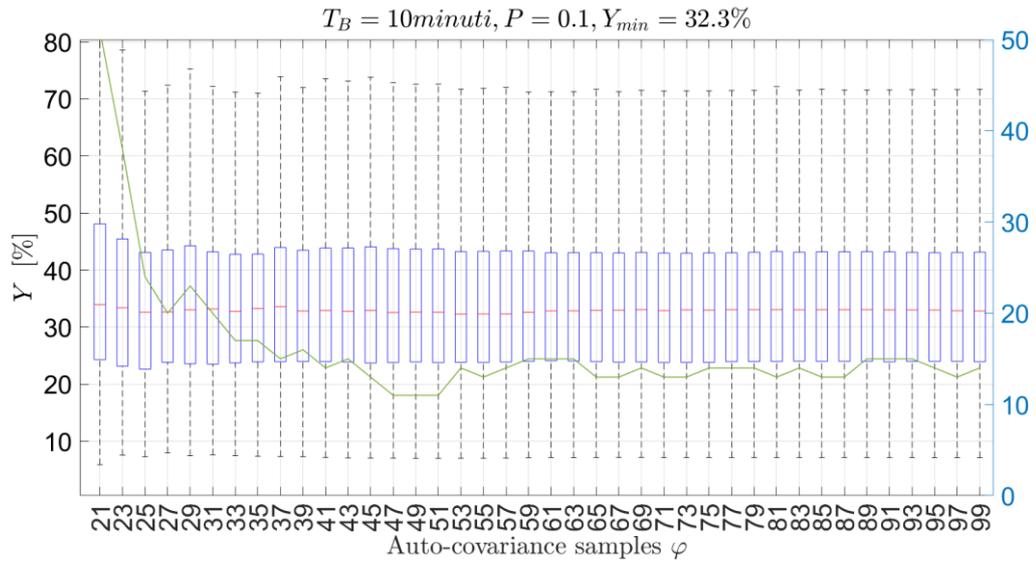


Figura 6. 13 - Box-plot dell'analisi statistica per serie di lunghezza d'onda di 100 minuti, effettuata ricostruendo lo spettro utilizzando un numero di campioni φ compreso tra 21 e 100, per ognuno dei quali sono state effettuate 500 simulazioni, applicando una finestra esponenziale alle autocorrelazioni con $T=30$ e $P=0.01$.

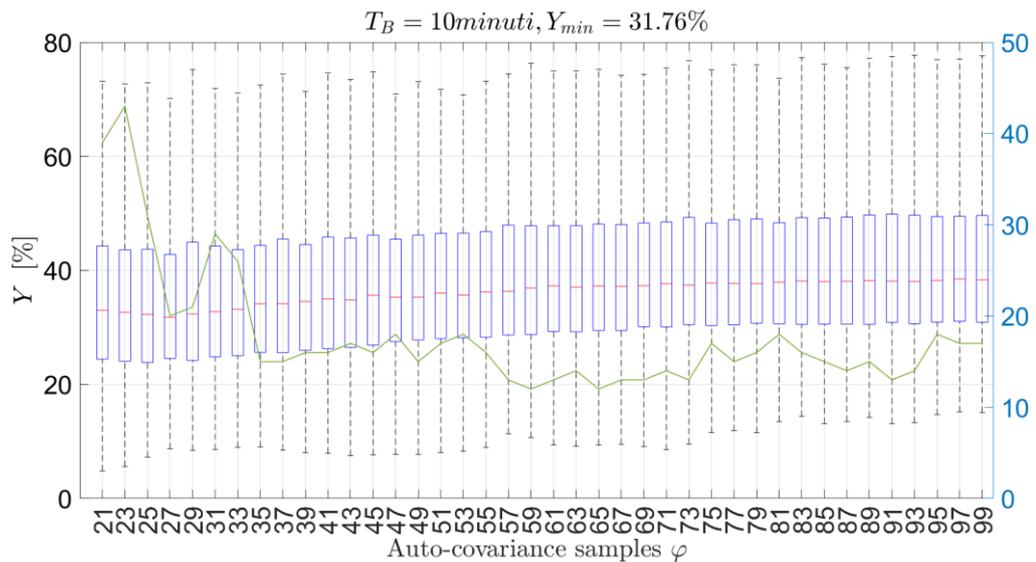


Figura 6. 14 - Box-plot dell'analisi statistica per serie di lunghezza d'onda di 10 minuti, effettuata ricostruendo lo spettro utilizzando un numero di campioni φ compreso tra 21 e 100, per ognuno dei quali sono state effettuate 500 simulazioni, senza applicare la finestra esponenziale all'autocorrelazione.

