ANGELO SCRIBANTI

L'integrafo per quadrature considerato nelle rotazioni della rotella

Estratto da *Ingegneria*
Rivista Tecnica Mensile
Luglio 1925 — N. 7

MILANO
STAB. TIP.-LIT. STUCCHI-CERETTI - SOCIETÀ ANONIMA
1925

ANGELO SCRIBANTI

L'integrafo per quadrature considerato nelle rotazioni della rotella

Estratto da *Ingegneria*
Rivista Tecnica Mensile
Luglio 1925 — N. 7

MILANO
STAB. TIP.-LIT. STUCCHI-CERETTI - SOCIETÀ ANONIMA
1925

Una mia precedente Nota, pubblicata in altro periodico, ebbe per oggetto una questione che può riassumersi nei termini seguenti: riconoscere se e come *l'integratore,* apparecchio comunemente noto per l'interpretazione di cui sono capaci le rotazioni angolari delle sue rotelle integratrici, sia altresì capace di interpretazione nel significato delle figure descritte dai punti di contatto delle rotelle stesse nel loro rotolamento sul foglio del disegno.

I risultati ottenuti nella ora richiamata ricerca circa l'integratore mi hanno indotto a considerare se una questione, per così dire *duale* di quella precedente, non potrebbe essere impostata quanto all'*integrafo,* enunciandola in questi termini: riconoscere se e come l'integrafo, apparecchio comunemente noto per l'interpretazione di cui è capace la linea descritta dal punto di contatto della rotella integrafica nel suo rotolamento sul foglio del disegno, sia altresì capace di interpretazione nel significato della rotazione angolare presa dalla rotella medesima.

Con riferimento alla nota figura che schematizza un ordinario apparecchio di Abdank, e che è superfluo qui riprodurre, si abbia un integrafo di base l con rotella integrafica di raggio r; come è noto, l'integrafo è uno strumento per sua costruzione tale che, mentre la punta descrivente percorre una assegnata curva $y = f(x)$, il punto di contatto della rotella col foglio nel suo rotolamento descrive una curva $\eta = \varphi(\xi)$ caratterizzata dalla relazione fondamentale

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{y}{l}$$

la quale rispecchia la caratteristica e la costituzione cinematica dell'apparecchio. L'usuale interpretazione dell'apparecchio consiste in questo che, avendosi evidentemente per la costruzione dell'apparecchio

$$d\xi = dx\ ,$$

la relazione fondamentale può essere presentata sotto la forma:

$$d\eta = \frac{y}{l}\,dx \qquad \text{e quindi anche} \qquad \eta = \frac{1}{l}\int_0^x y\,dx$$

facendo così vedere che la curva descritta dal lembo della rotella integrafica come traccia del suo passaggio sul foglio è la linea integrale prima della figura proposta. Come tale, la linea $n = \varphi(\xi)$, traccia del passaggio della rotella integrafica, gode delle note proprietà:

a) che la sua ordinata generica η è, a meno del fattore di proporzionalità l, una misura dell'area della figura proposta nel campo dall'origine all'ordinata terminale corrente y;

b) che l'area $\int \eta \, d\xi$ di detta curva è, a meno del fattore di proporzionalità, una misura del momento M_y della figura stessa rispetto alla ordinata terminale corrente.

Premessi questi richiami, forse superflui perchè richiami di cose note, si consideri ora l'arco elementare $d\tau$ descritto dal punto di contatto della rotella col foglio e corrispondentemente al quale la rotella nel suo rotolamento prende una rotazione $d\Phi$. L'arco $d\tau$ può evidentemente essere espresso mediante l'una o l'altra delle due relazioni che seguono, l'una geometrica, l'altra strumentale, cioè:

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}\, d\xi \qquad\qquad d\sigma = r \,.\, d\Phi$$

le quali si combinano fra loro e con la fondamentale dando luogo alla

$$r \,.\, d\Phi = \sqrt{1 + \left(\frac{y}{l}\right)^2}\, dx \,.$$

Se si chiami Φ la rotazione angolare finita presa dalla rotella mentre la punta descrivente percorre il contorno della figura proposta compiendovi assialmente un percorso x in ascissa, la relazione desunta prenderà la forma

$$r \,.\, \Phi = \int_o^x \sqrt{1 + \left(\frac{y}{l}\right)^2}\, dx$$

ossia approssimativamente

$$r\Phi = \int_o^x \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{l}\right)^2 \ldots\ldots\right] dx$$

dove si è sviluppato il radicale in serie con arresto al secondo termine dello sviluppo, intendendo implicitamente di usare l'integrafo soltanto in associazione a figure nelle quali tutte le ordinate y siano sufficientemente piccole di fronte alla base l dello strumento. Ciò posto, si osservi che, quando la punta descrivente abbia percorso il contorno della figura proposta facendo ritorno al punto di partenza, si ha

$$\int_o^x dx = 0 \qquad \frac{1}{2}\int_o^x y^2\, dx = M_x$$

dove M_x intende designare il momento statico della figura proposta rispetto all'asse delle x. Ne segue che la relazione interpretativa del funzionamento dell'apparecchio, come sopra stabilita a titolo di approssimazione, può essere presentata sotto forma

$$M_x = l^2 \,.\, r \,.\, \Phi \,.$$

Che se sulla rotella integrafica, il cui lembo circonferenziale sia stato previamente diviso in k parti eguali, si rilevi, in luogo della rotazione angolare Φ, il numero n delle graduazioni che saranno passate davanti a un indice fisso, la relazione interpretativa della lettura strumentale n diventerà:

$$M_x = \frac{2\pi}{k} l^2 r \,.\, n \qquad \text{ossia} \qquad M_x = \nu \,.\, n$$

dove resta introdotto il coefficiente strumentale

$$\nu = \frac{2\pi}{k} l^2 r \,.$$

L'interpretazione della rotazione presa dalla rotella integrafica di un apparecchio integrafo resta così ricondotta ad avere evidente analogia (sebbene non piena identità) con l'interpretazione della rotazione presa dalla rotella integratrice di un apparecchio integratore: senonchè, mentre nell'integratore la dipendenza che si stabilisce fra il momento statico della figura proposta e la lettura n alla rotella è dipendenza rigorosa, la dipendenza stessa nel caso dell'integrafo riesce soltanto approssimata in prima approssimazione.