Anche in questo ultimo caso sono stati calcolati Δ_Y e $\Delta_{Outliers}$ con la (6.8) e la (6.9), come si può vedere nel boxplot di Fig. 6.15, dove si vede che anche in questo caso la finestra esponenziale migliora l'entità dell'errore per quasi tutti i valori di φ .

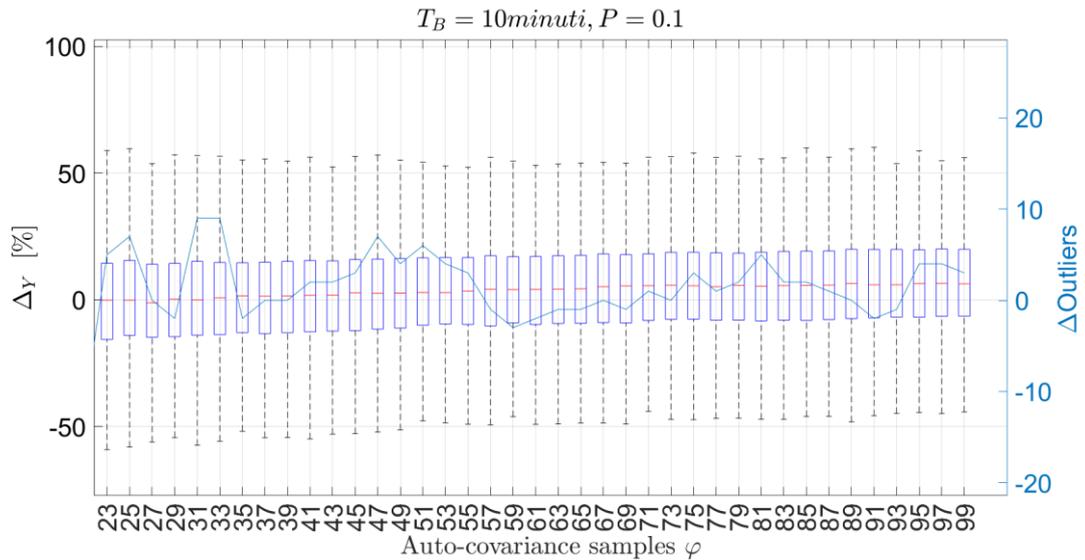


Figura 6. 15 - Per ogni valore di φ , nel boxplot in figura è rappresentata la differenza tra l'errore percentuale Y tra il caso senza finestra e il caso con finestra per ognuna delle 500

Si può osservare che $\Delta Outliers$ è in maggior parte positivo o debolmente negativo; quindi, la finestrazione non riesce ad abbassare molto il numero di outliers. Tuttavia, il fatto di avere un valore più stabile del numero di outliers è importante proprio a per ottenere quella indipendenza da φ per cui è stato applicato questo metodo. Questo fatto permette la più agevole implementazione del modello in un sistema di monitoraggio in tempo reale, senza dover preoccuparsi di assegnare in tempo reale i valori di φ a seconda delle condizioni.

7. Sviluppi futuri

Il lavoro svolto nell'ambito di questa tesi ha portato a buoni risultati, dei quali tuttavia sono possibili ulteriori verifiche utilizzando altri metodi. In questo capitolo si proporranno alcuni possibili sviluppi del lavoro esposto nella tesi.

7.1. Modifica della correzione dei poli dopo l'applicazione della finestra

Nel paragrafo 6.2.2, contestualmente alla descrizione del metodo della finestrata esponenziale dell'autocorrelazione, si è descritta la procedura di correzione dei poli dell'autocorrelazione che deve seguire l'applicazione della finestra. La correzione dei poli è avvenuta per la parte AR mentre la parte MA è stata ottenuta come se non fosse avvenuta alcuna finestrata. In questo paragrafo si proporrà uno sviluppo futuro riguardante la possibilità di utilizzare l'autocorrelazione finestrata anche per la parte MA, effettuando poi la dovuta compensazione.

Come si è visto nel paragrafo 3.1.2.2, la stima dello spettro viene calcolata utilizzando la seguente relazione:

$$\begin{aligned}
 S_x(z) &= \frac{N_q(z)}{A_p(z)} + r_x(0) + \frac{N_q(z^{-1})}{A_p(z^{-1})} = \\
 &= \frac{N_q(z)A_p(z^{-1}) + r_x(0)A_p(z)A_p(z^{-1}) + N_q(z^{-1})A_p(z)}{A_p(z)A_p(z^{-1})}
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

Dove $A_p(z)$ è il denominatore della parte AR e $N_q(z)$ è il numeratore del sistema stimato con il metodo di Shanks, che si ricorda essere della forma

$$N_q(z) = n_1 z^{-1} + n_2 z^{-2} + \dots + n_q z^{-q} \tag{7.2}$$

I coefficienti n_i , come già visto nel paragrafo 3.1.2.2, sono calcolati risolvendo ai minimi quadrati il seguente problema

$$\begin{bmatrix}
 h_{ra}(0) & 0 & \dots & 0 \\
 h_{ra}(1) & h_{ra}(0) & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 h_{ra}(\varphi - 1) & h_{ra}(\varphi - 2) & \dots & h_{ra}(\varphi - q)
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 n_1 \\
 \vdots \\
 n_q
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 r_x(1) \\
 r_x(2) \\
 \vdots \\
 r_x(\varphi)
 \end{bmatrix} \tag{7.3}$$

Con la compensazione dello smorzamento effettuata nel paragrafo 6.2.2, $h_{ra}(n)$ è la risposta a impulso del sistema $1/A_p(z)$ ottenuta con i poli dell'autocorrelazione non finestrata e $r_x(k)$ è l'autocorrelazione anch'essa non finestrata. Come sviluppo futuro si potrebbe pensare di utilizzare $h_{ra}(n)$ smorzata e $r_x(k)$ finestrata, valutando in maniera analitica l'influenza che la finestratura ha rispettivamente su $r_x(k)$ e su $h_{ra}(n)$, per poter quantificare precisamente la correzione da effettuare su $N_q(z)$. Ottenendo per esempio dei coefficienti moltiplicativi con i quali sia possibile esprimere la versione smorzata di $h_{ra}(n)$ e di $r_x(k)$ tramite il prodotto di questi ultimi per i coefficienti trovati, sarebbe possibile risolvere la 7.3 non più ai minimi quadrati ma in maniera esatta, come sistema con egual numero di equazioni e incognite.

7.2. Altri possibili sviluppi futuri

All'interno della tesi è stato effettuato lo studio di uno stato di mare di tipo 1 da Tab. 4.1, quindi per validare i metodi di ottimizzazione del modello utilizzati è auspicabile estendere le analisi a stati di mare differenti. Nel capitolo 5 si è visto che i risultati migliori in termini di errore percentuale Y si hanno per valori di φ diversi per ogni valore di overlap assegnato. Si potrebbe quindi pensare di utilizzare la finestra esponenziale congiuntamente all'overlap dei sotto-intervalli di serie di altezza d'onda.