Migliore approssimazione si otterrebbe se, nello sviluppo del radicale incontrato strada facendo, ci si spingesse al terzo anzichè arrestarsi al secondo termine dello sviluppo, scrivendo in conseguenza

$$r\Phi = \int_o^x \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{l}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{y}{l}\right)^4 + \ldots\right] dx$$

donde, per le notazioni

$$\int dx = o \qquad \frac{1}{2}\int y^2\, dx = M_x \qquad \frac{1}{4}\int y^4\, dx = B_x$$

con implicito richiamo alla nozione di momento balistico B_x della figura proposta rispetto all'asse delle x, si ricaverebbe la

$$M_x = l^2 r\Phi + \frac{1}{2}\,\frac{B_x}{l^2}$$

da valere come formola di seconda approssimazione. Per dare a questa un valore pratico e rendere speditiva la calcolazione del termine correttivo $\frac{1}{2}\,\frac{B_x}{l^2}$ occorrerebbe, analogamente a quanto abbiamo fatto in un nostro studio sul planimetro a lunula considerato come strumento cartesiano, elaborare una volta per tutte una tabellina che permetta, mediante l'altezza, la lunghezza e la finezza della figura proposta, apprezzarne il momento balistico.

Con ciò che precede resta fatto vedere che, se i costruttori di integrafi avessero cura di associare alla rotella integrafica un apparecchio raccoglitore di giri, appunto come fanno per le rotelle integratrici negli integratori, allora la capacità dell'integrafo, ora limitata alla calcolazione dell'area di una figura proposta e del suo momento M_y rispetto alla ordinata terminale, si estenderebbe alla calcolazione (approssimata) del momento M_x rispetto all'asse delle ascisse.

Potrebbe analogamente imaginarsi che un apparecchio raccoglitore di giri fosse applicato alla rotella integrafica di un integrafo normale di Pascal per equazioni differenziali: potrebbe pure imaginarsi che in un planimetro a scure di Prytz la scure, ossia lunula, fosse sostituita con una rotella volvente, quest'ultima connessa con un apparecchio raccoglitore di giri. In ambi i casi si troverebbe agevolmente, e qui se ne lascia la cura al lettore, che l'integrafo di Pascal e il planimetro di Prytz (quest'ultimo senza aver perduto, per la sostituzione della rotella alla lunula, nessuna sua caratteristica di apparecchio a lama tagliente) sarebbero idonei ad accusare, con le rotazioni prese dalle rispettive rotelle, valori approssimati del momento della figura proposta rispetto all'asse delle ascisse: l'approssimazione sarebbe tanto meno buona quanto più grandi fossero le ordinate η della curva descritta dalla rotella in confronto delle ordinate y della curva percorsa dalla punta descrivente: l'approssimazione sarebbe poi meno buona nel Prytz che nel Pascal, e in ambi i casi essa sarebbe sempre meno soddisfacente che nell'Abdank.

Con la presente Nota io pongo un termine alle ricerche che, con vario indirizzo, sono venuto facendo da omai molti anni intorno agli strumenti da integrazione meccanica che presentano qualche interesse rispetto alla mia cattedra di architettura navale. Penso che potrebbe essere utile che io facessi una coordinazione sistematica dei miei precedenti lavori [1]; ma poichè è grandemente probabile che

---

[1] Cfr. SCRIBANTI: *Gli strumenti da calcolo di particolare interesse per l'ingegnere navale,* 1910. - Lez. in autogr.

Aggiunte alle lezioni sugli strumenti da calcolo, 1913. - Lezioni in autogr.

Complementi e varianti alla teoria del planimetro a scure, 1913. - Nuovo Cimento.

Il planimetro a scure considerato come strumento cartesiano d'integrazione, 1913. - Giornale di matematiche.

Il planimetro a scure considerato come integrafo per equazioni differenziali, 1913. - Due note in Atti dell'Acc. delle Scienze di Torino.

Saggio di una teoria generale degli integratori, 1915. - Giornale del Genio Civile.

Note sur les intégrateurs et leur emploi à circuit ouvert, 1920. - Bulletin de l'Association Technique Maritime.

L'integratore per quadrature considerato nelle tracce del passaggio delle rotelle sul foglio, 1922. - Atti della Società Ligustica di Scienze e Lettere; e finalmente il presente:

L'integrafo per quadrature considerato nelle rotazioni della rotella.

ora e poi me ne manchi il tempo e l'opportunità, mi limiterò a notare che i risultati delle mie ricerche, se pure non hanno introdotto alcuna novità quanto all'uso pratico quotidiano di questi apparecchi, sono stati tali che mi consentono di affermare con una certa sicurezza come io abbia mostrato che gli integratori e simili sono apparecchi circa il cui studio si può ripetere quello che Cicerone diceva, salvo errore, a proposito dello studio delle lingue, cioè che «... *plus habet in secessu quam in fronte promittit* ».