8. Conclusioni

La presente tesi si è proposta come obiettivo l'ottimizzazione di un modello ARMA [12] utilizzato per stimare lo spettro di uno stato di mare. Il lavoro svolto si è composto di più attività, conducendo a risultati in generale positivi. Come prima attività è stato studiato e descritto il modello e i suoi aspetti critici, i quali sono stati il punto di partenza dell'ottimizzazione. In particolare, ci si è proposti come obiettivo migliorare la frequenza di aggiornamento e la stabilità dell'errore al variare di un particolare parametro del modello, ossia il numero di punti di autocorrelazione della serie di altezza d'onda da utilizzare nell'algoritmo. Si sono utilizzati due metodi: la divisione della serie d'altezza d'onda in sotto-intervalli sovrapposti (overlap analysis) e l'applicazione di una finestra esponenziale all'autocorrelazione. L'overlap analysis ha fornito importanti informazioni sulla relazione tra percentuale di overlap dei sotto-intervalli e l'errore nella ricostruzione, fornendo per tutte le basi temporali considerate (60 minuti, 30 minuti, 10 minuti) il miglior compromesso tra errore e tempo di refresh per un overlap del 50%. Per il caso in cui si richiedessero tempi di refresh del dato molto brevi e quindi percentuali di overlap molto elevate, è stato studiato un modo per determinare in tempo reale l'overlap ottimo, che ha fornito risultati positivi per basi temporali di 60 minuti e 30 minuti. La finestratura dell'autocorrelazione ha avuto l'effetto di ridurre la dipendenza dell'errore percentuale dal numero di punti di autocorrelazione utilizzati, ottenendo una stabilizzazione dell'errore intorno o poco sopra ai valori minimo dell'errore ottenuto senza finestra per tutte le basi temporali considerate. La dipendenza dei risultati dal tipo di finestra esponenziale utilizzata è praticamente insignificante, sintomo che la procedura utilizzata per compensare i poli è efficiente. Per quanto riguarda gli sviluppi futuri, riguardo all'utilizzo di finestre esponenziali è stata proposta una procedura differente per la compensazione dell'effetto della finestratura. È inoltre auspicabile validare i metodi applicati tramite l'applicazione ad altri stati di mare, valutando anche l'impiego di finestratura e overlap in maniera congiunta.

Bibliografia

- [1] J. W. Kamphuis, «9 - Breakwaters,» in - *Introduction to Coastal Engineering and Management (Advanced Series on Ocean Engineering Ser)*, Singapore, World Scientific, 1999, pp. 191-224.
- [2] S. Chakrabarti, «4. Loads and Responses,» in *Handbook of Offshore Engineering Volume 1*, Amsterdam, Elsevier Science, 2005, pp. 133 - 194.
- [3] A. K. Johannes Falnes, (Cambridge Ocean Technology Series) Johannes Falnes, Adi Kurniawan - *Ocean Waves and Oscillating Systems_ Volume 8_ Linear Interactions Including Wave-Energy Extraction-Cambridge University Press* (202, Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2020.
- [4] Schuster, «On the investigation of hidden periodicities with application to a supposed 26 day period of meteorological phenomena,» *Journal of Geophysical Research vol. 3* , pp. 13-41, 1898.
- [5] J. G. Proakis e D. G. Manolakis, «12.1 Estimation of Spectra from Finite-Duration Observations of Signals,» in *Digital Signal Processing, Principles, Algorithms and Applications*, New Jersey, Prentice Hall, 1996, pp. 902-906.
- [6] M. S. Barlett, «Smoothing Periodograms from Time-Series with Continuous Spectra.,» *Nature*, n. 161, pp. 686-687, 1948.
- [7] P. Welch, « "The use of fast Fourier transform for the estimation of power spectra: A method based on time averaging over short, modified periodograms,"» *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, vol. 15, n. 2, pp. 70-73, june 1967.
- [8] J. G. Proakis e D. G. Manolakis, «12.2 Nonparametric Methods for Power Spectrum Estimation,» in *Digital Signal Processing, Principles, Algorithms and Applications*, New jersey, Prentice Hall, 1996, pp. 911-913.
- [9] S. L. M. Jr., «2.11 Resolution and The Time-Bandwith Product,» in *Digital Spectral Analysis, Second Edition*, Mineola, New York, Dover Publication, 2019, pp. 45-48.
- [10] G. Rossi, F. Crenna, V. Piscopo e A. Scamardella, « Comparison of Spectrum Estimation Methods for the Accurate Evaluation of Sea State Parameters.,» *Sensors*, vol. 20, n. 5, 2020.

- [11] G. Rossi, F. Crenna, M. Berardengo e A. Scamardella, «Investigation on Spectrum Estimation Methods for Bimodal Sea State Conditions.,» *Sensor*, vol. 21, n. 9, 2021.
- [12] M. Berardengo, G. Rossi e F. Crenna, «Sea Spectral Estimation Using ARMA Models,» *Sensors*, vol. 21, n. 13, p. 4280, 2021.
- [13] P. Spanos e J. E. Hansen, «Linear Prediction Theory for Digital Simulation of Sea Waves,» *J. Energy Resour. Technol.*, vol. 103, n. 3, pp. 243-249, 1981.
- [14] P.-T. D. Spanos, «ARMA Algorithms for Ocean Wave Modeling,» *J. Energy Resour. Technol.*, vol. 105, n. 3, pp. 300-309, 1983.
- [15] S. Mandal, J. Witz, G. Lyons, S. Mandal e J. Witz, «Reduced order ARMA spectral estimation of ocean waves,» *Applied Ocean Research*, vol. 14, n. 5, pp. 303-312, 1992.
- [16] M. Ge e E. Kerrigan, «"Short-term ocean wave forecasting using an autoregressive moving average model",» in *11th International Conference on Control (CONTROL)*, Belfast, UK, 2016.
- [17] D. J. Ewins, «4.6.2 Complex Exponential Method for Single FRF,» in *D.J. Ewins - Modal Testing Theory, Practice and Application Second Edition*, Baldok, Hertfordshire, England, Reserch Studies Press LTD, 2000, pp. 349-354.
- [18] Shanks, «Recursion Filter For Digital Processing,» *Geophysics*, vol. 32, n. 1, p. 33, 1967.
- [19] B. Friedlander e B. Porat, «The Modified Yule-Walker Method of ARMA Spectral Estimation,» *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. %1 di %2AES-20, n. 2, pp. 158-173, 1984.
- [20] D. J. Ewins, «3.7.8 Averaging,» in *Modal Testing: Theory, Practice and Application Second Edition*, Baldok, Hertfordshire, England, Research Studies Press Ltd., 2000, pp. 226-227.
- [21] AS Det Norske Veritas;, «Environmental Conditions,» April 2014.
- [22] Gjevik, Bjørn & Rygg, O. & Krogstad e Harald & Lygr, «Long Period Swell Wave Events on the Norwegian Shelf,» *Journal of Physical Oceanography*, vol. 18, pp. 724-738, 1988.
- [23] M. D. Mandelberg e J. L. Hanson , «Ocean surface waves: automated analysis of directional spectra,» *OCEANS 2000 MTS/IEEE Conference and Exhibition*, vol. 3, pp. 1753-1759, 2000.
- [24] S. Oh e W. Jeong, «Characteristics of high waves observed at multiple stations along the east coast of Korea,» *Natural Hazards*, vol. 13, p. 3503–3514, 2013.

- [25] U. D. Nielsen e T. Iseki, «Prediction of First-Order Vessel Responses with Applications to Decision,» in *Proc. Of 5th WMTC*, Providence, USA, 2015.
- [26] F. Fusco e J. V. Ringwood, «A Model for the Sensitivity of Non-Causal Control of Wave Energy Converters to Wave Excitation Force Prediction Errors».
- [27] F. Fusco e J. V. Ringwood, «Short-Term Wave Forecasting for Real-Time Control,» *IEEE TRANSACTIONS ON SUSTAINABLE ENERGY*, vol. 1, n. 2, 2010.
- [28] W. Sheng, «Wave energy conversion and hydrodynamics modelling technologies: A review,» *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, vol. 109, p. 482–498, 2019.
- [29] W. Sheng, R. Alcorn e A. Lewis, «On improving wave energy conversion, part II: Development of,» *Renewable Energy*, vol. 75, pp. 935-944, 2015.
- [30] D. Bull, «Pneumatic Performance Of A Non Axysymmetric Floating Oscillating Water Columns Wave Energy Conversion Device In Random Waves,» in *Proceedings of the 2nd Marine Energy Technology Symposium*, seattle, 2014.
- [31] O. M. Faltinsen, «Cap 9. Water Impact And Entry - Slamming,» in *Sea Loads On Ships And Offshore Structures*, Cambridge, Cambridge University Press, 1990, pp. 282 - 296.
- [32] H. Majidian, L. Wang e H. Enshaei, «Part. A: A review of the real-time sea-state estimation, using wave,» *Ocean Engineering*, 2021.
- [33] R. Pascoal e C. Guedes Soares, «Kalman Filtering Of Vessel Motions For Ocean Wave Directional Spectrum Estimation,» *Ocean Engineering*, vol. 36, p. 477–488, 2009.
- [34] R. Pascoal, C. Guedes Soares e A. J. Sørensen, «Ocean Wave Spectral Estimation Using Vessel Wave Frequency Motion,» *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, vol. 129, n. 2, pp. 90-96, 2007.
- [35] H. Majidian, L. Wang e H. Enshaei, «Part. A: A review of the real-time sea-state estimation, using wave buoy analogy,» *Ocean Engineering*, "In Press".
- [36] U. D. Nielsen, A. H. Brodtkorb e A. J. Sørensen, «A brute-force spectral approach for wave estimation using,» *Marine Structures*, vol. 60, p. 101–121, 2018.
- [37] A. H. Brodtkorb, . U. D. Nielsen e A. J. Sørensen, «Sea state estimation using vessel response in dynamic positioning,» *Applied Ocean Research*, vol. 70, pp. 76-86, 2018.
- [38] A. Brandt, «13.8 Impact Excitation,» in *Noise And Vibration Analysis - Signal Analysis And Experimental Procedures*, Chichester, West Sussex, John Wiley and Sons, 2011, pp. 296-306.

Simbologia

$\text{PSD}, S_{xx}(\omega)$	Densità spettrale di potenza
$\hat{S}_{xx}(f)$	Stima della densità spettrale di potenza
$X(n)$	Processo che modella lo stato di mare
$x(n)$	Realizzazione di $X(n)$, serie di altezza d'onda
$\hat{r}_{xx}(k)$	Autocorrelazione polarizzata
$r_x(k)$	Autocorrelazione non polarizzata
$w(n)$	Rumore bianco
f	Frequenza [Hz]
$H(z)$	Funzione di risposta del modello ARMA
$A_p(z)$	Parte AR.
$B_q(z)$	Parte MA
b_i	Coefficienti della parte MA
a_i	Coefficienti della parte AR
$h(n)$	Risposta a impulso unitario di $H(z)$
$r_h(k)$	Autocorrelazione non polarizzata di $h(n)$
σ	Deviazione standard
λ_i	Poli del modello ARMA
φ	Numero di punti di autocorrelazione
k_0	Numero di equazioni k_0 utilizzabili nel problema di minimizzazione
p	Ordine della parte AR
ω_p	Pulsazione di picco [Hz]
T_p	Periodo di picco [s]
A_γ	Fattore di normalizzazione

γ	Fattore di picco
H_s	Altezza significativa [m]
T_m	Periodo medio [s]
ω_m	Frequenza media [HZ]
Y	Errore percentuale
f_{samp}	Frequenza di campionamento [Hz]
k	Lag
$\rho_x(k)$	Autocorrelazione non polarizzata normalizzata
T_R	Tempo di refresh espresso in numero di punti
Δt_R	Tempo di refresh [s]
ΔT_s	Lunghezza del sotto-intervallo espresso in numero di punti
Δt_s	Lunghezza del sotto-intervallo [s]
ΔT_O	Numero di punti di Overlap
$\Delta T_{O\%}$	Overlap percentuale
$\Delta T_{O\%}^{opt}$	Overlap percentuale ottimo
T_B	Lunghezza della base temporale in termini di punti
$\overline{r_{Mx}}(k)$	Autocorrelazione media di 500 autocorrelazioni non polarizzate
$Nrip$	Numero di serie di altezza d'onda usate nell'analisi statistica
$\rho_{x1x2}(k)$	Correlazione per overlap ottimo
$W_a(t)$	Funzione finestra esponenziale
P	Parametro della funzione finestra esponenziale
T	Parametro della funzione finestra esponenziale
τ_e	Parametro della funzione finestra esponenziale
Δ_Y	Differenza tra errori percentuali
$\Delta Outliers$	Differenza tra numero di outliers